JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

H. POINCARÉ

Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 8 (1882), p. 251-296.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1882_3_8__251_0>

Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle;

Par M. H. POINCARÉ (1),

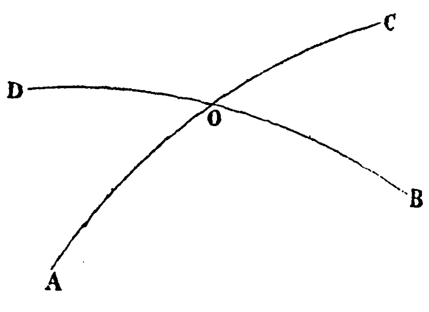
Ingénieur des Mines.

CHAPITRE V.

THÉORIE DES CONSÉQUENTS.

Convention fondamentale. — Considérons une *demi-caractéristique* quelconque; nous la prolongerons indéfiniment, si on peut le faire sans rencontrer un point singulier; si, au contraire, en suivant la demi-caractéristique, nous arrivons à un nœud, nous l'arrêterons à un nœud; si nous arrivons à un col, trois chemins s'ouvriront devant

Fig. 6.



nous quand nous voudrons continuer à suivre la caractéristique, le

(1) *Journal de Mathématiques*, 3e série, t. VII, p. 375.

premier dans le prolongement du chemin suivi jusqu'alors, les deux autres à droite et à gauche; nous conviendrons de suivre l'un des chemins de droite ou de gauche, sans *jamais* prendre celui qui est directement devant nous. Par exemple, nous considérerons OB ou OD (*fig.* 6) et non pas OC, comme le prolongement de AO. De cette façon, on peut dire que dans le voisinage d'un col il y a quatre caractéristiques collées l'une contre l'autre, et ayant deux à deux une branche commune : ce sont les caractéristiques AOB, BOC, COD, DOA.

Définition des conséquents. — Soit

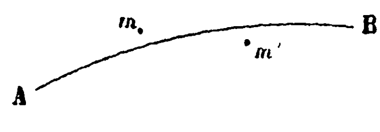
$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

un arc algébrique sans contact; φ et ψ sont des fonctions algébriques de t, et n'ont qu'une seule valeur pour chaque valeur de t. Les extrémités de l'arc correspondront aux valeurs de t,

$$t = \alpha, \quad t = \beta.$$

Un pareil arc, sans contact, aura deux côtés que nous appellerons sa droite et sa gauche; un point *infiniment voisin de l'arc* AB pourra, en effet, être à droite ou à gauche de cet arc. Par exemple, le point m sera à gauche de l'arc AB (*fig.* 7), le point m' à droite de l'arc AB,

Fig. 7.



parce qu'on ne peut passer de l'un à l'autre sans traverser l'arc AB, ou sans s'éloigner de cet arc à une distance finie, ou sans passer dans un cercle de rayon infiniment petit tracé avec A ou avec B comme centre.

Ceci posé, considérons un point quelconque M_0 de l'arc AB (*fig.* 8); de ce point partent deux *demi-caractéristiques,* l'une vers la gauche, l'autre vers la droite de l'arc AB; considérons celle de gauche.

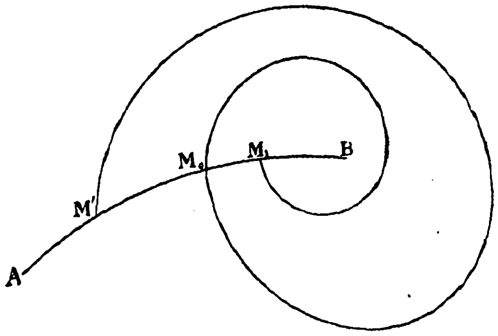
Il pourra se présenter plusieurs cas :

1° Cette demi-caractéristique peut se prolonger indéfiniment, sans qu'on rencontre de nouveau l'arc AB.

2° Cette demi-caractéristique finit en tournant autour d'un foyer, avant d'avoir rencontré de nouveau l'arc AB.

3° Elle aboutit à un nœud où nous devons l'arrêter, d'après la convention fondamentale, et cela avant d'avoir rencontré de nouveau l'arc AB.

Fig. 8.



Dans ces trois premiers cas, nous dirons que *le point* M_0 *n'a pas de conséquent.*

4° La demi-caractéristique vient rencontrer l'arc AB en M_1 avant d'avoir passé par un point singulier. Nous dirons alors que *le point* M_1 *est le conséquent du point* M_0.

5° La demi-caractéristique aboutit à un col avant d'être arrivée à rencontrer de nouveau l'arc AB. Dans ce cas, d'après la convention fondamentale, il faut tourner soit à droite, soit à gauche, et chacun de ces deux chemins peut nous conduire ou ne pas nous conduire à rencontrer de nouveau l'arc AB. Le point M_0 peut alors avoir 0, 1 ou 2 conséquents.

Il peut enfin arriver que la demi-caractéristique rencontre deux cols ou plus encore, et dans ce cas le point M_0 pourrait avoir plus de deux conséquents.

Si, en partant du point M_0, au lieu de considérer la demi-caractéristique de gauche, on avait envisagé celle de droite, on aurait pu arriver à un point M' situé sur l'arc AB.

Ce point M' *s'appellera l'antécédent du point* M_0.

Dans ces conditions, le point M_0 sera lui-même l'antécédent de son conséquent M_1.

Si t_0 et t_1 sont des valeurs de t qui correspondent à M_0 et à M_1, *la loi de conséquence* sera la relation qui lie t_0 à t_1.

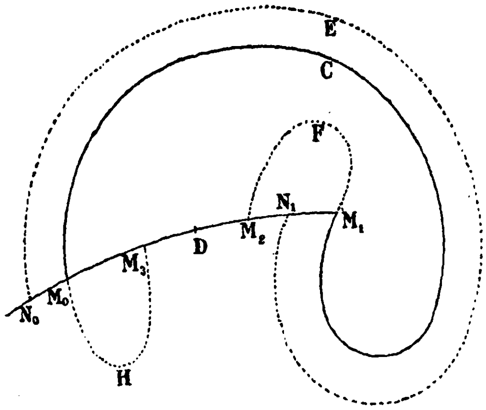
Théorème XI. — *Si $t_0 = t_1$, la caractéristique est un cycle.*
Si $t_0 \lessgtr t_1$, la caractéristique est une spirale.

En effet, la première partie de l'énoncé est une véritable tautologie. La seconde se démontre aisément de la manière suivante :

Remarquons d'abord que l'arc M_0DM_1 (*fig.* 9) *surtend* l'arc M_0CM_1 de la caractéristique, car il est *sans contact.*

De plus, cet arc M_0DM_1 ne peut rencontrer la caractéristique en

Fig. 9.



aucun autre point que M_0 et M_1. Car des arcs tels que M_1FM_2, M_0HM_3 seraient *sous-tendus* par les arcs M_1M_2, M_0M_3, ce qui est impossible, puisque ces arcs sont supposés *sans contact.*

Ceci posé, par le point N_0 infiniment voisin de M_0 et à gauche de ce dernier, on pourra mener un arc de caractéristique N_0EN_1 qui viendra rencontrer l'arc M_0M_1 en un point N_1 infiniment voisin de M_1 et à gauche de ce dernier, car il ne pourrait passer à droite sans couper la caractéristique M_0CM_1, ce qui est impossible.

Le cycle $N_1M_0N_0EN_1$ ne rencontre donc la caractéristique M_0CM_1 qu'en un seul point qui est M_0. Donc, cette caractéristique est une spirale. C. Q. F. D.

THÉORÈME XII. — *Toute caractéristique qui n'aboutit pas à un nœud est un cycle ou une spirale.*

En effet, si cette caractéristique ne rencontre aucun cycle algébrique en une infinité de points, elle est un cycle, en vertu du théorème I.

Si, au contraire, elle rencontre un cycle algébrique en une infinité de points, comme ce cycle se compose d'un nombre fini d'arcs sans contact, elle rencontrera l'un de ces arcs, et au contact en plus d'un point, c'est-à-dire que l'un des points d'intersection aura un conséquent.

S'il se confond avec son conséquent, la caractéristique est un cycle; s'il ne se confond pas avec son conséquent, la caractéristique est une spirale, en vertu du théorème XI.

Le théorème est donc démontré.

THÉORÈME XIII. — *Si* M_0 *ne correspond pas à une caractéristique passant par un col, et s'il a un conséquent* M_1; *si* $t_1 = \varphi_1(t_0)$ *est la loi de conséquence, la fonction* φ_1 *est holomorphe pour les valeurs de* t_0 *voisines de celle qui correspond à* M_0.

En effet, nous avons supposé au début que si

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

sont les équations de l'arc sans contact, φ et ψ sont des fonctions holomorphes de t dans le voisinage de la valeur de t qui correspond à M_0, et aussi de celle qui correspond à M_1.

Supposons que l'on cherche une intégrale de l'équation aux différences partielles

$$X\frac{dz}{dx} + Y\frac{dz}{dy} = 0,$$

qui soit assujettie à se réduire identiquement à t_0, quand on y fait

$$x = \varphi(t_0), \quad y = \psi(t_0).$$

Cette intégrale représente une surface qui passe par la courbe gauche,

$$x = \varphi(z), \quad y = \psi(z).$$

Dans le voisinage du point M_0, cette intégrale est holomorphe en x et en y; car l'arc

$$x = \varphi(t_0), \quad y = \psi(t_0)$$

ne touche pas une caractéristique.

Elle sera de même holomorphe en x et en y tout le long de la caractéristique qui passe par le point M_0, à moins que cette caractéristique ne passe par un point singulier. Or, nous avons supposé que cette caractéristique allait passer par le point M_1 sans avoir rencontré aucun point singulier. Dans le voisinage du point M_1, z est donc fonction holomorphe de x et de y; et, si l'on y fait

$$x = \varphi(t_1), \quad y = \psi(t_1),$$

z devient fonction holomorphe de t_1 dans le voisinage de la valeur de t_1, qui correspond à M_1.

Or, z n'est autre chose que t_0. Donc, t_0 est fonction holomorphe de t_1. On démontrerait identiquement, de la même manière, que t_1 est fonction holomorphe de t_0 dans le voisinage de t_0 qui correspond à M_0.

Corollaire I. — La fonction $t_1 = \varphi_1(t_0)$, qui exprime la loi de conséquence, ne peut offrir de discontinuité que pour les valeurs de t_0 qui correspondent à des caractéristiques passant par des cols.

Corollaire II. — Si l'on divise l'arc sans contact AB en arcs partiels, tels que tous les points de chacun de ces arcs aient un conséquent, ou qu'aucun n'en ait, les extrémités de ces arcs partiels seront des points ayant pour conséquent une extrémité de l'arc sans contact AB, ou correspondant à des caractéristiques passant par des cols.

Corollaire III. — Si les extrémités de l'arc sans contact correspondent aux valeurs

$$t = \alpha, \quad t = \beta;$$

Si, pour aucune valeur de t telle que

$$\alpha < t < \beta,$$

la caractéristique correspondante ne passe pas par un col;

Si, pour toutes les valeurs de t, telles que (α_1 et β_1 étant des constantes données), on ait

$$\alpha < \alpha_1 < t < \beta_1 < \beta,$$

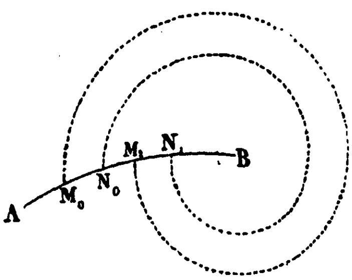
la caractéristique correspondante est un cycle.

Les caractéristiques qui correspondent à une valeur *quelconque* de t comprise entre α et β sont *toutes* des cycles.

THÉORÈME XIV. — *La valeur de* $\frac{dt_1}{dt_0}$ *est toujours positive.*

En effet, soit AB l'arc sans contact (*fig.* 11), soit M_0M_1 une caractéristique, soit N_0 un point infiniment voisin de M_0 et situé à droite de

Fig. 10.



ce point. Soit N_0N_1 la caractéristique qui passe par ce point. Le point N_1 est infiniment voisin de M_1; je dis qu'il est à droite de ce point. Car, pour qu'il fût à gauche, il faudrait que la caractéristique N_0N_1 sortît du cycle $M_0HM_1N_0M_0$ quand on la prolonge au delà de N_1, c'est-à-dire que l'arc de caractéristique N_0N_1 fût sous-tendu par l'arc N_0N_1, ce qui est impossible, puisque cet arc est sans contact.

Étude de la courbe de conséquence. — Si l'on considère les quantités t_0 et t_1 comme les coordonnées d'un point, la loi de conséquence

$$t_1 = \varphi_1(t_0)$$

représente une courbe. Cette courbe est comprise tout entière dans le carré

$$t_0 = \alpha, \quad t_1 = \alpha,$$
$$t_0 = \beta, \quad t_1 = \beta.$$

Premier cas. — A aucune valeur de t comprise entre α et β ne correspond de caractéristique allant passer par un col.

Dans ce cas, la courbe de conséquence est continue; elle ne rencontre qu'en un point les parallèles aux axes; en suivant la courbe dans un certain sens convenable, on va constamment en s'éloignant des deux axes.

C'est dire que si KLCD est le carré (*fig.* 11),

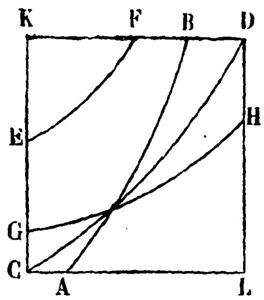
$$t_0 = \alpha, \quad t_1 = \alpha,$$
$$t_0 = \beta, \quad t_1 = \beta,$$

la courbe présente des formes telles que

AB, CD, EF, GH.

Elle représentera la forme CD quand les valeurs α et β de t_0 correspondront à des cycles, pendant qu'aucune valeur de t_0 comprise entre α et β ne correspondra à un cycle.

Fig. 11.



Deuxième cas. — Supposons qu'à certaines valeurs de γ_0, γ'_0, ... de t_0 comprise entre α et β correspondent des caractéristiques allant passer par un col;

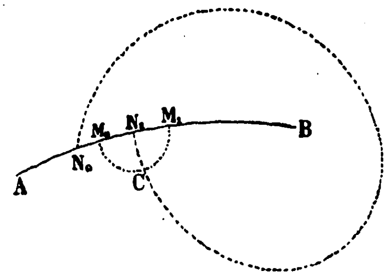
Que de plus aux valeurs α et β correspondent des cycles; qu'à aucune valeur intermédiaire ne corresponde un cycle :

De tous les cols partent quatre branches de caractéristiques; certaines de ces branches viennent rencontrer l'arc sans contact donné; d'autres ne le font pas.

Supposons d'abord que toutes celles de ces branches qui viennent rencontrer l'arc sans contact donné partent d'un seul et même col :

1° Il est impossible que les quatre branches issues d'un même col aillent rencontrer l'arc sans contact. Soit, en effet, AB (*fig.* 12) l'arc

Fig. 12.



sans contact donné. Soit C le col donné; soient CM_0, CM_1, CN_0, CN_1 les quatre branches de caractéristiques qui partent de ce col, de telle façon que M_1CM_0, N_1CN_0 ne forment pas de point anguleux.

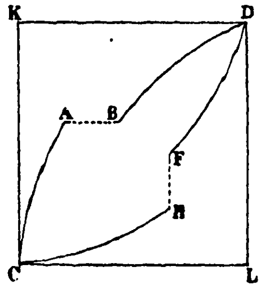
D'après le théorème X, remarque I, la portion M_0M_1 de l'arc AB sous-tend la caractéristique M_0CM_1.

Les deux arcs AM_0, M_1B sont donc d'un même côté du cycle M_0M_1C; appelons ce côté du cycle l'*extérieur du cycle.* Les deux branches de courbe CN_0, CN_1 sont l'une à l'extérieur, l'autre à l'intérieur du cycle M_0M_1C. Soit CN_1 celle qui est à l'intérieur; elle ne pourrait rencontrer l'arc AB qu'entre M_0 et M_1, et du même côté que les branches de courbe CM_0, CM_1, de telle sorte que l'arc algébrique M_1N_1 sous-tendrait l'arc de caractéristique M_1CN_1, ce qui est impossible d'après le théorème X.

Remarque I. — L'hypothèse que nous avons faite en commençant est donc absurde. C. Q. F. D.

2° Il peut se faire que trois des branches issues d'un même col aillent rencontrer l'arc sans contact. Dans ce cas, ou bien il y a un point qui a deux conséquents et les points situés entre ces deux conséquents n'ont pas d'antécédent; ou bien il y a un point qui a deux

Fig. 13.



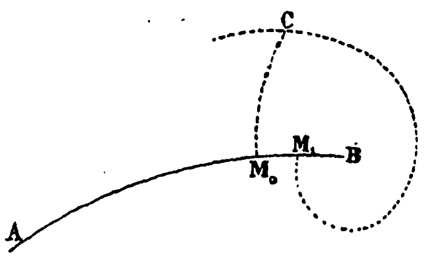
antécédents, et les points situés entre ces deux antécédents n'ont pas de conséquent.

De telle façon que la courbe de conséquence affecte soit la forme CHFD, soit la forme CABD (*fig.* 13).

3° Il ne peut se faire que deux ou une seulement des branches issues d'un même col aillent rencontrer l'arc sans contact.

En effet, supposons d'abord qu'il y ait deux branches de caractéristiques CM_0 et CM_1 qui rencontrent AB, et que M_0CM_1 (*fig.* 14) présente un point anguleux en C. Un point infiniment voisin de M_0 aura

Fig. 14.

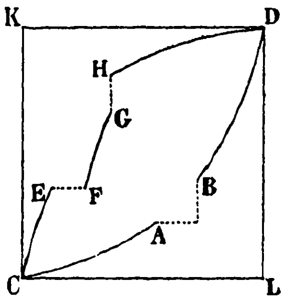


un conséquent s'il est à droite de M_0, et n'en aura pas s'il est à gauche. Donc, d'après le corollaire II du théorème XIII, les points de l'arc MOA n'auront donc pas de conséquent. Un point infiniment voisin de A n'aurait donc pas de conséquent, ce qui est absurde, puisque A est son propre conséquent. De même, si l'on supposait que M_1CM_0 ne présente pas de point anguleux, ou que CM_1 ne rencontre pas l'arc AB, on arriverait à ce résultat absurde qu'un point infiniment voisin de A n'a pas de conséquent. Les hypothèses faites au début sont donc également absurdes. C. Q. F. D.

Nous n'examinerons pas en détail les cas où les branches de caractéristiques qui viennent rencontrer l'arc sans contact sont issues de plusieurs cols différents. La discussion se ferait d'après les mêmes principes, elle serait seulement plus longue. Citons seulement quelques exemples de combinaisons possibles.

1° *Courbe* CABD (*fig.* 15). — L'arc sans contact est rencontré par deux branches de caractéristiques issues d'un premier col λ et par

Fig. 15.



deux branches issues d'un second col μ. Ces deux systèmes de deux branches de caractéristiques présentent chacun un point anguleux, l'un en λ, l'autre en μ.

Si l'on fait varier t_0 depuis α jusqu'à la valeur qui correspond au point A et à la caractéristique qui passe en λ, on a un conséquent; ensuite t_0 variant depuis la valeur qui correspond au point A jusqu'à celle qui correspond au point B et à la caractéristique qui passe en μ, on n'a plus de conséquent; et l'on en a un de nouveau, quand t_0 varie depuis la valeur qui correspond à B jusqu'à β.

CHAPITRE VI.

THÉORIE DES CYCLES LIMITES.

D'après ce que nous avons vu plus haut, les caractéristiques peuvent se diviser en quatre catégories :

1° Les cycles;

2° Les spirales que l'on peut suivre indéfiniment dans les deux sens sans aboutir à un nœud ou sans tourner autour d'un foyer, et sans revenir au point de départ;

3° Les caractéristiques que l'on peut suivre indéfiniment dans un sens sans rencontrer un nœud ou se rapprocher d'un foyer, mais qui, dans l'autre sens, aboutissent à un nœud ou se rapprochent infiniment d'un foyer;

4° Celles qui aboutissent de part et d'autre à un nœud ou à un foyer.

D'après les mêmes principes, les *demi-caractéristiques* se divisent en quatre catégories :

1° Les cycles;

2° Les demi-spirales que l'on suit sur un arc infini sans arriver à un nœud ou à un foyer et sans revenir au point de départ;

3° Les demi-caractéristiques qui aboutissent à un nœud;

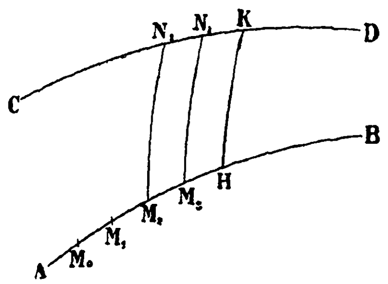
4° Celles qui tournent indéfiniment autour d'un foyer.

D'après le théorème I, les demi-caractéristiques de la seconde catégorie rencontrent certains cycles algébriques, et par conséquent certains arcs algébriques sans contact en une infinité de points.

Soit AB un de ces arcs algébriques sans contact.

Soit M_0 (*fig.* 16) le point d'où est issue la demi-caractéristique con-

Fig. 16.



sidérée. Soit M_1 le conséquent de M_0, et supposons que M_1 soit à droite de M_0.

Soit M_2 le conséquent de M_1, M_3 celui de M_2, etc.; M_2 sera à droite de M_1, M_3 sera à droite de M_2, etc.

En général, M_{n+1} sera à droite de M_n, et comme, quelque grand que soit n, M_n est toujours sur l'arc AB, M_n tendra vers une limite quand n augmentera indéfiniment. Soit H cette limite.

Le conséquent de M_n, quand n est infiniment grand, est infiniment rapproché de M_n. Donc H est son propre conséquent; donc la caractéristique qui passe par H est un cycle; nous l'appellerons *cycle limite* de la demi-caractéristique donnée. On peut suivre sur la caractéristique qui passe par M_0 un arc assez grand pour se rapprocher autant que l'on veut du point H.

Soit HK un arc de la caractéristique qui passe par le point H. Soit CD un arc algébrique passant par K.

On pourra prendre n assez grand pour que l'arc de caractéristique issu de M_n aille rencontrer CD.

Supposons, par exemple, que l'arc issu de M_2 aille rencontrer CD en N_2. L'arc issu de M_3 ira rencontrer CD en N_3, ... l'arc issu de M_n en un point N_n.

N_3 sera à droite de $N_2, \ldots, N_{n+1}$ sera à droite de N_n. De sorte que la demi-caractéristique donnée rencontrera CD en une infinité de points $N_2, N_3, \ldots, N_n$, et que N_n tendra vers K quand n augmentera indéfiniment.

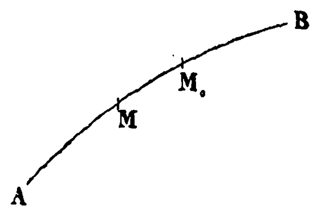
En résumé, toute demi-caractéristique de la seconde catégorie a un cycle limite.

Tout arc algébrique, si petit qu'il soit, qui coupe ce cycle, coupe la demi-caractéristique en une infinité de points.

On peut trouver un point de la demi-caractéristique qui soit aussi rapproché qu'on voudra d'un point quelconque de son cycle limite.

Soit AB (*fig.* 17) un arc algébrique sans contact. Supposons qu'à au-

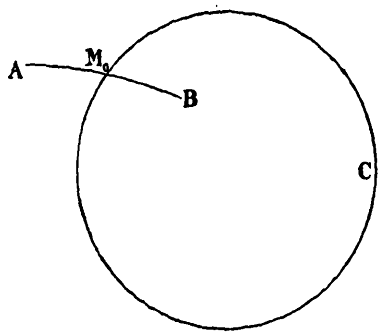
Fig. 17.



cun point M situé entre A et B ne corresponde une caractéristique allant passer par un col; qu'au point M_0 corresponde un cycle limite, et qu'à aucun point M différent de M_0 situé entre A et B ne corresponde un cycle limite. Toute caractéristique qui rencontre AB aura pour cycle limite le cycle qui passe par M_0.

Si l'on considère un cycle limite C (*fig.* 18) qui ne passe pas par un col et qui passe par un point M_0, on pourra mener par M_0 un arc algébrique AB assez petit pour qu'il soit sans contact; pour qu'entre A et M_0

Fig. 18.



ou entre M_0 et B il n'y ait aucun point auquel corresponde une caractéristique passant par un col ou un cycle limite. Toutes les caractéristiques qui rencontrent AB ont alors C pour cycle limite, de sorte que C est le cycle limite de deux séries de caractéristiques situées l'une à l'intérieur du cycle, l'autre à l'extérieur.

Voyons ce qui se passe quand C va passer par un col.

Soient H le col, HA, HB, HC, HD les quatre branches de caractéristiques issues de ce col. Supposons que deux de ces branches, HA et HB, par exemple, aillent aboutir à un même point M, de façon à former un cycle HAMBH; ce cycle sera toujours cycle limite de courbes telles que $\alpha\alpha$; l'inspection de la figure le démontre (*fig.* 19).

Considérons, au contraire, la courbe $\beta\beta$; il est aisé de voir que, si les branches de courbe HC, HD ne vont pas aboutir en un même point N, le cycle HAMBH n'est pas cycle limite de $\beta\beta$.

Si, au contraire, HC et HD vont se réunir en N, $\beta\beta$ a pour cycle limite le polycycle

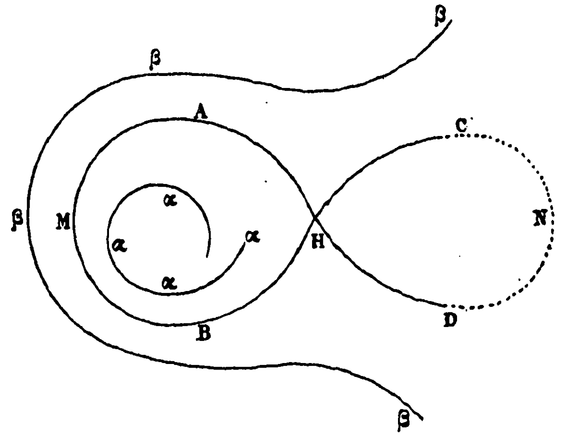
HAMBHDNCH.

Théorème XV. — *A l'intérieur et à l'extérieur d'un cycle limite quelconque, il y a toujours au moins un foyer ou un nœud.*

Pour démontrer ce théorème, nous allons appeler *tangences d'un cycle* les points où il touche un des grands cercles $x =$ const.

Les tangences seront directes si, dans le voisinage du point de

Fig. 19.



contact, le grand cercle tangent reste à l'extérieur du cycle. Elles seront inverses dans le cas contraire.

Nous démontrerons ensuite les deux lemmes suivants :

Lemme I. — *Si les points d'intersection de l'équateur avec le grand cercle $x = 0$, points que nous appellerons m, m', sont tous deux à l'extérieur d'un cycle, l'excès du nombre des tangences directes de ce cycle sur le nombre de ses tangences inverses est de* 2.

Si les points m, m' sont tous deux à l'intérieur du cycle, cet excès est de -2.

Si les points m, m' sont l'un à l'extérieur, l'autre à l'intérieur, cet excès est de 0.

En effet, on peut passer d'un cycle quelconque A à un autre cycle également quelconque B par voie de déformation continue, c'est-à-dire en passant du cycle A à un cycle qui en diffère infiniment peu, A', et ensuite, par une série de cycles C infiniment peu différents les uns des autres, on arrivera à un cycle B', infiniment peu différent de B.

Dans ces déformations successives, une tangence directe ne se transformera jamais en une tangence inverse, ni une tangence inverse en une tangence directe, car cela ne pourrait avoir lieu que si l'un des grands cercles $x =$ const. devenait osculateur à l'un des cycles; dans ce cas, ce serait que deux tangences, l'une directe et l'autre inverse, seraient venues à se confondre, et, dans ce cas, elles disparaîtraient en général pour un des cycles infiniment voisins de C.

L'excès qu'il s'agit d'évaluer dans ce lemme ne peut se modifier dans ces déformations continues du cycle que si deux des tangences viennent à se confondre, puis à disparaître. Or cela peut arriver dans deux cas :

1° Quand l'un des cycles C vient à passer par l'un des points m, m'; mais nous supposerons : 1° que les points m, m' sont tous deux à l'intérieur de A et tous deux à l'extérieur de B; 2° ou que les points m, m' sont tous deux à l'extérieur de A et à l'extérieur de B; 3° ou que m soit à l'extérieur de A et de B pendant que m' est à l'intérieur de ces deux cycles, et, par conséquent, on aura pu toujours choisir la série des cycles C qui permettent de passer du cycle A au cycle B, de telle sorte qu'aucun des cycles C ne passe ni par m, ni par m'.

2° Cela peut arriver encore si l'un des cycles C devient osculateur à l'un des cercles $x =$ const. Mais, dans ce cas, c'est une tangence directe et une tangence inverse qui se confondent et disparaissent. L'excès à évaluer n'est donc pas modifié.

Donc cet excès est le même pour A et pour B.

Mais supposons que A soit un cycle convexe quelconque, et B le cycle donné.

L'excès en question sera de 2 pour A si m et m' sont à l'extérieur de A; il sera de -2 s'ils sont tous à l'intérieur, et 0 s'ils sont l'un à l'intérieur et l'autre à l'extérieur.

L'excès en question sera donc, pour B, de 2; de -2 et de 0 dans les mêmes conditions.

Le lemme est donc démontré.

Lemme II. — *Si l'on parcourt un cycle de manière à avoir toujours l'intérieur à sa gauche et que l'on observe les variations du coefficient angulaire* $\frac{dy}{dx}$, *on observera qu'à chaque tangence directe,* $\lambda\frac{dy}{dx}$ *sautera de* $+\infty$ *à* $-\infty$ *si l'on est dans le premier hémisphère, et de* $-\infty$ *à* $+\infty$

si l'on est dans le second hémisphère, et que c'est le contraire pour les tangences inverses.

Démonstration du théorème. — Supposons d'abord que le cycle limite considéré soit tel que les deux points m et m' soient d'un même côté de ce cycle, côté que nous appellerons l'*extérieur du cycle*.

Soient

ν le nombre des nœuds et des foyers contenus à l'intérieur du cycle;
ν' le nombre des nœuds et des foyers situés à l'extérieur du cycle;
γ et γ' le nombre des cols situés à l'intérieur et à l'extérieur de ce cycle.

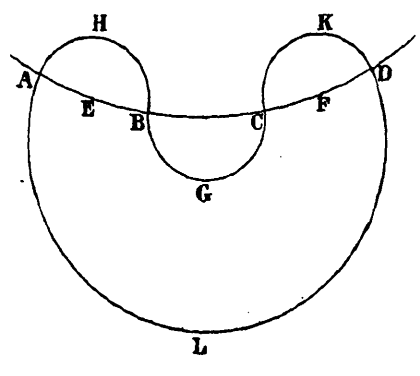
On a

$$\nu + \nu' - \gamma - \gamma' = 2.$$

Le cycle coupe l'équateur en un certain nombre de points, de telle façon qu'on peut le partager en un certain nombre de cycles secondaires situés les uns tout entiers dans le premier hémisphère, les autres tout entiers dans le second hémisphère, et formés à l'aide d'arcs du cycle primitif et d'arcs de l'équateur.

Supposons, pour fixer les idées, que le cycle donné soit le cycle

Fig. 20.



AHBGCKDLA, qui coupe l'équateur aux points A, B, C, D (*fig.* 20). Le cycle se décompose en trois cycles secondaires :

AEBHA, CFDKC, CGBEALDFC.

Or, d'après le théorème IV, on a

$$-(\nu-\gamma)=\text{ind. AEBHA}+\text{ind. CFDKC}+\text{ind. CGBEALDFC}.$$

Soient, maintenant, α, α', α'', α''' le nombre des tangences directes des arcs AHB, CKB, CKB, CGH, ALD; β, β', β'', β''' le nombre de leurs tangences inverses; soient λ et λ' le nombre de fois que $\frac{Y}{X}$ saute de $-\infty$ à $+\infty$ quand on parcourt les arcs AEB et CFD; μ et μ' le nombre de fois que $\frac{Y}{X}$ saute de $+\infty$ à $-\infty$ quand on parcourt les arcs AEB et CFD; on a, en vertu du lemme II et en remarquant que tout le long du cycle donné on a

$$\frac{dy}{dx}=\frac{Y}{X},$$

$$2\,\text{ind. AEBHA}=-\alpha+\lambda-\mu+\beta,$$

$$2\,\text{ind. CFDKC}=-\alpha'+\lambda'-\mu'+\beta',$$

$$2\,\text{ind. CGBEAL}=-\alpha''-\alpha'''+\beta''+\beta'''-\lambda-\lambda'+\mu+\mu'.$$

d'où

$$-(2\nu-2\gamma)=\beta+\beta'+\beta''+\beta'''-\alpha-\alpha'-\alpha''-\alpha''',$$

ou, d'après le lemme I,

$$-(2\nu-2\gamma)=-2,\quad \nu-\gamma=1.$$

On a donc aussi

$$\nu'-\gamma'=1,$$

d'où

$$\nu>0,\quad \nu'>0.\qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Dans les cas où les points m, m' sont de part et d'autre du cycle, la difficulté est facile à tourner. En effet, on trouvera toujours sur la sphère deux points diamétralement opposés qui soient d'un même côté du cycle, et il suffira d'un changement de variables pour retomber sur le cas précédent.

Si l'on ne trouve pas sur la sphère deux points diamétralement opposés qui soient d'un même côté du cycle, c'est que les points du cycle sont deux à deux diamétralement opposés, c'est-à-dire que le cycle est symétrique à lui-même par rapport au centre de la sphère, et alors le théorème est évident par lui-même.

THÉORÈME XVI. — *Un cycle algébrique qui passe par tous les nœuds et par tous les foyers rencontre tous les cycles limites.*

En effet, soit un cycle limite C quelconque; il contient certains nœuds et certains foyers à son intérieur, certains nœuds et certains foyers à l'extérieur.

Il y a donc des points du cycle algébrique donné qui sont à l'extérieur de C, et d'autres qui sont à l'intérieur, c'est-à-dire que le cycle algébrique donné rencontre C. C. Q. F. D.

Corollaire. — Tout cycle algébrique qui passe par tous les nœuds et par tous les foyers rencontre toutes les caractéristiques.

THÉORÈME XVII. — *Les cycles limites sont en nombre fini, pourvu qu'aucun d'eux ne passe par un col.*

En effet, faisons passer un cycle algébrique C par tous les nœuds et par tous les foyers. Soient

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

les équations de ce cycle C.

Ce cycle C, rencontrant tous les cycles limites, aurait une infinité de points d'intersection avec ces cycles limites, si ceux-ci étaient en nombre infini. Il y aurait donc un point de ce cycle C autour duquel ces points d'intersection seraient infiniment rapprochés, c'est-à-dire que si

$$t_1 = \varphi_1(t_0)$$

est la loi de conséquence d'un certain arc sans contact du cycle C, il y aura une certaine valeur τ de t_0, telle que, t_0 variant de $\tau - \varepsilon$ à $\tau + \varepsilon$, t_1 devienne un nombre infini de fois égal à t_0.

Mais, si τ ne correspond pas à une caractéristique passant par un col, $\varphi(t_0)$ est holomorphe pour $t_0 = \tau$, et on ne peut donc avoir une infinité de fois (t^0 variant de $\tau - \varepsilon$ à $\tau + \varepsilon$)

$$t_0 = \varphi(t_0).$$

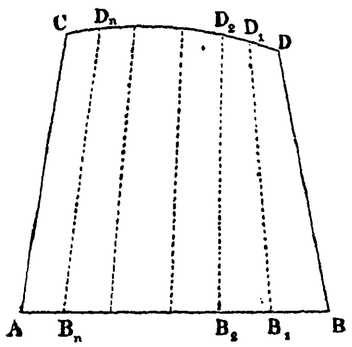
Cela ne peut arriver non plus si τ ne correspond pas à un cycle limite.

Donc on ne peut avoir une infinité de cycles limites que si l'un d'eux va passer par un col.

Théorie des anneaux limites. — Soit encore un cycle algébrique C passant par tous les nœuds et par tous les foyers. On peut y découper un certain nombre d'arcs sans contact contenant tous les points qui correspondent à des cycles limites et ne contenant aucun des points qui correspondent à des caractéristiques passant par des cols.

Soit $t_1 = \varphi(t_0)$ la loi de conséquence de l'un de ces arcs, et supposons que l'on fasse varier t_0 depuis α jusqu'à β; que les points $t_0 = \alpha$,

Fig. 21.



$t_0 = \beta$ aient deux conséquents $t_1 = \alpha'$, $t_1 = \beta'$. Soit A_1 le point de l'arc sans contact qui correspond à $t_0 = \tau$. Supposons que l'on considère le point de la sphère qui se trouve sur la caractéristique qui passe par A, et qui est séparé de A_1 par un arc s de caractéristique, et qu'on fasse correspondre à ce point un point du plan qui ait pour coordonnées s et τ (*fig.* 21).

A l'arc sans contact correspondront :

1° Le segment de la droite $s = 0$ compris entre les points

$$\tau = \alpha, \quad \tau = \beta, \quad \text{soit AB } (fig.\ 0);$$

2° Un certain arc de courbe CD, défini par l'équation

$$s = \lambda(\tau),$$

$\lambda(\tau)$ étant la longueur de la caractéristique passant par A_1 qu'il faut parcourir avant de rencontrer de nouveau l'arc sans contact.

Un point quelconque de l'arc sans contact sera représenté par un point B_i du segment AB et par un point D_i de l'arc CD. Tout arc de courbe allant de D_i à B_i représente un cycle; ce cycle sera sans contact si l'arc de courbe D_iB_i n'est tangent à aucune des droites $\tau =$ const.

Or il est clair qu'on peut joindre par des droites A et C, E et D, puis sillonner le quadrilatère mixtiligne ABCD par des arcs de courbe qui ne sont tangents à aucune des droites $\tau =$ const. et qui ne se coupent en aucun point.

Conséquence. — Autour d'un cycle limite quelconque se trouve une région annulaire qui est limitée par deux cycles sans contact que nous appellerons *cycles frontières*, et qui est sillonnée de cycles sans contact qui ne se coupent en aucun point.

Ces régions annulaires s'appelleront *anneaux limites* et seront en nombre fini.

Autour des nœuds et des foyers, on peut également tracer une série de cycles sans contact s'enveloppant mutuellement, de sorte que les nœuds et les foyers ont aussi leurs anneaux limites.

Nous avons implicitement supposé qu'aucun cycle limite ne passait par un col, car nous avons envisagé sur le cycle algébrique C des arcs sur lesquels se trouvaient tous les points auxquels correspondent des cycles limites, et ne se trouvait aucun des points auxquels correspondent des caractéristiques passant par des cols.

Supposons maintenant qu'un cycle limite aille passer par un col; nous savons que deux cas peuvent se présenter :

1° Une pareille caractéristique n'est cycle limite que des caractéristiques qui lui sont suffisamment voisines et qui sont situées à l'intérieur du cycle (voir *fig.* 15). Dans ce cas, on découpera sur le cycle C un arc sans contact, limité au point qui correspond au cycle limite qui passe par un col, et ne contenant aucun autre point correspondant à une caractéristique passant par un col et, raisonnant comme dans le cas général, on fera voir que le cycle qui passe par un col a également un anneau limite, mais dont il est lui-même le cycle frontière.

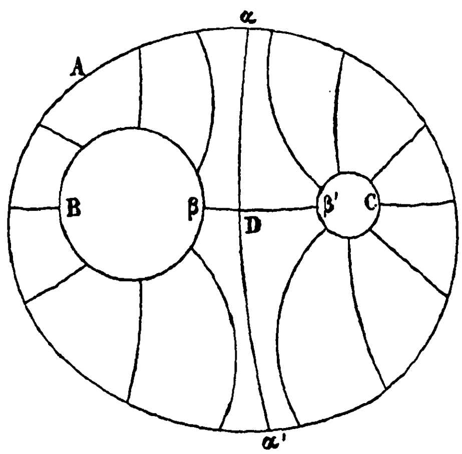
2° Les cycles HAMBH, HCNDH (*fig.* 15) sont cycles limites des caractéristiques situées à l'intérieur de ces cycles pendant que le polycycle HAMBHDNCH est cycle limite des caractéristiques extérieures.

Raisonnant comme dans le premier cas particulier, on verrait que chacun de ces trois cycles a un anneau limite, dont il est lui-même le cycle frontière; de sorte que ces trois anneaux limites forment par leur juxtaposition une seule région annulaire.

Régions interannulaires. — Les cycles frontières divisent la sphère en deux catégories de régions : 1° les anneaux limites que nous venons d'étudier; 2° les régions interannulaires.

Un mobile parcourant une caractéristique d'une vitesse uniforme et partant d'un point situé dans une région interannulaire ira, après un

Fig. 22.



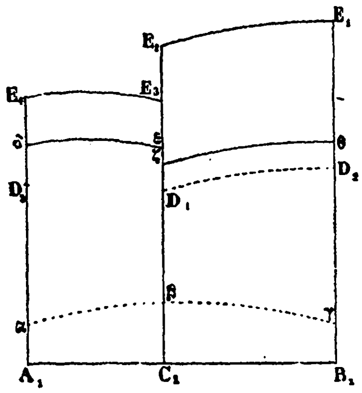
temps fini, traverser un cycle frontière pour passer dans un anneau limite.

Car les régions interannulaires ne contiennent ni nœud, ni foyer, ni aucun point des cycles limites.

Je dis que les régions interannulaires sont, comme les anneaux limites, sillonnées par des cycles sans contact. En effet, supposons, pour fixer les idées, qu'une région interannulaire soit limitée par trois cycles frontières A, B, C et divisée en deux parties, sillonnées, la première par des caractéristiques allant de A en B, la seconde par des caractéristiques allant de A en C. Les deux parties de la région devront être séparées par une caractéristique allant passer par un col D (*fig.* 22). Soient αD, $\alpha' D$, βD, $\beta' D$ les quatre branches de caractéristiques issues de D.

Soit τ un paramètre quelconque définissant un point λ_1 du cycle A. Soient (x, y) un point d'une caractéristique issue de λ_1, et s l'arc de caractéristique qui sépare (x, y) de λ_1. Représentons le point de la sphère (x, y) par le point du plan dont les coordonnées sont s et τ. La droite $A_1C_1B_1 (s = 0)$ (*fig.* 23) représentera le cycle A; A_1 et B_1 représente-

Fig. 23.



ront le point α; C_1 représentera le point α'; les arcs E_4E_3, E_2E_1 représenteront respectivement les cycles B et C; D_1, D_2, D_3 représenteront le point D; E_4 et E_3 représenteront β; E_2 et E_1 représenteront β'. D'ailleurs on aura

$$E_4D_3 = E_3D_1, \quad E_2D_1 = E_1D_2, \quad A_1D_3 = B_1D_2.$$

Les arcs de courbe $\alpha\beta\gamma$, $\delta\varepsilon$, $\zeta\theta$, où l'on a

$$\begin{aligned} A_1\alpha &< A_1D_3, & C_1\beta &< D_1C_1, & A_1\alpha &= B_1\gamma, \\ & & \varepsilon C_1 &> E_1C_1, & \varepsilon D_1 &= \delta\, D_3, \\ & & \zeta C' &> D_1C_1, & \theta D_2 &= \zeta\, D_1, \end{aligned}$$

représentent des cycles, et ces cycles seront sans contact si les arcs $\alpha\beta\gamma$, $\delta\varepsilon$, $\zeta\theta$ n'ont pas de tangente parallèle à l'axe des s. Or il est clair qu'on peut sillonner le polygone mixtiligne $A_1B_1E_1E_2E_3E_4$ d'arcs satisfaisant à cette condition. Donc on peut sillonner la région interannulaire de cycles sans contact, ce qui permet d'énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME XVIII. — *Il existe toujours un système topographique formé de cycles sans contact, de polycycles sans contact et de cycles limites. Ce système topographique sillonne toute la surface de la sphère. Les fonds et ses sommets sont les nœuds et les foyers de l'équation donnée. Les cols sont les cols de l'équation donnée.*

La connaissance de ce système topographique permet de discuter complètement les formes affectées par les courbes que définit l'équation différentielle donnée. On le comprendra mieux, d'ailleurs, par les exemples qui vont suivre.

CHAPITRE VII.

EXEMPLES DE DISCUSSIONS COMPLÈTES.

Premier exemple. — Soit (*fig.* 24) l'équation

$$\frac{dy}{xy-1} = \frac{dx}{1-x^2-y^2}.$$

On peut remarquer d'abord que les courbes $X = 0$, $Y = 0$, qui sont l'une $xy = 1$, l'autre $x^2+y^2 = 1$, ne se coupent en aucun point ni en dehors de l'équateur ni sur l'équateur.

Si de plus X_2 et Y_2 sont les termes du second degré de X et de Y, on a

$$X_2 = -(x^2+y^2), \quad Y_2 = xy$$
$$xY_2 - yX_2 = y(2x^2+y^2).$$

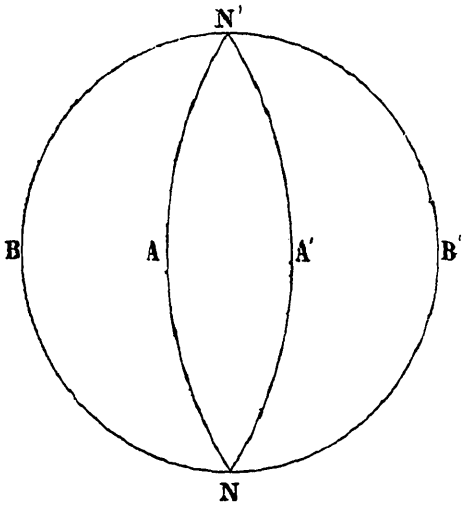
L'expression $xY_2 - yX_2$ ne s'annule que pour $y = 0$.

Donc l'équation ne présente aucun point singulier en dehors de l'équateur, et sur l'équateur même elle en a deux qui sont à l'intersection de l'équateur avec le grand cercle $y = 0$, et qui sont évidemment des nœuds.

L'équateur, passant par tous les points singuliers, rencontre tous les cycles limites; mais, comme c'est une caractéristique et qu'elle ne passe par aucun col, elle ne peut rencontrer aucune autre caractéristique en aucun autre point qu'aux deux nœuds N et N'; elle ne rencontre donc aucun cycle limite : donc il n'y a pas de cycle limite; donc toutes les caractéristiques partent de N pour aller aboutir en N'.

La *fig.* 24 représente la projection stéréographique du premier

Fig. 24.



hémisphère. NBN'B est l'équateur; NN' sont les nœuds; NAN', NA'N' sont des caractéristiques.

Deuxième exemple — Soit (*fig.* 21) l'équation.

$$\frac{dy}{5xy-5} = \frac{dx}{x^2+y^2-1}.$$

Ici encore les courbes $X = 0$, $Y = 0$ ne se coupent pas, mais l'expression $xY_2 - yX_2$ se réduit à

$$y(4x^2 - y^2),$$

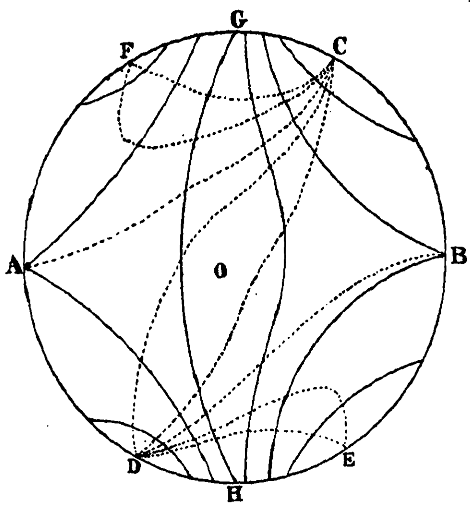
de sorte qu'elle s'annule pour

$$y = 0, \quad y = 2x, \quad y = -2x.$$

C'est dire :

1° Qu'en dehors de l'équateur il n'y a pas de point singulier;

Fig. 25.



2° Que sur l'équateur il y a six points singuliers, dont quatre nœuds et deux cols.

En posant

$$x = \frac{1}{z}, \quad y = \frac{t}{z},$$

l'équation devient

$$\frac{dz}{z(-1-t^2+z^2)} = \frac{dt}{t(4-t^2)-z^2(5-t)}.$$

Faisons successivement $t=0$, $t=2$, $t=-2$; le coefficient de z dans le dénominateur de dz sera toujours négatif.

Considérons la différentielle du dénominateur de dt par rapport à t; elle sera

Négative pour $t=-2$,

Positive pour $t=0$,

Négative pour $t=2$.

Donc les points $z = 0$, $t = \pm 2$ sont des nœuds; le point $z = t = 0$ est un col.

La figure représente encore la projection stéréographique du premier hémisphère; A et B sont les deux cols, CDEF les quatre nœuds.

Le système topographique des cycles sans contact a pour fonds et pour sommets C, D, E, F, pour cols A et B.

Considérons maintenant le grand cercle

$$x = 2.$$

En aucun point de ce grand cercle qui se projette en GH on n'a

$$x^2 + y^2 = 1,$$

ni par conséquent $dx = 0$. C'est donc un cycle sans contact. Donc, si C est un fond du système topographique des cycles sans contact, E est également un fond pendant que D et F sont des sommets.

Les lignes tracées en traits pleins sur la figure représentent alors le système topographique des cycles sans contact. D'ailleurs on ferait voir, comme dans le premier exemple, qu'il n'y a pas de cycle limite.

Les caractéristiques issues de C iront donc aboutir soit en F, soit en D, et la région occupée par les caractéristiques allant de C en F sera séparée de celle qui est occupée par les caractéristiques allant de C en D, par une caractéristique allant de C en A.

Il y a donc une caractéristique allant de C en A, s'il y en a allant de C en D. Dans ce cas, il y en a également une allant de D en B.

Nous nous trouvons donc en présence de deux hypothèses

	Première hypothèse.	*Deuxième hypothèse.*
Une infinité de caractéristiques allant.	de C en F de C en D de E en D	de C en F de E en F de E en D.
Une caractéristique allant.	de C en A de D en B	de E en A de F en B.

Pour décider entre ces deux hypothèses, remarquons que l'arc de grand cercle $y = 0$, qui va de A en B, est un arc sans contact. La caractéristique issue du point A ne peut donc le couper. Elle est donc tout entière dans l'un des deux quarts de sphère AOBCGF, AOBDHE.

Dans le voisinage du point A, l'équation différentielle s'écrit

$$z\frac{dt}{dz} = \frac{4t - t^3 - 5z^2 - tz^2}{-1 - t^2 + z^2} = -4t + 5z^2 - 3tz^2 + 5t^3 + \varphi_4,$$

φ_4 représentant une série commençant par les termes du quatrième degré en z et en t; d'où nous tirons

$$t = -\tfrac{5}{2}z^2 + z^3\theta\ldots,$$

θ étant une fonction holomorphe en z.

Donc, dans le voisinage du point A, la caractéristique qui passe par ce point passe par des points correspondant à $t < 0$, c'est-à-dire que la caractéristique est dans le quart de sphère AFGCBO. Elle est donc tout entière dans ce quart de sphère; elle ne peut donc aboutir au nœud E; elle aboutit donc au nœud C. C'est la première hypothèse qui doit être adoptée, et les caractéristiques présentent les formes représentées en trait plein sur la *fig.* 25.

Troisième exemple. — Soit (*fig.* 26) l'équation

$$\frac{dx}{x(x^2+y^2-1) - y(x^2+y^2+1)} = \frac{dy}{y(x^2+y^2-1) + x(x^2+y^2+1)}.$$

Il n'y a qu'un point singulier dans chaque hémisphère; c'est le point $x = y = 0$ qui est un foyer.

Il n'y a aucun point singulier sur l'équateur, qui est une caractéristique et qui est par conséquent un cycle limite.

Considérons le système topographique des cercles qui ont leur centre à l'origine, c'est-à-dire des cycles

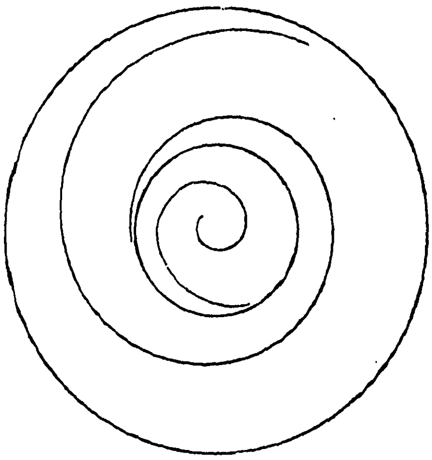
$$x^2 + y^2 = \text{const.}$$

La courbe des contacts de ce système topographique est

$$(x^2+y^2)(x^2+y^2-1),$$

c'est-à-dire que tous ces cercles sont des cycles sans contact, excepté le cercle de rayon 1 qui est un cycle limite. Il n'y a pas d'autre cycle

Fig. 26.



limite. Le système des caractéristiques présente donc l'aspect de la *fig.* 26.

Quatrième exemple. — Soit (*fig.* 27) l'équation

$$\frac{dx}{x(x^2+y^2-1)(x^2+y^2-9)-y(x^2+y^2-2x-8)} = \frac{dy}{y(x^2+y^2-1)(x^2+y^2-9)+x(x^2+y^2-2x-8)}.$$

On voit qu'il y a trois points singuliers :

1° Le point O

$$x=y=0;$$

2° Les points A et B d'intersection des cercles

$$x^2+y^2-9=0, \quad x^2+y^2-2x-8=0.$$

Le point O est un foyer; le point A est un nœud; le point B est un col. On verrait, comme dans l'exemple précédent, que l'équateur est un cycle limite; que les cercles qui ont l'origine pour centre sont des cycles sans contact, excepté les cercles

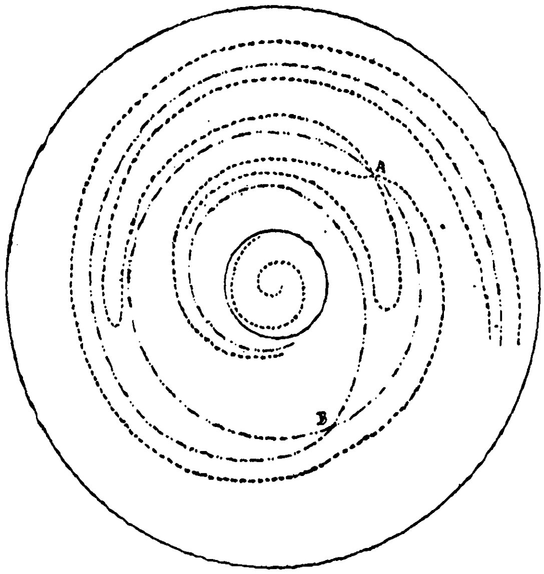
$$x^2+y^2-1=0,$$
$$x^2+y^2-9=0,$$

qui sont des caractéristiques.

Le premier, qui ne passe par aucun point singulier, est un cycle limite; le second passe par un nœud et par un col.

Il y a donc trois catégories de caractéristiques : les premières

Fig. 27.



tournent autour du foyer O (*fig.* 27) et ont pour cycle limite

$$x^2+y^2-1=0;$$

les secondes aboutissent au nœud A et ont pour cycle limite

$$x^2+y^2-1=0;$$

les troisièmes aboutissent au nœud A et ont pour cycle limite l'équateur.

Comme caractéristiques exceptionnelles, on a :

1° L'équateur;

2° Le cercle $x^2+y^2=1$;

3° Le cercle $x^2+y^2=9$;

4° Une caractéristique partant du col B et ayant pour cycle limite l'équateur;

5° Une caractéristique partant du col B et ayant pour cycle limite

$$x^2+y^2=1.$$

Un point mobile qui, si t représente le temps, se meut d'après la loi

$$\frac{dx}{dt}=x(x^2+y^2-1)(x^2+y^2-9)-y(x^2+y^2-2x-8),$$

$$\frac{dy}{dt}=y(x^2+y^2-1)(x^2+y^2-9)+x(x^2+y^2-2x-8),$$

ne pourra sortir du cercle

$$x^2+y^2=1$$

s'il se trouve à l'intérieur de ce cercle.

Cinquième exemple. — Soit (*fig.* 28) l'équation

$$\frac{dx}{\mathrm{AC}-\mathrm{B}}=\frac{dy}{\mathrm{BC}+\mathrm{A}},$$

où

$$\begin{aligned}\mathrm{A}&=x(2x^2+2y^2+1),\\ \mathrm{B}&=y(2x^2+2y^2-1),\\ \mathrm{C}&=(x^2+y^2)^2+x^2-y^2+0,1.\end{aligned}$$

Les points singuliers nous sont donnés par les équations

$$\mathrm{AC}-\mathrm{B}=0,$$

$$\mathrm{BC}+\mathrm{A}=0,$$

d'où

$$\mathrm{A}=\mathrm{B}=0.$$

Ils sont donc au nombre de trois, dans chaque hémisphère, à savoir:

1° Deux foyers

$$x=0,\quad y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}};$$

2° Un col

$$x = y = 0.$$

Si nous considérons les courbes

$$F = (x^2 + y^2)^2 + x^2 - y^2 = \text{const.},$$

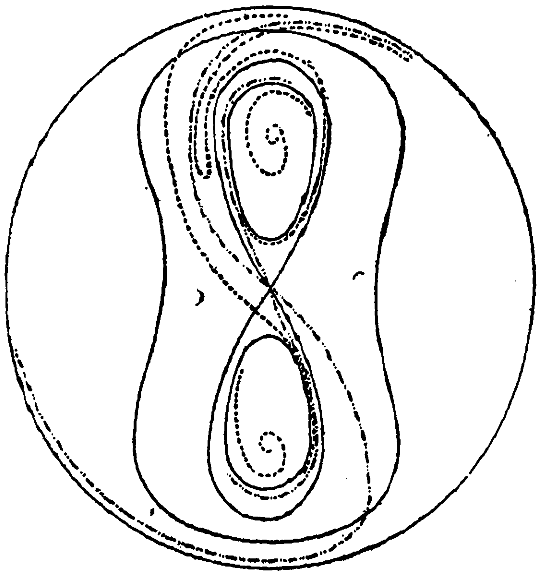
leurs contacts nous seront donnés par l'équation

$$\frac{dF}{dx}(AC - B) + \frac{dF}{dy}(BC + A) = 0.$$

Or

$$A = \frac{dF}{dx}, \quad B = \frac{dF}{dy};$$

Fig. 28.



l'équation précédente devient donc

$$(A^2 + B^2)C = 0,$$

où

$$C = 0.$$

Mais la courbe $C = 0$ est elle-même une des courbes

$$F = \text{const.}$$

Toutes les courbes $F = \text{const.}$ sont donc formées de cycles sans contact, excepté la courbe $C = 0$, qui est formée de cycles limites.

L'équateur est aussi un cycle limite.

Il reste à construire les courbes algébriques

$$(x^2 + y^2)^2 + x^2 - y^2 = K.$$

Pour $K < -\frac{1}{4}$, la courbe est entièrement imaginaire.

Pour $K = -\frac{1}{4}$, elle se réduit aux deux points singuliers

$$x = 0, \quad y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Pour $0 > K > -\frac{1}{4}$, elle se compose de deux cycles.

Il en est ainsi, en particulier, de la courbe $C = 0$, qui se compose de deux cycles limites.

Pour $K = 0$, elle se réduit à un polycycle ayant un point double à l'origine.

Pour $K > 0$, elle se compose d'un seul cycle.

Le système des caractéristiques présente donc la forme qui est indiquée par la *fig.* 28.

CHAPITRE VIII.

RECHERCHE DES CYCLES SANS CONTACT.

La facilité avec laquelle se discutent complètement les exemples précédents est due à deux causes. En premier lieu, les cycles limites étant algébriques, le système topographique des cycles sans contact et des cycles limites est lui-même algébrique; en second lieu, la forme même de l'équation différentielle permet de trouver immédiatement ce système topographique; mais il est évident que cela n'aura pas lieu en général.

Quand les cycles limites ne sont pas algébriques, une discussion complète est évidemment impossible; car on ne pourra jamais trouver en termes finis l'équation des cycles limites. Mais on peut arriver à diviser la sphère : 1° en régions acycliques, où l'on est certain de n'avoir aucun point d'aucun cycle limite; 2° en régions monocycliques, où se trouvent tous les points d'un des cycles limites et où l'on n'a aucun des points d'aucun autre cycle limite.

Une pareille séparation des cycles limites sera toujours possible quand les cycles limites seront en nombre fini.

Dans ce qui va suivre, nous supposerons : 1° qu'il n'y a que deux points singuliers situés en dehors de l'équateur et que, par conséquent, ces deux points sont des foyers ou des nœuds; 2° que ces deux points ont pour coordonnées

$$x = y = 0.$$

Dans les cas où il y aurait plus de deux points singuliers, la discussion serait plus longue et plus compliquée.

Dans le cas auquel nous nous restreignons, il n'y a qu'un nombre fini de cycles limites; de sorte que la séparation de ces cycles est toujours possible.

Nous ne considérerons que ce qui se passe dans le premier hémisphère. En effet, tout se passe de même de l'autre côté de l'équateur, qui est en général un cycle limite.

Nous diviserons cet hémisphère :

1° En régions acycliques, qui ne peuvent être traversées par aucun cycle limite.

2° En régions monocycliques, qui contiennent un cycle limite tout entier, et ne sont traversées par aucun autre.

3° En régions cycliques, qui contiennent *certainement* un cycle limite tout entier, et sont *peut-être* traversées par un ou plusieurs autres cycles limites.

4° En régions douteuses, qui contiennent *peut-être* un cycle limite tout entier, *peut-être* plusieurs, et qui *peut-être* ne sont traversées par aucun cycle limite.

On poussera la discussion en cherchant à étendre les régions acycliques de façon à resserrer les cycles limites dans des régions monocycliques de moins en moins étendues, et à faire disparaître les régions cycliques et les régions douteuses. On pourra, si l'on veut, terminer la discussion, quand il n'y aura plus que des régions acycliques et monocycliques; on pourra aussi la pousser plus loin, de façon à étendre encore les régions acycliques et à y tracer un plus grand nombre de cycles sans contact.

Méthode générale. — Considérons une fonction algébrique

$$F_1(x, y):$$

1° Qui reste toujours finie et déterminée, ainsi que ses dérivées, quand x et y prennent des valeurs réelles et finies, et devient infinie quand x ou y sont infinis;

2° Qui soit nulle pour $x=y=0$, et positive toutes les fois que x ou y sont différents de 0;

3° Dont les dérivées du premier ordre ne s'annulent à la fois que si $x=y=0$;

4° Telle que, pour $x=y=0$, on ait l'inégalité

$$\left(\frac{d^2F_1}{dx\,dy}\right)^2\left(\frac{dX}{dy}-\frac{dY}{dx}\right)^2-4\frac{dX}{dx}\frac{dY}{dy}\frac{d^2F_1}{dx^2}\frac{d^2F_1}{dy^2}<0;$$

5° Telle que la courbe

$$X\frac{dF_1}{dx}+Y\frac{dF_1}{dx}=0$$

ne coupe pas l'équateur.

L'équation

$$F_1=K_1,$$

où K_1 est une constante quelconque, représente un système topographique ayant pour sommet l'origine et dont l'équateur est un cycle.

La courbe des contacts dont l'équation est

$$X\frac{dF_1}{dx}+Y\frac{dF_1}{dy}=0$$

ne coupe pas l'équateur, en vertu de la cinquième condition, et a à l'origine un point isolé, en vertu de la quatrième condition.

Les cycles $F_1=K$ sont donc sans contact si K_1 est très petit et s'il est très grand. Faisons varier K_1 depuis o jusqu'à $+\infty$, et supposons, par exemple, que pour

$$
\begin{array}{lll}
0 < K_1 < \alpha, & \text{le cycle } F_1 = K_1 & \text{soit sans contact;} \\
\alpha < K_1 < \beta, & \text{»} & \text{ne soit pas sans contact;} \\
\beta < K_1 < \gamma, & \text{»} & \text{soit sans contact;} \\
\gamma < K_1 < \delta, & \text{»} & \text{ne soit pas sans contact;} \\
\delta < K_1 < +\infty, & \text{»} & \text{soit sans contact.}
\end{array}
$$

Alors les régions de la sphère, définies par les inégalités

$$0 < F_1 < \alpha, \quad \beta < F_1 < \gamma, \quad \delta < F_1 < +\infty,$$

seront acycliques; les régions définies par les inégalités

$$\alpha < F_1 < \beta, \quad \gamma < F_1 < \delta$$

seront douteuses.

PREMIER PROBLÈME. — *Reconnaître si une région douteuse est cyclique.*

Pour cela, nous allons donner un moyen de reconnaître si dans une région douteuse passe un nombre pair ou impair de cycles limites. Il est clair que, si l'on trouve que le nombre des cycles limites qui traversent une région douteuse est impair, c'est que cette région est cyclique. Pour résoudre le problème que nous nous sommes proposé, il est nécessaire d'introduire une notion nouvelle.

Soit ABC un arc d'un cycle sans contact, soit EBD un arc du grand cercle $y = 0$. Soit (*fig.* 29) EB la portion de cet arc qui est située à l'extérieur du cycle ABC; BD la portion qui est située à l'intérieur; BC la portion de l'arc ABC qui serait à la droite d'un observateur ayant les pieds sur la sphère en B et regardant du côté de E; BA la portion qui serait à la gauche de cet observateur. Nous dirons que le cycle ABC est positif, par rapport à l'arc de grand cercle $y = 0$, quand la caractéristique qui passe en B est située dans l'angle EBC, en FB par exemple, et qu'il est négatif quand cette caractéristique est située dans l'angle EBA, en F'B par exemple.

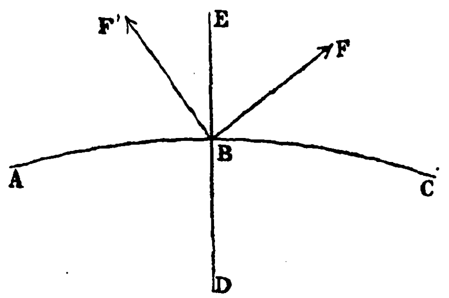
Ceci posé, remarquons que, si l'on fait varier le cycle ABC, ce cycle change de signe : 1° toutes les fois qu'il devient un cycle limite; 2° toutes les fois que EB est tangent à FB.

Maintenant nous sommes en état de résoudre le problème proposé. A cet effet, considérons la région douteuse comprise entre les cycles

$$F_1 = \alpha, \quad F_1 = \beta.$$

Soient A et B les points où l'arc de grand cercle $y = 0$ rencontre ces cycles. Soit λ le nombre des cycles limites compris dans la région

Fig. 29.



douteuse; soit μ le nombre des contacts du grand cercle $y = 0$ compris entre A et B; soit ν un nombre qui est pair si les cycles $F_1 = \alpha$, $F_1 = \beta$ sont de même signe, impair dans le cas contraire; soit θ le nombre de fois que les cycles sans contact du système topographique défini au théorème XVIII changent de signe quand on passe du cycle $F_1 = \alpha$ au cycle $F_1 = \beta$; on aura

$$\theta = \lambda + \mu, \quad \theta \equiv \nu \pmod 2,$$

d'où

$$\lambda \equiv \mu + \nu \pmod 2,$$

ce qui permet de voir si le nombre des cycles limites est pair ou impair.

PROBLÈME II. — Reconnaître si une région est monocyclique.

Pour résoudre ce problème, appuyons-nous sur le théorème suivant.

THÉORÈME XIX. — *Si l'on pose*

$$x = \rho \cos\omega, \quad y = \rho \sin\omega,$$

et que l'équation différentielle devienne

$$\frac{d\rho}{d\omega} = \varphi(\rho, \omega);$$

si $\psi(\rho)$ *est une fonction quelconque de* ρ *n'ayant qu'une valeur finie pour chaque valeur finie de* ρ; *entre deux cycles limites quelconques, il y a toujours des points où*

$$\frac{d\psi}{d\rho} = \infty \quad \text{ou} \quad \varphi(\rho) = \infty,$$

ou bien où

$$\frac{d}{d\rho}\left(\psi, \frac{d\psi}{d\rho}\right) = 0.$$

Soient en effet ω_0 une certaine valeur de ω, ρ_0 et ρ'_0 les valeurs de ρ qui correspondent aux points d'intersection des deux cycles limites considérés et de l'arc de grand cercle

$$\omega = \omega_0$$

Considérons la fonction

$$\psi(\rho'_0) - \psi(\rho_0) = \Theta(\omega_0),$$

et voyons comment elle varie quand ω_0 varie de 0 à 2π. Il est clair qu'elle varie d'une façon continue, qu'elle reste finie et qu'elle revient à la même valeur.

Elle passe donc par un maximum, et, pour une certaine valeur ω_1 de ω_0 correspondant à des valeurs ρ_1 et ρ'_1 de ρ_0 et ρ'_0, on aura

$$\frac{d\omega}{d\omega_0} = 0,$$

ou

$$\frac{d\psi}{d\rho'_0}\varphi(\rho'_1, \omega_1) = \frac{d\psi}{d\rho_0}\varphi(\rho_1, \omega_1).$$

Donc, si l'on considère ω comme une constante égale à ω_1, et qu'on fasse varier ρ depuis ρ_1 jusqu'à ρ'_1, la fonction

$$\frac{d\psi}{d\rho}\varphi(\rho, \omega)$$

deviendra infinie ou passera par un maximum, c'est-à-dire que l'on aura ou bien

$$\frac{d\psi}{d\rho} = \infty,$$

ou bien

$$\varphi = \infty,$$

ou bien

$$\frac{d}{d\rho}\left[\frac{d\psi}{d\rho}\varphi(\rho, \omega)\right] = 0.$$

Théorème XIX généralisé. — *Si $\varphi(x, y)$ et $\psi(x, y)$ sont deux fonctions continues de x et de y telles qu'à chaque système de valeurs de x et de y corresponde un système de valeurs de φ et de ψ, et un seul, et qu'à chaque système de valeurs de φ et de ψ corresponde un système de valeurs de x et de y, et un seul.*

Si l'on pose

$$\varphi(x, y) = \xi, \quad \psi(x, y) = \eta.$$

Si, après cette transformation, l'équation devient

$$\frac{d\xi}{d\eta} = \theta(\xi, \eta),$$

dans la région comprise entre deux cycles limites, il y aura toujours des points tels que

$$\theta = \infty,$$

ou bien

$$\frac{d\theta}{d\xi} = 0.$$

En effet, soient C et C′ les deux cycles limites donnés. Supposons qu'en aucun point de la région R comprise entre ces deux cycles on n'ait $\theta = \infty$; je dis qu'il y aura dans cette région des points où l'on aura

$$\frac{d\theta}{d\xi} = 0.$$

En effet, soit m un point du cycle C, et soit η_0 la valeur correspondante de la fonction $\psi(x, y)$; l'arc de courbe

$$\psi(x, y) = \eta_0,$$

qui passe en m, va couper le cycle C′ en un point m', car, s'il ne coupait pas le cycle C′, il ne pourrait sortir de la région R qu'en recoupant le cycle C; il devrait donc, dans cette région R, être tangent à une caractéristique (en vertu du théorème X). Or cela est impossible, puisqu'on a supposé que dans la région R on n'a pas

$$\theta = \infty.$$

Soient donc ξ_0 et ξ'_0 les valeurs de ξ qui correspondent aux points m et m'.

Quand le point m fera le tour du cycle C, la fonction

$$\xi'_0 - \xi_0$$

passera par un maximum, c'est-à-dire que pour une certaine valeur η_1 de η_0, à laquelle correspondent les valeurs ξ_1 et ξ'_1 de ξ_0 et ξ'_0, on aura

$$\theta(\xi'_1, \eta_1) = \theta(\xi_1, \eta_1),$$

c'est-à-dire que, quand η est égal à η_1 et que l'on fait varier ξ depuis ξ_1 jusqu'à ξ'_1, la fonction θ passe par un maximum ou un minimum, ou que

$$\frac{d\theta}{d\xi} = 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Résolution du deuxième problème. — Pour démontrer qu'une région douteuse est monocyclique ou acyclique, il suffit donc de faire voir que l'on peut trouver deux fonctions ξ et η satisfaisant aux conditions de l'énoncé du théorème précédent, et telles que l'on n'ait en aucun point de la région

$$\theta = \infty \quad \text{ou} \quad \frac{d\theta}{d\xi} = 0.$$

Suite de la discussion. — Si le système topographique

$$F_1 = k_1$$

ne suffit pas pour obtenir une séparation complète des cycles limites, on considérera un nombre aussi grand qu'on voudra de systèmes satisfaisant aux mêmes conditions

$$F_2 = k_2, \quad F_3 = k_3:$$

1° Il est clair que, chacun de ces systèmes fournissant de nouveaux cycles sans contact, certaines portions des régions douteuses laissées par le système $F_1 = k_1$ seront sillonnées par ces cycles et deviendront acycliques;

2° Parmi les régions douteuses laissées par l'ensemble de tous ces systèmes, il y en aura dans l'intérieur desquelles il sera impossible de faire passer un cycle entourant l'origine; ces régions seront donc aussi acycliques (*voir* l'exemple II au Chapitre suivant);

3° Les régions douteuses, devenant de plus en plus restreintes, finiront en général par devenir toutes acycliques ou monocycliques, de manière à achever la séparation des cycles limites; cette séparation sera même toujours possible; et, quand on n'aura pas deux cycles limites confondus, on pourra toujours s'apercevoir qu'elle est terminée;

4° Les régions cycliques devenant de plus en plus restreintes, on connaîtra le cycle limite avec une approximation aussi grande que l'on voudra.

Remarque. — La théorie de la séparation des cycles limites présente quelque analogie avec les procédés qui servent à séparer les racines d'une équation algébrique.

A ce point de vue, la manière dont se résout le premier problème rappelle la méthode des substitutions, qui permet de reconnaître si, dans un intervalle donné, une équation algébrique admet un nombre pair ou impair de racines.

Le théorème XIX est l'équivalent du théorème de Rolle.

Quant au cas des cycles limites confondus, qui correspond à celui des racines multiples, il présente certaines difficultés spéciales que je n'ai pas encore résolues.

CHAPITRE IX.

EXEMPLES DE DISCUSSIONS INCOMPLÈTES.

Exemple I. — Soit l'équation différentielle

$$\frac{dx}{x(x^2+y^2-2x-3)-y} = \frac{dy}{y(x^2+y^2-2x-3)-x},$$

qui, en posant

$$x = \rho\cos\omega, \quad y = \rho\sin\omega,$$

devient

$$d\rho = \rho(\rho^2 - 2\rho\cos\omega - 3)\,d\omega.$$

Prenons, pour le système topographique $F_1 = k_1$, le système des cercles

$$\rho = k_1.$$

La courbe des contacts de ces cercles se réduit à l'ellipse sphérique

$$\rho^2 - 2\rho\cos\omega - 3 = 0,$$

qui enveloppe l'origine. Par conséquent, les régions

$$\rho < 1, \quad \rho > 3$$

sont acycliques pendant que la région

$$1 < \rho < 3$$

est douteuse; mais, si l'on observe que les cycles $\rho = 1$, $\rho = 3$ sont de signe contraire, on verra qu'elle est cyclique.

Appuyons-nous maintenant sur le théorème XIX, en faisant

$$\psi(\rho) = \mathrm{L}\rho, \quad \varphi(\rho, \omega) = \rho(\rho^2 - 2\rho\cos\omega - 3),$$

d'où

$$\frac{d}{d\rho}\left(\frac{d\psi}{d\rho}, \varphi\right) = 2\rho - 2\cos\omega.$$

La courbe $2\rho - 2\cos\omega = 0$ est une ellipse sphérique passant par l'origine et tangente au cercle $\rho = 1$. Donc, en aucun point de la région $1 < \rho < 3$, on n'a ni

$$\frac{d\psi}{d\rho} = \infty, \quad \varphi = \infty, \quad \frac{d}{d\rho}\left(\varphi, \frac{d\psi}{d\rho}\right) = 0.$$

Donc cette région est monocyclique.

Conséquences. — Outre l'équateur, il y a un cycle limite dans chaque hémisphère, et un seul; ce cycle est tout entier dans la région

$$1 < \rho < 3.$$

Si un point mobile se meut suivant la loi suivante (t étant le temps),

$$dx = [x(x^2 + y^2 - 2x - 3) - y]\,dt,$$
$$dy = [y(x^2 + y^2 - 2x - 3) + x]\,dt.$$

Si pour $t = 0$ on a $\rho < 1$, le mobile sortira certainement du cercle $\rho = 1$, et il ne sortira certainement pas du cercle $\rho = 3$.

Exemple II. — Soit l'équation

$$\frac{dx}{-y + 2x(x^2 + y^2 - 4x + 3)} = \frac{dy}{x + 2y(x^2 + y^2 - 4x + 3)},$$

d'où

$$\frac{d\rho}{d\omega} = 2\rho(\rho^2 - 4\rho\cos\omega + 3).$$

Considérons encore les cercles $\rho = k_1$, nous verrons que les régions $\rho < 1$, $\rho > 3$ sont acycliques pendant que la région $1 < \rho < 3$ est douteuse.

Seulement ici les cycles $\rho = 1$, $\rho = 3$ sont de même signe; de sorte que l'on ne peut affirmer que cette région soit cyclique.

Considérons le cycle

$$\varphi(\rho, \omega) = \rho^2 - 3,5\rho\cos\omega - 2 = 0.$$

Pour qu'il eût un contact, il faudrait que l'on eût

$$(\lambda) \qquad \frac{1}{\rho}\frac{d\varphi}{d\omega} = 2\frac{d\varphi}{d\rho}(\rho^2 - 4\rho\cos\omega + 3).$$

Mais tout le long du cycle $\varphi = 0$, on a

$$\frac{1}{\frac{d\varphi}{d\rho}}\frac{1}{\rho}\frac{d\varphi}{d\omega} < 1,5,$$

et

$$\rho^2 - 4\rho\cos\omega + 3 > 1,25.$$

La relation (λ) ne peut donc être satisfaite, c'est-à-dire que le cycle $\varphi = 0$ est sans contact. Il en sera de même des cycles $\varphi = k_2$, pourvu que $-\varepsilon < k_2 < +\varepsilon$ et que ε soit suffisamment petit.

La région $-\varepsilon < \varphi < +\varepsilon$ est donc acyclique. Il resterait donc deux régions douteuses

1° La région $1 < \rho < 3$, $\varphi > +\varepsilon$;
2° La région $1 < \rho < 3$, $\varphi < -\varepsilon$.

Mais dans aucune de ces régions on ne peut faire passer de cycle enveloppant l'origine. Elles sont donc aussi acycliques.

Conséquences. — Il n'y a pas d'autre cycle limite que l'équateur.

Un point mobile se mouvant suivant la loi

$$dx = [-y + 2x(x^2 + y^2 - 4x + 3)]\,dt$$
$$dy = [x + 2y(x^2 + y^2 - 4x + 3)]\,dt$$

peut se rapprocher indéfiniment de l'équateur.

Exemple III. — Soit l'équation

$$\frac{d\rho}{d\omega} = \rho(\rho^2 - 2\rho\cos\omega - 3)(\rho^2 - 2\rho\cos\omega - 8).$$

La considération des cycles $\rho =$ const. nous montre :

1° Que les régions $\rho < 1$ et $\rho > 4$ sont acycliques;

2° Que la région $1 < \rho < 4$ est douteuse.

De plus, les cycles $\rho = 1$ et $\rho = 4$ étant de même signe, il doit y avoir dans cette région un nombre pair de cycles limites.

Considérons le cycle

$$\theta(\rho, \omega) = \rho^2 - 2\rho\cos\omega - 5,5 = 0.$$

Ce cycle est tout entier dans la région douteuse; il est sans contact, ainsi que les cycles

$$\rho^2 - 2\rho\cos\omega - 5,5 = k_2, \quad \text{où} \quad k_2 < +\varepsilon, \quad k_2 > -\varepsilon,$$

et où ε est très petit. De plus, ces cycles ne sont pas de même signe que les cycles $\rho = 1$ et $\rho = 4$.

Nous avons donc les régions suivantes :

1re région	$\rho < 1$	Acyclique.
2e région	$1 < \rho < 4, \quad \theta < -\varepsilon$	Cyclique.
3e région	$1 < \rho < 4, \quad \theta - \varepsilon < \theta < +2$	Acyclique.
4e région	$1 < \rho < 4, \quad \theta > +\varepsilon$	Cyclique.
5e région	$\rho > 4$	Acyclique.

Appliquons maintenant le théorème XIX, en faisant

$$\psi(\rho) = \mathrm{L}\rho, \quad \varphi(\rho, \omega) = \rho(\rho^2 - 2\rho\cos\omega - 3)(\rho^2 - 2\rho\cos\omega - 8),$$

où

$$\frac{d}{d\rho}\left(\varphi, \frac{d\psi}{d\rho}\right) = 2(\rho\cos\omega)(\rho^2 - 2\rho\cos\omega - 5,5).$$

La courbe $\frac{d}{d\rho}\left(\varphi, \frac{d\psi}{d\rho}\right) = 0$ se réduit donc aux deux cycles

$$\rho = \cos\omega, \quad \rho^2 = 2\rho\cos\omega + 5,5,$$

qui sont tout entiers l'un dans la première, l'autre dans la troisième région. Comme d'ailleurs ni φ ni $\frac{d\psi}{d\rho}$ ne deviennent infinis, la deuxième et la quatrième région sont monocycliques.

Conclusion. — En dehors de l'équateur, il y a dans chaque hémisphère deux cycles limites, et il n'y en a que deux.