LÉON AUTONNE

Recherches sur les groupes d'ordre fini contenus dans le groupe Cremona. - Premier mémoire : Généralités et groupes quadratiques

Journal de mathématiques pures et appliquées 4e série, tome 1 (1885), p. 431-454.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1885_4_1__431_0>

Recherches sur les groupes d'ordre fini contenus dans le groupe Cremona. — Premier Mémoire : *Généralités et groupes quadratiques;*

PAR M. LÉON AUTONNE.

INTRODUCTION.

On sait que plusieurs géomètres, surtout M. Camille Jordan, ont construit les groupes d'ordre fini, contenus dans le groupe linéaire homogène à deux et à trois variables.

Les substitutions linéaires ne sont qu'un cas particulier des substitutions birationnelles. On peut, par conséquent, se proposer d'étendre les recherches précédentes aux substitutions birationnelles générales.

S'il y a deux variables, les substitutions birationnelles homogènes ne peuvent être que linéaires; s'il y a trois variables homogènes, les substitutions birationnelles sont dites ***substitutions Cremona;*** ce sont celles-là qui forment l'objet de la présente étude.

Nous avons défini d'une façon précise la notion du *groupe* Cremona et classé les groupes suivant l'ordre [1] maximum de leurs substitutions. Nous avons donné le tableau complet des groupes quadratiques

[1] Le mot *ordre* sert à distinguer deux choses distinctes : tantôt le nombre des substitutions d'un groupe, tantôt la dimension à laquelle entrent les variables. Les deux acceptions du mot *ordre* sont très différentes d'ailleurs et l'amphibologie n'est pas possible.

d'ordre fini. Quant aux groupes cubiques, nous n'en avons traité qu'un cas particulier, assez étendu du reste.

Dans le Mémoire actuel, après quelques généralités applicables à tous les groupes, nous avons exposé la théorie complète des groupes d'ordre fini contenus dans le groupe quadratique.

Un second Mémoire traitera des groupes cubiques.

Un résumé des présentes recherches a paru dans les *Comptes rendus* (27 août 1883, 3 mars et 20 octobre 1884, 6 juillet 1885). Nous avons emprunté à l'exposé de Clebsch les notions générales sur les propriétés des substitutions Cremona, mais nous croyons que notre méthode de construction des groupes est neuve et originale.

Préliminaires et définitions.

1. Une substitution Cremona est définie par le symbole

$$S = |z_i \quad \varphi_i(z_1, z_2, z_3)| \quad (i = 1, 2, 3),$$

où $\varphi_i(z_1, z_2, z_3)$ ou, pour abréger, $\varphi_i(z)$ désigne un polynôme homogène en z_i et d'ordre n, si l'ordre S est n.

Le réseau des courbes en nombre doublement infini,

$$\varphi = \Sigma_i u_i \varphi_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3; \; u_i = \text{const. arbitr.}),$$

que j'appelle, pour abréger, réseau de la substitution S, aura *un* point d'intersection mobile (dépendant des u_i) et $n^2 - 1$ points d'intersection fixes (indépendants des u_i) dits *points fondamentaux* de S. Un point fondamental de S sera r^{uple}, si chaque courbe φ y a un point r^{uple}. A un point fondamental r^{uple} de S, S fait correspondre non pas un point unique, mais une courbe d'ordre r dite *courbe fondamentale de* S^{-1}. La théorie des points fondamentaux et courbes fondamentales a été donnée dans les *Leçons sur la Géométrie*, par Clebsch (p. 188 à 219 du Tome II de la traduction de A. Benoist). Nous ne pouvons que renvoyer à cet exposé pour toutes les parties non originales du présent Travail.

Le point z, de coordonnées z_i, est transformé par S en un point y $[\rho y_i = \varphi_i(z)]$, que j'appelle *point transformé* de z par S et que je désigne par le symbole $S(z)$. Soit maintenant la courbe $f(z_1, z_2, z_3)$ ou, pour abréger, $f(z) = 0$; la courbe $F(z) = f(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = f(\varphi) = 0$ sera dite *transformée* de f par S ou $SF(z)$; on vérifie que $F(z) = 0$ est le lieu des transformés par S^{-1} des points de $f = 0$.

2. Soient deux substitutions Cremona d'ordres n et n',

$$S = |z_i \quad \varphi_i|, \quad S' = |z_i \quad \varphi'_i| \qquad (i = 1, 2, 3);$$

posons

$$\Phi_i(z) = \varphi'_i(\varphi) = P\Psi_i(z) \qquad (i = 1, 2, 3),$$

en désignant par P, d'ordre p, le facteur commun aux Φ_i. La substitution d'ordre $nn' - p$

$$|z_i \quad \Psi_i|$$

sera, par définition, le produit S'S de S' par S. Il faut d'ailleurs, bien entendu, que le réseau Ψ de S'S satisfasse aux mêmes conditions que les réseaux φ et φ', c'est-à-dire ait un point d'intersection mobile, et $(nn' - p)^2 - 1$ points fondamentaux.

La convention précédente permet de définir le *groupe* Cremona d'une façon précise et identique à celle dont on définit les groupes de substitutions de toute autre nature. L'*ordre* d'un groupe est l'ordre maximum des substitutions du groupe. Ainsi un groupe quadratique sera formé de substitutions linéaires et quadratiques seulement; un groupe cubique ne contiendra que des substitutions cubiques, quadratiques et linéaires.

Voici maintenant deux théorèmes sur les relations qui existent entre les points fondamentaux de S, S' et S'S.

3. Clebsch énonce (*Leçons sur la Géométrie,* t. II, p. 209) un théorème que l'on peut énoncer ainsi, avec nos notations actuelles :

THÉORÈME AUXILIAIRE. — *Si la transformée* Φ *d'une courbe* φ' *d'ordre* n', *par une substitution* S, *d'ordre* n, *se décompose en une courbe fixe* $P = 0$, *et une courbe* $\Psi' = 0$, *qui dépende des coefficients de la courbe irréductible* φ', *alors :*

1° $\varphi' = 0$ *passe* K_j *fois par chaque point fondamental* $r_j^{\text{uple}} a_j$ *de* S^{-1}, *avec l'égalité*

$$(1) \qquad \Sigma_j K_j r_j = p, \quad p = \text{ordre de P};$$

2° *Le facteur* P *est défini par l'identité*

$$(2) \qquad P \equiv \Pi_j f_j^{K_j},$$

où f_j *est la courbe fondamentale de* S, *qui correspond au point fondamental* a_j *de* S^{-1}. *Le symbole de somme ou produit dans* (1) *ou* (2) *s'étend à tous les points fondamentaux* a_j *de* S^{-1}.

Ce théorème conduit au suivant :

Théorème. — *Si l'ordre de* S'S *est* $nn' - p$, *n et n' étant les ordres de* S *et* S', *chaque point fondamental* $r^{\text{uple}} a_j$ *de* S^{-1} *est un point fondamental* K_j^{uple} *de* S, *et l'on a la relation précédente* (1)

$$\Sigma_j K_j r_j = p.$$

Il suffit de faire usage du théorème précédent et de nos conventions antérieures (**2**) pour démontrer aisément que la courbe générale

$$\varphi' = \Sigma_i u_i \varphi'_i \qquad (u_i = \text{const. arbitr.})$$

du réseau S' passe K_j fois par a_j; mais la courbe générale φ' passe t fois par un point t^{uple} fondamental de S' : le point a_j doit donc être un point fondamental K_j^{uple} de S', sans quoi le système doublement infini des courbes

$$\varphi' = \Sigma_i u_i \varphi'_i = 0$$

aurait trop de points d'intersection fixes pour former un réseau. Quant à la relation (1), elle est la conséquence directe du théorème auxiliaire précédent.

4. Théorème. — *Tout point fondamental de la substitution produit* S'S *est ou bien point fondamental de* S, *ou bien est transformé par* S^{-1} *d'un point fondamental de* S'.

Soit, en effet, z un point fondamental de S′S; prenons nos notations habituelles, on a

$$\Psi_i(z) = 0 \quad \text{et} \quad \Phi_i(z) = 0;$$

mais

$$\Phi_i(z) = \varphi'(\varphi),$$

et Φ_i n'est nul que dans les deux cas suivants :

1° $\varphi_i(z) = 0$, $z =$ point fondamental de S;

2° $\rho\,\varphi_i(z) = x_i$, x étant un point fondamental de S′; donc,

$$z = S^{-1}(x).$$

Le théorème est démontré.

Les théorèmes précédents ne sont absolument vrais que lorsqu'il n'existe pas de points fondamentaux infiniment voisins.

L'application du théorème donne immédiatement la démonstration du lemme suivant, qui nous sera utile :

Lemme. — *Soient* S *une substitution Cremona,* l *et* L *deux substitutions linéaires. Posons* $T = lSL$. *Les points fondamentaux de* T *sont les transformés par* L^{-1} *des points fondamentaux de* S; *les points fondamentaux de* T^{-1} *sont les transformés par* l *des points fondamentaux de* S^{-1}.

Groupes quadratiques.

5. Voici le Tableau des trois types de groupes d'ordre fini, contenus dans le groupe quadratique Cremona.

Premier type. — Il dérive des substitutions Σ (quadratique) A, B, C (linéaires) :

$$A = \begin{vmatrix} z_1 & z_1 \\ z_2 & z_1 - z_2 \\ z_3 & z_1 - z_3 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ z_2 & z_1 \\ z_3 & z_3 \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ z_2 & z_3 \\ z_3 & z_1 \end{vmatrix},$$

$$\Sigma = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 z_3 \\ z_2 & z_3 z_1 \\ z_3 & z_1 z_2 \end{vmatrix}.$$

Deuxième type. — Groupe dérivé d'une substitution

$$T = \begin{vmatrix} z_1 & z_1(z_2 + \lambda z_3) \\ z_2 & z_2(z_1 + \mu z_3) \\ z_3 & z_1 z_2 \end{vmatrix} \quad (\lambda, \mu = \text{const.}),$$

combinée à des substitutions S, toutes de la forme

$$S = \begin{vmatrix} z_1 & (p_1 z_1 + p_3 z_3)(Q_2 z_2 + Q_3 z_3) \\ z_2 & (q_2 z_2 + q_3 z_3)(P_1 z_1 + P_3 z_3) \\ z_3 & (P_1 z_1 + P_3 z_3)(Q_2 z_2 + Q_3 z_3) \end{vmatrix},$$

où les coefficients p, P, q, Q sont tels que les groupes linéaires à deux variables

$$\text{P dérivé des substitutions } \begin{vmatrix} z_1 & p_1 z_1 + p_3 z_3 \\ z_3 & P_1 z_1 + P_3 z_3 \end{vmatrix},$$

et

$$\text{Q dérivé des substitutions } \begin{vmatrix} z_2 & q_2 z_2 + q_3 z_3 \\ z_3 & Q_2 z_2 + Q_3 z_3 \end{vmatrix}$$

soient l'un et l'autre d'ordre fini.

Troisième type. — Groupe dérivé de substitutions toutes de la forme

$$\begin{vmatrix} z_1 & (p_1 z_1 + p_2 z_2)(q_1 z_1 + q_2 z_2) \\ z_2 & (p_1 z_1 + p_2 z_2)^2 \\ z_3 & R z_1 z_3 + r_{11} z_1^2 + 2 r_{12} z_1 z_2 + r_{22} z_2^2 \end{vmatrix},$$

où R est une racine de l'unité, et le groupe linéaire à deux variables dérivé des substitutions

$$\begin{vmatrix} z_1 & q_1 z_1 + q_2 z_2 \\ z_2 & p_1 z_1 + p_2 z_2 \end{vmatrix}$$

est d'ordre fini.

6. On sait que le réseau d'une substitution quadratique est un ré-

seau de coniques à trois points fixes, formant les sommets du triangle fondamental; les lignes fondamentales sont les côtés du triangle fondamental. Une substitution quadratique sera désignée par le symbole

$$\begin{Bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{Bmatrix},$$

ce qui signifiera que a, b, c sont les points fondamentaux de S; a', b', c' ceux de S^{-1}; au point a, S fait correspondre la droite $\overline{b'c'}$; au point a', S^{-1} fait correspondre la droite $\overline{bc}$, etc.

A l'égard des groupes ne contenant pas de substitutions à points fondamentaux infiniment voisins, on a la proposition suivante :

Théorème. — *Une substitution faisant partie d'un groupe quadratique a au moins deux points fondamentaux communs avec chacune des autres substitutions du groupe.*

Soient S et S' deux substitutions quadratiques du groupe, le produit S'S ne pourra être que linéaire ou quadratique; donc (5)

$$\Sigma_j r_j K_j \geqq 2.$$

Le réseau d'une substitution quadratique ne comportant que des points fondamentaux simples, r_j et K_j ne peuvent être que zéro ou 1. Il y a donc au moins deux termes dans la somme Σ_j, et le théorème est démontré.

Les triangles fondamentaux doivent donc avoir, pris deux à deux, deux sommets communs; cela n'est possible, comme on s'en assure aisément, que de deux façons :

1° Tous les triangles fondamentaux ont deux sommets en deux points fixes;

2° Tous les triangles fondamentaux ont leurs trois sommets coïncidant avec trois sommets d'un quadrilatère fixe que je nommerai, pour abréger, *quadrilatère générateur*.

La première hypothèse donne naissance au second type (5); la seconde hypothèse au premier type.

Construisons le groupe du premier type.

7. Lemme I. — *Les substitutions linéaires appartenant à un groupe du premier type permutent entre eux les sommets du quadrilatère générateur. Elles peuvent les permuter d'ailleurs de toutes les vingt-quatre façons possibles.*

En vertu d'un lemme précédent (4), la substitution linéaire l change les points fondamentaux de S^{-1} en les points fondamentaux de $(lS)^{-1}$; les substitutions S et lS appartenant toutes deux au groupe, les points fondamentaux coïncident tous avec des sommets du quadrilatère générateur, et le lemme est démontré.

Comme on sait d'ailleurs qu'il est toujours possible de construire une substitution linéaire changeant quatre points donnés quelconques en quatre points donnés également quelconques, la seconde partie du lemme est aussi démontrée.

Soit donc g le groupe linéaire contenu dans le groupe quadratique G du premier type, g sera isomorphe au groupe général γ entre quatre lettres.

Lemme II. — *Une substitution quadratique est complètement déterminée quand on donne : 1° ses points fondamentaux; 2° ceux de son inverse; 3° la corrélation de ces points; 4° les coordonnées d'*un seul *point quelconque du plan et celles de son transformé par la substitution.*

Soit la substitution

$$S \left\{ \begin{matrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{matrix} \right. ,$$

soit $P_1 = (zbc) = 0$ l'équation de la droite $\overline{bc}$, et de même

$$P_2 = (zac), \quad P_3 = (zab).$$

Les coniques φ du réseau de S passent par les sommets du triangle $P_1 P_2 P_3 = 0$; donc

$$S = | z_i \quad u_i P_2 P_3 + v_i P_3 P_1 + w_i P_1 P_2 |.$$

Cela posé, puisque le point a' correspond à la droite $P_1 = 0$, le point b' à la droite $P_2 = 0$, etc., on a (les coordonnées de a' étant a'_i, etc.)

$$u_i = pa'_i, \quad v_i = qb'_i, \quad w_i = rc'_i,$$

p, q, r restant encore des constantes à déterminer. Soit maintenant $x(x_i)$ un point donné dans le plan, $y(y_i)$ le point $S(x)$, on a

$$(1) \qquad \rho y_i = pa'_i P_2 P_3 + qb'_i P_3 P_1 + rc'_i P_1 P_2,$$

en remplaçant dans P_i les coordonnées courantes par celles de x. Les équations (1) achèvent de déterminer les rapports $\frac{p}{r}$, $\frac{q}{r}$ et, par suite, l'expression algébrique de S. Le lemme se trouve ainsi démontré.

Désignons par a, b, c, d les sommets du quadrilatère générateur. La substitution

$$\Sigma \begin{Bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{Bmatrix}, \quad \text{avec la condition} \quad \Sigma(d) = d,$$

sera, en vertu du lemme II, parfaitement déterminée; désignons par g le groupe linéaire contenu dans G; g sera isomorphe au groupe γ entre les quatre lettres a, b, c, d. Cela posé, il vient la proposition :

Théorème. — *Le groupe* G *du premier type résulte de la combinaison de* Σ *avec le groupe linéaire* g.

Soit en effet, par exemple,

$$S \begin{Bmatrix} b & a & d \\ a & c & d \end{Bmatrix}$$

une substitution de G; je dis que $S(c) = b$. En effet, $S(c)$ est un point fondamental de S^{-2} (**4**), c'est-à-dire un des quatre points a, b, c, d; on ne peut avoir $S(c) = a$, c ou d, car si, par exemple, $S(c) = a$, c serait sur la droite $\overline{ad}$, ce que nous excluons par hypothèse (**9**); on a donc

$$S(c) = b.$$

Cela posé, prenons dans γ (voir lemme I) les substitutions

$$\lambda = (a)(bcd), \quad \lambda'^{-1} = (ab)(cd);$$

soient l et l' les substitutions de g qui correspondent à λ et λ'; je dis que la substitution $T = l\Sigma l'$ est identique à S. En vertu du lemme (**4**),

$$T \left\{ \begin{matrix} b & a & d \\ a & c & d \end{matrix} \right. ;$$

il suffit de démontrer que $T(c) = b$, pour que le lemme II donne

$$T = S.$$

Or

$$T = l\Sigma l',$$

$$T(c) = l\Sigma l'(c) = l\Sigma(d) = l(d) = b, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

8. Fixons de la façon suivante le système de coordonnées :

Pour le point	a.	$z_2 = z_3 = 0$,
»	b.	$z_3 = z_1 = 0$,
»	c.	$z_1 = z_2 = 0$,
»	d.	$z_1 = z_2 = z_3$.

L'application à la construction de Σ du procédé indiqué au lemme II (**7**) donne

$$\Sigma = \left| \begin{matrix} z_1 & z_2 z_3 \\ z_2 & z_3 z_1 \\ z_3 & z_1 z_2 \end{matrix} \right|$$

Reste à construire g; γ dérive des trois substitutions

$$\alpha = (ad)(bc), \quad \beta = (ab)(c)(d), \quad \gamma = (abc)(d),$$

et l'on vérifie sans peine que les substitutions A, B, C de g qui correspondent à α, β, γ ont bien la forme indiquée plus haut (**5**).

Le groupe quadratique du premier type est ainsi complètement construit.

9. Nous avons supposé que parmi les quatre points a, b, c, d on n'en trouvait pas plus de deux en ligne droite. Il est aisé de voir qu'il ne saurait y avoir trois de ces points en ligne droite.

Supposons un instant a, b, c en ligne droite; toute substitution

$$S\begin{cases} a\ b\ c \\ \dots\dots \end{cases}$$

se réduit évidemment à une substitution linéaire, car le réseau des φ se décompose en deux droites dont une, $\overline{abc}$, est fixe. Prenons donc une des substitutions qudratiques qui pourraient exister, par exemple

$$S\begin{cases} b\ c\ d \\ a\ d\ c \end{cases};$$

soit φ une courbe du réseau S, on a (**3**)

$$S\varphi = (\varphi bc)(\varphi bd)\Psi;$$

la conique Ψ passe par c, d et par $S^{-1}(b)$, or b est sur la droite $\overline{ac}$ fondamentale pour S^{-1}, $S^{-1}(b) = c$; Ψ est tangent en c à une direction fixe, y a, par suite, deux points fixes infiniment voisins (Clebsch, *loc. cit.*, t. II, p. 197), mais Ψ est une courbe générale du réseau de S^2; il y aurait donc dans le groupe des substitutions à points fondamentaux infiniment voisins, ce qui est contraire à nos hypothèses.

On verrait plus facilement encore qu'il est absurde de supposer tous les quatre points a, b, c, d en ligne droite.

Passons maintenant à la construction du second type (5).

10. Soient a et b les deux points qui sont fondamentaux pour toutes les substitutions du groupe; ces substitutions sont de la forme

$$S\begin{cases} a\ b\ c \\ a\ b\ d \end{cases} \quad \text{ou} \quad T\begin{cases} a\ b\ e \\ b\ a\ f \end{cases}.$$

On vérifie aisément que les formes S et T sont les seules possibles; supposons en effet une substitution différente, par exemple

$$S'\begin{cases} a & b & c \\ d & a & b \end{cases}$$

et φ' une courbe de son réseau, $S\varphi' = (zac)(zab)\Psi$, Ψ étant une conique qui ne passe plus par a; Ψ est une courbe du réseau de S^2 et a ne serait plus fondamental pour S^2, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Lemme. — *Le produit de deux substitutions* T *et* T′ *de la forme* T *est une substitution de la forme* S.

Soient

$$T\begin{cases} a & b & e \\ b & a & f \end{cases},\quad T'\begin{cases} a & b & e' \\ b & a & f' \end{cases},$$

et soient τ et τ' les courbes générales des réseaux de T et T′, θ et θ' celles des réseaux de T^{-1} et T'^{-1}; on a

$$T\tau' = (zac)(zbe)\zeta,$$

la conique $\zeta = 0$ passe par a, b, $T^{-1}(e')$; de même

$$T'^{-1}\theta = (zaf')(zbf')\eta,$$

la conique $\eta = 0$ passe par a, b, $T'(f')$; ζ est la courbe générale du réseau de $T'T$, η celle du réseau de $T^{-1}T'^{-1} = (T'T)^{-1}$, et les points a, b, $e'' = T^{-1}(e)$ sont les points fondamentaux de $T'T$; a, b, $f'' = T'(f')$ sont les points fondamentaux de l'inverse de $T'T$. On a ainsi, à l'ordre des points fondamentaux près,

$$T'T\begin{cases} a & b & e'' \\ a & b & f'' \end{cases};$$

il reste à faire voir que l'ordre dans lequel sont écrits les points a, b, e'', f'' est le véritable, c'est-à-dire que $T'T$ transforme toute droite issue de a ou b en une autre droite issue également de a ou b. Soit, pour le démontrer, un point quelconque x du plan, $x' = T^{-1}T'^{-1}(x)$, $e''' = T'^{-1}(e)$, on aura

$$T'T(zax) = (zae')(zbe)(zbe''')(zax');$$

d'où, abstraction faite des courbes fixes indépendantes de x,

$$T'T(zax) = (zax'),$$

et, de même,

$$T'T(zbx) = (zbx').$$

Le lemme est ainsi démontré dans toutes ses parties,

Théorème. — *Le groupe* G *du second type résulte d'une seule substitution* T, *combinée à des substitutions de la forme* S.

Soit T' en effet une seconde substitution de la forme T; le lemme précédent donne

$$T'T^{-1} = S, \quad T' = ST. \qquad \text{c. q. f. d.}$$

11. Passons à la construction effective des substitutions S et T. Fixons le système des coordonnées, de façon à avoir

$$a(z_1 = z_3 = 0),$$
$$b(z_2 = z_3 = 0).$$

Soit maintenant

$$T\begin{cases} a & b & c \\ b & a & d \end{cases};$$

achevons de déterminer les coordonnées par les conditions

$$d(z_1 = z_2 = z_3), \quad c(z_1 = z_2 = 0),$$

et soit $c' = T^{-1}(c)$; il vient

$$T(zac) = (zac)(zbc'), \quad (zac) = z_1,$$
$$T(zbc) = (zbc)(zac'), \quad (zbc) = z_2,$$
$$T(zab) = (zac)(zbc), \quad (zab) = z_3.$$

Posons

$$(zbc') = p_2 z_2 + \lambda z_3, \quad (zac') = p_1 z_1 + \mu z_3.$$

Il vient, pour T,

$$T = \begin{vmatrix} z_1 & z_1(p_2 z_2 + \lambda z_3) \\ z_2 & z_2(p_1 z_1 + \mu z_3) \\ z_3 & z_1 z_2 \end{vmatrix};$$

remarquons qu'à la ligne fondamentale $(zab) = z_3 = 0$ de T correspond le point $d(d_1 = d_2 = d_3)$, il viendra

$$p_2 = p_1 = 1;$$

d'où, enfin,

$$T = \begin{vmatrix} z_1 & z_1(z_2 + \lambda z_3) \\ z_2 & z_2(z_1 + \mu z_3) \\ z_3 & z_1 z_2 \end{vmatrix}.$$

Les constantes λ et μ restent arbitraires, et en effet T n'est pas déterminé complètement par ses points fondamentaux, et ceux de T^{-1} (lemme II, 7). En réalité, λ et μ dépendent des coefficients des S, substitutions qu'il nous reste à construire.

Soient

$$S \begin{Bmatrix} a & b & e \\ a & b & f \end{Bmatrix},$$

r le point $r_1 = r_2 = 0$, $r' = S^{-1}(r)$, on aura

$$\begin{aligned} S(zar) &= (zbe)(zar') \quad (zar) = z_1, \\ S(zbr) &= (zae)(zbr') \quad (zbr) = z_2, \\ S(zab) &= (zae)(zbe) \quad (zab) = z_3. \end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned} Q = (zbe) &= Q_2 z_2 + Q_3 z_3 \quad (zae) = P_1 z_1 + P_3 z_3 = P, \\ q = (zbr') &= q_2 z_2 + q_3 z_3 \quad (zar') = p_1 z_1 + p_3 z_3 = p; \end{aligned}$$

il viendra

$$S = \begin{vmatrix} z_1 & (p_1 z_1 + p_3 z_3)(Q_2 z_2 + Q_3 z_3) \\ z_2 & (q_2 z_2 + q_3 z_3)(P_1 z_1 + P_3 z_3) \\ z_3 & (P_1 z_1 + P_3 z_3)(Q_2 z_2 + Q_3 z_3) \end{vmatrix}.$$

12. Désignons par α et β les deux substitutions linéaires à deux variables

$$\alpha = \begin{vmatrix} z_1 & p_1 z_1 + p_3 z_3 \\ z_3 & P_1 z_1 + P_3 z_3 \end{vmatrix}, \quad \beta = \begin{vmatrix} z_2 & q_2 z_2 + q_3 z_3 \\ z_3 & Q_2 z_2 + Q_3 z_3 \end{vmatrix};$$

appelons

$\alpha(U)$ la transformée par α d'une forme binaire U en z_1, z_3,
$\beta(V)$ » β » V en z_2, z_3;

on peut écrire

$$p = \alpha(z_1), \quad P = \alpha(z_3), \quad q = \beta(z_2), \quad Q = \beta(z_3),$$

$$S = \begin{vmatrix} z_1 & \alpha(z_1)\beta(z_3) \\ z_2 & \beta(z_2)\alpha(z_3) \\ z_3 & \alpha(z_3)\beta(z_3) \end{vmatrix} = (\alpha, \beta),$$

et de même

$$S' = (\alpha', \beta').$$

On démontre par un calcul aisé qu'après suppression du facteur PQ on a

$$S'S = (\alpha'\alpha, \beta'\beta),$$

$\alpha'\alpha$ étant le produit des deux substitutions linéaires α et α', etc.

Il reste à démontrer que le groupe linéaire A (dérivé des α) et le groupe linéaire B (dérivé des β) sont l'un et l'autre d'ordre fini.

Soient la substitution S du groupe G, n son ordre

$$S^n = 1 = |z_i \quad R z_i| = (\alpha^n, \beta^n);$$

donc

$$\alpha^n\left(\frac{z_1}{z_3}\right) = \frac{z_1}{z_3}, \quad \beta^n\left(\frac{z_2}{z_3}\right) = \frac{z_2}{z_3}, \quad \alpha^n = \beta^n = 1, \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Nous avons ainsi construit le groupe du second type (5) d'une façon complète.

15. Nous allons construire les groupes quadratiques contenant des substitutions à points fondamentaux infiniment voisins.

Généralisons d'abord, pour une telle substitution S, les notations précédentes (**6**). La notation

$$S\left\{\begin{array}{l} \overleftarrow{a\;a'}\;b, \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

indiquera que deux points fondamentaux se sont confondus en a tout en restant situés sur la droite $\overline{aa'}$, en d'autres termes que la conique générale du réseau φ de S touche en a la droite fixe $\overline{aa'}$.

L'inverse S^{-1} de S possède les mêmes propriétés que S; pour le démontrer, plaçons le point a en $z_1 = z_3 = 0$, b en $z_2 = z_3 = 0$. Il viendra, en donnant $z_1 = 0$ pour équation à la droite $\overline{aa'}$,

$$S = | z_i \quad p_i z_1 z_3 + q_i z_3^2 + r_i z_1 z_2 |$$

d'où

$$S^{-1} \left| \begin{array}{ll} z_1 & P^2 \\ z_2 & RQ \\ z_3 & PQ \end{array} \right|, \quad \text{où} \quad \begin{array}{l} (pqz) = R, \\ (zqr) = P, \\ (pzr) = Q. \end{array}$$

Si donc on désigne par p le point de coordonnées p_i, ..., on voit que la conique générale du réseau ψ de S^{-1} touche au point r la droite fixe $\overline{pr}$, et passe de plus par le point fixe q. On vérifie qu'à tous les points de $\overline{pr}$, S^{-1} fait correspondre le point unique b, ..., et l'on peut écrire, avec les conventions de **6**,

$$S\left\{\begin{array}{l} \overleftarrow{a\;a'}\;b \\ \overleftarrow{r\;p}\;q \end{array}\right. .$$

Remarque. — La jacobienne du réseau φ est $z_3^2 z_1 (pqr) = 0$, ou simplement $z_3^2 z_1 = 0$, puisque les trois points p, q, r ne sont pas en ligne droite, sans quoi le réseau φ se réduirait à un faisceau.

Une substitution quadratique peut avoir ses trois points fondamentaux confondus en un point a ($z_1 = z_2 = 0$, par exemple). La conique générale φ du réseau de S est osculatrice en a à une conique fixe $f = z_2 z_3 + K z_1^2 = 0$, par exemple, et l'on a

$$S = | z_i \quad p_i f + q_i z_1 z_2 + r_i z_2^2 |,$$

$$S^{-1} = \begin{vmatrix} z_1 & QR \\ z_2 & R^2 \\ z_3 & RP - KQ^2 \end{vmatrix}, \quad \text{où} \quad \begin{aligned} (zqr) &= P, \\ (pzr) &= Q, \\ (pqz) &= R; \end{aligned}$$

la conique générale θ du réseau de S^{-1} est osculatrice à la conique fixe $RP - KQ^2 = 0$, au point fixe $R = Q = 0$, c'est-à-dire p.

La jacobienne du réseau φ est $z_2^3 = 0$.

Avant de construire les groupes quadratiques contenant des substitutions à points fondamentaux infiniment voisins, il reste à démontrer, sur la composition de pareilles substitutions, une proposition importante.

Soient

S et S' deux substitutions du groupe G;
φ et φ' les coniques générales de leurs réseaux;
Ψ celle du réseau de S'S.

Il viendra (**2**)

$$\Phi = \varphi'(\varphi) = S\varphi' = P\Psi;$$

soit ϖ un facteur irréductible de P, la proposition annoncée est la suivante :

Lemme. — *La courbe $\varpi = 0$ fait partie de la jacobienne du réseau de* S.

En effet, la courbe $\Phi = 0$ est le lieu des transformés par S^{-1} (**1**) des points de φ; s'il se détache de Φ une courbe fixe et indécomposable $\varpi = 0$, cela veut dire que φ' passe par un point fixe x tel que S^{-1} fait correspondre à x tous les points de $\varpi = 0$ ou inversement qu'à tous les points de $\varpi = 0$, S fait correspondre le point unique x. Donc

$$(1) \qquad S = | z_i \quad x_i M + \varpi N_i |,$$

M et N_i sont des formes d'ordre 2 et $2 - \lambda$, si λ est l'ordre de ϖ. Sur la formule (1), on vérifie aisément que $\varpi = 0$ fait partie de la jacobienne de φ (réseau de S).

Cela posé, nous pouvons aborder la construction des groupes quadratiques à points fondamentaux infiniment voisins.

14. Théorème. — *Si un groupe quadratique* G *d'ordre fini contient une substitution quadratique à trois points fondamentaux infiniment voisins,* G *appartient au troisième type.*

Soit S une pareille substitution; on aura (**13**)

$$S = | z_i \quad p_i f + q_i z_1 z_2 + r_i z_2^2 |.$$

Prenons une substitution *quelconque* S′ de G, soit φ' la conique générale du réseau de S′. On aura (**2**)

$$\varphi'(\varphi) = S\varphi' = P\Psi = z_2^2 \Psi,$$

en vertu du lemme (**13**), puisque $z_2^3 = 0$ est la jacobienne du réseau de S.

Mais, en posant $\varphi_i'(z) = \dfrac{\partial \varphi'(z)}{\partial z_i}$,

$$S\varphi' = \varphi'(\varphi) = f^2 \varphi'(p) + 2 z_1 z_2 f \Sigma_i q_i \varphi_i'(p) + z_2^2(\ldots) = z_2^2 \Psi.$$

d'où

$$\varphi'(p) = 0, \quad \Sigma_i q_i \varphi_i'(p) = 0;$$

φ' touche en p la droite $\overline{pq}$, donc (**6**) et (**13**)

$$S' \left\{ \begin{matrix} p \underset{\leftarrow}{\;} q & \cdots \\ \cdots\cdots & \end{matrix} \right. .$$

Rien n'empêche de supposer que S′ est S elle-même, alors $p_1 = p_2 = 0$,

$q_2 = 0$, puisque la droite $\overline{pq}$ a pour équation $z_2 = 0$; donc la conique générale du réseau de toute substitution contenue dans G touche, en $z_1 = z_2 = 0$, la droite fixe $z_2 = 0$.

Soit maintenant une substitution T de G, t le troisième point fondamental intersection de la droite $\xi_3 = 0$ avec la droite $\xi_1 = 0$, joignant le point t au point fondamental $z_1 = z_2 = 0$. Il viendra

$$T = | z_i \quad \alpha_i z_2 \xi_3 + \beta_i \xi_1^2 + \gamma_i z_2 \xi_1 |, \quad (i = 1, 2, 3).$$

Un calcul aisé montre que la conique générale θ du réseau de T^{-1} touche en α la droite fixe $\overline{\alpha\gamma}$. Donc, en vertu de ce qui précède,

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0, \quad \gamma_2 = 0$$

et

$$T = \begin{vmatrix} z_1 & \xi_1(\beta_1 \xi_1 + \gamma_1 z_2) \\ z_2 & \beta_2 \xi_1^2 \\ z_3 & \alpha_3 z_2 \xi_3 + \xi_1(\beta_3 \xi_1 + \gamma_3 z_2) \end{vmatrix},$$

ce qui revient à la forme donnée pour le troisième type (5),

$$S = \begin{vmatrix} z_1 & (p_1 z_1 + p_2 z_2)(q_1 z_1 + q_2 z_2) \\ z_2 & (p_1 z_1 + p_2 z_2)^2 \\ z_3 & K z_2 z_3 + R \end{vmatrix}.$$

R = forme quadratique binaire en z_1, z_2 à coefficients arbitraires.

Désignons par σ la substitution linéaire binaire

$$\sigma = | z_1 \quad z_2 \quad q_1 z_1 + q_2 z_2 \quad p_1 z_1 + p_2 z_2 |$$

et par $\sigma(u)$ la transformée par σ d'une forme binaire u en z_1 et z_2; on peut écrire

$$S = \begin{vmatrix} z_1 & \sigma(z_2)\sigma(z_1) \\ z_2 & \sigma(z_2)^2 \\ z_3 & K z_2 z_3 + R \end{vmatrix} = (\sigma, K).$$

Voilà donc la forme générale des substitutions de G; on démontre que le produit de deux substitutions de cette forme a la même forme : il suffit d'un calcul très aisé pour le faire voir et pour démontrer que, si

$$S = (\sigma, K), \quad S' = (\sigma', K'),$$

pareillement

$$S'S = (\sigma'\sigma, KK').$$

On démontrera, comme plus haut (**12**), que le groupe Γ, dérivé des substitutions linéaires σ, est d'ordre fini. Il suffira, pour achever d'établir le théorème, de faire voir que les K sont racines de l'unité.

Soient

$$S = (\sigma, K), \quad \sigma^n = 1, \quad S^{\lambda n} = 1 ;$$

prenons la substitution

$$S'' = (1, K'') = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 z_1 \\ z_2 & z_2^2 \\ z_3 & K'' z_2 z_3 + R' \end{vmatrix}.$$

Si $K'' \lesseqgtr 1$, formons

$$S^{\lambda n} = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 z_1 \\ z_2 & z_2^2 \\ z_3 & K^{\lambda n} z_2 z_3 + R' \sum\limits_{j=0}^{j=\lambda-1} K^{nj} \end{vmatrix}$$

$$= 1 = | z_i \quad z_2 z_i | ;$$

d'où la condition unique

$$K^{\lambda n} = 1. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

13. Prenons maintenant un groupe G, dépourvu de substitutions à trois points fondamentaux confondus. Soit S une substitution à deux points fondamentaux confondus ou infiniment voisins, il viendra (**13**)

$$S \left\{ \begin{matrix} \overleftarrow{a \; a'} \; b \\ \overleftarrow{r \; p} \; q \end{matrix} \right. = | z_i \quad p_i z_1 z_3 + q_i z_3^2 + r_i z_1 z_2 |, \quad (i = 1, 2, 3).$$

Soit S' (ayant φ' pour courbe générale de son réseau) une quelconque des substitutions de G; on a

$$S\varphi' = P\Psi, \quad P = z_3^2, \text{ ou } z_1 z_3, \text{ ou } z_1^2,$$

d'après le lemme (**13**) et la nature de la jacobienne des φ.

Or

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} S\varphi' = \varphi'(\varphi) = {} & z_1^2 z_2^2 \varphi'(r) + 2 z_1 z_2 z_3^2 \Sigma_i r_i \varphi_i'(q) \\ & + 2 z_1^2 z_2 z_3 \Sigma_i r_i \varphi_i'(p) + z_3^4 \varphi'(q) \\ & + 2 z_1 z_3^3 \Sigma_i p_i \varphi_i'(q) + z_1^2 z_3^2 \varphi'(p), \\ \text{où} & \\ \varphi_i'(z) = {} & \frac{\partial \varphi'(z)}{\partial z_i}. \end{aligned}\right.$$

Cela posé :

I. Si $P = z_3^2$, $\varphi'(r) = 0$, $\Sigma_i r_i \varphi_i'(p) = 0$, la conique φ' touche en r la droite $\overline{pr}$, et l'on peut écrire

$$S' \left\{\begin{matrix} \underleftarrow{r\,p} \cdots \\ \cdots\cdots\cdots \end{matrix}\right. .$$

Mais on peut prendre pour S' la substitution S elle-même, car S' est quelconque dans le groupe; donc $r = a$, et l'on a

$$S' \left\{\begin{matrix} \underleftarrow{a\,a'} \ldots \\ \underleftarrow{a\,a'} \ldots \end{matrix}\right. .$$

II. Si $P = z_1 z_3$, $\varphi'(r) = 0$, $\varphi'(q) = 0$, S' a pour points fondamentaux r et q; comme on peut prendre, pour S', S elle-même, il vient

$$r = a, \quad p = b, \quad \text{ou} \quad r = b, \quad p = a;$$

d'où

$$S' \left\{\begin{matrix} a & b & \ldots \\ b & a & \ldots \end{matrix}\right. \quad \text{ou} \quad S' \left\{\begin{matrix} a & b & \ldots \\ a & b & \ldots \end{matrix}\right. .$$

III. Si $P = z_1^2$, $\Sigma_i r_i \varphi_i'(q) = 0$, $\varphi'(q) = 0$, $\Sigma_i p_i \varphi_i'(q) = 0$, d'où

$$(pqr) = 0,$$

hypothèse inadmissible : on ne peut donc faire $P = z_1^2$.

En résumé, un groupe G contenant une substitution de la forme

$$S\left\{\begin{array}{l}\underleftarrow{a\ a'}\ b\\ \ldots\ldots\ldots\end{array}\right.$$

appartient à l'une des trois espèces suivantes :

Première espèce. — G contient des substitutions dont les points fondamentaux sont

$$\begin{array}{lll}\underleftarrow{a\ a'}\ b, & \underleftarrow{a\ b}\ b', & a\ b\ c,\\ \underleftarrow{a\ a''}\ b, & \underleftarrow{a\ b}\ b'', & a\ b\ c'.\\ \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\end{array}$$

Deuxième espèce. — G contient les substitutions dont les points fondamentaux sont

$$\underleftarrow{a\ a'}\ b,\quad \underleftarrow{a\ a'}\ c\quad \underleftarrow{a\ a'}\ d,\quad \ldots,$$

Troisième espèce. — G contient les substitutions dont les points fondamentaux sont

$$\underleftarrow{a\ a'}\ b,\quad \underleftarrow{a\ a'}\ c\quad \text{et}\quad a\ b\ c.$$

Le groupe G de la deuxième espèce est le même que le groupe précédemment construit (**14**).

16. Si G est de la première espèce, on voit que toutes les substitutions S ont deux points fondamentaux en deux points fixes a et b du plan, et que toute substitution du groupe est de la forme

$$\left\{\begin{array}{l}a\ b\ \ldots\\ a\ b\ \ldots\end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{l}a\ b\ \ldots\\ b\ a\ \ldots\end{array}\right. .$$

Nous sommes ramené aux substitutions du second type (**5** et **10** ou **11**), sauf, bien entendu, qu'un troisième point fondamental peut s'approcher infiniment de a ou de b, ce que nous n'avons pas considéré (**10** et **11**); mais la forme algébrique des substitutions et les propriétés qui s'en déduisent ne changent pas. Ainsi, par exemple, la substitution

$$S = \begin{vmatrix} z_1 & (p_1 z_1 + p_3 z_3)(Q_2 z_2 + Q_3 z_3) \\ z_2 & (q_2 z_2 + q_3 z_3)(P_1 z_1 + P_3 z_3) \\ z_3 & (P_1 z_1 + P_3 z_3)(Q_2 z_2 + Q_3 z_3) \end{vmatrix}$$

a pour troisième point fondamental le point r,

$$P_1 z_1 + P_3 z_3 = Q_2 z_2 + Q_3 z_3 = 0.$$

Le point r se confondra avec $a(z_1 = z_3 = 0)$, par exemple si $Q_2 = 0$, mais cette hypothèse ne modifiera pas les propriétés de S, des groupes linéaires A et B (**11**); le groupe G est donc le groupe déjà construit du second type (**5**), (**10**) et (**11**).

17. La considération de la troisième espèce (**15**) ne fournit aucun groupe nouveau. Le groupe G de troisième espèce ne diffère en effet du groupe de deuxième espèce que par la présence d'une substitution

$$\Sigma \left\{ \begin{array}{l} a\ b\ c \\ \ldots\ldots \end{array} \right. ;$$

il suffira de démontrer que Σ ne saurait exister dans le groupe G de troisième espèce.

Pour un pareil groupe, on démontre aisément, comme plus haut [(**7**) et (**8**)] :

1° Que le groupe linéaire g, contenu dans G, se combine pour former G avec les deux substitutions

$$T \left\{ \begin{array}{l} aa'b \\ \overleftarrow{} \\ aa'b \\ \overleftarrow{} \end{array} \right., \quad T(c) = 1, \quad T^2 = 1,$$

$$\Sigma \left\{ \begin{array}{l} abc \\ abc \end{array} \right., \quad \Sigma(zaa') = (zaa')(zbc);$$

2° Qu'en prenant des coordonnées, telles que

$$(zab) = z_1 = 0, \quad (zbc) = z_3 = 0,$$
$$(zac) = z_2 = 0, \quad (zaa') = z_1 + z_2 = 0,$$

on a

$$\mathrm{T} = \left|\begin{matrix} z_1 & z_1(z_1+z_2) \\ z_2 & -z_1 z_2 \\ z_3 & (z_1+z_2)z_3 \end{matrix}\right|, \quad \Sigma = \left|\begin{matrix} z_1 & z_2 z_3 \\ z_2 & z_3 z_1 \\ z_3 & z_1 z_2 \end{matrix}\right|.$$

Cela posé, formons $\mathrm{T}\Sigma$, il viendra

$$\mathrm{T}\Sigma = \left|\begin{matrix} z_1 & z_3(z_1+z_2) \\ z_2 & -z_3 z_1 \\ z_3 & z_1(z_1+z_2) \end{matrix}\right|;$$

le point $z_3 = z_1 + z_2 = 0$, qui n'est ni a, ni b, ni c, est fondamental pour $\mathrm{T}\Sigma$, ce qui est absurde, puisque G est de la troisième espèce; donc Σ ne saurait exister dans G. C. Q. F. D.

Les divers groupes quadratiques d'ordre fini sont simplement ceux qui ont été donnés au Tableau précédent (5).