JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

H. LÉAUTÉ

Note sur le profil des lames du dynamomètre de Poncelet

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 9 (1883), p. 245-256.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1883_3_9__245_0>

Note sur le profil des lames du dynamomètre de Poncelet.

PAR M. H. LÉAUTÉ,

Répétiteur de Mécanique à l'École Polytechnique.

Pour obtenir d'un dynamomètre à lames toute la sensibilité dont il est susceptible, il est nécessaire, comme l'on sait, de donner aux lames qui le composent la forme d'un solide d'égale résistance (¹).

Les lames des dynamomètres ayant toujours une largeur uniforme, on est ainsi conduit à donner au profil longitudinal de chaque moitié de lame la forme d'une parabole dont le sommet est à l'extrémité libre et dont l'axe est dirigé suivant la fibre neutre.

Cette forme ne laisse pas que d'être d'une réalisation pratique assez délicate, et la plupart des constructeurs, dans le but de faciliter l'exécution, font l'intérieur des lames entièrement plan et donnent à l'extérieur seulement la forme parabolique, croyant ainsi obtenir un solide d'égale résistance.

Mais, comme l'a fait remarquer le premier M. Resal, cette conséquence est en désaccord avec l'un des principes fondamentaux de la résistance des matériaux, qui exige que les sections, dont la loi de décroissance est celle indiquée ci-dessus, soient normales à la fibre neutre.

L'éminent géomètre a repris l'étude de cette question (*Mécanique générale*, tome V, § 40) et a donné l'équation exacte de la fibre neutre des lames de dynamomètre dont la face intérieure est plane.

(¹) Dans le cas d'une pièce rectangulaire de largeur uniforme, l'amplitude de flexion est ainsi double de ce qu'elle serait avec une pièce de section constante présentant la même résistance.

Toutefois, suivant la remarque de M. Resal lui-même, cette équation est trop compliquée pour être utilisée d'une manière immédiate; il restait donc à présenter le résultat obtenu sous une forme pratique, c'est-à-dire à trouver une forme de profil extérieur suffisamment exacte et facile à tracer.

C'est là l'objet du présent Mémoire.

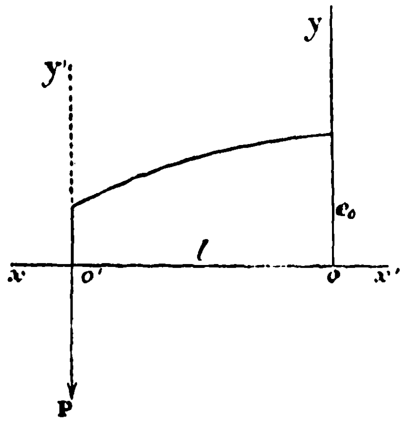
Forme de la fibre neutre. — Si l'on prend pour axe des x la face rectiligne du profil de la lame, pour axe des y une perpendiculaire, et que l'on place l'origine des coordonnées à l'extrémité libre de la lame, l'équation donnée par M. Resal pour la fibre neutre devient

$$x = \sqrt{2px - y^2} - pL\left(1 + \frac{\sqrt{2px - y^2}}{p}\right) \text{ (}^1\text{)}$$

---

(1) L'équation obtenue par M. Resal, avec les axes des coordonnées OX et OY

Fig. 1.



représentés ci-contre (*fig.* 1), est la suivante :

$$v = \frac{e_0^2}{l}\left[\sqrt{v - u} - \frac{e_0^2}{2l} L\left(1 + \frac{2l}{e_0^2}\sqrt{v - u}\right)\right],$$

où l'on a posé

$$y^2 = u, \quad e_0^2\left(1 - \frac{x}{l}\right) = v.$$

Si l'on prend pour nouveaux axes, comme nous l'avons fait, O'X' et O'Y', il est clair que l'on obtient l'équation indiquée.

Le paramètre p a pour valeur $\frac{e_0^2}{2l}$, où l et e_0 désignent respectivement la demi-longueur et la demi-épaisseur de la lame considérée, cette dernière dimension étant mesurée au milieu de la lame.

Pour pouvoir étudier commodément la forme de la fibre neutre, il faut prendre comme variable auxiliaire la quantité $\sqrt{2px - y^2}$. La courbe qu'affecte cette fibre neutre est alors représentée par les deux équations simultanées

$$(1) \qquad 2px - y^2 = z^2,$$

$$(2) \qquad x = z - p\mathrm{L}\left(1 + \frac{z}{p}\right),$$

et on peut la considérer comme le lieu des points d'intersection des courbes (1) et (2) correspondant à une même valeur de z.

L'équation (1) représente, lorsque z varie, une suite de paraboles ayant toutes pour axe l'axe des x, et l'équation (2) une suite de droites parallèles à l'axe des y.

Les paraboles (1) sont toutes égales à la parabole

$$(\mathrm{A}) \qquad y^2 = 2px,$$

et elles ont leur sommet au pied de l'ordonnée de cette parabole qui est égale à z. On les obtiendra donc en cherchant sur la parabole (A) le point qui a pour ordonnée z et en déplaçant ensuite cette parabole par un mouvement de translation opéré dans la direction Ox jusqu'à ce que son sommet arrive au pied de cette ordonnée que l'on suppose ne pas avoir bougé.

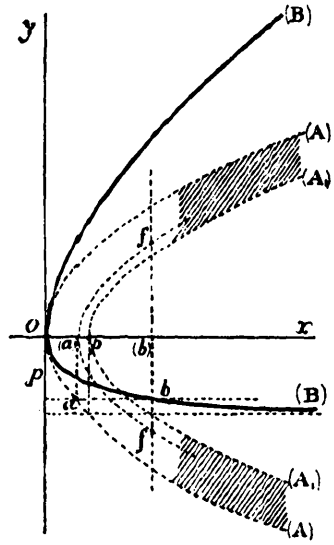
Quant aux droites (2), ce sont celles qui, parallèles à OY, détachent une ordonnée égale à z dans la courbe

$$(\mathrm{B}) \qquad x = y - p\mathrm{L}\left(1 + \frac{y}{p}\right).$$

Cette courbe a la forme indiquée ci-contre (*fig.* 2). Elle est située tout entière à droite de l'axe des y qu'elle touche à l'origine, et elle a une asymptote horizontale correspondant à $y = -p$.

La partie supérieure de (B) est entièrement extérieure à la parabole (A), et la partie inférieure entièrement intérieure à cette parabole. On

Fig. 2.



vérifie aisément ce fait par cette remarque que l'on a, pour la courbe (A),

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y}{p},$$

et pour la courbe (B),

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y}{p} \frac{1}{1 + \frac{y}{p}}.$$

Pour y positif, $\frac{dx}{dy}$ est donc toujours plus grand dans (A) que dans (B) et l'inverse a lieu pour y négatif; x s'annulant d'ailleurs pour $y = 0$ dans les deux cas, on voit que, pour une même valeur de y, x sera toujours plus grand ou toujours plus petit dans (A) que dans (B), suivant que y sera positif ou négatif.

Les courbes (A) et (B) étant supposées tracées, il est facile d'en déduire la fibre neutre cherchée (F).

Il suffit pour cela de couper les courbes par une même horizontale quelconque ab (*fig.* 2), de mener les ordonnées (a) et (b) correspondant aux points d'intersection a et b et de déplacer ensuite la parabole

(A) dans la direction OX jusqu'à ce que son sommet se trouve au pied de (a); le point de rencontre f de la parabole ainsi obtenue avec (b) est un point de la courbe cherchée.

Cette dernière parabole étant tout entière à droite de l'ordonnée (a), il faut, pour obtenir un point réel, que l'ordonnée (b) soit à droite de (a), c'est-à-dire faire usage seulement de la branche inférieure de (B). Comme, d'ailleurs, z représente la distance à l'axe des x de l'horizontale menée en premier lieu, cela revient à dire que z doit être compris entre o et $-p$.

On voit donc que toutes les paraboles auxiliaires (1), servant à tracer la fibre neutre, seront comprises entre les courbes

$$(\mathrm{A}) \qquad y^2 = 2px$$

et

$$(\mathrm{A}_1) \qquad y^2 = 2p\left(x - \frac{p}{2}\right),$$

et que la fibre neutre elle-même sera comprise dans cette zone ([1]) et s'approchera rapidement de la seconde de ces courbes qui en est une asymptote.

Pour les petites valeurs de z, c'est-à-dire dans le voisinage de l'origine, on a sensiblement

$$x = \frac{z^2}{2p} \quad \text{et} \quad y^2 = -\frac{2}{3}\frac{z^3}{2p};$$

la fibre neutre est donc tangente à l'axe des y; son rayon de courbure est nul et elle est osculée par la courbe

$$y^4 = \frac{2^3}{3^2} p x^3.$$

La fibre neutre n'étant pas l'inconnue principale du problème, nous ne pousserons pas plus loin l'étude de cette courbe.

([1]) Cette zone est ombrée sur la *fig.* 2.

Mais il importe de remarquer que, dépendant du seul paramètre p, toutes les courbes de cette espèce sont semblables.

On doit signaler aussi que la variable auxiliaire z représente, au signe près, la sous-normale au point que l'on considère ; on déduit, en effet, des équations (1) et (2) la relation

$$y\frac{dy}{dx} = -z.$$

Forme du profil extérieur. — Ces préliminaires posés, nous allons chercher la forme du profil extérieur de la lame, forme qui est la véritable inconnue du problème pris au point de vue pratique.

Le profil intérieur de la lame étant formé par l'axe des x, il suffit, pour obtenir le profil extérieur (E), de prolonger chaque normale à la fibre neutre d'une quantité égale à elle-même. Pour chaque point de ce profil, l'ordonnée est ainsi double de celle du point correspondant de la fibre neutre, et l'abscisse se trouve égale à celle de ce dernier point diminuée de la sous-normale.

Appelant donc X et Y les coordonnées courantes du profil cherché, on aura

$$(3)\qquad Y = 2y,$$

$$(4)\qquad X = x - z,$$

et par suite, en portant x et y dans les équations (1) et (2),

$$(5)\qquad 8pX - Y^2 = 4z(z + 2p),$$

$$(6)\qquad X = 2z - pL\left(1 + \frac{z}{p}\right).$$

On voit, par ces dernières équations, que la nouvelle courbe est susceptible d'un mode de génération entièrement analogue à celui de la précédente.

Ses points sont déterminés par la rencontre des paraboles (5) avec les verticales (6).

Les paraboles (5) sont toutes égales à la parabole

$$(7)\qquad Y^2 = 8pX,$$

et elles ont leurs sommets au pied de l'ordonnée de la parabole

$$(\mathrm{C}) \qquad 2pX = Y(Y + 2p),$$

qui est égale à z.

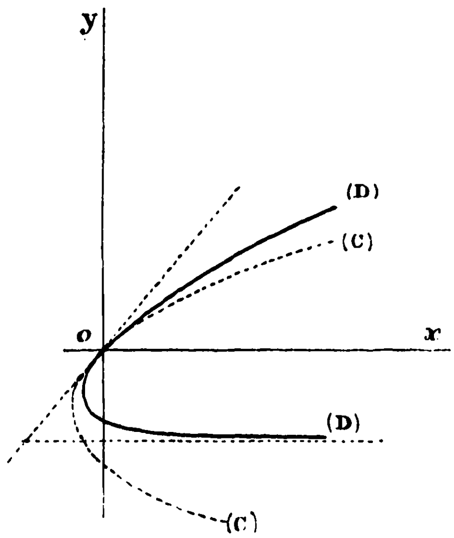
Les droites (b) sont celles qui détachent une ordonnée égale à z dans la courbe

$$(\mathrm{D}) \qquad X = 2Y - pL\left(1 + \frac{Y}{p}\right).$$

Les équations (C), (D) diffèrent seulement des équations (A), (B) par le changement de X en X − Y. Les courbes (C), (D) dérivent ainsi des courbes (A), (B) par l'inclinaison des ordonnées que l'on ramène à être parallèles à la bissectrice de l'angle des axes, en laissant chaque point à la même hauteur au-dessus de l'axe Ox : elles ont donc la forme ci-contre (*fig.* 3).

Pour obtenir un point e de la courbe cherchée E, il faudra donc

Fig. 3.

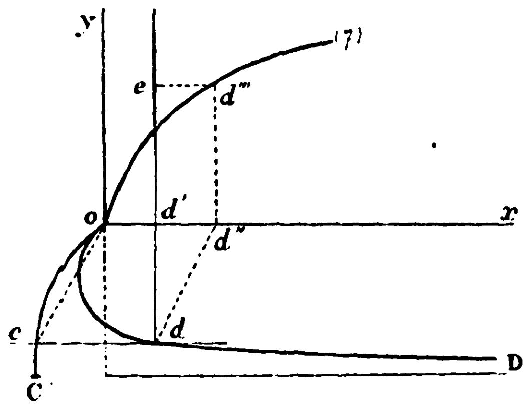


couper (C) et (D) par une droite horizontale comprise entre l'axe des x et l'asymptote de (D), mener les ordonnées (c) et (d) des deux points d'intersection c et d, et prendre le point de rencontre de (d)

avec la parabole égale à $Y^2 = 8pX$, dont le sommet est au pied de l'ordonnée (c).

Si l'on voulait mettre ce procédé en pratique, il serait facile d'éviter le tracé des paraboles successives dont il vient d'être question. En effet, en supposant la parabole (7) tracée une fois pour toutes (*fig.* 4),

Fig. 4.



il suffit, pour avoir le point e situé sur l'ordonnée (d), de prendre $d'e$ égal à $d''d'''$, ordonnée du point de la parabole (7) dont l'abscisse est égale à cd.

La courbe (E) est comprise dans la zone qui s'étend entre les paraboles

$$Y^2 = 8pX$$

et

$$Y^2 = 8p\left(X + \frac{p}{2}\right),$$

et elle a cette dernière courbe pour asymptote.

A l'origine, elle est tangente à l'axe des x, son rayon de courbure est nul, et elle est osculée par la courbe

$$Y^2 = -\frac{8}{3}\frac{X^3}{p}.$$

Elle commence ainsi à se diriger du côté des x négatifs pour revenir du côté opposé en se rapprochant de son asymptote curviligne. Le point de changement de direction correspond au maximum de X, et ses coordonnées sont les suivantes :

$$\frac{z}{p} = -\frac{1}{2},$$
$$\frac{X}{p} = -1 + L.2 = -0,307,$$
$$\frac{Y}{p} = 0,738.$$

Quant au point où la courbe (E) vient couper de nouveau l'axe des y, il a pour coordonnées

$$\frac{z}{p} = -0,797,$$
$$X = 0,$$
$$\frac{Y}{p} = 1,958.$$

L'inclinaison de la tangente, donnée par l'équation

$$Y\frac{dY}{dX} = -\frac{4z^2}{p+2z},$$

a pour valeur en ce point

$$\frac{dY}{dX} = 2,185.$$

Ce point est déjà très rapproché de la parabole asymptote dont le point correspondant à $X = 0$ a pour coordonnée $Y' = 2$, ce qui donne une différence de $\frac{1}{50}$ seulement; les directions des deux courbes sont aussi sensiblement les mêmes, puisque l'on a, pour la parabole,

$$\frac{dY'}{dX} = 2.$$

Le rapprochement s'effectue d'une manière très rapide, car pour

$\frac{X}{p} = 1$ on a, avec la courbe (E),

$$\frac{z}{p} = -0,944,$$

$$\frac{Y}{p} = 3,462$$

et, avec la parabole,

$$\frac{Y'}{p} = 3,464;$$

la différence relative n'est donc plus que de l'ordre des millièmes.

L'expression analytique de la différence des ordonnées de la courbe (E) et de son asymptote parabolique est facile à obtenir en fonction de X pour de grandes valeurs de cette variable.

On a, en effet, en posant $1 + \frac{z}{p} = \varepsilon$,

$$(8) \qquad Y'^2 - Y^2 = 4p^2\varepsilon^2$$

et

$$\frac{X}{p} = 2\varepsilon - 2 - \log\varepsilon.$$

On en tire

$$\varepsilon = e^{-\frac{X}{p} - 2 + 2\varepsilon},$$

qui, pour de grandes valeurs de X, c'est-à-dire pour de petites valeurs de ε, se réduit à

$$\varepsilon = e^{-\frac{X}{p} - 2}.$$

Substituant donc dans (8) et remarquant que l'on peut remplacer $Y' + Y$ par $2Y'$, il vient

$$Y' - Y = \frac{2}{e^4}\,\frac{p^2}{Y' e^{-2X}};$$

d'où, en remplaçant Y' par sa valeur,

$$(9) \qquad Y' - Y = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}} e^4} \, \frac{1}{e^{2\frac{X}{p}} \left(\frac{X}{p} + \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}},$$

c'est-à-dire

$$(10) \qquad Y' - Y = \frac{1}{77} \frac{1}{e^{2\frac{X}{p}}\left(\frac{X}{p} + \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Les divers résultats qui précèdent donnent le moyen de tracer, avec toute la précision voulue, la courbe cherchée. Les équations ne renfermant qu'un seul paramètre p, toutes les courbes de cette espèce sont semblables, et il suffit d'en tracer une à une échelle convenable pour en déduire toutes les autres.

Dans la pratique, la quantité désignée par p a toujours une valeur très faible, et l'on peut, sans erreur appréciable, admettre que la courbe du profil extérieur cherché se confond avec l'asymptote parabolique à partir du point où celle-ci coupe l'axe des y. Il reste ainsi simplement à tracer la portion de courbe située à gauche de l'axe des y, et ce tracé pourra se faire avec une exactitude suffisante en l'assujettissant aux seules conditions de se raccorder avec la parabole précédente, d'avoir une tangente verticale au point dont les coordonnées sont $X = -\frac{3}{10}p$, $Y = \frac{3}{4}p$, et de toucher enfin l'axe des x à l'origine. L'erreur commise sera au plus égale à $\frac{1}{25}p$, comme il est facile de le vérifier.

Dans le cas des lames très minces, pour lesquelles p a une très petite valeur, on pourrait même s'en tenir au tracé habituel des constructeurs; les formules que nous avons données permettent, du reste, d'apprécier dans chaque cas l'erreur commise, qui est au plus égale à $\frac{1}{2}p$.

En résumé :

1° *Le tracé parabolique habituel des solides d'égale résistance ayant une largeur uniforme et une face plane n'est exact pratiquement que dans le cas où la quantité* $\frac{e_0^2}{l} = p$ *est petite, et il conduit à une erreur à peu près égale à* $\frac{p}{2}$.

2° *L'erreur commise peut être rendue moindre que* $\frac{1}{25}p$, *en adoptant le* *tracé suivant, pour l'explication duquel on suppose la pièce placée horizontalement, et le point d'encastrement à droite de l'extrémité libre : Tracer d'abord la parabole ordinaire en la déplaçant vers la gauche d'une quantité égale à $\frac{p}{2}$. Prendre cette parabole pour profil dans la partie à droite de ce point et, pour profil à gauche de ce point, une courbe se raccordant avec la parabole précédente au point de départ, ayant une tangente verticale distante de $\frac{3}{10}p$ de l'extrémité libre et venant se raccorder horizontalement avec la face plane du solide au point d'application de la force extérieure.*

On peut remarquer que l'arc de parabole dont il est fait usage ici appartient à une parabole égale à celle dont on se sert habituellement, mais qui occupe une position différente.