JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. BOUSSINESQ

Sur la pression moyenne, en chaque point intérieur de l'espace qu'occupe un liquide agité

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 9 (1883), p. 425-431.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1883_3_9__425_0>

Sur la pression moyenne, en chaque point intérieur de l'espace qu'occupe un liquide agité (¹);

PAR M. J. BOUSSINESQ.

La publication du Mémoire précédent d'Hydrodynamique m'offre l'occasion de faire connaître une particularité de la théorie de la houle et du clapotis que je n'avais pas encore remarquée lors de l'impression de mes Mémoires sur ces ondes, et qui présente un certain intérêt. Elle consiste dans cette loi que *les pressions produites successivement en un même point de l'espace toujours occupé par le liquide ont leur moyenne, évaluée en hauteur du fluide, inférieure à la pression qui s'y exerçait dans l'état de repos, d'une quantité égale au produit de l'inverse de la gravité* g *par la demi-somme de la valeur moyenne du carré des vitesses qu'on y observe et de la valeur moyenne générale, pour les points situés au même niveau que le proposé dans toute l'étendue d'une longueur d'onde et pour toute la durée d'une période, de l'excès du carré de la composante verticale de la vitesse sur le carré de sa composante horizontale.*

On le reconnaît en partant de la formule (g) de l'*Essai sur la théorie des eaux courantes* (p. 350), qui, si l'on y remplace

$$P + g\frac{d\varphi_1}{dz_1} \quad \text{par} \quad \frac{p - p_0}{\rho} - g(H - z)$$

(¹) Addition à un Mémoire précédent d'Hydrodynamique, p. 273 à 300.

et le second membre par ses expressions obtenues à la page suivante 351, donne, à une deuxième approximation, la suite des pressions p supportées par une même molécule. Il suffit d'en éliminer les coordonnées x_1, z_1, qui sont celles du centre de l'orbite de la molécule, s'il s'agit d'une houle, ou de sa situation de repos, s'il s'agit d'un clapotis, pour y introduire, à la place, les coordonnées actuelles de la molécule,

$$x = x_1 + \frac{d\varphi_1}{dx_1}, \quad z = z_1 + \frac{d\varphi_1}{dz_1},$$

où φ_1 a l'une des expressions (e) et (e') (p. 349). Comme on se borne aux termes du second ordre de petitesse par rapport à la demi-hauteur des ondes, x_1, z_1 peuvent être remplacés par x, z dans toutes les parties de φ_1 et de ses dérivées qui sont déjà de cet ordre, et il n'y a que le premier terme de $\frac{d^2\varphi_1}{dt^2}$, identique à celui de $-k'^2\varphi_1$, où il faille tenir compte des petites différences $x_1 - x$, $z_1 - z$, en y mettant, au lieu de $-k'^2\varphi_1(x_1, z_1)$, le développement

$$-k'^2\varphi_1(x, z) - k'^2\left[\frac{d\varphi_1}{dx}(x_1 - x) + \frac{d\varphi_1}{dz}(z_1 - z)\right]$$

ou

$$-k'^2\varphi_1(x, z) + k'^2\left(\frac{d\varphi_1^2}{dx^2} + \frac{d\varphi_1^2}{dz^2}\right).$$

Cela donne simplement, pour l'expression de $\frac{d^2\varphi_1}{dt^2}$, ce qu'elle devient quand on y substitue x, z à x_1, z_1, plus le terme du second ordre

$$k'^2\left(\frac{d\varphi_1^2}{dx^2} + \frac{d\varphi_1^2}{dz^2}\right).$$

Le calcul de la valeur moyenne de p n'offre ensuite aucune difficulté, non plus que le calcul des valeurs moyennes des carrés des deux composantes, horizontale u et verticale w, de la vitesse au point (x, z), ni celui des moyennes (que j'appellerai *générales*) de ces valeurs moyennes quand x varie. Si l'on observe enfin que, d'après les formules (f') et (ι) (p. 350 et 351), la profondeur à l'état de repos est $\mathrm{H} - \frac{\mathrm{A}^2k'^2}{2g}$ dans le cas d'une houle, H dans celui d'un clapotis, on trouvera, dans les deux cas, pour l'excédent, évalué en hauteur du fluide, de la pression moyenne au point (x, z) intérieur (ou supposé toujours recouvert par le liquide), sur la pression qui s'y exerçait dans l'état de repos,

$$(1) \qquad -\frac{1}{2g}\left[\text{moy.}(u^2 + w^2) - \text{moy. génér.}(u^2 - w^2)\right];$$

ce qui démontre la loi énoncée.

L'expression (1) se simplifie et *devient essentiellement négative,* quand les mêmes circonstances se produisent successivement en tous les points situés à un même niveau z, c'est-à-dire quand il s'agit d'une houle. Alors les moyennes générales (ou pour toutes les valeurs de x) de u^2 et de w^2 ne diffèrent pas de leurs moyennes relatives au point unique (x, z); et il vient, au lieu de (1), $-\frac{\text{moy. } w^2}{g}$. Ainsi, *dans une houle, la pression exercée en un point quelconque de l'espace qu'occupe constamment le liquide est diminuée en moyenne, par le fait du mouvement, d'une quantité égale, en hauteur du fluide, au carré moyen de la composante verticale de la vitesse dans la région considérée, divisé par la gravité g.*

Il est digne de remarque qu'une loi analogue, mise en vue depuis longtemps par des observations de M. de Caligny, mais où paraît la vitesse totale au lieu de sa composante verticale, s'applique au simple mouvement oscillatoire, calculé déjà par Newton, d'une colonne liquide dans un siphon renversé (ou tube en U) bien calibré. Appelons-y, en effet : 1° $2l$ la longueur invariable de la colonne oscillante, et s une abscisse courbe, comptée le long de l'axe du tube à partir de la position d'équilibre du milieu de la colonne; 2° α l'abscisse s, à l'époque t, de ce point milieu, dont l'accélération tangentielle $\frac{d^2\alpha}{dt^2}$ sera évidemment celle de toute la colonne; 3° p_0 la pression atmosphérique s'exerçant aux extrémités, c'est-à-dire sur les deux surfaces libres, dont les abscisses respectives seront $\alpha - l$ et $\alpha + l$; 4° Z l'ordonnée verticale z (comptée de bas en haut) de leur situation d'équilibre, et $Z - \alpha\cos\beta_0$, $Z + \alpha\cos\beta_1$ leurs ordonnées effectives z à l'époque t ou β_0, β_1, les angles, supposés constants, que l'axe du tube y fait avec la verticale. L'équation fondamentale de l'Hydrodynamique donnera évidemment

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{ds} = -g\frac{dz}{ds} - \frac{d^2\alpha}{dt^2};$$

d'où, en multipliant par ds, puis intégrant à partir de $s = \alpha - l$,

$$(2) \qquad \frac{p-p_0}{\rho} = g(Z - \alpha\cos\beta_0 - z) - \frac{d^2\alpha}{dt^2}(s - \alpha + l),$$

et, si l'on fait $s = \alpha + l$, $z = Z + \alpha\cos\beta_1$, $p = p_0$,

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{\cos\beta_0 + \cos\beta_1}{2}\frac{g}{l}\alpha = 0.$$

Or cette équation différentielle en α montre que le mouvement est pendulaire, et que α, $\frac{d^2\alpha}{dt^2}$ ont leurs moyennes nulles. Donc l'excédent $\frac{p-p_0}{\rho} - g(Z - z)$, égal en moyenne d'après (2), pour une valeur donnée de s, à $\alpha\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \frac{1}{2}\frac{d^2\alpha^2}{dt^2} - \frac{d\alpha^2}{dt^2}$, se réduit bien, toujours en moyenne, au carré, changé de signe, de la vitesse $\frac{d\alpha}{dt}$, vu que le terme $\frac{1}{2}\frac{d^2\alpha^2}{dt^2}$ a sa fonction primitive, $\frac{1}{2}\frac{d\alpha^2}{dt}$, périodique, et, par conséquent, sa valeur moyenne nulle.

M. de Caligny, en établissant une communication à travers la paroi verticale qui séparait un petit réservoir d'avec un canal découvert, a observé effectivement une baisse sensible dans ce réservoir (où l'agitation se trouvait très réduite), quand une houle assez forte se propageait le long du canal. C'est ce qu'on peut voir dans ses *Recherches sur les oscillations de l'eau, etc.* (Paris, Baudry, édit. 1883), au bas de la page 297, à la suite de la description d'une houle artificielle, produite dans le canal dont il s'agit, qu'il a observée en commun avec M. Bertin, et qui, malgré le peu de longueur du canal, ne permettant guère aux mouvements de se bien régulariser, a présenté sensiblement les caractères assignés par la théorie quand on tient compte des frottements (*Eaux courantes*, p. 334, et *Additions*, p. 23). Par exemple, la demi-durée T des oscillations, accrue par les frottements, y était $0^s,5$, alors que, sans eux, elle aurait dû égaler seulement $0^s,4705$, vu la demi-longueur $L = 0^m,65$ des ondes et la profondeur d'eau $H = 0^m,36$; le rapport des dimensions horizontales des orbites au fond et à la surface était 0,36 environ, au lieu de la valeur théorique (où sont abstraits les frottements) 0,3406. Enfin, le rapport de l'axe vertical des orbites à leur axe horizontal, qui aurait dû croître, dans un liquide parfait, depuis zéro jusqu'à 0,9402 du fond à la surface, paraissait atteindre sur cette dernière la valeur 1,09, sensiblement plus forte que 0,94, conformément aux prévisions théoriques touchant l'effet des frottements.

La réduction de l'expression (1) à $-\frac{\text{moy. } u'^2}{g}$ ne s'appliquerait plus seulement au cas d'une houle, mais s'étendrait à celui d'un clapotis et serait, par conséquent, aussi générale que la formule (1) elle-même, si, au lieu de la pression moyenne en un seul point intérieur (x, z), on voulait considérer la moyenne de ses valeurs en tous les points situés au même niveau dans l'étendue d'une longueur d'onde. Alors, en effet, on aurait à prendre ce que nous appelons la valeur moyenne générale du second membre de (1) pour un certain niveau z, et l'excédent de la pression moyenne effective en tous ces points sur la pression de l'état d'équilibre égalerait $-\frac{\text{moy. gén. } u'^2}{g}$ [1].

[1] Je profite aussi de l'occasion de ce Mémoire, destiné à compléter une partie de mon *Essai sur la théorie des eaux courantes*, pour préciser quelques idées émises, dans le même *Essai*, au sujet d'une autre question, savoir : la *Résistance des coudes*. Le second cas que j'y ai abordé (p. 598) est celui d'un tournant dans un canal découvert d'une profondeur très petite par rapport à sa largeur. Les filets fluides y sont beaucoup moins solidaires les uns des autres que dans un tuyau étroit, à cause même de cette plus grande largeur relative; car les premiers qui se heurtent contre le bord extérieur ou concave peuvent y augmenter un peu de hauteur sans faire naître, à la surface, des pentes transversales sensibles et, par suite, sans refouler brusquement les autres filets. Donc, si le petit angle β du tournant atteint, comme il arrive en général, des valeurs suffisantes pour que la section contractée se produise, en aval du coude, à une distance λ modérée, seulement comparable, par exemple, à la largeur a : 1° les filets fluides contigus au bord intérieur ou convexe conserveront à fort peu près, jusqu'à la section contractée, leur direction première (ce qui permettra, comme on voit p. 599, de déduire de λ une valeur approchée de la contraction $1-m$, valeur par excès vu qu'on y attribue à la partie *morte* des sections autant de hauteur qu'à la partie *vive* et une largeur un peu trop forte); 2° les filets dont il s'agit garderont aussi, jusqu'au passage du coude et au delà, leur hauteur primitive, tandis que les filets

contigus au bord extérieur ou concave, retardés par le coude, se gonfleront déjà à quelque distance en amont de celui-ci. Donc, le canal d'amont exercera, en somme, sur le fluide, par son bord extérieur, un excès non hydrostatique $\mathfrak{P}$ de pression, ayant une composante sensible suivant le sens de l'écoulement dans le canal d'aval, contrairement à ce qui serait arrivé si, la solidarité des filets fluides étant aussi grande que dans un tuyau circulaire coudé, le gonflement s'était trouvé, dans le canal d'amont, presque pareil sur les deux rives et sur toute la largeur. C'est pourquoi les raisonnements des n^{os} **223** et **224** (p. 608 à 610), qui démontrent en général l'inégalité $\frac{1}{m} - 1 < 2 \sin \frac{\beta}{2}$ $\Big[$comme conséquence de celle-ci, $\mathfrak{P} > 0$, et par la comparaison des formules (q), $(q^{\text{IV}})\Big]$, ne permettent pas de la changer en une égalité approchée dans le cas d'un canal large. Il en est, du reste, de même dans le cas d'un tuyau coudé à section circulaire, quand le coude a son angle β assez grand pour que les filets fluides prennent des courbures considérables au moment d'y arriver ; ainsi, une expérience de Venturi, sur la perte de charge par un coude à angle droit, a donné, pour $\beta = 90^\circ$, $\left(\frac{1}{m} - 1\right)^2 = 1{,}5$ (environ) au lieu de $(2 \sin 45^\circ)^2$ ou 2 ; et, dans d'autres cas, où le second côté du coude était peut-être moins court, Péclet n'a même trouvé que 1 environ ou $\sin^2\beta$, pour ce nombre, comme je le dis p. 607. Cette valeur approximative 1 résulte aussi d'une expérience de M. de Caligny (mêmes *Recherches*, p. 539) faite sur l'écoulement de l'eau comme celle de Venturi, mais (observe l'auteur) dans un coude dont le second côté avait probablement une longueur moins réduite.

Je remarquerai encore (p. 601 et 602) que le coefficient, probablement inférieur à l'unité, introduit dans l'expression de la perte de charge par le fait de l'arrondissement complet de l'axe du canal, est peut-être fonction du rapport de la largeur a à la profondeur h; ce qui, du reste, ne change rien aux résultats suivants. Enfin, j'observerai, à propos de la formule des profondeurs de la Garonne (p. 615), qu'un nouveau Mémoire de M. Fargue (*Étude sur la largeur du lit moyen de la Garonne*, § I^{er}, p. 4, au numéro d'octobre 1882 des *Annales des Ponts et Chaussées*) conduit à y prendre $a = \frac{1}{2}(180 + 200) = 190^m$ au lieu de $a = \frac{1}{2}(170 + 190) = 180^m$, et, par suite, pour que le produit $h_0\sqrt{a}$ reste le même, à poser $h_0 = 8^m\frac{3}{4}$ au lieu de 9^m; ce qui est encore plus conforme aux données de l'observation, car la valeur $h_0 = 9^m$ paraissait un peu forte.

M. Fargue indique, dans ce nouveau travail, la manière d'obtenir un approfondissement suffisant de certains *maigres*, où la largeur est trop grande, en l'y réduisant au moyen de digues longitudinales. Pour celui de la Garonne qui est appelé *Passe de Mondiet*, où la largeur était de 204^m, alors qu'elle n'atteignait respectivement que 170^m et 176^m dans les deux coudes d'amont et d'aval, il a pu rendre permanent un accroissement de la profondeur égal à $2^m,20 - 0^m,90 = 1^m,30$ (p. 8 et 9) en y réduisant cette largeur à 165^m. Si, vu la difficulté d'apprécier ce que pouvait être la largeur a de la section vive, dans l'état primitif où la rivière y faisait *ventre,* on prend pour a la moyenne entre la largeur totale effective. 204, et sa valeur (173 environ) dans les coudes d'amont et d'aval, ce qui donne $a = 188,5$, les principes exposés aux mêmes n^{os} **222** et **226** de mon *Essai* (p. 605 et 613) permettront d'évaluer cet approfondissement. En effet, a' désignant la nouvelle largeur, 165^{m}, et h la nouvelle profondeur en hautes eaux (alors que la profondeur primitive h_0 était $8^{m}\frac{3}{4}$), ils conduiront, d'une part, à prendre la différence $h - h_0$ comme expression approchée de l'approfondissement permanent, et, d'autre part, à poser $ah_0 = a'h$ ou $h - h_0 = \frac{a - a'}{a'} h_0$. Dans le cas présent, il vient ainsi $h - h_0 = \frac{188,5 - 165}{165} \times 8^{m}\frac{3}{4} = 1^{m},25$, résultat bien d'accord avec celui, $1^{m},30$, de l'observation.