JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

E. JABLONSKI

Recherches sur l'action de la matière pondérable sur l'éther (suite)

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 10 (1884), p. 329-365.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1884_3_10__329_0>

Recherches sur l'action de la matière pondérable sur l'éther

[SUITE (1)];

PAR M. E. JABLONSKI,

Professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Besançon.

VIII. — PRISME DROIT A BASE RECTANGLE.

Dans un prisme droit à base rectangle, les particules pondérables sont disposées suivant trois lignes rectangulaires parallèles aux arêtes du prisme, nous dirigerons les axes de coordonnées suivant ces trois lignes, et l'origine sera toujours le centre d'une cellule. Si l'on désigne par ρ, ρ', ρ'' les demi-dimensions de la cellule ou noyau primitif du cristal, une particule pondérable aura pour coordonnées

$$x_1 = k\rho, \quad y_1 = k'\rho', \quad z_1 = k''\rho'',$$

k, k', k'' étant des nombres impairs pouvant prendre toutes les valeurs positives ou négatives.

ρ_1 étant la distance d'une particule pondérable à l'origine, on aura

$$\rho_1^2 = K^2\rho^2 + K'^2\rho'^2 + K''^2\rho''^2.$$

Nous nous proposons de comparer entre eux les indices, ce qui revient, d'après les formules (20), à comparer entre elles les trois quantités α,

(1) Voir même Tome, p. 147.

β, γ, définies par les relations (17) que l'on peut mettre sous la forme

$$\alpha(1+g_1) = \tfrac{1}{3}\Sigma_1 m_1 \rho_1^2 \psi(\rho_1) - \Sigma_1 m_1 x_1^2 \psi(\rho_1),$$
$$\beta(1+g_1) = \tfrac{1}{3}\Sigma_1 m_1 \rho_1^2 \psi(\rho_1) - \Sigma_1 m_1 y_1^2 \psi(\rho_1),$$
$$\gamma(1+g_1) = \tfrac{1}{3}\Sigma_1 m_1 \rho_1^2 \psi(\rho_1) - \Sigma_1 m_1 z_1^2 \psi(\rho_1),$$

$1+g_1$ étant un nombre positif que l'on calcule au moyen de la formule (21).

On tire des précédentes

$$(\beta-\alpha)(1+g_1) = \Sigma_1 m_1 x_1^2 \psi(\rho_1) - \Sigma_1 m_1 y_1^2 \psi(\rho_1),$$
$$(\gamma-\alpha)(1+g_1) = \Sigma_1 m_1 x_1^2 \psi(\rho_1) - \Sigma_1 m_1 z_1^2 \psi(\rho_1);$$

on est donc conduit à comparer entre eux les trois coefticients

$$\Sigma_1 m_1 x_1^2 \psi(\rho_1), \quad \Sigma_1 m_1 y_1^2 \psi(\rho_1), \quad \Sigma_1 m_1 z_1^2 \psi(\rho_1).$$

Prenons, par exemple, les deux premiers. Leur différence

$$\Sigma_1 m_1 x_1^2 \psi(\rho_1) - \Sigma_1 m_1 y_1^2 \psi(\rho_1) \tag{22}$$

est nulle lorsque $\rho = \rho'$, c'est-à-dire lorsque tous les réseaux du cristal situés dans des plans parallèles au plan xoy sont à mailles carrées : c'est le cas du prisme droit à base carrée. Nous allons prouver qu'elle ne peut s'annuler que dans ce cas.

A cet effet, nous allons considérer d'abord un réseau plan, c'est-à-dire que nous ferons $\rho'' = 0$. Un point du réseau aura, pour coordonnées,

$$x_1 = \mathrm{K}\rho, \quad y_1 = \mathrm{K}'\rho',$$

et l'on aura $\rho_1^2 = x_1^2 + y_1^2$. Les axes de coordonnées étant dirigés parallèlement aux lignes du réseau, et l'origine étant prise au centre d'une maille.

Si l'on pose $2a^2 = \rho^2 + \rho'^2$, puis $\frac{\rho'}{\rho} = \operatorname{tang}\theta$, on aura

$$\rho = \frac{a}{\sqrt{2}}\cos\theta,$$

$$\rho' = \frac{a}{\sqrt{2}}\sin\theta.$$

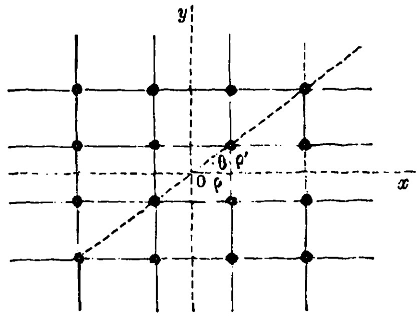
Nous poserons $\lambda = \cos 2\theta$. On aura

$$\rho_1^2 = 2K^2 a^2 \cos^2\theta + 2K'^2 a^2 \sin^2\theta = K^2 a^2 (1+\lambda) + K'^2 a^2 (1-\lambda).$$

La différence considérée devient

$$(1+\lambda)\Sigma_1 m_1 a^2 K^2 \psi(\rho_1) - (1-\lambda)\Sigma_1 m_1 K'^2 a^2 \psi(\rho_1).$$

Posons $x = Ka$, $y = K'a$, x et y seront les coordonnées d'un point d'un réseau à mailles carrées dont la demi-dimension d'une maille



serait a. Les Σ se rapporteront maintenant à ce réseau; or on peut y faire tourner à volonté les axes, si on les fait tourner de 45°, c'est-à-dire si l'on remplace

$$x \text{ par } \frac{x-y}{\sqrt{2}}, \quad y \text{ par } \frac{x+y}{\sqrt{2}},$$

on aura simplement

$$-\Sigma_1 m_1 2xy\,\psi(\rho_1) + \lambda\Sigma_1 m_1 (x^2+y^2)\psi(\rho_1)$$

pour la différence considérée, ρ_1 prenant maintenant la valeur

$$\sqrt{x^2+y^2-2\lambda xy}.$$

Faisons, pour abréger, $\sqrt{x^2+y^2}=r$, et observons que l'on a

$$\frac{d\rho_1}{d\lambda}=-\frac{xy}{\rho_1}$$

et, pour $\lambda=0$,

$$\left(\frac{d\rho_1}{d\lambda}\right)_0=-\frac{xy}{r}.$$

Dans le cas général,

$$\psi(\rho_1)=\frac{\mu_1}{(n_1-4)(g+3h)}\frac{1}{\rho_1^{n_1+1}},$$

nous ferons abstraction pour un instant du facteur constant, et nous réduirons $\psi(\rho_1)$ à $\frac{1}{\rho_1^{n_1+1}}$; on a alors

$$D_{\rho_1}\psi(\rho_1)=-\frac{n_1+1}{\rho_1^{n_1+2}},$$

$$D_{\rho_1}\left(\frac{1}{\rho_1}D_{\rho_1}\psi\right)=\frac{(n_1+1)(n_1+3)}{\rho_1^{n_1+4}},$$

$$D_{\rho_1}\left[\frac{1}{\rho_1}D_{\rho_1}\left(\frac{1}{\rho_1}D_{\rho_1}\psi\right)\right]=-\frac{(n_1+1)(n_1+3)(n_1+5)}{\rho_1^{n_1+6}},$$

. . . .

Alors, par la formule de Maclaurin, $\psi(\rho_1)$ se développe en série convergente, savoir :

$$\begin{aligned}\psi(\rho_1)=\frac{1}{r^{n_1+1}}&+\frac{(n_1+1)}{r^{n_1+3}}\lambda xy+\frac{(n_1+1)(n_1+3)}{1.2}\lambda^2\frac{(xy)^2}{r^{n_1+5}}\\&+\frac{(n_1+1)(n_1+3)(n_1+5)}{1.2.3}\lambda^3\frac{(xy)^3}{r^{n_1+7}}+\cdots\\&+\frac{(n_1+1)(n_1+3)\ldots(n_1+2m-1)}{1.2.3\ldots m}\lambda^m\frac{(xy)^m}{r^{n_1+2m+1}}+\cdots;\end{aligned}$$

il est aisé de voir que cette série est convergente; le rapport d'un terme au précédent est

$$+\frac{n_1+2m-1}{m}\frac{\lambda xy}{r^2},$$

dont la limite est

$$+\frac{2\lambda xy}{r^2}.$$

Or on a toujours

$$2\lambda xy < x^2 + y^2 \quad \text{ou} \quad 2\lambda xy < r^2,$$

donc

$$\frac{2xy\lambda}{r^2} < 1.$$

On en déduit

$$\sum\nolimits_1 2xy\psi(\rho_1) = \sum\nolimits_1 \frac{2xy}{r^{n_1+1}} + 2(n_1+1)\lambda\sum\nolimits_1 \frac{(xy)^2}{r^{n_1+3}} + \frac{(n_1+1)(n_1+3)}{1.2}\lambda^2 2\sum\nolimits_1 \frac{(xy)^3}{r^{n_1+5}}$$
$$- \frac{(n_1+1)(n_1+3)(n_1+5)}{1.2.3}\lambda^3 2\sum\nolimits_1 \frac{(xy)^4}{r^{n_1+7}} + \ldots$$
$$+ (-1)^m \frac{(n_1+1)(n_1+3)\ldots(n_1+2m-1)}{1.2.3\ldots m}\lambda^m 2\sum\nolimits_1 \frac{(xy)^{m+1}}{r^{n_1+2m+1}} + \ldots.$$

Les Σ_1 se rapportent ici à un réseau carré, les sommes qui dépendent d'une puissance impaire de xy sont nulles, et l'on a simplement

$$-\sum\nolimits_1 m_1 2xy\psi(\rho_1) = -2(n_1+1)\lambda\sum\nolimits_1 m_1 \frac{(xy)^2}{r^{n_1+3}}$$
$$- \frac{(n_1+1)(n_1+3)(n_1+5)}{1.2.3}\lambda^3 2\sum\nolimits_1 m_1 \frac{(xy)^4}{r^{n_1+7}} - \ldots$$
$$- \frac{(n_1+1)(n_1+3)\ldots(n_1+2m-1)}{1.2.3\ldots m}\lambda^m 2\sum\nolimits_1 m_1 \frac{(xy)^{m+1}}{r^{n_1+2m+1}} - \ldots,$$

m étant un nombre impair. De même, on aura

$$\sum\nolimits_1 m_1(x^2+y^2)\psi(\rho_1) = \sum\nolimits_1 m_1 \frac{x^2+y^2}{r^{n_1+1}} + \frac{(n_1+1)(n_1+3)}{1.2}\lambda^2 \sum\nolimits_1 m_1 \frac{(xy)^2(x^2+y^2)}{r^{n_1+5}}$$
$$+ \frac{(n_1+1)(n_1+3)(n_1+5)(n_1+7)}{1.2.3.4}\lambda^4\sum\nolimits_1 m_1 \frac{(xy)^4(x^2+y^2)}{r^{n_1+9}} + \ldots$$
$$+ \frac{(n_1+1)(n_1+3)\ldots(n_1+2m-3)}{1.2.3\ldots(m-1)}\lambda^{m-1}\sum\nolimits_1 m_1 \frac{(xy)^{m-1}(x^2+y^2)}{r^{n_1+2m-1}} + \ldots.$$

Dans le terme général de chacune de ces séries entrent les coefficients

$$\sum\nolimits_1 m_1 \frac{(xy)^{m+1}}{r^{n_1+2m+1}} \quad \text{et} \quad \sum\nolimits_1 m_1 \frac{(xy)^{m-1}(x^2+y^2)}{r^{n_1+2m-1}}:$$

il s'agit de les calculer. m étant impair, nous ferons

$$m = 2p + 1.$$

Dans un réseau à mailles carrées, ces Σ_1 restent invariables quand on fait tourner les axes. Faisons $x = r\cos\omega$, $y = r\sin\omega$: on a

$$\sum_1 m_1 \frac{(xy)^{2p+2}}{r^{n_1+4p+3}} = \sum_1 m_1 \frac{r^{4p+4}}{r^{n_1+4p+3}}(\sin\omega\cos\omega)^{2p+2} = \sum_1 m_1 \frac{(\sin\omega\cos\omega)^{2p+2}}{r^{n_1-1}};$$

or faire tourner les axes revient à faire varier ω. Si l'on imagine qu'on lui donne toutes les valeurs possibles de 0 à 2π en le faisant varier par degrés infiniment petits, puis que l'on prenne la moyenne, on aura justement la valeur de la somme considérée : donc elle est

$$\sum_1 m_1 \frac{1}{r^{n_1-1}} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\sin\omega\cos\omega)^{2p+2}d\omega.$$

Or l'intégrale peut s'écrire

$$\frac{1}{2\pi}\frac{1}{2^{2p+2}}\int_0^{2\pi}(\sin 2\omega)^{2p+2}d\omega.$$

D'autre part, on a, quel que soit l'arc U et q étant pair,

$$\begin{aligned} 2^{q-1}(-1)^{\frac{q}{2}}(\sin 2\mathrm{U})^q = \cos 2q\mathrm{U} &- \frac{q}{1}\cos 2(q-2)\mathrm{U} \\ &+ \frac{q(q-1)}{1.2}\cos 2(q-4)\mathrm{U} + \ldots \\ &+ (-1)^{\frac{q}{2}}\frac{q(q-1)\ldots\left(\frac{q}{2}+1\right)}{1.2\ldots\frac{q}{2}}\frac{1}{2}; \end{aligned}$$

on en conclut

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\sin 2\mathrm{U})^q d\mathrm{U} = \frac{q(q-1)\ldots\left(\frac{q}{2}+1\right)}{1.2\ldots\frac{q}{2}}\frac{1}{2^q}:$$

donc le coefficient considéré est ici

$$\frac{(2p+2)(2p+1)2p(2p-1)\ldots(p+2)}{1.2\ldots(p+1)}\frac{1}{2^{4p+4}}\sum_1 m_1\frac{1}{r^{n_1-1}}.$$

On a de même

$$\sum_1 m_1 \frac{(xy)^{m-1} r^2}{r^{n_1+2m-1}} = \sum_1 m_1 \frac{1}{r^{n_1-1}} (\sin\omega\cos\omega)^{m-1}$$
$$= \sum_1 m_1 \frac{1}{r^{n_1-1}} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2^p} \int_0^{2\pi} (\sin 2\omega)^{2p} d\omega$$

ou

$$\frac{2p(2p-1)\ldots(p+1)}{1.2.3\ldots p} \frac{1}{2^{4p}} \sum_1 m_1 \frac{1}{r^{n_1-1}}.$$

Le terme général de la valeur de $-\Sigma 2xy\psi(\rho_1)$ est donc

$$-\frac{(n_1+1)(n_1+3)\ldots(n_1+4p+1)}{1.2.3\ldots(2p+1)} \lambda^{2p+1}$$
$$\times \frac{(2p+2)(2p+1)2p\ldots(p+2)}{1.2\ldots(p+1)} \frac{1}{2^{4p+3}} \sum_1 m_1 \frac{1}{r^{n_1-1}},$$

et, dans la valeur de $\lambda\Sigma_1 m_1(x^2+y^2)\psi(\rho_1)$,

$$+\frac{(n_1+1)(n_1+3)\ldots(n_1+4p-1)}{1.2.3\ldots 2p} \lambda^{2p+1} \frac{2p(2p-1)\ldots(p+1)}{1.2.3\ldots p} \frac{1}{2^{4p}} \sum_1 m_1 \frac{1}{r^{n_1-1}}.$$

Donc, dans la valeur de

$$-\Sigma_1 m_1 2xy\psi(\rho_1) + \lambda\Sigma_1 m_1 (x^2+y^2)\psi(\rho_1),$$

le terme général sera

$$\lambda^{2p+1} \sum_1 \frac{m_1}{r^{n_1-1}} \frac{(n_1+1)(n_1+3)\ldots(n_1+4p-1)}{1.2.3\ldots 2p}$$
$$\times \frac{2p(2p-1)\ldots(p+3)(p+2)}{1.2.3\ldots p} \left[\frac{p+1}{2^{4p}} - \frac{(n_1+4p+1)(2p+2)(2p+1)}{(2p+1)(p+1)2^{4p+3}}\right]$$

ou, toutes réductions faites,

$$\frac{\lambda^{2p+1}}{2^{4p+2}} \frac{(n_1+1)(n_1+3)\ldots(n_1+4p-1)(3-n_1)}{1.2.3\ldots(p+1).1.2.3\ldots p} \sum_1 \frac{m_1}{r^{n_1-1}};$$

donc la différence considérée est

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned}&\frac{\mu_1\lambda}{(n_1-4)(g+3h)}\,\frac{3-n_1}{4}\sum\nolimits_1\frac{m_1}{r^{n_1-1}}\\&\times\mathop{\mathrm{S}}_{p=0}^{p=+\infty}\frac{(n_1+1)(n_1+3)\ldots(n_1+4p-1)}{1.2.3\ldots(p+1).1.2.3\ldots p}\,\frac{\lambda^{2p}}{2^{4p}},\end{aligned}\right.$$

le coefficient numérique, sous le signe S, étant fait égal à 1 pour $p=0$.

Le calcul précédent se rapporte à un réseau plan idéal qui, dans le corps, coïnciderait avec le plan xoy; or, dans le corps, aucun n'occupe cette position, puisque l'origine est prise au centre d'une cellule. La moindre distance de l'origine d'un des réseaux parallèles au plan xoy est ρ''; généralement la distance est $K''\rho''$, K'' étant un nombre impair positif ou négatif. Nous la désignons par z_1.

La supposition $\rho''=0$, ou $z_1=0$ permettait de ramener tous les Σ_1 à une seule, savoir :

$$\sum\nolimits_1\frac{m_1}{r^{n_1-1}};$$

il n'en est plus ainsi si z_1 n'est pas nul; alors, si l'on fait toujours

$$r^2=x^2+y^2\quad\text{et}\quad \iota^2=x^2+y^2+z_1^2,$$

on a

$$\begin{aligned}\sum\nolimits_1 m_1\frac{(xy)^{2p+2}}{\iota^{n_1+4p+3}}&=\sum\nolimits_1 m_1\frac{r^{4p+4}}{\iota^{n_1+4p+3}}(\sin\omega\cos\omega)^{2p+2}\\&=\frac{(2p+2)(2p+1).2p\ldots(p+2)}{1.2.3\ldots(p+1)}\,\frac{1}{2^{4p+4}}\sum\nolimits_1 m_1\frac{r^{4p+4}}{\iota^{n_1+4p+1}}\end{aligned}$$

et de même

$$\sum\nolimits_1 m_1\frac{(xy)^{2p}r^2}{\iota^{n_1+4p+1}}=\frac{2p(2p-1)\ldots(p+1)}{1.2.3\ldots p}\,\frac{1}{2^{4p}}\sum\nolimits_1 m_1\frac{r^{4p+2}}{\iota^{n_1+4p+1}}.$$

Comme on peut répéter les mêmes calculs pour chacun des réseaux et qu'il suffit d'ajouter les résultats pour avoir la valeur de notre expression relative à tout le corps, il suffit d'imaginer que Σ_1 se rapporte en effet à tout le corps; on a ainsi, pour le terme général,

$$(24)\quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\lambda^{2p+1}}{2^{4p+2}} \frac{(n_1+1)\ldots(n_1+4p-1)}{1.2.3\ldots(p+1).1.2.3\ldots p} \\ & \times \left[4(p+1) \sum_1 m_1 \frac{r^{4p+4}}{\iota^{n_1+4p+3}} - (n_1+4p+1) \sum_1 m_1 \frac{r^{4p+2}}{\iota^{n_1+4p+1}} \right]; \end{aligned} \right.$$

la parenthèse peut s'écrire

$$\sum_1 m_1 \frac{r^{4p+2}}{\iota^{n_1+4p+1}} \left[4(p+1)\frac{r^2}{\iota^2} - (n_1+4p+1) \right].$$

Si $n_1 \geq 3$, on voit que, r étant inférieur à ι, tous les termes auront le même signe quel que soit p, d'où il résulte que l'expression (23) ne peut s'annuler que pour $\lambda = 0$.

Examinons le cas de $n_1 < 3$, c'est-à-dire 1 ou 2. Reprenons l'expression considérée sous sa première forme, savoir :

$$(22)\qquad \Sigma_1 m_1 x_1^2 \psi(\rho_1) - \Sigma_1 m_1 y_1^2 \psi(\rho_1),$$

avec $\psi(\rho_1) = \frac{\mu_1}{(n_1+4)(g+3h)} \frac{1}{\rho_1^{n_1+1}}$. Ne prenons dans la somme que les termes qui se rapportent à un réseau dont la distance à l'origine est z_1. La dérivée de notre expression prise par rapport à z_1^2 est, abstraction faite de tout facteur constant,

$$\sum_1 m_1 \frac{x_1^2}{\rho_1^{n_1+3}} - \sum_1 m_1 \frac{y_1^2}{\rho_1^{n_1+3}},$$

de même forme que la proposée, et où n_1 est remplacé par n_1+2. D'après ce qui précède, cette dérivée ne pourra s'annuler que pour $\lambda = 0$, puisque ici le nombre n_1 entrant dans (24) est au moins 3. Si, dans (22), on fait $z_1 = 0$, elle se réduit à (23) et a un signe déterminé pour un signe donné de λ; lorsque z_1 croît, elle varie toujours dans le même sens, puisque sa dérivée conserve un signe invariable, et, pour $z_1 = \infty$, ρ_1 devenant infini, l'expression (22) s'annule; il en résulte que, pour toute valeur finie de z_1, elle garde un signe invariable, le même que pour $z_1 = 0$. Il en est de même pour la somme étendue à tous les réseaux.

Un artifice analogue peut être employé pour $n_1 = 4$ que nous avions négligé. Pour $n_1 = 4$,

$$\psi(\rho_1) = \frac{-\mu_1 L\rho_1}{(g+3h)\rho_1^5};$$

or on remarque que cette valeur se déduit simplement de la valeur générale en la mettant sous la forme

$$\psi(\rho_1) = \frac{\mu_1 \rho_1^{-n_1-1}}{g+3h(n_1-4)},$$

prenant le rapport des dérivées par rapport à n_1 et faisant $n_1 = 4$. Dans (23) qui subsiste quelque voisin que n_1 soit de 4, on aura donc à la limite, en opérant de la même manière :

$$\frac{\mu_1\lambda}{4(g+3h)}\sum_1 m_1 \frac{Lr}{r^3}\mathop{\mathrm{S}}_{p=0}^{p=\infty}\frac{5.6\ldots(4p+3)}{1.2.3\ldots(p+1).1.2.3\ldots p}\frac{\lambda^{2p}}{2^{4p}},$$

dont le signe reste invariable avec celui de λ. On en conclut encore, comme dans le cas général, que (22) ne peut pas s'annuler et changer de signe tant que λ conserve son signe, c'est-à-dire tant que la différence $\rho - \rho'$ conserve le même signe. Si l'on avait $n_1 = 3$, l'expression (23) serait nulle, quel que fût λ pour $z_1 = 0$; en vertu du raisonnement précédent, elle le serait toujours, quel que fût z_1; or cela est impossible en vertu de (24) : donc il faut rejeter la supposition $n_1 = 3$. Dans le cas général, notre raisonnement prouve encore que (22) a le signe de $\frac{3-n_1}{n_1-4}\,\frac{\mu_1}{g+3h}\lambda$ si $n_1 \neq 4$, et de $-\frac{\mu_1\lambda}{g+3h}$ si $n_1 = 4$.

Ainsi il est démontré par ce qui précède que la différence $\beta - \alpha$ conservera un signe invariable tant que la différence $\rho - \rho'$ ne changera pas de signe et même qu'elle changera de signe avec elle.

De même pour $\gamma - \alpha$ et $\rho - \rho''$.

Il suffit donc de savoir comment les signes se correspondent lorsque $\rho - \rho'$ et $\rho - \rho''$ sont aussi petites que l'on veut.

Nous poserons

$$\rho = \rho' - \varepsilon \quad \text{ou} \quad \rho' = \rho + \varepsilon,$$
$$\rho = \rho'' - \varepsilon' \quad \text{ou} \quad \rho'' = \rho + \varepsilon',$$

ε et ε' étant infiniment petits et positifs.

Lorsque $\varepsilon = 0$, $\varepsilon' = 0$, $\rho = \rho' = \rho''$, c'est le cas du cube, on a

$$\Sigma_1 m_1 \psi(\rho_1) x_1^2 = \Sigma_1 m_1 \psi(\rho_1) y_1^2 = \Sigma_1 m_1 \psi(\rho_1) z_1^2.$$

Les coordonnées d'une particule dans un cube dont une cellule a pour dimension 2ρ étant

$$x_1 = K\rho,$$
$$y_1 = K'\rho,$$
$$z_1 = K''\rho.$$

Remplaçons y, ρ par $\rho + \varepsilon$ dans y_1; ρ par $\rho + \varepsilon'$ dans z_1.

Cela revient à faire varier

$$y_1 \text{ de } K'\varepsilon \quad \text{ou} \quad y_1 \frac{\varepsilon}{\rho},$$
$$z_1 \text{ de } K''\varepsilon' \quad \text{ou} \quad z_1 \frac{\varepsilon'}{\rho};$$

donc, en choisissant δ pour signe de ces variations, on aura

$$\delta x_1 = 0, \quad \delta y_1 = y_1 \frac{\varepsilon}{\rho}, \quad \delta z_1 = z_1 \frac{\varepsilon'}{\rho}.$$

Alors

$$\delta \rho_1 = \frac{y_1 \,\delta y_1 + z_1 \,\delta z_1}{\rho_1} = \frac{\varepsilon y_1^2 + \varepsilon' z_1^2}{\rho \rho_1},$$

par suite

$$\delta \sum_1 m_1 \psi(\rho_1) x_1^2 = \sum_1 m_1 \psi(\rho_1) \frac{x_1^2}{\rho_1} \left(\frac{\varepsilon y_1^2 + \varepsilon' z_1^2}{\rho} \right),$$
$$\delta \sum_1 m_1 \psi(\rho_1) y_1^2 = \sum_1 m_1 \psi(\rho_1) \frac{y_1^2}{\rho_1} \left(\frac{\varepsilon y_1^2 + \varepsilon' z_1^2}{\rho} \right) + 2 \sum_1 m_1 \psi(\rho_1) y_1^2 \frac{\varepsilon}{\rho}.$$

La différence $\Sigma_1 m_1 \psi(\rho_1) x_1^2 - \Sigma_1 m_1 \psi(\rho_1) y_1^2$, qui était nulle, devient donc

$$\frac{\varepsilon}{\rho} \left[\sum_1 m_1 \psi'(\rho_1) \frac{x_1^2 y_1^2}{\rho_1} - \sum_1 m_1 \psi'(\rho_1) \frac{y_1^4}{\rho_1} - 2 \sum_1 m_1 \psi(\rho_1) y_1^2 \right]$$
$$+ \frac{\varepsilon'}{\rho} \sum_1 m_1 \frac{\psi'(\rho_1)}{\rho_1} z_1^2 (x_1^2 - y_1^2);$$

mais actuellement les Σ se rapportent au cube : donc le terme en ε' disparaît; d'autre part, si $n_1 \neq 4$, on a

$$\psi(\rho_1) = \frac{\mu_1}{(n_1-4)(g+3h)} \frac{1}{\rho_1^{n_1+1}},$$
$$\psi'(\rho_1) = \frac{-(n_1+1)\mu_1}{(n_1-4)(g+3h)} \frac{1}{\rho_1^{n_1+2}},$$

puis

$$\begin{aligned}
\sum_1 m_1 \frac{\psi'(\rho_1)}{\rho_1} x_1^2 y_1^2 &= \frac{1}{3.5} \sum_1 m_1 \frac{\psi'(\rho_1)}{\rho_1} \rho_1^4 = -\frac{1}{3.5} \frac{n_1+1}{n_1-4} \frac{\mu_1}{g+3h} \sum_1 m_1 \frac{1}{\rho_1^{n_1-1}},\\
\sum_1 m_1 \frac{\psi'(\rho_1)}{\rho_1} y_1^4 &= \frac{1}{5} \sum_1 m_1 \frac{\psi'(\rho_1)}{\rho_1} \rho_1^4 = -\frac{1}{5} \frac{n_1+1}{n_1-4} \frac{\mu_1}{g+3h} \sum_1 m_1 \frac{1}{\rho_1^{n_1-1}},\\
\sum_1 m_1 \psi(\rho_1) y_1^2 &= \frac{1}{3} \sum_1 m_1 \psi(\rho_1)\rho_1^2 = \frac{1}{3} \frac{1}{n_1-4} \frac{\mu_1}{g+3h} \sum_1 m_1 \frac{1}{\rho_1^{n_1-1}}.
\end{aligned}$$

Donc, si l'on pose

$$p = \frac{\mu_1}{g+3h} \sum_1 m_1 \frac{1}{\rho_1^{n_1-1}},$$

la différence considérée devient

$$\frac{p\varepsilon}{\rho}\left(-\frac{1}{3.5}\frac{n_1+1}{n_1-4} + \frac{1}{5}\frac{n_1+1}{n_1-4} - \frac{2}{3}\frac{1}{n_1-4}\right)$$

ou

$$\frac{1}{3.5}\frac{p\varepsilon}{\rho}\frac{2n_1-8}{n_1-4}$$

ou enfin

$$\frac{2p\varepsilon}{3.5.\rho},$$

donc $\beta - \alpha$ a toujours le signe de $p\varepsilon$.

De même $\gamma - \alpha$ a toujours le signe de $p\varepsilon'$.

Si $n_1 = 4$, le même calcul conduit à la même conséquence; dans ce cas, $p = \frac{\mu_1}{g+3h} \sum_1 m_1 \frac{1}{\rho_1^3}$, il suffit de faire $n_1 = 4$ dans sa valeur générale, parce que $n_1 - 4$ n'y entre plus au dénominateur. On voit de même que $\beta - \gamma$ aura le signe de $p(\varepsilon - \varepsilon')$.

Soit donc

$$\rho < \rho' < \rho'' \quad \text{ou} \quad \varepsilon > 0, \quad \varepsilon' > 0, \quad \varepsilon' > \varepsilon.$$

Si $p < 0$, on aura

$$\alpha > \beta > \gamma$$

et, par suite,

$$\nu_1 > \nu_2 > \nu_3 :$$

à la plus petite dimension correspond le plus grand indice, à la plus grande le plus petit.

C'est l'inverse si $p > 0$.

La comparaison du calcul aux données expérimentales va nous permettre de choisir entre ces deux lois.

IX. — Prisme droit a base carrée.

Désignons l'axe des z suivant la hauteur, alors $\rho = \rho'$: donc

$$\Sigma_1 m_1 \psi(\rho_1) x_1^2 = \Sigma_1 m_1 \psi(\rho_1) y_1^2$$

ou

$$\alpha = \beta,$$

par suite

$$\nu_1 = \nu_2.$$

L'indice ordinaire est la valeur commune de ces deux indices, le troisième ν_3 est l'indice extraordinaire. On a

$$\frac{1}{\nu_o^2} = \frac{1-\alpha}{(1+g_1)^5},$$

$$\frac{1}{\nu_e^2} = \frac{1-\gamma}{(1+g_1)^5};$$

à cause de $\alpha + \beta + \gamma = 0$, on a

$$\gamma = -2\alpha,$$

donc

$$\frac{\nu_o^2}{\nu_e^2} = \frac{1+4\alpha}{1-2\alpha}.$$

Si l'on pose

$$\frac{\nu_0}{\nu_e} = f,$$

on en tirera

$$2\alpha = \frac{f^2 - 1}{f^2 + 2}.$$

Cette formule permet de calculer α, et par suite γ.

L'expérience prouve que les cristaux de ce système se partagent en deux catégories, savoir :

Les cristaux répulsifs, où $\nu_o > \nu_e$ ou $f > 1$.

Les cristaux attractifs, où $\nu_o < \nu_e$ ou $f < 1$.

Dans les premiers $\alpha > 0$, $\gamma = -2\alpha$ est négatif; donc

$$\gamma - \alpha \quad \text{ou} \quad -3\alpha < 0.$$

Parmi les cristaux répulsifs de ce système, on peut citer :

Le mellite pour lequel $\frac{\rho}{\rho''} = \frac{2}{3}$;

Le molybdate de plomb pour lequel $\frac{\rho}{\rho''} = \frac{5}{11}$;

L'octaédrite pour lequel $\frac{\rho}{\rho''} = \frac{35}{93}$,

et, parmi les cristaux attractifs :

Le zircon pour lequel $\frac{\rho}{\rho''} = \frac{10}{9}$;

La stannite pour lequel $\frac{\rho}{\rho''} = \frac{3}{2}$.

J'emprunte ces nombres à l'ouvrage de Dufrénoy.

Donc, pour les cristaux répulsifs où l'on a

$$\varepsilon = 0, \quad \varepsilon' > 0.$$

On doit aussi avoir -3α ou $p\varepsilon'$ négatif; il en résulte

$$p \quad \text{ou} \quad \frac{\mu_1}{g + 3h} < 0$$

et, pour les cristaux attractifs,

$$\varepsilon = 0, \quad \varepsilon' < 0, \quad p\varepsilon' > 0;$$

donc encore

$$p \quad \text{ou} \quad \frac{\mu_1}{g+3h} < 0,$$

donc $\mu_1 < 0$ *si l'éther libre peut propager les vibrations longitudinales, c'est-à-dire si* $g + 3h > 0$.

On peut encore en tirer une autre conséquence. On a vu dans le numéro précédent que $\beta - \alpha$ a le signe de

$$\frac{3-n_1}{n_1-4}\frac{\mu_1}{g+3h}\lambda, \tag{22}$$

où $\lambda = \cos 2\theta$ et $\tang\theta = \frac{\rho'}{\rho}$.

De la même manière $\gamma - \alpha$ aura le signe de cette expression où l'on fait maintenant $\tang\theta = \frac{\rho''}{\rho}$.

Or, pour $\rho'' > \rho$, d'où $\theta > 45°$ ou $\lambda < 0$, on doit avoir $\gamma - \alpha < 0$; comme $\frac{\mu_1}{g+3h}$ est négatif, on en conclut

$$\frac{3-n_1}{4-n_1} > 0.$$

Donc, si $n_1 \neq 4$, il est ou inférieur à 3, c'est-à-dire 2 ou 1, ou supérieur à 4. Nous avons déjà observé (n° 6) que la valeur 1 devrait être rejetée et que la valeur 2 était peu probable : donc il y a lieu de penser que $n_1 \geq 4$.

Si $n_1 = 4$, $\gamma - \alpha$ a le signe de

$$\frac{-\lambda\mu_1}{g+3h} \tag{23}$$

pour $\rho'' > \rho$, $\lambda < 0$; donc on a le signe de $\frac{\mu_1}{g+3h}$, qui est bien négative, comme cela doit être. A la vérité, l'idocrase pour lequel on admet $\frac{\rho}{\rho''} = \frac{4}{3}$ (Beudant) et qui est répulsif semble faire exception, mais les raisons de simplicité qui font admettre ce rapport, et qui sont tirées de la considération des modifications sur les arêtes de la base, conduiraient tout aussi bien au rapport simple $\frac{2}{3}$ conforme à la théorie, et il est à remarquer que ce cristal se présente le plus souvent sous une forme allongée dans le sens de la hauteur.

La loi que donne le calcul n'ayant *jamais été soupçonnée par les observateurs*, ils ne s'en sont pas aidés dans les cas douteux, et peut-être faut-il voir dans l'idocrase un premier exemple de l'usage que l'on peut faire de cette loi pour la détermination plus exacte de la forme primitive d'un cristal appartenant au système du prisme droit, à base carrée.

Pour les prismes droits à base rectangle, ou rhombe, ou parallélogramme, qui admettent deux axes optiques, on pourrait encore tirer une vérification du calcul au moyen de l'angle des axes.

Si l'on considère un ellipsoïde dont les axes seraient dirigés suivant les trois axes principaux, et dont les longueurs seraient $\frac{1}{\nu_1}$, $\frac{1}{\nu_2}$, $\frac{1}{\nu_3}$, on aura les axes optiques en prenant les diamètres conjugués aux sections circulaires de cet ellipsoïde; il en résulte que dans un prisme droit à base rectangle les axes doivent être dans un plan perpendiculaire à la dimension moyenne.

On trouvera sans peine que le demi-angle des axes optiques, c'est-à-dire l'angle que fait l'un deux avec l'axe des x correspondant à la dimension ρ, est donné par la formule

$$\operatorname{tang}^2 \mathrm{I} = \frac{(\beta - \alpha)(1 - 2\gamma)}{(\beta - \gamma)(1 - 2\alpha)};$$

la différence $\operatorname{tang}^2 \mathrm{I} - 1$ a le signe de $(\alpha - \gamma)(1 - 2\beta)$, c'est-à-dire de $\alpha - \gamma$. Or, si $\rho < \rho' < \rho''$, comme p ou $\frac{\mu_1}{g + 3h} < 0$, on a

$$\alpha > \beta > \gamma.$$

Donc $\alpha - \gamma > 0$, $\mathrm{I} > 45°$: il en résulte que c'est l'*axe principal correspondant à la plus grande des trois dimensions qui est la bissectrice de l'angle aigu des axes optiques*.

Les ouvrages spéciaux donnent bien pour certaines substances la valeur de I; mais, sans indiquer comment les axes optiques sont disposés par rapport aux arêtes du cristal, je ne puis donc pas vérifier cette conséquence du calcul. Si elle est trouvée exacte sur les corps dont la forme primitive sera non douteuse, elle permettra de la fixer dans les cas douteux.

Je vais maintenant appliquer le calcul aux rhomboèdres qui nous fournissent des résultats comparables aux faits observés et complètement d'accord avec eux.

X. — Rhomboèdre.

Les cristaux appartenant au système du rhomboèdre jouissent de la double réfraction uniaxiale qui devient simple dans le cas particulier du cube; ils se partagent aussi en cristaux répulsifs et en cristaux attractifs, et ont été l'objet de travaux particuliers de Mitscherlich et de M. Fizeau. Nous prendrons pour axe des z l'axe du cristal, ou plutôt l'axe de la cellule qui est un rhomboèdre, et pour axe des x et des y deux axes rectangulaires quelconques dans un plan perpendiculaire au premier, mené par le centre de la cellule. Les lignes du cristal sont parallèles aux arêtes du rhomboèdre, elles forment le même angle θ avec l'axe et entre elles le même angle. Leurs projections sur xoy forment avec ox des angles

$$\omega, \quad \omega + \frac{2\pi}{3}, \quad \omega + \frac{4\pi}{3}.$$

Si l'on désigne par

$$\begin{matrix} a, & b, & c, \\ a', & b', & c', \\ a'', & b'', & c'' \end{matrix}$$

leurs cosinus directeurs, on aura

$$\begin{aligned}
&a = \sin\theta\cos\omega, && a' = \sin\theta\cos\left(\omega + \frac{2\pi}{3}\right), && a'' = \sin\theta\cos\left(\omega + \frac{4\pi}{3}\right),\\
&b = \sin\theta\sin\omega, && b' = \sin\theta\sin\left(\omega + \frac{2\pi}{3}\right), && b'' = \sin\theta\sin\left(\omega + \frac{4\pi}{3}\right),\\
&c = \cos\theta, && c' = \cos\theta, && c'' = \cos\theta.
\end{aligned}$$

Nous prendrons trois nouveaux axes de coordonnées, parallèles aux arêtes du trièdre au sommet, c'est-à-dire aux lignes du cristal, et menés par l'origine; les formules de transformation seront

$$\begin{aligned} x &= ax' + a'y' + a''z', \\ y &= bx' + b'y' + b''z', \\ z &= cx' + c'y' + c''z'. \end{aligned}$$

Nous allons d'abord faire voir que les coefficients

$$\Sigma_1 m_1 x_1 y_1 \psi(\rho_1), \quad \Sigma_1 m_1 x_1 z_1 \psi(\rho_1), \quad \Sigma_1 m_1 y_1 z_1 \psi(\rho_1)$$

sont bien nuls. Si l'on désigne par x'_1, y'_1, z'_1 les coordonnées, dans le nouveau système d'axes de la particule x_1, y_1, z_1, on a

$$\begin{aligned} x_1 y_1 = ab\, x_1'^2 + a'b' y_1'^2 + a''b'' z_1'^2 + (ab' + ba')x'_1 y'_1 \\ + (ab'' + ba'')x'_1 z'_1 + (a'b'' + b'a'')y'_1 z'_1. \end{aligned}$$

Les particules sont également espacées sur chacune des trois lignes, et rien n'est changé si l'on échange entre eux les trois axes $o'x$, $o'y$, oz', ce qui revient à faire tourner le cristal de $\frac{2\pi}{3}$ autour de son axe optique. Donc

$$\begin{aligned} \Sigma_1 m_1 x_1'^2 \psi(\rho_1) &= \Sigma_1 m_1 y_1'^2 \psi(\rho_1) = \Sigma_1 m_1 z_1'^2 \psi(\rho_1), \\ \Sigma_1 m_1 x'_1 y'_1 \psi(\rho_1) &= \Sigma_1 m_1 x'_1 z'_1 \psi(\rho_1) = \Sigma_1 m_1 y'_1 z'_1 \psi(\rho_1); \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \Sigma_1 m_1 x_1 y_1 \psi(\rho_1) = (ab + a'b' + a''b'') \Sigma_1 m_1 x_1'^2 \psi(\rho_1) \\ + (ab' + ba' + ab'' + ba'' + a'b'' + b'a'') \Sigma_1 m_1 x'_1 y'_1 \psi(\rho_1). \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} ab + a'b' + a''b'' &= \sin^2\theta \Big[\cos\omega \sin\omega + \cos\left(\omega + \frac{2\pi}{3}\right) \sin\left(\omega + \frac{2\pi}{3}\right) \\ &\qquad + \cos\left(\omega + \frac{4\pi}{3}\right) \sin\left(\omega + \frac{4\pi}{3}\right) \Big] \\ &= \frac{1}{2} \sin^2\theta \left[\sin 2\omega + \sin\left(2\omega + \frac{4\pi}{3}\right) + \sin\left(2\omega + \frac{2\pi}{3}\right) \right] = 0; \end{aligned}$$

de même

$$ab' + ba' + ab'' + ba'' + a'b'' + b'a''$$
$$= \sin^2\theta\left[\sin\left(2\omega + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(2\omega + \frac{4\pi}{3}\right) + \sin 2\omega\right] = 0.$$

Donc $\Sigma_1 m_1 x_1 y_1 \psi(\rho_1)$ est identiquement nul et de même les deux autres. Nous sommes bien dans le cas où les formules du n° **7** sont applicables.

Il est facile de vérifier de la même manière que

$$\Sigma_1 m_1 x_1^2 \psi(\rho_1) = \Sigma_1 m_1 y_1^2 \psi(\rho_1).$$

D'où il résulte que la double réfraction est uniaxiale, comme pour un prisme droit à base carrée.

Pour connaître la relation de grandeur entre les deux indices ordinaire et extraordinaire, il suffit, d'après ce qui a été dit au n° **9**, de connaître le signe de α. Or on a toujours [§ VII, éq. (17)]

$$\alpha(1 + g_1) = \tfrac{1}{3}\Sigma_1 \rho_1^2 \psi(\rho_1) - \Sigma_1 m_1 x_1^2 \psi(\rho_1)$$

avec

$$\alpha = \beta = -\frac{\gamma}{2}.$$

Prenons pour nouveaux axes ceux que l'on a déjà définis. Soit V l'angle qu'ils font entre eux et qui n'est autre chose que l'angle de la face au sommet du rhomboèdre; désignons par λ le cosinus de cet angle, on a

$$\rho_1^2 = x_1'^2 + y_1'^2 + z_1'^2 + 2\lambda(x_1' y_1' + x_1' z_1' + y_1' z_1');$$

donc

$$\Sigma_1 m_1 \rho_1^2 \psi(\rho_1) = \Sigma_1 m_1 (x_2'^2 + y_1'^2 + z_1'^2)\psi(\rho_1)$$
$$+ 2\lambda \Sigma_1 m_1 (x_1' y_1' + x_1' z_1' + y_1' z_1')\psi(\rho_1),$$

puis

$$x_1^2 = a^2 x_1'^2 + a'^2 y_1'^2 + a''^2 z_1'^2 + 2aa' x_1' y_1' + 2aa'' x_1' z_1' + 2a'a'' y_1' z_1';$$

par suite

$$\Sigma_1 m_1 x_1^2 \psi(\rho_1) = \tfrac{1}{3}(a^2 + a'^2 + a''^2)\,\Sigma_1 m_1 (x_1'^2 + y_1'^2 + z_1'^2)\,\psi(\rho_1)$$
$$+ \tfrac{2}{3}(aa' + aa'' + a'a'')\,\Sigma_1 m_1 (x_1' y_1' + x_1' z_1' + y_1' z_1')\,\psi(\rho_1),$$

or

$$a^2 + a'^2 + a''^2 = \tfrac{3}{2}\sin^2\theta,$$
$$2(aa' + aa'' + a'a'') = -\tfrac{3}{2}\sin^2\theta,$$

et enfin

$$\cos V \quad \text{ou} \quad \lambda = aa' + bb' + cc' = 1 - \tfrac{3}{2}\sin^2\theta.$$

Donc

$$\Sigma_1 m_1 x_1^2 \psi(\rho_1) = \tfrac{1}{3}(1 - \lambda)\,\Sigma_1 m_1 (x_1'^2 + y_1'^2 + z_1'^2)\,\psi(\rho_1)$$
$$- \tfrac{1}{3}(1 - \lambda)\,\Sigma_1 m_1 (x_1' y_1' + x_1' z_1' + y_1' z_1')\,\psi(\rho_1).$$

Il en résulte

$$(25)\quad \begin{cases} 3\alpha(1 + g_1) = \lambda\Sigma_1 m_1 (x_1'^2 + y_1'^2 + z_1'^2)\,\psi(\rho_1) \\ \qquad + (1 + \lambda)\,\Sigma_1 m_1 (x_1' y_1' + x_1' z_1' + y_1' z_1')\,\psi(\rho_1). \end{cases}$$

Nous allons développer le second membre en série convergente suivant les puissances de λ, en considérant d'abord le cas où λ est en valeur absolue moindre que $\frac{1}{2}$ et plus particulièrement lorsqu'il est négatif.

Nous ferons

$$x_1'^2 + y_1'^2 + z_1'^2 = r^2,$$
$$x_1' y_1' + x_1' z_1' + y_1' z_1' = \xi.$$

Pour effectuer le développement par la formule de Maclaurin, il faut faire $\lambda = 0$ dans tous les termes du développement; les Σ_1 qui y entreront devront donc être considérées comme se rapportant à un cristal cubique pour lequel la demi-dimension d'une cellule serait égale à la demi-arête de la cellule rhomboédrique.

On a

$$\frac{d\rho_1}{d\lambda} = \frac{\xi}{\rho_1},$$

et pour $\lambda = 0$,

$$\left(\frac{d\rho_1}{d\lambda}\right)_0 = \frac{\xi}{r}.$$

Prenons d'abord le cas général où $n_1 \neq 4$, et faisons abstraction pour un instant du facteur $\frac{\mu_1}{(n_1-4)(g+3h)}$; alors $\psi(\rho_1)$ se réduira à $\frac{1}{\rho_1^{n_1+1}}$, et l'on aura

$$\frac{1}{\rho_1^{n_1+1}} = \frac{1}{r^{n_1+1}} - \frac{n_1+1}{r^{n_1+3}}\lambda\xi + \frac{(n_1+1)(n_1+3)}{1.2}\lambda^2\frac{\xi^2}{r^{n_1+5}} - \dots$$
$$+(-1)^m\frac{(n_1+1)(n_1+3)\dots(n_1+2m-1)}{1.2.3\dots m}\lambda^m\frac{\xi^m}{r^{n_1+2m+1}}+\dots.$$

Cette série est convergente. En effet, puisque par hypothèse λ est en valeur absolue moindre que $\frac{1}{2}$, V est compris entre 60° et 120°; il en est de même de son supplément; on peut donc construire un trièdre dont les trois faces auront même valeur 180° — V. Prenons les arêtes de ce trièdre pour axes de coordonnées et imaginons un point qui aurait pour coordonnées dans le système x'_1, y'_1, z'_1. Le carré de la distance de ce point au sommet, lequel est toujours positif, aurait pour valeur

$$x_1'^2+y_1'^2+z_1'^2-2\lambda(x'_1y'_1+x'_1z'_1+y'_1z'_1),$$

donc

$$r^2-2\lambda\xi>0;$$

d'autre part, on a aussi

$$\rho_1^2=r^2+2\lambda\xi$$

et, par suite,

$$r^2+2\lambda\xi>0.$$

Donc, dans tous les cas, on a

$$\frac{2\lambda\xi}{r^2}<1$$

en valeur absolue.

Or, le rapport d'un terme au précédent dans la série considérée a visiblement pour limite $-\frac{2\lambda\xi}{r^2}$; il est donc toujours inférieur à I en valeur absolue, et la série est bien convergente.

Actuellement, on a

$$\Sigma_1 m_1(x_1'^2+y_1'^2+z_1'^2)\psi(\rho_1)$$
$$=\sum_1\frac{m_1}{r^{n_1-1}}-(n_1+1)\lambda\Sigma_1 m_1\frac{\xi}{r^{n_1+1}}+\frac{(n_1+1)(n_1+3)}{1.2}\lambda^2\Sigma_1 m_1\frac{\xi^2}{r^{n_1+3}}-\dots$$
$$+(-1)^m\frac{(n_1+1)(n_1+3)\dots(n_1+2m-1)}{1.2.3\dots m}\lambda^m\Sigma_1 m_1\frac{\xi^m}{r^{n_1+2m-1}}+\dots,$$

et de même

$$\Sigma_1 m_1(x'_1 y'_1 + x'_1 z'_1 + y'_1 z'_1)\psi(\rho_1)$$
$$= \Sigma_1 m_1 \frac{\xi}{r^{n_1+1}} - (n_1+1)\lambda\Sigma_1 m_1 \frac{\xi^2}{r^{n_1+3}} + \frac{(n_1+1)(n_1+3)}{1.2}\lambda^2\Sigma_1 m_1 \frac{\xi^3}{r^{n_1+5}} - \dots$$
$$+ (-1)^m \frac{(n_1+1)(n_1+3)\dots(n_1+2m-1)}{1.2.3\dots m}\lambda^m \Sigma_1 m_1 \frac{\xi^{m+1}}{r^{n_1+2m+1}} + \dots$$

Nous sommes conduits à calculer les sommes, telles que

$$\Sigma_1 m_1 \frac{\xi^m}{r^{n_1+2m-1}},$$

Σ_1 se rapportant à un cube, comme on l'a observé. Or, dans un cube, la valeur d'une pareille somme est indépendante de la direction des axes. Prenons pour nouvel axe des z la droite menée par l'origine et également inclinée sur les directions positives des trois axes ox', oy, oz, lesquels sont censés ramenés maintenant à être rectangulaires, et dans le plan perpendiculaire à cette droite menée par l'origine prenons deux axes quelconques. Ces axes étant désignés par ox, oy, oz, on voit que z n'est autre chose que la distance du point x'_1, y'_1, z'_1 au plan précédemment défini et dont l'équation dans le premier système est

$$x' + y' + z' = 0;$$

on a donc

$$z^2 = \frac{(x'_1 + y'_1 + z'_1)^2}{3} = \tfrac{1}{3}(x'^2_1 + y'^2_1 + z'^2_1) + \tfrac{2}{3}(x'_1 y'_1 + x'_1 z'_1 + y'_1 z'_1),$$

ou

$$3z^2 = r^2 + 2\xi.$$

Si maintenant on désigne par θ' l'angle que fait avec oz la droite qui joint l'origine au point x'_1, y'_1, z'_1, on a

$$z = r\cos\theta'$$

et, par suite,

$$2\xi = (3\cos^2\theta' - 1)r^2.$$

Désignons, en outre, par ω' l'angle que fait avec ox la projection de cette même droite sur le plan xoy. Si l'on imagine que l'on fasse tourner les axes ox', oy', oz' ou, si l'on veut, les axes ox, oy, oz de toutes les manières possibles autour de l'origine, ce qui revient à donner à ω' et à θ' toutes les valeurs possibles et variant par degrés aussi petits que l'on veut, puis que l'on prenne la moyenne des valeurs de Σ_1 ainsi obtenues, on aura justement la valeur de Σ_1, puisqu'elle est restée invariable dans ces changements (Cauchy, *Exercices*). Nous nous bornerons à faire varier ω' de zéro à 2π et θ' de zéro à $\frac{\pi}{2}$, ce qui suffit pour que $\cos^2\theta'$ prenne toutes les valeurs possibles. On a ainsi

$$\Sigma_1 m_1 \frac{\xi^m}{r^{n_1+2m-1}} = \sum\nolimits_1 \frac{m_1}{r^{n_1-1}} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\omega' \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{3\cos^2\theta' - 1}{2}\right)^m \sin\theta'\,d\theta'$$

$$= \sum\nolimits_1 \frac{m_1}{r^{n_1-1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{3\cos^2\theta' - 1}{2}\right)^m \sin\theta'\,d\theta'$$

ou, si l'on fait $\cos\theta' = u$,

$$\Sigma_1 m_1 \frac{\xi^m}{r^{n_1+2m-1}} = \sum\nolimits_1 \frac{m_1}{r^{n_1-1}} \frac{1}{2^m}\int_0^1 (3u^2 - 1)^m\,du.$$

En développant $(3u^2 - 1)^m$, il serait facile d'avoir la valeur de l'intégrale, mais il est préférable d'opérer de la manière suivante.

Faisons

$$X_m = \frac{1}{2^m}\int_0^1 (3u^2 - 1)^m\,du.$$

L'intégration par parties donne

$$\begin{aligned} \int (3u^2 - 1)^m du &= u(3u^2 - 1)^m - 6m\int u^2(3u^2 - 1)^{m-1} du \\ &= u(3u^2 - 1)^m - 2m\int (3u^2 - 1)^m du \\ &\qquad - 2m\int (3u^2 - 1)^{m-1} du; \end{aligned}$$

d'où

$$\int_0^1 (3u^2 - 1)^m du = 2^m - 2m\int_0^1 (3u^2 - 1)^m du - 2m\int_0^1 (3u^2 - 1)^{m-1} du.$$

Divisons par 2^m, nous aurons

$$(26) \qquad (1+2m)X_m + mX_{m-1} = 1.$$

Pour $m=0$, on a

$$X_0 = \int_0^1 du = 1.$$

Pour $m=1$,

$$3X_1 + X_0 = 1, \quad \text{d'où} \quad X_1 = 0.$$

L'équation précédente, qui peut être considérée comme une équation aux différences finies, est analogue à l'équation différentielle linéaire et peut aussi se résoudre par un procédé analogue.

Posons

$$X_m = K_m X'_m.$$

Avec les conditions

$$K_1 = 0, \quad X'_1 = \tfrac{1}{3},$$

l'équation (26) devient

$$(27) \qquad (1+2m)K_m X'_m + mK_{m-1}X'_{m-1} = 1.$$

Déterminons X'_m par l'équation

$$(1+2m)X'_m + mX'_{m-1} = 0,$$

d'où

$$X'_m = -\frac{m}{2m+1}X'_{m-1}$$

Si l'on fait successivement $m = 2, 3, \ldots m$, on a

$$\begin{aligned} X'_2 &= -\tfrac{2}{5}X'_1, \\ X'_3 &= -\tfrac{3}{7}X'_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ X'_m &= -\frac{m}{2m+1}X'_{m-1}, \end{aligned}$$

et, en multipliant membre à membre et supprimant les facteurs communs,

$$X'_m = (-1)^{m-1}\frac{2.3.4\ldots m}{3.5.7\ldots(2m+1)}.$$

L'équation (27) devient alors

$$(1+2m)X'_m(K_m - K_{m-1}) = 1$$

ou

$$K_m - K_{m-1} = \frac{1}{(1+2m)X'_m} = (-1)^{m-1}\frac{3.5.7\ldots(2m-1)}{1.2.3\ldots m}.$$

Donnons maintenant à m les valeurs $2, 3, \ldots, m$, nous aurons

$$\begin{aligned} K_2 - K_1 &= -\frac{3}{2},\\ K_3 - K_2 &= +\frac{3.5}{2.3},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ K_m - K_{m-1} &= (-1)^{m-1}\frac{3.5.7\ldots(2m-1)}{1.2.3\ldots m}. \end{aligned}$$

Ajoutons membre à membre, et tenons compte de la condition $K_1 = 0$, nous aurons

$$K_m = -\frac{3}{2} + \frac{3.5}{2.3} - \frac{3.5.7}{2.3.4} + \cdots + (-1)^{m-1}\frac{3.5.7\ldots(2m-1)}{1.2.3\ldots m}.$$

La série obtenue en faisant croître m indéfiniment est divergente, parce que le rapport d'un terme au précédent tend vers 2; mais, si l'on forme X_m, on a

$$X_m = (-1)^{m-1}\frac{1.2.3\ldots m}{3.5.7\ldots(2m+1)}K_m,$$

ou

$$X_m = \frac{1}{2m+1}\Bigg[1 - \frac{m}{2m-1} + \frac{m(m-1)}{(2m-1)(2m-3)} - \frac{m(m-1)(m-2)}{(2m-1)(2m-3)(2m-5)} + \cdots + (-1)^m\frac{3.4.5\ldots m}{5.7.9\ldots(2m-1)}\Bigg],$$

en renversant dans K_m l'ordre des termes. Actuellement, si l'on fait croître m indéfiniment, la série obtenue dans la parenthèse est convergente, car le rapport d'un terme au précédent tend vers $\frac{1}{2}$. Il en résulte que X_m tend vers zéro. De plus, tous les termes de la parenthèse allant en décroissant à partir du premier, la parenthèse conserve une valeur positive, et il en est de même de X_m.

La relation (26) permet de trouver la limite de la parenthèse; faisons

$$(2m+1)X_m = S_m,$$

l'équation (26) devient

$$S_m + \frac{m}{2m-1} S_{m-1} = 1;$$

S_m et S_{m-1} étant de même signe et tendant vers une même limite S, on a

$$S + \tfrac{1}{2}S = 1,$$

d'où

$$S = \tfrac{2}{3}.$$

C'est justement la valeur que l'on obtiendrait en remplaçant dans la parenthèse chaque terme par sa limite, ce qui donnerait

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots + (-1)^m \frac{1}{2^m} + \ldots \quad \text{ou} \quad \frac{2}{3}.$$

Cela posé, cherchons le terme général du second membre de l'équation (25), il sera

$$\begin{aligned}
&(-1)^m \frac{(n_1+1)(n_1+3)\ldots(n_1+2m-1)}{1.2\ldots m} \lambda^{m+1} \Sigma_1 m_1 \frac{\xi^m}{r^{n_1+2m-1}} \\
&+(-1)^m \frac{(n_1+1)(n_1+3)\ldots(n_1+2m-1)}{1.2.3\ldots m} \lambda^{m+1} \Sigma_1 m_1 \frac{\xi^{m+1}}{r^{n_1+2m+1}} \\
&+(-1)^{m+1} \frac{(n_1+1)(n_1+3)\ldots(n_1+2m+1)}{1.2.3\ldots m(m+1)} \lambda^{m+1} \Sigma_1 m_1 \frac{\xi^{m+2}}{r^{n_1+2m+1}},
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
&(-1)^m \frac{(n_1+1)(n_1+3)\ldots(n_1+2m-1)}{1.2\ldots m} \lambda^{m+1} \Sigma_1 m_1 \frac{1}{r^{n_1-1}} \\
&\times\left(X_m + X_{m+1} - \frac{n_1+2m+1}{m+1} X_{m+2}\right),
\end{aligned}$$

au facteur près,

$$\frac{\mu_1}{(n_1-4)(g+3h)}.$$

De l'équation (26) on tire

$$\begin{aligned}(3+2m)X_{m+1}+(m+1)X_m &= 1,\\ (5+2m)X_{m+2}+(m+2)X_{m+1} &= 1,\end{aligned}$$

qui permettent de calculer X_{m+1} et X_{m+2} en fonction de X_m; la parenthèse devient alors, toutes réductions faites,

$$(4-n_1)\frac{(m+2)X_m+1}{(3+2m)(5+2m)}.$$

Donc, enfin, le terme général de la valeur de $3\alpha(1+g_1)$ devient

$$-(-1)^m\frac{(n_1+1)(n_1+3)\ldots(n_1+2m-1)}{1.2.3\ldots m}\frac{\mu_1}{g+3h}$$
$$\times\sum\nolimits_1\frac{m_1}{r^{n_1-1}}\lambda^{m+1}\frac{(m+2)X_m+1}{(3+2m)(5+2m)}.$$

Le rapport d'un terme au précédent est donc, en valeur absolue,

$$\frac{n_1+2m-1}{m}\lambda\frac{1+2m}{5+2m}\frac{(m+2)X_m+1}{(m+1)X_{m-1}+1};$$

le dernier facteur peut s'écrire

$$\frac{\frac{m+2}{2m+1}S_m+1}{\frac{m+1}{2m-1}S_{m-1}+1},$$

il a pour limite $\frac{\frac{1}{2}S+1}{\frac{1}{2}S+1}$ ou 1. De même, $\frac{1+2m}{5+2m}$ a pour limite 1, enfin le premier a pour limite 2; donc la limite du rapport considéré est 2λ, lequel est moindre que 1 par hypothèse. Il en résulte que la série est bien convergente.

On a ainsi

$$(28)\quad\left\{\begin{aligned}&3\alpha(1+g_1)=\frac{-\mu_1\lambda}{g+3h}\Sigma_1 m_1\frac{1}{r^{m-1}}\\ &\quad\times\left[\frac{1}{5}-\frac{n_1+1}{5.7}\lambda+\frac{(n_1+1)(n_1+3)}{2.5.7}\lambda^2-\frac{(n_1+1)(n_1+3)(n_1+5)}{2.3.7.11}\lambda^3+\cdots\right.\\ &\qquad\left.+(-1)^m\frac{(n_1+1)\ldots(n_1+2m-1)}{1.2.3\ldots m}\lambda^m\frac{(m+2)X_m-1}{(3+2m)(5+2m)}+\cdots\right],\end{aligned}\right.$$

Pour $n_1 = 4$, on a immédiatement, suivant une remarque déjà faite,

$$3\alpha(1+g_1) = \frac{\mu_1}{g+3h}\Sigma_1 m_1 \frac{Lr}{r^3}\left(\frac{1}{5} - \frac{\lambda}{7} + \frac{\lambda^2}{2} - \dots\right).$$

La série obtenue n'est convergente que si λ est compris entre $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$; cette condition est toujours satisfaite lorsque l'angle V est obtus, c'est-à-dire λ négatif, car l'angle V ne peut pas atteindre 120°, la formule (28) est donc toujours applicable aux rhomboèdres obtus. Dans ce cas tous les termes de la série sont positifs, et α a constamment le signe de $\frac{\mu_1}{g+3h}$. Lorsque V est aigu, c'est-à-dire λ positif, la formule (28) n'est pas toujours applicable, parce que l'angle V peut descendre au-dessous de 60°, et, de plus, même dans les cas où la série resterait convergente, on ne voit pas immédiatement, à moins que λ ne soit très petit, que α conserve un signe invariable, comme nous nous proposons de l'établir. Il faut avoir recours à un autre mode de développement.

D'après ce qui a été dit précédemment, on voit que l'équation (25) peut s'écrire

$$3\alpha(1+g_1) = \frac{\mu_1}{(n_1-4)(g+3h)}\Sigma_1 m_1 \frac{\lambda r^2 + (\lambda+1)\xi}{\rho_1^{n_1+1}},$$

ρ_1^2 ayant toujours la valeur $r^2 + 2\lambda\xi$. Si l'on fait, comme on l'a dit, $\zeta = \frac{3\cos^2\theta' - 1}{2} r^2$, puis qu'avant de développer on intègre par rapport à θ', on aura

$$3\alpha(1+g_1) = \frac{\mu_1}{(n_1-4)(g+3h)}\sum\nolimits_1 \frac{m_1}{r^{n_1-1}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\lambda + \frac{\lambda+1}{2}(3\cos^2\theta' - 1)}{\sqrt{[1+\lambda(3\cos^2\theta'-1)]^{n_1+1}}}\sin\theta'\, d\theta'.$$

C'est de cette dernière intégrale que nous avons formé le développement par rapport aux puissances de λ, dans le cas où 2λ est en valeur absolue moindre que 1. Pour avoir un développement convergent pour toute valeur positive de λ moindre que I, nous procéderons de la manière suivante :

Remplaçons $\cos^2\theta'$ par $\frac{1+\cos 2\theta'}{2}$, il vient

$$1+\lambda(3\cos^2\theta'-1)=\frac{(2+\lambda)+3\lambda\cos 2\theta'}{2}=\frac{2+\lambda}{2}\left(1+\frac{3\lambda}{2+\lambda}\cos 2\theta'\right).$$

Posons $\frac{3\lambda}{2+\lambda}=\varepsilon$, pour toute valeur de λ comprise entre zéro et I, ε est positif et inférieur à I. On a ainsi

$$3\alpha(1+g_1)=\frac{\mu_1}{(n_1-4)(g+3h)}\sum_1\frac{m_1}{r^{n_1-1}}\sqrt{\frac{2^{n_1-3}}{(2+\lambda)^{n_1+1}}}$$
$$\times\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\rho\lambda+1)+3(\lambda+1)\cos 2\theta'}{\sqrt{(1+\varepsilon\cos 2\theta')^{n_1+1}}}\sin\theta'\,d\theta'.$$

On peut maintenant développer $(1+\varepsilon\cos 2\theta')^{-\frac{n_1+1}{2}}$ en série convergente suivant les puissances de $\varepsilon\cos 2\theta'$; on a

$$(1+\varepsilon\cos 2\theta')^{-\frac{n_1+1}{2}}=1-\frac{n_1+1}{2}\varepsilon\cos 2\theta'+\frac{(n_1+1)(n_1+3)}{2.4}\varepsilon^2\cos^2 2\theta'+\ldots$$
$$+(-1)^m\frac{(n_1+1)(n_1+3)\ldots(n_1+2m-1)}{2.4.6\ldots 2m}\varepsilon^m\cos^m 2\theta'+\ldots;$$

on en conclut

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\rho\lambda+1}{\sqrt{(1+\varepsilon\cos 2\theta')^{n_1+1}}}\sin\theta'\,d\theta'$$
$$=(\rho\lambda+1)\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta'\,d\theta'-\frac{n_1+1}{2}\varepsilon\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2\theta'\sin\theta'\,d\theta'+\ldots\right.$$
$$\left.+(-1)^m\frac{(n_1+1)\ldots(n_1+2m-1)}{2.4.6\ldots 2m}\varepsilon^m\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m 2\theta'\sin\theta'\,d\theta'+\ldots\right]$$

et

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3(\lambda+1)\cos 2\theta'}{\sqrt{(1+\varepsilon\cos 2\theta')^{n_1+1}}}\sin\theta'\,d\theta'$$
$$=3(\lambda+1)\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2\theta'\sin\theta'\,d\theta'-\frac{n_1+1}{2}\varepsilon\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 2\theta'\sin\theta'\,d\theta'+\ldots\right.$$
$$\left.+(-1)^m\frac{(n_1+1)\ldots(n_1+2m-1)}{2.4.6\ldots 2m}\varepsilon^m\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{m+1}2\theta'\sin\theta'\,d\theta'+\ldots\right].$$

Nous poserons ici

$$X_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m 2\theta' \sin\theta' \, d\theta'$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos^2\theta' - 1)^m \sin\theta' \, d\theta' = \int_0^1 (2u^2 - 1)^m \, du,$$

en faisant $u = \cos\theta'$.

L'intégration par parties donne la relation

$$(29) \qquad (1 + 2m)X_m + 2mX_{m-1} = 1,$$

avec la condition

$$X_0 = \int_0^1 du = 1, \quad \text{d'où} \quad X_1 = -\tfrac{1}{3}.$$

Si l'on pose, comme on l'a déjà fait,

$$X_m = K_m X'_m,$$

puis

$$(1 + 2m)X'_m + 2mX'_{m-1} = 0,$$

avec les conditions $K_0 = 1$, $X'_0 = 1$, on aura

$$X'_m = (-1)^m \frac{2.4.6\ldots 2m}{1.3.5\ldots(2m+1)},$$

puis

$$K_m = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1.3}{2.4} - \frac{1.3.5}{2.4.6} + \ldots + (-1)^m \frac{1.3.5\ldots(2m-1)}{2.4.6\ldots 2m}.$$

La série obtenue, en faisant croître m indéfiniment, est ici convergente. En effet, on voit d'abord que les termes vont sans cesse en décroissant, car le rapport d'un terme au précédent est en valeur absolue $\frac{2m-1}{2m}$ ou $1 - \frac{1}{2m}$, toujours inférieur à 1. Comme la série a ses termes alternativement positifs et négatifs, il suffit de montrer que le terme général tend vers zéro. Or on peut toujours prendre un nombre m' fini assez grand pour que

$$1 - \frac{1}{2m'} < e^{-\frac{1}{2m'}}.$$

e étant la base des logarithmes népériens, et *a fortiori* pour tout nombre supérieur à m'. Le terme général peut s'écrire

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2m'-2}\right)\left(1-\frac{1}{2m'}\right)\left(1-\frac{1}{2m'+2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2m}\right).$$

Mettons à part

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{m'-2}\right).$$

Ce produit a une valeur finie; le produit des autres facteurs est moindre que $e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{m'}+\frac{1}{m'}+\ldots+\frac{1}{m}\right)}$ qui tend visiblement vers zéro; il en résulte bien que le terme général considéré tend aussi vers zéro, et par suite que K_m tend vers une limite finie et déterminée, lorsque m croît indéfiniment. Cette limite est positive et inférieure à I.

On a maintenant

$$X_m=(-1)^m\frac{2.4.6\ldots 2m}{1.3.5\ldots(2m+1)}K_m$$

ou

$$X_m=(-1)^m\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2m+1}\right)K_m.$$

Le même raisonnement prouve que X_m tend vers zéro. Actuellement on a

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}&\frac{(5\lambda+1)}{\sqrt{(1+\varepsilon\cos 2\theta')^{n_1+1}}}\sin\theta'\,d\theta'\\&=(5\lambda+1)\Big[1-\frac{n_1+1}{2}\varepsilon X_1+\frac{(n_1+1)(n_1+3)}{2.4}\varepsilon^2X_2+\ldots\\&\qquad+(-1)^m\frac{(n_1+1)\ldots(n_1+2m-1)}{2.4\ldots 2m}\varepsilon^m X_m+\ldots\Big],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}&\frac{3(\lambda+1)\cos 2\theta'}{\sqrt{(1+\varepsilon\cos 2\theta')^{n_1+1}}}\sin\theta'\,d\theta'\\&=3(\lambda+1)\Big[X_1-\frac{n_1+1}{2}\varepsilon X_2+\frac{(n_1+1)(n_1+3)}{2.4}\varepsilon^2X_3+\ldots\\&\qquad+(-1)^m\frac{(n_1+1)\ldots(n_1+2m-1)}{2.4\ldots 2m}\varepsilon^m X_{m+1}+\ldots\Big].\end{aligned}$$

Comme la série

$$1+\frac{n_1+1}{2}\varepsilon+\frac{(n_1+1)(n_1+3)}{2.4}\varepsilon^2+\ldots+\frac{(n_1+1)\ldots(n_1+2m-1)}{2.4\ldots 2m}\varepsilon^m+\ldots$$

est convergente, c'est $\sqrt{(1+\varepsilon)^{n_1+1}}$, et que X_m tend vers zéro, les deux séries précédemment obtenues sont aussi convergentes, et quels que soient les signes des termes.

D'autre part, on a

$$5\lambda+1=\frac{3(3\varepsilon+1)}{3-\varepsilon},$$
$$3(\lambda+1)=\frac{3(\varepsilon+3)}{3-\varepsilon}.$$

Le terme général de la valeur de $3\alpha(1+g_1)$, abstraction faite du facteur commun,

$$\frac{3\mu_1}{(n_1-4)(g+3h)(3-\varepsilon)}\Sigma_1 m_1\frac{1}{r^{n_1-1}}\sqrt{\frac{2^{n_1-3}}{(2+\lambda)^{n_1+1}}},$$

est donc

$$(-1)^m\varepsilon^{m+1}\frac{(n_1+1)(n_1+3)\ldots(n_1+2m-1)}{2.4.6\ldots 2m}$$
$$\times\left[3X_m+X_{m+1}-\frac{n_1+2m+1}{2(m+1)}(3X_{m+2}+X_{m+1})\right].$$

De la relation (29) on tire

$$(3+2m)X_{m+1}+2(m+1)X_m=1,$$
$$(5+2m)X_{m+2}+2(m+2)X_{m+1}=1;$$

on peut donc exprimer X_{m+1} et X_{m+2} en fonction de X_m, et la parenthèse devient, toutes réductions faites,

$$(4-n_1)\frac{(4m+7)X_m+1}{(3+2m)(5+2m)}.$$

On voit encore apparaître ici le facteur commun $4-n_1$, comme on devait s'y attendre, et le terme général, dans $3\alpha(1+g_1)$, devient

$$\frac{-3\mu_1}{(g+3h)(3-\varepsilon)}\sum_1 \frac{m_1}{r^{n_1-1}}\sqrt{\frac{2^{n_1-3}}{(2+\lambda)^{n_1+1}}}$$
$$\times(-1)^m\varepsilon^{m+1}\frac{(n_1+1)\ldots(n_1+2m-1)}{2.4.6\ldots 2m}\,\frac{(4m+7)X_m+1}{(3+2m)(5+2m)}.$$

Pour $m=0$ le coefficient $\dfrac{(n_1+1)\ldots(n_1+2m-1)}{2.4\ldots 2m}$ doit être réduit à 1, et l'on a

$$(30)\quad\left\{\begin{aligned}
3\alpha(1+g_1) &= \frac{-3\mu_1\varepsilon}{(g+3h)(3-\varepsilon)}\sum_1 \frac{m_1}{r^{n_1-1}}\sqrt{\frac{2^{n_1-3}}{(2+\lambda)^{n_1+1}}}\\
&\quad\times\left[\frac{7X_0+1}{3.5}-\frac{(n_1+1)(11X_1+1)}{2.5.7}\varepsilon\right.\\
&\qquad+\frac{(n_1+1)(n_1+3)}{2.4.7.9}(15X_2+1)\varepsilon^2+\ldots\\
&\qquad\left.+(-1)^m\frac{(n_1+1)\ldots(n_1+2m-1)}{2.4\ldots 2m}\varepsilon^m\frac{(4m+7)X_m+1}{(3+2m)(5+2m)}+\ldots\right].
\end{aligned}\right.$$

Posons maintenant

$$(4m+7)X_m+1=8Y_m.$$

Si de cette relation on tire X_m et que l'on porte sa valeur dans (29), on a

$$(2m+1)(4m+3)Y_m+2m(4m+7)Y_{m-1}=(2m+1)(2m+3).$$

En appliquant à cette équation la méthode déjà employée et tenant compte de la condition

$$8Y_0=7X_0+1=8,\quad \text{d'où}\quad Y_0=1,$$

on voit que Y_m a le signe de $(-1)^m$; il en résulte que tous les termes de la série entre parenthèses sont positifs pour $\varepsilon>0$ et <1. On a donc finalement, en faisant $Y_m=(-1)^m Y'_m$, Y'_m étant tous positifs,

$$(31)\quad\left\{\begin{aligned}
3\alpha(1+g_1) &= \frac{-3\mu_1\varepsilon}{(g+3h)(3-\varepsilon)}\sum_1 \frac{m_1}{r^{n_1-1}}\sqrt{\frac{2^{n_1+1}}{(2+\lambda)^{n_1+1}}}\\
&\quad\times\left[\frac{1}{3.5}+\frac{(n_1+1)Y'_1}{2.5.7}\varepsilon+\frac{(n_1+1)(n_1+3)}{2.4.7.9}\varepsilon^2 Y'_2+\ldots\right.\\
&\qquad\left.+\frac{(n_1+1)\ldots(n_1+2m-1)}{2.4\ldots 2m}\varepsilon^m\frac{Y'_m}{(3+2m)(5+2m)}+\ldots\right],
\end{aligned}\right.$$

et l'on voit que α a constamment le signe de

$$\frac{-\mu_1}{g+3h}.$$

Pour $\lambda = 0$ ou $\varepsilon = 0$, $\alpha = 0$, ce qui devait être.

XI. — Discussion et conséquences.

J'emprunte encore à l'Ouvrage de Dufrénoy des données numériques pour comparer à l'observation les résultats des calculs précédents.

Parmi les cristaux répulsifs appartenant au système du rhomboèdre, on trouve :

Le corindon,
$$V = 85^\circ 50';$$
Le cinabre,
$$V = 62^\circ 58';$$
L'arséniate de cuivre,
$$V = 58^\circ 10'.$$

Pour ces cristaux λ ou ε est positif, et, comme α est positif, on en conclut (formule 31)

$$\frac{\mu_1}{g+3h} < 0.$$

Pour les cristaux attractifs :

Le quartz,
$$V = 93^\circ 58';$$
La dioptase,
$$V = 95^\circ 16';$$
L'argent rouge,
$$V = 103^\circ 16'.$$

Pour ces cristaux λ est négatif et α est aussi négatif; donc, en vertu de la formule (28), on doit avoir aussi

$$\frac{\mu_1}{g+3h} < 0.$$

Ainsi l'on est conduit encore à cette conséquence que, *si l'éther libre peut propager les vibrations longitudinales, il est repoussé par les particules pondérables.*

En outre, le calcul, d'accord avec l'observation, conduit à cette loi :

Un cristal appartenant au système rhomboédrique est attractif ou répulsif, suivant que l'angle de la face à l'extrémité de l'axe est obtus ou aigu.

Le spath et la tourmaline paraissent contredire ces conséquences. La considération du clivage a fait admettre par plusieurs minéralogistes, pour forme primitive du spath, un rhomboèdre obtus dont les dièdres au sommet valent 105°5′ et les faces 101°55′, et ce cristal est répulsif. Mais, en y regardant de près, on voit que ce choix n'a rien de nécessaire. Haüy ne prenait pas pour forme primitive celle dont nous venons de parler, et il a décrit d'autres rhomboèdres de spath se déduisant les uns des autres et du solide de clivage, et *vice versa*, d'après les lois ordinaires des modifications cristallines ; quelques-uns sont très aigus, et c'est le plus grand nombre. En particulier, on trouve l'*inverse*, désigné par le symbole e', dit inverse d'Haüy, et qui jouit de cette propriété géométrique que ses faces sont supplémentaires des dièdres du premier, et *vice versa ;* la section principale a donc les mêmes angles que dans le solide de clivage. Le solide de clivage est extrêmement rare dans la nature ; l'inverse se rencontre bien plus fréquemment. Il y a donc quelque raison de penser que cette forme inverse correspond plutôt que le solide de clivage à la forme primitive, c'est-à-dire que les files de particules sont parallèles à ses arêtes. L'angle V pour ce rhomboèdre étant de 74°55′, le spath rentre ainsi dans la première série des cristaux déjà cités.

La même observation s'applique en tout point à la tourmaline dont la forme primitive serait encore l'inverse e', dont l'angle V vaut 46°24′. Ce cristal est aussi répulsif.

On objectera peut-être à ce qui précède que l'on pourrait tout aussi bien prendre les inverses des formes adoptées pour les autres cristaux cités, ce qui renverserait nos conclusions; mais, sauf pour l'argent rouge, on ne trouve jamais ces formes inverses à l'état naturel (Dufrénoy).

Le spath et la tourmaline peuvent être considérés comme des exemples de l'usage très important que l'on pourrait faire de la loi, pour fixer la forme primitive, dans les cas douteux.

Le spath nous fournit un moyen de contrôle particulier. On sait, comme l'a montré Mitscherlisch, que ce cristal se contracte perpendiculairement à l'axe optique et se dilate parallèlement à cet axe, sous l'influence d'une élévation de température. Les mesures ont été prises sur le solide de clivage qui se rapproche ainsi du cube : son inverse s'en rapproche donc aussi. M. Fizeau a recherché les modifications qui en résultent dans les propriétés optiques, et il a trouvé que l'indice extraordinaire, le plus faible, croît et que l'indice ordinaire décroît, si bien que la double réfraction tend à disparaître. Cela est bien d'accord avec nos formules qui montrent que α tend vers zéro avec λ.

Par des calculs semblables à ceux que l'on a faits pour démontrer que α avait toujours le signe de $-\frac{\mu_1}{g+3h}$, on prouve que α varie en sens inverse de λ si $\frac{\mu_1}{g+3h} < 0$, et dans le même sens si $\frac{\mu_1}{g+3h} > 0$.

En faisant $\frac{\nu_o}{\nu_e} = f$, on a trouvé

$$2\alpha = 1 - \frac{3}{2+f^2} \quad (^1);$$

il en résulte que f varie dans le même sens que λ, ou, en sens inverse, suivant que $\frac{\mu_1}{g+3h}$ est négatif ou positif.

Or dans le cas du spath en prenant, comme on l'a dit, pour forme

(1) Cette formule donne

$$\alpha = 0{,}038 \text{ pour le spath,}$$
$$\alpha = -0{,}002 \text{ pour le quartz.}$$

primitive l'inverse d'Haüy qui est aigu, l'expérience rappelée plus haut prouve que, lorsque λ décroît, f décroît aussi; donc il est nécessaire que

$$\frac{\mu_1}{g+3h} < 0$$

et, par suite,

$$\mu_1 < 0 \quad \text{si} \quad g + 3h > 0.$$

Ainsi toutes les comparaisons du calcul et de l'expérience, quant au sens des phénomènes, conduisent à cette conclusion que la matière pondérable *repousse* l'éther, si l'on admet que l'éther libre peut propager des vibrations longitudinales, ce qui semble nécessaire pour l'explication de tous les phénomènes de la réfraction.