JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

DE SAINT-GERMAIN

Extrait d'une Lettre adressée à M. Resal

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 8 (1882), p. 297-298.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1882_3_8__297_0>

Extrait d'une Lettre adressée à M. Resal;

PAR M. DE SAINT-GERMAIN.

Dans le numéro de février 1882 du *Journal de Mathématiques*, vous considérez le niveau potentiel d'une couche homogène comprise entre deux ellipsoïdes concentriques et homothétiques; permettez-moi de faire observer qu'on peut obtenir la valeur de ce niveau sous une forme simple en partant de l'expression donnée par Legendre pour le potentiel d'un ellipsoïde relativement à un point qui fait partie de sa masse.

Soit un ellipsoïde ayant pour axes $2a$, $2b$, $2c$, et dont l'intérieur est rempli d'une substance attirante de densité égale à l'unité; le potentiel pour un point intérieur M, dont les coordonnées par rapport aux axes de l'ellipsoïde sont x, y, z, peut s'écrire

$$V = \pi abc \int_0^\infty \left(1 - \frac{x^2}{a^2+t} - \frac{y^2}{b^2+t} - \frac{z^2}{c^2+t}\right) \frac{dt}{\sqrt{(a^2+t)(b^2+t)(c^2+t)}}.$$

Imaginons un second ellipsoïde rempli de la même matière que le premier, et dont les axes s'obtiendraient en dilatant ceux du premier dans le rapport de λ à l'unité; son potentiel relatif à M serait

$$\begin{aligned} V_1 &= \pi\lambda^3 abc \\ &\times \int_0^\infty \left(1 - \frac{x^2}{\lambda^2 a^2+t_1} - \frac{y^2}{\lambda^2 b^2+t_1} - \frac{z^2}{\lambda^2 c^2+t_1}\right) \frac{dt_1}{\sqrt{(\lambda^2 a^2+t_1)(\lambda^2 b^2+t_1)(\lambda^2 c^2+t_1)}}. \end{aligned}$$

Transformons l'intégrale en posant $t_1 = \lambda^2 t$, et nous aurons, après quelques réductions très simples,

$$V_1 = \pi abc \int_0^\infty \left(\lambda^2 - \frac{x^2}{a^2+t} - \frac{y^2}{b^2+t} - \frac{z^2}{c^2+t}\right) \frac{dt}{\sqrt{(a^2+t)(b^2+t)(c^2+t)}}.$$

Le potentiel, relatif à M, de la couche comprise entre les deux ellipsoïdes est égal à $V_1 - V$; on constate que la différence est indépendante de x, y, z, comme cela devait être pour le niveau potentiel de la couche relativement aux points de son intérieur, et on a pour l'expression cherchée,

$$W = V_1 - V = \pi(\lambda^2 - 1)abc \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{(a^2+t)(b^2+t)(c^2+t)}}.$$

Quand deux axes a et b sont égaux, l'intégration peut s'effectuer : si l'on pose $c^2 + t = u^2$, on trouve, pour le cas de l'ellipsoïde aplati, aussi bien que pour celui de l'ellipsoïde allongé,

$$W = 2\pi(\lambda^2 - 1)a^2 c \int_c^\infty \frac{du}{u^2 + a^2 - c^2};$$

on arrive aux résultats donnés dans votre Note, et dont la forme est différente selon que a^2 est $\gtrless c^2$; en introduisant l'excentricité e de l'ellipse méridienne, on aurait

$$a^2 - c^2 = a^2 e^2, \quad W = 2\pi(\lambda^2 - 1)\frac{ac}{e} \arcsin e$$

pour l'ellipsoïde aplati ou planétaire;

$$c^2 - a^2 = c^2 e^2, \quad W = \pi(\lambda^2 - 1)\frac{a^2}{e} \mathrm{L} \frac{1+e}{1-e}$$

pour l'ellipsoïde allongé ou ovaire.