JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

P. APPELL

Sur une formule de M. Tisserand et sur les fonctions hypergéométriques de deux variables

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 10 (1884), p. 407-428.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1884_3_10__407_0>

Sur une formule de M. Tisserand *et sur les fonctions hypergéométriques de deux variables;*

PAR M. P. APPELL.

---

1. Dans deux Communications faites à l'Académie des Sciences les 15 et 22 octobre 1883, M. Tisserand a été conduit à la question suivante [1] :

Soit $P^{(N)}(p, z)$ le polynôme de degré N en z qui forme le coefficient de θ^N dans le développement

$$\frac{1}{(1-2\theta z+\theta^2)^{\frac{p-1}{2}}}=\sum_{N=0}^{N=\infty}\theta^N P^{(N)}(p, z), \tag{1}$$

effectué suivant les puissances positives de θ; il s'agit de trouver une formule générale donnant le développement du polynôme $P^{(N)}(p, z)$ suivant les cosinus des multiples de x et y quand on pose

$$z=\mu\cos x+\nu\cos y. \tag{2}$$

Ce développement est de la forme

$$P^{(N)}(p, z)=4\sum B_{i,j}^{N,p}\cos ix\cos jy, \tag{3}$$

---

(1) Voir à ce sujet un Mémoire de M. RADAU *Sur le développement de l'expression* $(1-2\alpha z+\alpha^2)^{-k}$ (*Annales de l'Observatoire, Mémoires*, t. XVIII, 1884).

le signe Σ s'étendant à toutes les valeurs entières positives de i et j pour lesquelles la différence

$$N - i - j$$

est un nombre positif pair, avec cette convention qu'il faut remplacer le facteur 4 par 2 lorsque l'un des indices i ou j est nul, et par 1 quand ils sont nuls tous les deux. La question proposée est alors de trouver l'expression générale de $B_{i,j}^{N,p}$ en fonction de N, p, i, j, λ et μ. Comme le montre M. Tisserand (*loc. cit.*), ce problème est complètement résolu pour les valeurs

$$p = 2, \quad p = 3;$$

et de plus, dans le cas où p est de la forme $2q + 3$, q entier, le coefficient $B_{i,i}^{2n,p}$ s'exprime à l'aide d'un polynôme hypergéométrique du second ordre.

En calculant directement le coefficient général $B_{i,j}^{N,p}$, j'ai fait voir (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 12 novembre 1883) que, quels que soient le nombre p et les variables μ et ν, ce coefficient peut être exprimé à l'aide d'une des fonctions hypergéométriques de deux variables dont j'ai fait une étude détaillée dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, année 1882. D'après les notations employées dans ce Mémoire, désignons par (λ, n) le produit

$$\lambda(\lambda + 1)(\lambda + 2)\ldots(\lambda + n - 1),$$

où n est un entier positif, en convenant que $(\lambda, 0)$ est égal à l'unité, et posons

$$F_4(\alpha, \beta, \gamma, \gamma', x, y) = \sum_{m,n=0}^{m,n=\infty} \frac{(\alpha, m+n)(\beta, m+n)}{(\gamma, m)(\gamma', n)(1, m)(1, n)} x^m y^n.$$

L'expression du coefficient $B_{i,j}^{N,p}$ est alors

$$(4) \quad B_{i,j}^{N,p} = C_{i,j}^{N,p} \mu^i \nu^j F_4\left(\frac{p-1}{2} + \frac{N+i+j}{2}, \frac{i+j-N}{2}, i+1, j+1, \mu^2, \nu^2\right),$$

où le coefficient $C_{i,j}^{N,p}$ est indépendant de μ et ν, et a pour valeur

$$(4') \qquad C_{i,j}^{N,p} = (-1)^{\frac{N-i-j}{2}} \frac{\left(\frac{p-1}{2}, \frac{N+i+j}{2}\right)}{\left(1, \frac{N-i-j}{2}\right)(1, i)(1, j)}.$$

Le développement de la fonction F_4, qui figure dans l'expression (4), s'arrête de lui-même, car le second élément $\frac{i+j-N}{2}$ est un entier négatif, comme il résulte de ce que nous avons dit à propos de la formule (3).

Dans la séance du 19 novembre 1883, M Radau a communiqué à l'Académie des Sciences une méthode permettant d'établir rapidement la formule (4).

En considérant μ et ν comme deux variables indépendantes, on conclut des formules précédentes une propriété des coefficients $B_{i,j}^{N,\gamma'}$ qui me paraît digne d'être signalée.

D'après les propositions démontrées dans le Chapitre IV de mon Mémoire *Sur les séries hypergéométriques de deux variables* précédemment cité [1], les deux fonctions

$$z = F_4\left(\alpha, \delta, \gamma, \gamma', \frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right),$$

$$z_1 = F_4\left(\alpha - \lambda, \delta + \lambda, \gamma, \gamma', \frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right)$$

possèdent cette propriété que l'intégrale double

$$\iint x^{\gamma-1} y^{\gamma'-1}(1 - x - y)^{\alpha+\delta-\gamma-\gamma'} z z_1 \, dx \, dy,$$

---

[1] On peut remarquer que l'équation (34) de ce Chapitre IV est vérifiée non seulement par

$$z = F_4\left(\alpha, \delta, \gamma, \gamma', \frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right),$$

mais encore par

$$z = F_4(\alpha, \delta, \gamma, \gamma', ax, by),$$

les constantes a et b étant assujetties à la *seule condition*

$$a + b = 1.$$

étendue aux valeurs réelles de x et y pour lesquelles

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad 1 - x - y \geq 0,$$

est *nulle* lorsqu'elle est finie, à condition que le produit $\lambda(\delta - \alpha + \lambda)$ soit *différent* de zéro. Faisant alors

$$x = 2\mu^2, \quad y = 2\nu^2, \quad \alpha = \frac{p-1}{2} + \frac{N+i+j}{2}, \quad \delta = \frac{i+j-N}{2},$$
$$\gamma = i+1, \quad \gamma' = j+1, \quad \lambda = \frac{N-N_1}{2},$$

où N_1 est un entier positif de même parité que N, on a

$$z = F_4\left(\frac{p-1}{2} + \frac{N+i+j}{2}, \frac{i+j-N}{2}, i+1, j+1, \mu^2, \nu^2\right),$$
$$z_1 = F_4\left(\frac{p-1}{2} + \frac{N_1+i+j}{2}, \frac{i+j-N_1}{2}, i+1, j+1, \mu^2, \nu^2\right).$$

et l'intégrale double précédente devient

$$(5) \qquad \int\int \mu^{2i+1}\nu^{2j+1}(1 - 2\mu^2 - 2\nu^2)^{\frac{p-1}{2}-2} z z_1 \, d\mu \, d\nu,$$

l'intégration étant étendue aux valeurs de μ et ν pour lesquelles

$$(5') \qquad \mu \geq 0, \quad \nu \geq 0, \quad 1 - 2\mu^2 - 2\nu^2 \geq 0.$$

Comme z et z_1 sont des polynômes, cette intégrale est finie quand $\frac{p-1}{2} - 1$ est positif, et par suite elle est *nulle* quand $N - N_1$ est différent de zéro, car le facteur $(\delta - \alpha + \lambda)$ est ici $-\left(\frac{p-1}{2} + \frac{N+N_1}{2}\right)$ et ne peut pas s'annuler. Donc, en vertu de l'expression (4) du coefficient $B_{i,j}^{N,p}$, l'intégrale double

$$\int\int \mu\nu(1 - 2\mu^2 - 2\nu^2)^{\frac{p-1}{2}-2} B_{i,j}^{N,p} B_{i,j}^{N_1,p} \, d\mu \, d\nu$$

$\left(\text{où } \frac{p-1}{2} - 1 > 0\right)$ étendue aux limites (5′), est nulle tant que N est différent de N_1.

La formule (4) donne l'expression générale du coefficient $B_{i,j}^{N,p}$ quelles que soient les constantes μ et ν; mais, dans l'application à la Mécanique céleste que M. Tisserand avait en vue, μ et ν ne sont pas indépendantes et l'on a

$$\mu = \cos^2\frac{J}{2}, \quad \nu = \sin^2\frac{J}{2}, \tag{6}$$

d'où

$$\mu + \nu = 1. \tag{6'}$$

Il est donc important de rechercher quelles simplifications cette relation entre μ et ν apporte à l'expression du coefficient $B_{i,j}^{N,p}$.

Dans les cas signalés par M. Tisserand, cette relation permet de réduire le coefficient $B_{i,j}^{N,p}$ à un polynôme hypergéométrique d'une seule variable du premier ou du second ordre, et, dans ces cas, le coefficient $B_{i,j}^{N,p}$ considéré comme fonction de J satisfait à une équation différentielle linéaire du deuxième ou du troisième ordre. M. Callandreau a montré (*Comptes rendus*, séance du 26 novembre 1883) que, dans le cas général, le coefficient $B_{i,j}^{N,p}$, considéré comme fonction de J, vérifie une équation différentielle linéaire du troisième ordre qu'il n'a d'ailleurs pas formée complètement. Au moment où M. Callandreau a publié cette Note, j'étais de mon côté, en suivant les conseils de M. Tisserand, arrivé à ce même résultat. Je vais reprendre ici le calcul de M. Callandreau et former cette équation du troisième ordre, après avoir fait quelques réflexions générales sur les équations linéaires simultanées aux dérivées partielles.

2. Soit z une fonction des deux variables indépendantes x et y satisfaisant à deux équations différentielles linéaires simultanées aux dérivées partielles de la forme

$$\left\{\begin{aligned} r &= a_1 s + a_2 p + a_3 q + a_4 z, \\ t &= b_1 s + b_2 p + b_3 q + b_4 z, \end{aligned}\right. \tag{7}$$

qui admettent quatre intégrales communes linéairement indépendantes; dans ces équations p, q, r, s, t désignent les dérivées partielles premières et secondes de z et les coefficients $a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4$ sont des fonctions de x et y [1]. Les équations (7) ayant quatre intégrales communes, le déterminant $1 - a_1 b_1$ n'est pas nul identiquement; alors, en dérivant la première de ces équations par rapport à y, la deuxième par rapport à x et remplaçant $\frac{\partial r}{\partial y}$ et $\frac{\partial t}{\partial x}$ par $\frac{\partial s}{\partial x}$ et $\frac{\partial s}{\partial y}$, on obtient deux équations du premier degré en $\frac{\partial s}{\partial x}$ et $\frac{\partial s}{\partial y}$, d'où l'on peut tirer ces deux quantités, car le déterminant des inconnues est $1 - a_1 b_1$, que l'on suppose différent de zéro. A l'aide des équations (7), on pourra mettre les expressions trouvées pour $\frac{\partial s}{\partial x}$ et $\frac{\partial s}{\partial y}$ sous la forme

$$(8) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial x} &= \alpha_1 s + \alpha_2 p + \alpha_3 q + \alpha_4 z, \\ \frac{\partial s}{\partial y} &= \beta_1 s + \beta_2 p + \beta_3 q + \beta_4 z, \end{aligned} \right.$$

α_i et β_i étant des fonctions connues de x et y. La condition d'intégrabilité

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)}{\partial y} = \frac{\partial\left(\frac{\partial s}{\partial y}\right)}{\partial x}$$

est supposée remplie identiquement, quels que soient x, y, z, p, q, s.

Si l'on établit une relation entre y et x

$$(9) \qquad y = f(x),$$

l'intégrale générale z des équations (7) devient une fonction de x seulement, et cette fonction z de x satisfait en général à une équation différentielle linéaire du quatrième ordre; mais, pour certaines déterminations spéciales de la fonction $f(x)$, cette fonction z de x pourra satisfaire à une équation différentielle du troisième ou même du second ordre.

---

(1) *Journal de Mathématiques*, p. 182, année 1882.

Voici comment on obtiendra ces déterminations de $f(x)$. On a, puisque z dépend de x directement et par l'intermédiaire de y, d'après la relation (9),

$$\frac{dz}{dx}=p+qy',$$

$$\frac{d^2z}{dx^2}=r+2sy'+ty'^2+qy'',$$

y' et y'' désignant les dérivées de y par rapport à x tirées de la relation (9); en vertu des équations (7), ces deux expressions deviennent

$$\frac{dz}{dx}=p+qy',$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2z}{dx^2}=&\,s(a_1+2y'+b_1y'^2)+p(a_2+b_2y'^2)\\&+q(a_3+b_3y'^2+y'')+z(a_4+b_4y'^2).\end{aligned}$$

Donc la fonction z de x vérifiera une équation différentielle linéaire du second ordre, si l'on peut trouver une fonction y de x remplissant les *deux conditions*

$$(10)\qquad \begin{cases} a_1+2y'+b_1y'^2=0,\\ a_3+b_3y'^2+y''=(a_2+b_2y'^2)y'.\end{cases}$$

Il pourra ne pas exister de fonction y vérifiant ces deux équations; on s'en assurera de la façon suivante : En résolvant ces équations (10) par rapport à y' et y'', on obtient des expressions de la forme

$$(10')\qquad y'=\varphi(x,y),\quad y''=\psi(x,y);$$

d'où l'on tire l'équation

$$(10'')\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\varphi(x,y)=\psi(x,y).$$

Cette équation (10″) définit y comme fonction de x; pour que cette fonction satisfasse à la question, il faudra et il suffira que sa dérivée soit $\varphi(x, y)$. Il peut arriver que cette équation (10″) soit identique en x et y; dans ce cas toute intégrale de la première des équations (10) sera une solution du problème.

Voici maintenant comment on obtiendra les déterminations de la fonction $f(x)$, équation (9), pour lesquelles z vérifie une équation du troisième ordre. Nous avons trouvé

$$\frac{dz}{dx} = p + qy', \quad \frac{d^2 z}{dx^2} = c_1 s + c_2 p + c_3 q + c_4 z,$$

où c_1, c_2, c_3, c_4 sont des coefficients qui viennent d'être calculés et qui contiennent y' et y''. En prenant encore une fois la dérivée par rapport à x, on aura

$$\frac{d^3 z}{dx^3} = c_1\left(\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial y} y'\right) + s\left(\frac{\partial c_1}{\partial x} + \frac{\partial c_1}{\partial y} y' + \frac{\partial c_1}{\partial y'} y''\right) + \ldots,$$

et, à l'aide des équations (7) et (8), on pourra mettre cette expression sous la forme

$$\frac{d^3 z}{dx^3} = g_1 s + g_2 p + g_3 q + g_4 z,$$

les coefficients g_1, g_2, g_3, g_4 contenant y', y'' et y'''.

Pour qu'il existe une équation linéaire de troisième ordre à laquelle satisfasse z, il faut et il suffit que l'on puisse éliminer p, q, s entre ces trois relations donnant $\frac{dz}{dx}, \frac{d^2 z}{dx^2}, \frac{d^3 z}{dx^3}$; par suite, il faut et il suffit que l'on ait

$$\begin{vmatrix} g_1 & g_2 & g_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ 0 & 1 & y' \end{vmatrix} = 0;$$

ce qui est une équation différentielle du troisième ordre donnant y en x.

3. Revenons maintenant au problème particulier qui nous occupe. La fonction

$$z = F_4(\alpha, \beta, \gamma, \gamma', x, y)$$

vérifie les deux équations différentielles simultanées

$$(11)\quad \begin{cases} (x-x^2)r - y^2 t - 2xys + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]p \\ \qquad\qquad - (\alpha+\beta+1)yq - \alpha\beta z = 0, \\ (y-y^2)t - x^2 r - 2xys + [\gamma' - (\alpha+\beta+1)y]q \\ \qquad\qquad - (\alpha+\beta+1)xp - \alpha\beta z = 0, \end{cases}$$

dans lesquelles nous ferons, pour abréger,

$$\alpha+\beta+1 = \mathrm{A}, \quad \alpha\beta = \mathrm{B}.$$

D'après les relations (6), on voit que la fonction F_4, qui figure dans l'expression (4) du coefficient $B_{i,j}^{N,p}$, est de la forme

$$(12)\qquad z = F_4\left(\alpha, \beta, \gamma, \gamma', \cos^4\frac{J}{2}, \sin^4\frac{J}{2}\right),$$

où

$$(13)\quad \alpha = \frac{p-1}{2} + \frac{N+i+j}{2}, \quad \beta = \frac{i+j-N}{2}, \quad \gamma = i+1, \quad \gamma' = j+1,$$

et, par suite,

$$(13')\quad \mathrm{A} = \frac{p+1}{2} + i + j, \quad \mathrm{B} = \left(\frac{p-1}{2} + \frac{N+i+j}{2}\right)\left(\frac{i+j-N}{2}\right).$$

Nous allons donc faire, dans les équations précédentes (11),

$$(14)\qquad x = \cos^4\frac{J}{2}, \quad y = \sin^4\frac{J}{2}, \quad \sin^2\frac{J}{2} = \nu,$$

et en déduire une équation différentielle linéaire à laquelle satisfait z considéré comme fonction de J d'après l'équation (12).

Si l'on remplace, dans les équations (11), les variables x et y par leurs expressions (14), ces équations deviennent

$$(15)\quad \begin{cases} \cos^4\frac{J}{2}\left(1-\cos^4\frac{J}{2}\right)r - \sin^8\frac{J}{2}t - 2\sin^4\frac{J}{2}\cos^4\frac{J}{2}s + \left(\gamma - \mathrm{A}\cos^4\frac{J}{2}\right)p - \mathrm{A}\sin^4\frac{J}{2}q - \mathrm{B}z = 0, \\ \sin^4\frac{J}{2}\left(1-\sin^4\frac{J}{2}\right)t - \cos^8\frac{J}{2}r - 2\sin^4\frac{J}{2}\cos^4\frac{J}{2}s + \left(\gamma' - \mathrm{A}\sin^4\frac{J}{2}\right)q - \mathrm{A}\cos^4\frac{J}{2}p - \mathrm{B}z = 0. \end{cases}$$

On en conclut, en retranchant membre à membre,

$$(16)\qquad r\cos^4\frac{J}{2} - t\sin^4\frac{J}{2} = \gamma' q - \gamma p;$$

puis, multipliant la première par $\dfrac{1}{\sin^2\frac{J}{2}}$, la deuxième par $\dfrac{1}{\cos^2\frac{J}{2}}$ et ajoutant,

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} & r\cos^4\frac{J}{2} - 2s\sin^2\frac{J}{2}\cos^2\frac{J}{2} + t\sin^4\frac{J}{2} \\ & \quad = \frac{p}{\sin^2\frac{J}{2}}\left(A\cos^2\frac{J}{2} - \gamma\right) + \frac{q}{\cos^2\frac{J}{2}}\left(A\sin^2\frac{J}{2} - \gamma'\right) + \frac{Bz}{\sin^2\frac{J}{2}\cos^2\frac{J}{2}}. \end{aligned}\right.$$

Ceci posé, on a, puisque $\sin^2\frac{J}{2} = \nu$,

$$(18)\qquad \frac{dz}{d\nu} = 2\left(q\sin^2\frac{J}{2} - p\cos^2\frac{J}{2}\right),$$

$$(19)\qquad \frac{d^2z}{d\nu^2} = 4\left(r\cos^4\frac{J}{2} - 2s\sin^2\frac{J}{2}\cos^2\frac{J}{2} + t\sin^4\frac{J}{2}\right) + 2(p+q),$$

et, par conséquent, d'après l'équation (17),

$$(19')\quad \left\{\begin{aligned} & \sin^2\frac{J}{2}\cos^2\frac{J}{2}\frac{d^2z}{d\nu^2} \\ & \quad = 4p\cos^2\frac{J}{2}\left(A\cos^2\frac{J}{2} - \gamma + \frac{1}{2}\sin^2\frac{J}{2}\right) \\ & \qquad + 4q\sin^2\frac{J}{2}\left(A\sin^2\frac{J}{2} - \gamma' + \frac{1}{2}\cos^2\frac{J}{2}\right) + 4Bz. \end{aligned}\right.$$

Pour simplifier, introduisons la somme et la différence des coefficients de $4p\cos^2\frac{J}{2}$ et $4q\sin^2\frac{J}{2}$:

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} \eta &= A\cos^2\frac{J}{2} - \gamma + \frac{1}{2}\sin^2\frac{J}{2} + A\sin^2\frac{J}{2} - \gamma' + \frac{1}{2}\cos^2\frac{J}{2} = A - \gamma - \gamma' + \frac{1}{2}, \\ \theta &= A\cos^2\frac{J}{2} - \gamma + \frac{1}{2}\sin^2\frac{J}{2} - A\sin^2\frac{J}{2} + \gamma' - \frac{1}{2}\cos^2\frac{J}{2} = \left(A - \frac{1}{2}\right)\cos J - \gamma + \gamma'. \end{aligned}\right.$$

Alors

$$A\cos^2\frac{J}{2}-\gamma+\frac{1}{2}\sin^2\frac{J}{2}=\frac{\eta+\theta}{2},$$

$$A\sin^2\frac{J}{2}-\gamma'+\frac{1}{2}\cos^2\frac{J}{2}=\frac{\eta-\theta}{2},$$

et l'équation (19') devient

$$(19'')\quad \left\{\begin{aligned}\sin^2\frac{J}{2}\cos^2\frac{J}{2}\frac{d^2z}{d\nu^2}&=2\eta\left(p\cos^2\frac{J}{2}+q\sin^2\frac{J}{2}\right)\\&\quad+2\theta\left(p\cos^2\frac{J}{2}-q\sin^2\frac{J}{2}\right)+4Bz\end{aligned}\right.$$

ou enfin, d'après (18),

$$(21)\qquad \nu(1-\nu)\frac{d^2z}{d\nu^2}+\theta\frac{dz}{d\nu}-4Bz=2\eta\left(p\cos^2\frac{J}{2}+q\sin^2\frac{J}{2}\right).$$

Le facteur η qui figure dans le second membre est une constante (20); si les éléments α, β, γ, γ' de la fonction F_4 satisfont à la relation $\eta=0$, le second membre de l'équation (21) est nul; dans ce cas, la fonction F_4 de ν satisfait donc à une équation linéaire du *second ordre* intégrable à l'aide de la série de Gauss. Cette condition se trouve remplie pour la fonction F_4 qui figure dans le coefficient $B_{i,j}^{N,p}$ lorsque $p=2$. On retrouve ainsi le résultat indiqué pour ce cas par M. Tisserand.

Supposons maintenant $\eta\gtrless 0$; nous avons, en posant, pour abréger,

$$(22)\qquad P=\nu(1-\nu)\frac{d^2z}{d\nu^2}+\theta\frac{dz}{d\nu}-4Bz,$$

la relation

$$(21')\qquad P=2\eta\left(p\cos^2\frac{J}{2}+q\sin^2\frac{J}{2}\right);$$

d'où

$$(23)\qquad \frac{dP}{d\nu}=2\eta(q-p)-4\eta\left(r\cos^4\frac{J}{2}-t\sin^4\frac{J}{2}\right);$$

donc, d'après (16),

$$\frac{dP}{d\nu} = 2\eta q(1-2\gamma') - 2\eta p(1-2\gamma), \tag{24}$$

où l'on peut remarquer que le deuxième membre est nul si

$$\gamma = \gamma' = \tfrac{1}{2},$$

de sorte que, dans ce cas, P est *indépendant de* ν. Dans le cas général, on peut éliminer p et q entre les équations (18), (21′) et (24), et l'on obtient ainsi l'équation cherchée

$$\begin{vmatrix} \dfrac{dP}{d\nu} & 1-2\gamma' & -1+2\gamma \\ P & \sin^2\dfrac{J}{2} & \cos^2\dfrac{J}{2} \\ \eta\dfrac{dz}{d\nu} & \sin^2\dfrac{J}{2} & -\cos^2\dfrac{J}{2} \end{vmatrix} = 0,$$

où P a la valeur (22). Cette équation simplifiée s'écrit de la façon suivante, toutes réductions faites :

$$\left\{\begin{aligned} &(\nu-\nu^2)^2\frac{d^3z}{d\nu^3} + (\nu-\nu^2)[A-\gamma+2\gamma'-\nu(2A+\gamma+\gamma')]\frac{d^2z}{d\nu^2} \\ &\qquad + \{\nu^2[4B+(2A-1)(\gamma+\gamma')] \\ &\qquad - 2\nu[2B+\gamma'(2A-1)] - (1-2\gamma')(A-\gamma)\}\frac{dz}{d\nu} \\ &\qquad\qquad + 2Bz[1-2\gamma'-2\nu(1-\gamma-\gamma')] = 0. \end{aligned}\right. \tag{25}$$

Telle est l'équation du troisième ordre [1] à laquelle satisfait la fonction (12), c'est-à-dire

$$z = F_4[\alpha, \beta, \gamma, \gamma', (1-\nu)^2, \nu^2].$$

---

[1] En se plaçant dans le cas où les coefficients ont les valeurs (13), M. Radau a formé directement cette équation [*Annales de l'Observatoire*, 1884, *Sur le développement*, etc., équation (19)].

Dans le cas particulier qui nous intéresse plus spécialement, où α, β, γ, γ' ont les valeurs (13), cette fonction est un polynôme du degré

$$N - i - j,$$

en ν, et, si l'on fait alors

$$z = \lambda_0 + \lambda_1 \nu + \lambda_2 \nu^2 + \ldots + \lambda_{N-i-j}\, \nu^{N-i-j},$$

la substitution de cette expression dans l'équation différentielle (25) fournira une relation récurrente entre trois des coefficients consécutifs $\lambda_{n+1}, \lambda_n, \lambda_{n-1}$, permettant de les calculer tous quand on connaît les deux premiers, λ_0 et λ_1 (*voir* p. 426). Or ces deux coefficients s'obtiennent de la façon suivante. D'abord on a, en faisant $\nu = 0$,

$$\lambda_0 = F_4(\alpha, \beta, \gamma, \gamma', 1, 0) = F(\alpha, \beta, \gamma, 1),$$

$F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ désignant la série hypergéométrique de Gauss; puis, en faisant $\nu = 0$ dans la dérivée $\frac{dz}{d\nu}$, on a

$$\lambda_1 = \left[-2(1-\nu)\frac{\partial F_4}{\partial x} + 2\nu \frac{\partial F_4}{\partial y} \right]_{\nu=0},$$

c'est-à-dire, d'après la relation

$$\frac{\partial F_4(\alpha, \beta, \gamma, \gamma', x, y)}{\partial x} = \frac{\alpha\beta}{\gamma} F_4(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, \gamma', x, y)_2$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\frac{2\alpha\beta}{\gamma} F_4(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, \gamma', 1, 0) \\ &= -\frac{2\alpha\beta}{\gamma} F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, 1). \end{aligned}$$

Ces deux coefficients λ_0 et λ_1 peuvent donc être exprimés à l'aide des fonctions Γ. L'expression générale du coefficient λ_n a été indiquée par M. Radau (*Comptes rendus*, séance du 3 décembre 1883).

L'équation différentielle (25) peut être intégrée à l'aide de la série hypergéométrique du second ordre

$$F\left(\begin{matrix} a, & b, & c \\ d, & e, & \end{matrix} \middle| x\right) = \sum_0^\infty \frac{(a,n)(b,n)(c,n)}{(d,n)(e,n)(1,n)} x^n,$$

dans le cas particulier où $\gamma = \gamma'$. En effet, si l'on suppose $\gamma = \gamma'$ et si l'on fait un changement de variable en posant

$$\rho = \sin^2 J = 4\nu(1-\nu),$$

l'équation (25) devient, après suppression du facteur $(1 - 2\nu)$,

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned} &\rho^2(1-\rho)\frac{d^3z}{d\rho^3} + \rho\left[A+\gamma-\rho\left(A+\gamma+\frac{3}{2}\right)\right]\frac{d^2z}{d\rho^2} \\ &\qquad + \left[(2\gamma-1)(A-\gamma)-\left(B+A\gamma+\frac{1}{2}A\right)\rho\right]\frac{dz}{d\rho} \\ &\qquad\qquad - B\left(\gamma-\frac{1}{2}\right)z = 0; \end{aligned}\right.$$

ce qui est l'équation à laquelle satisfait la fonction

$$(27)\qquad F\left(\begin{matrix}\alpha, & \beta, & \gamma-\frac{1}{2} \\ A-\gamma, & 2\gamma-1 & \end{matrix}\middle|\,\rho\right).$$

L'intégrale qui nous occupe dans le cas particulier (13) est celle qui se réduit à λ_0 pour $\nu = 0$, c'est-à-dire pour $\rho = 0$; elle est donc

$$\lambda_0 F\left(\begin{matrix}\alpha, & \beta, & \gamma-\frac{1}{2} \\ A-\gamma, & 2\gamma-1 & \end{matrix}\middle|\,\rho\right).$$

Ce résultat est d'accord avec celui de M. Tisserand, qui a montré que le coefficient $B_{i,j}^{N,p}$ peut être exprimé à l'aide d'un polynôme hypergéométrique du second ordre lorsque $i = j$, ce qui, d'après les expressions (13), revient à $\gamma = \gamma'$.

Enfin, on peut chercher, d'après les résultats donnés par Clausen (*Journal de Crelle*, t. 3, p. 89), dans quels cas ce coefficient (27) est le carré d'une fonction hypergéométrique de Gauss

$$(27')\qquad F(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \rho).$$

Rappelons-nous pour cela que, pour que la fonction

$$F\left(\begin{matrix}a, b, c \\ d, e\end{matrix}\middle|\,x\right)$$

soit le carré d'une fonction de Gauss, il faut et il suffit que ses éléments a, b, c, d, e remplissent les conditions suivantes :

$$(28) \qquad c = \frac{a+b}{2}, \quad d = \frac{a+b+1}{2}, \quad e = a+b,$$

et alors on a

$$(28') \qquad F\left(\begin{matrix} a, b, c \\ d, e \end{matrix} \middle| x\right) = F^2\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{a+b+1}{2}, x\right).$$

On obtient ainsi six cas dans lesquels le coefficient (27) est le carré d'une fonction de Gauss, en appelant successivement c chacun des éléments supérieurs

$$\alpha, \ \beta, \ \gamma - \tfrac{1}{2},$$

et d chacun des éléments inférieurs

$$A - \gamma, \ 2\gamma - 1.$$

Le plus intéressant de ces cas est celui où l'on ferait

$$a = \alpha, \quad b = \beta, \quad c = \gamma - \tfrac{1}{2}, \quad d = A - \gamma, \quad e = 2\gamma - 1;$$

alors les conditions (28) se réduisent à une seule

$$(29) \qquad \gamma - \frac{1}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2},$$

et, lorsque cette condition (29) est remplie, on a

$$F\left(\begin{matrix} \alpha, \beta, \gamma - \frac{1}{2} \\ A - \gamma, 2\gamma - 1 \end{matrix} \middle| \rho\right) = F^2\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}, \gamma, \rho\right).$$

En supposant que α, β, γ aient les valeurs particulières (13) avec $\gamma = \gamma'$, c'est-à-dire $i = j$, la condition (29) donne

$$\frac{p-1}{2} + 2i = 2i + 1,$$

c'est-à-dire

$$p = 3.$$

Donc, lorsque $p = 3$, $\frac{p-1}{2} = 1$, le coefficient $B_{i,i}^{N,p}$ s'exprime à l'aide du carré d'une fonction de Gauss, et l'on retrouve ainsi un résultat indiqué par M. Tisserand.

4. Pour faire une autre application des considérations générales développées dans le n° **2**, prenons la fonction

$$(30) \qquad z = F_2(\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma', x, y),$$

qui satisfait aux équations simultanées

$$(31) \quad \begin{cases} (x - x^2)r - xys + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]p - \beta yq - \alpha\beta z = 0, \\ (y - y^2)t - xys + [\gamma' - (\alpha + \beta' + 1)y]q - \beta' xp - \alpha\beta' z = 0, \end{cases}$$

et faisons

$$(32) \qquad y = 1 - x;$$

alors z devient une fonction de x seul, et cette fonction vérifie une équation différentielle du *troisième ordre* qu'on peut former de la façon suivante.

En additionnant, puis retranchant membre à membre les équations (31), dans lesquelles on remplace y par $1 - x$, on a les deux relations

$$(33) \quad \begin{cases} (x - x^2)(r - 2s + t) = \varepsilon(p + q) + X(p - q) + \alpha(\beta + \beta')z, \\ (x - x^2)(r - t) = -[\gamma - (\alpha + \beta - \beta' + 1)x]p \\ \qquad\qquad + [\gamma' - (\alpha + \beta' - \beta + 1)y]q + \alpha(\beta - \beta')z, \end{cases}$$

dans la première desquelles on a posé, pour simplifier,

$$(33') \quad \begin{cases} \varepsilon = \dfrac{\alpha + \beta + \beta' + 1 - \gamma - \gamma'}{2}, \\ X = (\alpha + \beta + \beta' + 1)x - \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \beta' + 1 + \gamma - \gamma') \end{cases}$$

Ceci posé, l'on a, en vertu de la relation (32),

$$\frac{dz}{dx} = p - q, \quad \frac{d^2 z}{dx^2} = r - 2s + t,$$

et la première des équations (33) donne

$$(34)\qquad (x-x^2)\frac{d^2z}{dx^2}-X\frac{dz}{dx}-\alpha(\beta+\beta')z=\varepsilon(p+q).$$

Il résulte de là que, si la constante ε est nulle, la fonction

$$z=F_2(\alpha,\beta,\beta',\gamma,\gamma',x,1-x)$$

vérifie l'équation du second ordre

$$(x-x^2)\frac{d^2z}{dx^2}+[\gamma-(\alpha+\beta+\beta'+1)x]\frac{dz}{dx}-\alpha(\beta+\beta')z=0,$$

qui admet pour intégrales les deux fonctions

$$z_1=F(\alpha,\beta+\beta',\gamma,x),$$
$$z_2=x^{1-\gamma}F(\alpha+1-\gamma,\beta+\beta'+1-\gamma,2-\gamma,x);$$

on aura donc, dans ce cas,

$$z=C_1z_1+C_2z_2,$$

C_1 et C_2 désignant des constantes.

Revenons maintenant au cas général où ε est différent de zéro, et désignons par P le premier membre de l'équation (34)

$$(34')\qquad P=(x-x^2)\frac{d^2z}{dx^2}-X\frac{dz}{dx}-\alpha(\beta+\beta')z;$$

cette équation s'écrit

$$P=\varepsilon(p+q),$$

d'où, en différentiant par rapport à x,

$$\frac{dP}{dx}=\varepsilon(r-t)$$

et en remplaçant $(r-t)$ par sa valeur tirée de la seconde des équations (33),

$$(35)\quad \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon}(x-x^2)\frac{dP}{dx} = -[\gamma-(\alpha+\beta-\beta'+1)x]p \\ \qquad\qquad + [\gamma'-(\alpha+\beta'-\beta+1)\gamma]q + \alpha(\beta-\beta')z. \end{cases}$$

Des relations

$$p+q = \frac{P}{\varepsilon}, \quad p-q = \frac{dz}{dx},$$

on tire

$$p = \frac{1}{2}\left(\frac{P}{\varepsilon}+\frac{dz}{dx}\right), \quad q = \frac{1}{2}\left(\frac{P}{\varepsilon}-\frac{dz}{dx}\right),$$

et, en portant ces valeurs dans l'équation (35), on obtient enfin l'équation différentielle du troisième ordre

$$(36)\quad \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon}(x-x^2)\frac{dP}{dx} + \frac{P}{2\varepsilon}[\gamma-\gamma'-\beta+\beta'-(\alpha+1)(2x-1)] \\ \quad + \frac{1}{2}\frac{dz}{dx}[\gamma+\gamma'-\alpha-1-(\beta-\beta')(2x-1)] - \alpha(\beta-\beta')z = 0 \end{cases}$$

Cette équation différentielle (36), ainsi que l'équation (25), est de la forme

$$(37)\quad \begin{cases} (x-x^2)^2\frac{d^3z}{dx^3} + (x-x^2)(ax+b)\frac{d^2z}{dx^2} \\ \qquad + (cx^2+fx+g)\frac{dz}{dx} + (hx+k)z = 0, \end{cases}$$

les constantes a, b, c, f, g, h, k étant des fonctions des cinq constantes $\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma'$.

Cette équation (37) peut être intégrée à l'aide de séries hypergéométriques du second ordre toutes les fois que les constantes qui figurent dans les coefficients vérifient les trois relations

$$(38)\qquad a+2b=0, \quad c+f=0, \quad h+2k=0.$$

En effet, si ces conditions sont remplies, on pourra, en faisant le changement de variable

$$y = 4x(1-x),$$

et prenant y pour nouvelle variable indépendante, ramener cette équation à la forme

$$y^2(1-y)\frac{d^3z}{dy^3} + y\left[b - y\left(b+\frac{3}{2}\right)\right]\frac{d^2z}{dy^2} \\ + \left(\frac{f-2b}{4}y + g\right)\frac{dz}{dy} + kz = 0,$$

qui est celle de l'équation différentielle à laquelle satisfait la fonction

$$(39) \qquad F\left(\begin{matrix}\alpha, & \beta, & \gamma \\ & \varepsilon, & \delta\end{matrix}\middle| y\right).$$

Enfin l'équation (37) se réduit immédiatement à l'équation de la série hypergéométrique du second ordre (39) dans l'un et l'autre des deux cas

$$(40) \qquad c + f + g = 0, \quad h + k = 0,$$

ou bien

$$(40') \qquad g = 0, \quad k = 0,$$

à condition de changer, dans ce dernier cas, x en $1-x$.

5. Dans l'équation (37), supposons les coefficients quelconques et admettons que l'équation

$$(41) \qquad \varphi(r) = (r-1)(r-2) + (r-1)b + g = 0$$

n'ait aucune racine entière positive. Alors l'équation différentielle linéaire (37) possède, dans le domaine du point $x = 0$, une intégrale holomorphe de la forme

$$(42) \qquad z = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_n x^n + \ldots.$$

En substituant cette série dans l'équation (37) et égalant à zéro le coefficient de x^n, on trouve entre trois coefficients consécutifs A_{n+1}, A_n, A_{n-1} la relation récurrente

$$(43)\left\{\begin{aligned} &(n+1)[n^2 - n(1-b) + g]A_{n+1} \\ &\quad = [2n^3 - n^2(a-b+6) + n(a-b-f+4) - k]A_n \\ &\qquad - [n^3 - n^2(a+6) + n(3a+c+11) - (2a+c-h+6)]A_{n-1}, \end{aligned}\right.$$

qui permet de calculer tous les coefficients en fonction de A_0; en effet, en égalant à zéro le terme constant après la substitution de la série (42) dans l'équation différentielle, on trouve d'abord

$$A_1 = -\frac{k}{g}A_0;$$

puis l'équation (43), où l'on fait successivement $n = 1, 2, 3, \ldots$, donne les coefficients suivants : le coefficient de A_{n+1}, dans la relation (43), n'est nul pour aucune valeur de l'entier n, car nous avons supposé que l'équation (41) n'a aucune racine entière positive. On trouve ainsi une intégrale holomorphe que nous écrirons, en supposant $A_0 = 1$,

$$(44) \qquad z_1 = \mathfrak{F}(a, b, c, f, g, h, k, x).$$

Si l'on fait ensuite la substitution

$$z = x^r z',$$

et si l'on suppose r égal à l'une des racines de l'équation (41), on trouve pour z' une équation de la forme (37), dans laquelle les coefficients a, b, c, f, g, h, k sont remplacés par les suivants :

$$\begin{aligned}
a' &= a - 3r,\\
b' &= b + 3r,\\
c' &= c - 2ar + 3r(r-1),\\
f' &= f + 2r(a-b) - 6r(r-1),\\
g' &= g + 2br + 3r(r-1),\\
h' &= h + \varsigma r + r(r-1)(r-2),\\
k' &= k + fr + r(r-1)a - 2r(r-1)(r-2),
\end{aligned}$$

de sorte que l'équation proposée (37) admet pour intégrale la fonction

$$x^r\,\mathfrak{z}(a', b', c', f', g', h', k', x). \tag{45}$$

Si l'équation (41) a deux racines distinctes dont la différence n'est pas entière, on aura, en supposant r successivement égal à ces deux racines, deux expressions, telles que (45), qui seront des intégrales de l'équation différentielle. On sera donc en possession d'un système fondamental dans le domaine du point $x = 0$.

On obtiendra de même un système fondamental d'intégrales dans le domaine du point $x = 1$, car l'équation (37) garde la même forme quand on change x en $1 - x$. Enfin on obtiendra un système fondamental dans le domaine du point ∞ en remarquant que, par la substitution

$$x = \frac{1}{x'}, \quad z = x'^{\rho} z',$$

on peut, après une détermination convenable de ρ, ramener l'équation différentielle que vérifie la fonction z' de x' à la forme (37).

Je ne m'arrête pas aux cas où l'une des équations déterminantes relative à l'un des trois points singuliers 0, 1, ∞ aurait des racines entières, ou à différences entières, ces cas pouvant être traités facilement par les méthodes de M. Fuchs.

En terminant, je remarque que la relation récurrente (43), dans laquelle n a des valeurs très grandes, se rapproche de plus en plus de la relation

$$B_{n+1} = 2B_n - B_{n-1},$$

qui donne, pour B_n, la valeur

$$B_n = \lambda n + \mu,$$

λ et μ désignant deux constantes arbitraires.