JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ÉMILE PICARD

Sur les fonctions hyperabéliennes

Journal de mathématiques pures et appliquées 4e série, tome 1 (1885), p. 87-128.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1885_4_1__87_0>

Sur les fonctions hyperabéliennes;

PAR M. ÉMILE PICARD.

Dans des études précédentes (*Acta mathematica*, t. I, II et IV), j'ai déjà indiqué une première généralisation des fonctions abéliennes de deux variables indépendantes : ce sont les fonctions *hyperfuchsiennes*. A ces fonctions des deux variables x et y est attaché un groupe discontinu de substitutions de la forme

$$\left(x, y, \frac{M_1 x + P_1 y + R_1}{M_3 x + P_3 y + R_3}, \frac{M_2 x + P_2 y + R_2}{M_3 x + P_3 y + R_3}\right).$$

La généralisation peut se poursuivre dans une autre direction, et j'ai été amené à étudier des fonctions uniformes de deux variables indépendantes x et y, qui ne changent pas quand on effectue sur ces variables un groupe de substitutions de la forme

$$(1) \qquad \left(x, y, \frac{ax + b}{cx + d}, \frac{a'y + b'}{c'y + d'}\right).$$

Comme on le voit, x et y se trouvent remplacés respectivement par des fonctions de x et y seulement, mais ces substitutions doivent se faire simultanément. Dans le cas où les deux substitutions

$$(2) \qquad \left(x, \frac{ax + b}{cx + d}\right) \quad \text{et} \quad \left(y, \frac{a'y + b'}{c'y + d'}\right),$$

relatives respectivement à x et à y, forment des groupes discontinus, les fonctions de x et y, invariables par les substitutions du groupe (1), se ramènent aux fonctions fuchsiennes de M. Poincaré, mais il n'en est plus ainsi si les groupes (2), pris séparément, sont continus, leur ensemble, représenté par les substitutions (1), étant toutefois, bien entendu, discontinu par rapport à un système de valeurs de x et y.

D'une manière plus générale, nous allons avoir à considérer des groupes dont les substitutions sont de l'une et l'autre forme

$$\left(x,\ y,\ \frac{ax+b}{cx+d},\ \frac{a'y+b'}{c'y+d'}\right),$$
$$\left(x,\ y,\ \frac{\alpha y+\beta}{\gamma y+\delta},\ \frac{\alpha' x+\beta'}{\gamma' x+\delta'}\right).$$

Quand un tel groupe sera *discontinu* pour un certain domaine de valeurs de x et y, nous dirons que c'est un *groupe hyperabélien*.

C'est l'examen d'un cas particulier, concernant la théorie des fonctions abéliennes du second genre qui m'a donné le premier exemple d'un groupe hyperabélien; j'indique dans le quatrième Chapitre ce cas particulier, dont je compte faire ultérieurement une étude plus complète.

Le premier Chapitre est consacré à une classe étendue de groupes hyperabéliens, qui se présente dans l'étude arithmétique des formes quadratiques quaternaires réelles à coefficients entiers, quand elles sont réductibles au type

$$u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 - u_4^2.$$

Je montre qu'à chacune de ces formes correspond un groupe hyperabélien, dont on peut trouver les substitutions fondamentales.

Le Chapitre II est consacré à des considérations générales sur les groupes hyperabéliens, particulièrement quand toutes leurs substitutions sont de la forme (1). La loi de génération de ces groupes peut s'obtenir par une méthode analogue à celle dont M. Poincaré a fait usage dans ses célèbres recherches sur les groupes fuchsiens. L'étude du domaine fondamental au point de vue de la Géométrie de situation termine ces généralités.

Dans la troisième Partie, je m'occupe des fonctions hyperabéliennes relatives à un groupe donné. Cette étude difficile, dont je ne fais que tracer ici les premières lignes, est étroitement liée à l'importante notion du genre dans la théorie des surfaces algébriques.

CHAPITRE I.

1. Considérons une forme quadratique quaternaire indéfinie dont les coefficients soient des nombres entiers réels, et dont le discriminant soit différent de zéro; elle sera réductible à l'un ou l'autre des types

$$\pm(u_1^2+u_2^2+u_3^2-u_4^2),$$
$$u_1^2+u_2^2-u_3^2-u_4^2,$$

où les u sont des fonctions linéaires réelles des quatre indéterminées x_1, x_2, x_3 et x_4. Nous laissons de côté les formes du premier type et nous poserons

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = u_1^2+u_2^2-u_3^2-u_4^2,$$
$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3, x_4) = {} & a_1x_1^2+a_2x_2^2+a_3x_3^2+a_4x_4^2 \\ & + 2b_{12}x_1x_2+2b_{13}x_1x_3+2b_{14}x_1x_4 \\ & + 2b_{23}x_2x_3+2b_{24}x_2x_4+2b_{34}x_3x_4, \end{aligned}$$

les a et les b étant des entiers.

Conformément à la méthode générale de M. Hermite (*Journal de Crelle*, t. 47), nous devons associer à la forme f une forme définie convenable renfermant un certain nombre de paramètres arbitraires.

Nous avons d'abord à envisager la substitution la plus générale

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} U_1 &= M_1u_1+P_1u_2+Q_1u_3+R_1u_4, \\ U_2 &= M_2u_1+P_2u_2+Q_2u_3+R_2u_4, \\ U_3 &= M_3u_1+P_3u_2+Q_3u_3+R_3u_4, \\ U_4 &= M_4u_1+P_4u_2+Q_4u_3+R_4u_4, \end{aligned}\right.$$

transformant en elle-même

$$u_1^2+u_2^2-u_3^2-u_4^2,$$

On obtient ainsi un système de dix relations entre les (M, P, Q, R). De ces dix relations, j'en écrirai seulement trois, qui seules nous serviront dans la suite ; ce sont

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{l} M_3^2 + P_3^2 - Q_3^2 - R_3^2 = -1, \\ M_4^2 + P_4^2 - Q_4^2 - R_4^2 = -1, \\ M_3 M_4 + P_3 P_4 - Q_3 Q_4 - R_3 R_4 = 0. \end{array}\right.$$

Ceci posé, associons à la forme indéfinie f la forme définie

$$\varphi = U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + U_4^2,$$

où les U représentent les expressions (1).

Nous pouvons écrire

$$\varphi = U_1^2 + U_2^2 - U_3^2 - U_4^2 + 2U_3^2 + 2U_4^2,$$

ou

$$\begin{aligned} \varphi = u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 - u_4^2 &+ 2(M_3 u_1 + P_3 u_2 + Q_3 u_3 + R_3 u_4)^2 \\ &+ 2(M_4 u_1 + P_4 u_2 + Q_4 u_3 + R_4 u_4)^2, \end{aligned}$$

et sous cette dernière forme, on voit que φ ne dépend que des huit paramètres M_3, P_3, Q_3, R_3 et M_4, P_4, Q_4, R_4, liés par les trois relations (2).

Faisons encore la remarque facile à vérifier, qu'à tout système de valeurs de ces huit paramètres, satisfaisant aux équations (2), correspondent des substitutions (1).

2. Entre les coefficients de la forme f et ceux de la forme φ existent diverses inégalités, qu'il est utile d'indiquer. Les u étant des expressions linéaires et homogènes en x_1, x_2, x_3 et x_4, φ est une forme quadratique homogène en x_1, x_2, x_3 et x_4. Écrivons-la

$$\begin{aligned} \varphi = A_1 x_1^2 &+ A_2 x_2^2 + A_3 x_3^2 + A_4 x_4^2 \\ &+ 2B_{12} x_1 x_2 + 2B_{13} x_1 x_3 + 2B_{14} x_1 x_4 \\ &+ 2B_{23} x_2 x_3 + 2B_{24} x_2 x_4 + 2B_{34} x_3 x_4. \end{aligned}$$

Nous avons d'abord

$$(a_1) \leq A_1, \quad (a_2) \leq A_2, \quad (a_3) \leq A_3, \quad (a_4) \leq A_4,$$

la parenthèse (a) désignant la valeur absolue de a; ces inégalités sont évidentes, car on a

$$\varphi = U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + U_4^2,$$
$$f = U_1^2 + U_2^2 - U_3^2 - U_4^2.$$

On a, d'autre part,

$$a_i a_k - b_{ik}^2 \leq A_i A_k - B_{ik}^2,$$

i et k ayant deux valeurs différentes et comprises, bien entendu, entre un et quatre : c'est ce que l'on voit encore immédiatement à l'aide des expressions précédentes de φ et f.

Enfin, en faisant dans f et φ une des variables égale à zéro, soit par exemple x_4, nous avons deux formes ternaires; le discriminant

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_{12} & b_{13} \\ b_{12} & a_2 & b_{23} \\ b_{13} & b_{23} & a_3 \end{vmatrix}$$

a une moindre valeur absolue que le discriminant correspondant (nécessairement positif, puisque la forme φ est définie et positive)

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_{12} & B_{13} \\ B_{12} & A_2 & B_{23} \\ B_{13} & B_{23} & A_3 \end{vmatrix}.$$

Ce dernier déterminant peut, en effet, se mettre sous la forme d'une somme de quatre carrés, tandis que le premier est égal à la somme de deux de ces carrés diminuée de la somme des deux autres.

5. Nous dirons qu'une forme indéfinie f est réduite, si l'on peut trouver des valeurs des indéterminées (M, P, Q, R) telles que pour celles-ci la forme définie correspondante φ soit elle-même réduite.

Nous n'allons considérer ici que les formes indéfinies f, telles que l'on ne puisse avoir

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

pour les valeurs entières des indéterminées x_1, x_2, x_3 et x_4.

Une forme quaternaire étant donnée, on pourra toujours reconnaître s'il en est ainsi ou non : cette question n'est qu'un cas particulier d'une question beaucoup plus générale, traitée par M. Jordan dans son important Mémoire sur les formes quadratiques (*Journal de l'École Polytechnique*, 1882). Indiquons seulement un exemple pour montrer qu'il y a bien effectivement des formes f, pour lesquelles on ne peut satisfaire à l'égalité précédente : que l'on prenne, en effet,

$$f = a(x_1^2 + x_2^2) - b(x_3^2 + x_4^2),$$

on voit de suite que si le produit ab n'est pas une somme de deux carrés, la forme f ne peut pas représenter zéro.

Ces restrictions faites sur les formes indéfinies f que nous allons considérer, nous avons à indiquer les conditions de réduction à adopter pour la forme définie φ. Théoriquement, les conditions de réduction dues à MM. Korkine et Zolotareff sont très convenables pour notre objet. Je rappelle qu'une forme définie φ est réduite, si on peut la mettre sous la forme

$$\begin{aligned}&\mu_1(x_1 + \varepsilon_1 x_2 + \varepsilon_2 x_3 + \varepsilon_3 x_4)^2\\&\quad + \mu_2(x_2 + \varepsilon_4 x_3 + \varepsilon_5 x_4)^2 + \mu_3(x_3 + \varepsilon_6 x_4)^2 + \mu_4 x_4^2,\end{aligned}$$

les ε étant compris entre $-\frac{1}{2}$ et $+\frac{1}{2}$, et les μ satisfaisant aux inégalités

$$\mu_2 > \tfrac{1}{2}\mu_1, \quad \mu_3 > \tfrac{1}{2}\mu_2, \quad \mu_4 > \tfrac{1}{2}\mu_3;$$

le discriminant D de la forme est d'ailleurs égal à $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$.

Des inégalités précédentes et de ce que μ_1 coefficient de A_1 de x_1^2 dans φ, est au moins égal à la valeur absolue de a_1 (n° **2**) et par suite à l'unité, on conclut que les quatre quantités μ sont limitées en fonction du discriminant D; il en résulte immédiatement, à l'aide des inégalités mentionnées au n° **2**, que tous les coefficients de la forme réduite indéfinie f sont aussi limités en fonction de D. *Le nombre des réduites arithmétiquement équivalentes à la forme f est donc fini.*

Pour faire pratiquement le calcul, on pourra employer d'autres conditions de réduction, qui seront bien préférables : je veux parler des conditions de réduction données par M. Charve (*Annales de l'École Normale*, 1882), et qui résultent de l'extension aux formes quaternaires de la remarquable méthode employée par M. Selling pour les formes ternaires.

M. Charve introduit dans la forme définie, dont nous désignons pour un instant les variables par x, y, z, t, une cinquième variable u, en remplaçant x, y, z, t respectivement par $x-u$, $y-u$, $z-u$, $t-u$; on obtient alors une forme que l'on peut écrire

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} & a(x-y)^2 + b(x-z)^2 + c(x-t)^2 + d(x-u)^2 + e(y-z)^2 \\ & + f(y-t)^2 + g(y-u)^2 + h(z-t)^2 + k(z-u)^2 + l(t-u)^2, \end{aligned} \right.$$

et qui devient identique à la forme proposée quand on fait $u=0$.

On montre d'ailleurs que toute substitution effectuée sur x, y, z, t revient à une substitution d'une forme convenable effectuée sur x, y, z, t, u.

Considérons donc la forme (1); les conditions de réduction sont les suivantes :

1° Ou bien tous les coefficients $a, b, \ldots, k, l$ sont positifs;

2° Ou bien a seul est négatif, et il est inférieur en valeur absolue à b, c, d, e, f, g;

3° Ou bien a et h sont seuls négatifs; de plus, a est inférieur en valeur absolue à b, c, d, e, f, g; en même temps h est inférieur en valeur absolue à b, c, e, f, k, l; enfin $a+h$ est inférieur en valeur absolue à b, c, e, f.

La réduite ainsi définie est unique, c'est-à-dire que, quand une forme vérifie l'une des conditions de réduction, il n'existe aucune autre forme arithmétiquement équivalente satisfaisant soit à cette condition, soit à l'une des deux autres. On doit d'ailleurs considérer comme identiques les formes qu'on déduit d'une forme donnée par la permutation des variables.

On remarque immédiatement que les coefficients $a, b, \ldots, k, l$ sont des fonctions linéaires et homogènes des coefficients de la forme primitive.

5. Nous avons ici jusqu'ici considéré la forme définie φ avec les paramètres M, P, Q, R, qui peuvent être réduits à huit, mais ceux-ci sont liés par trois relations. On a

$$\begin{aligned}\varphi = u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 - u_4^2 &+ 2(M_3 u_1 + P_3 u_2 + Q_3 u_3 + R_3 u_4)^2 \\ &+ 2(M_4 u_1 + P_4 u_2 + Q_4 u_3 + R_4 u_4)^2\end{aligned}$$

avec les relations

$$\begin{aligned}M_3^2 + P_3^2 - Q_3^2 - R_3^2 &= -1, \\ M_4^2 + P_4^2 - Q_4^2 - R_4^2 &= -1, \\ M_3 M_4 + P_3 P_4 - Q_3 Q_4 - R_3 R_4 &= 0.\end{aligned}$$

Posons d'abord

$$M_3 + iM_4 = \mu, \quad P_3 + iP_4 = \pi, \quad Q_3 + iQ_4 = \chi, \quad R_3 + iR_4 = \rho;$$

et les relations précédentes deviendront

$$\begin{aligned}\mu^2 + \pi^2 - \chi^2 - \rho^2 &= 0, \\ \mu\mu_0 + \pi\pi_0 - \chi\chi_0 - \rho\rho_0 &= -2,\end{aligned}$$

μ_0 désignant la conjuguée de μ et de même pour les autres lettres.

Quant à la forme φ, nous pourrons l'écrire

$$\varphi = u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 - u_4^2 + 2\,\text{norme}(\mu u_1 + \pi u_2 + \chi u_3 + \rho u_4)$$

ou bien encore

$$\begin{aligned}2\varphi = (-\mu\mu_0 - \pi\pi_0 &+ \chi\chi_0 + \rho\rho_0)(u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 - u_4^2) \\ &+ 4\,\text{norme}(\mu u_1 + \pi u_2 + \chi u_3 + \rho u_4).\end{aligned}$$

Comme la forme φ n'est considérée que pour en faire la réduction continuelle, nous ne modifierons rien en la divisant par le facteur positif $\varkappa\varkappa_0$, et nous aurons, en posant

$$a = \frac{\mu}{\varkappa}, \quad b = \frac{\pi}{\varkappa}, \quad c = \frac{\rho}{\varkappa},$$

$$\begin{gathered}(1 + cc_0 - aa_0 - bb_0)(u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 - u_4^2) \\ + 4 \text{ norme } (au_1 + bu_2 + u_3 + cu_4).\end{gathered}$$

Entre a, b et c existera d'ailleurs la relation

$$a^2 + b^2 = 1 + c^2,$$

et l'on devra avoir

$$aa_0 + bb_0 < 1 + cc_0.$$

On satisfera de la manière la plus générale à la relation a, b et c en posant

$$a = \frac{\eta - \xi}{\eta + \xi}, \quad b = -\frac{1 + \xi\eta}{\eta + \xi}, \quad c = \frac{1 - \xi\eta}{\eta + \xi},$$

ξ et η étant deux paramètres arbitraires, et, après multiplication par un facteur positif, il vient, pour la forme définie,

$$\begin{aligned}(\mathrm{I}) \quad & (\eta - \eta_0)(\xi_0 - \xi)(u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 - u_4^2) \\ & + 2 \text{ norme } [(\eta - \xi)u_1 - (1 + \xi\eta)u_2 + u_3(\eta + \xi) + (1 - \xi\eta)u_4].\end{aligned}$$

Quant à la condition

$$aa_0 + bb_0 < 1 + cc_0,$$

elle devient

$$(\eta - \eta_0)(\xi_0 - \xi) > 0.$$

Nous avons alors maintenant à effectuer la réduction continuelle de la forme (I), *renfermant les paramètres complexes arbitraires* ξ *et* η; l'inégalité ci-dessus nous montre seulement que, dans ces deux paramètres, les coefficients de $\sqrt{-1}$ doivent être du même signe. Nous supposerons ces deux coefficients positifs, car on voit immédiatement que la forme (I) ne change pas quand on remplace respectivement ξ et η par leurs conjugués ξ_0 et η_0. Si donc nous désignons par domaine S l'ensemble des valeurs de ξ et η ayant pour coefficient de $\sqrt{-1}$ une quantité positive, nous pouvons dire que l'on a à effectuer la réduction continuelle de (I) pour les valeurs de ξ et η appartenant au domaine S.

7. Supposons que la forme indéfinie f, correspondant à φ, soit réduite. La forme φ, que nous prenons d'abord sous sa première expression, sera réduite pour des valeurs convenables de M_3, P_3, Q_3, R_3 et M_4, P_4, Q_4, R_4.

D'après ce que nous avons dit précédemment, les coefficients de x_1^2, x_2^2, x_3^2 et x_4^2, dans φ, sont limités en fonction du déterminant de la forme f. Or soient

$$\begin{aligned}
u_1 &= \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \delta x_4,\\
u_2 &= \alpha' x_1 + \beta' x_2 + \gamma' x_3 + \delta' x_4,\\
u_3 &= \alpha'' x_1 + \beta'' x_2 + \gamma'' x_3 + \delta'' x_4,\\
u_4 &= \alpha''' x_1 + \beta''' x_2 + \gamma''' x_3 + \delta''' x_4;
\end{aligned}$$

on voit qu'alors les quatre expressions

$$\begin{aligned}
&(M_3\alpha + P_3\alpha' + Q_3\alpha'' + R_3\alpha''')^2, \quad (M_3\beta + P_3\beta' + Q_3\beta'' + R_3\beta''')^2,\\
&(M_3\gamma + P_3\gamma' + Q_3\gamma'' + R_3\gamma''')^2, \quad (M_3\delta + P_3\delta' + Q_3\delta'' + R_3\delta''')^2
\end{aligned}$$

sont nécessairement finies et, par suite, M_3, P_3, Q_3 et R_3; on arrive nécessairement à la même conclusion pour M_4, P_4, Q_4 et R_4.

Je dis, de plus, que, pour aucun système de valeurs convenables, on n'a

$$Q_3 = Q_4 = 0.$$

C'est ce que montrent les trois relations auxquelles satisfont les paramètres; elles se réduiraient en effet, dans cette hypothèse, à

$$M_3^2 + P_3^2 - R_3^2 = -1, \quad M_4^2 + P_4^2 - R_4^2 = -1, \quad M_3 M_4 + P_3 P_4 - R_3 R_4 = 0,$$

et l'on en conclurait

$$(P_3 M_4 - M_3 P_4)^2 + M_3^2 + P_3^2 + M_4^2 + P_4^2 + 1 = 0.$$

Les trois quantités représentées par a, b, c (n° **6**) sont donc finies. Nous allons voir qu'à ces valeurs de a, b, c correspondent des valeurs finies de ξ et η. Reprenons les valeurs

$$a = \frac{\eta - \xi}{\eta + \xi}, \quad b = -\frac{1 + \xi\eta}{\eta + \xi}, \quad c = \frac{1 - \xi\eta}{\eta + \xi},$$

avec la relation

$$a^2 + b^2 = 1 + c^2.$$

A un système de valeurs de a, b, c correspondent toujours des valeurs finies de ξ et η, sauf quand on a

$$b = c.$$

Or cette relation entraînerait $\pi = \rho$ ou $P_3 = R_3$ et $P_4 = R_4$; les relations deviendraient

$$M_3^2 - Q_3^2 = -1, \quad M_4^2 - Q_4^2 = -1, \quad M_3 M_4 - Q_3 Q_4 = 0,$$

ce qui donne immédiatement l'égalité impossible

$$M_3^2 + M_4^2 + 1 = 0.$$

Je dis enfin que, dans ξ et dans η, les coefficients de $\sqrt{-1}$ sont différents de zéro. On a, en effet,

$$aa_0 + bb_0 - 1 - cc_0 = -\frac{2}{\varkappa\varkappa_0},$$

$\varkappa$ étant, on se le rappelle, toujours fini et différent de zéro. En remplaçant a, b, c par leurs valeurs en ξ et η, on a

$$\frac{(\eta - \eta_0)(\xi_0 - \xi)}{(\eta + \xi)(\eta_0 + \xi_0)} = \frac{1}{\varkappa\varkappa_0}.$$

Or $\eta + \xi$ n'est pas nul, puisque a, b et c sont finis, et la proposition énoncée est dès lors évidente.

Les diverses remarques que nous venons de faire nous permettent maintenant d'énoncer la proposition suivante :

L'ensemble des valeurs de ξ et η appartenant au domaine S, *pour lesquelles la forme*

$$\begin{aligned}&(\eta-\eta_0)(\xi_0-\xi)(u_1^2+u_2^2-u_3^2-u_4^2)\\&\quad+2\,\text{norme}\,[(\eta-\xi)u_1-(1+\xi\eta)u_2+(\eta+\xi)u_3+(1-\xi\eta)u_4]\end{aligned}$$

est réduite, forme à l'intérieur de S *un domaine* D, *limité et n'ayant aucun point commun avec la limite de* S.

La limite de S est formée par les valeurs de ξ et η, pour lesquelles le coefficient de $\sqrt{-1}$ est nul.

8. Arrêtons-nous un instant sur la nature analytique des relations qui définiront ce domaine D, en écrivant φ sous la forme (n° 4)

$$\begin{aligned}\varphi=a(x_1-x_2)^2+b(x_1-x_3)^2+c(x_1-x_4)^2+dx_1^2+e(x_2-x_3)^2\\+f(x_2-x_4)^2+gx_2^2+h(x_3-x_4)^2+kx_3^2+lx_4^2.\end{aligned}$$

Nous devons d'abord chercher les expressions de a, b, c, ... en fonction de ξ et η.

Or remarquons que tous les coefficients de la forme φ sont des fonctions de ξ et η qui ont la forme suivante :

$$\begin{aligned}\xi\xi_0[A\eta\eta_0+B(\eta+\eta_0)+C]+(\xi+\xi_0)[A'\eta\eta_0+B'(\eta+\eta_0)+C']\\+[A''\eta\eta_0+B''(\eta+\eta_0)+C''],\end{aligned}$$

où les A, B et C sont essentiellement réels.

Les divers coefficients a, b, c, ... seront donc de cette forme et, par suite, δ désignant toujours une expression de cette forme, le domaine D, correspondant à la réduite f, sera limité par des *surfaces*

$$\delta=0.$$

La nature des *surfaces* limitant le domaine D nous sera utile dans la suite.

9. Effectuons maintenant la réduction continuelle de φ. Nous avons dit que la forme φ était réduite tant que le point (ξ, η) était à l'intérieur du domaine D. Lorsque le point (ξ, η) sort de ce domaine, il faut, suivant les circonstances de la variation de ce point, employer certaines substitutions pour réduire la forme de nouveau, ce qui donne, en employant la totalité des substitutions propres à réduire de nouveau φ, certaines réduites adjacentes à la réduite F, auxquelles correspondent des domaines D', D'', ... On continue ainsi à effectuer la réduction continuelle de la forme φ jusqu'à ce qu'on ne trouve plus de nouvelles réduites, ce qui arrivera nécessairement, puisque le nombre des réduites est limité; à chacun des domaines D, D', ... correspondent d'ailleurs toutes les réduites qui se déduisent de l'une d'elles par la permutation des variables. Désignons par δ *le domaine total formé par les domaines* D, D', D'', ... Lorsque le point (ξ, η) sort du domaine δ, on retombe sur une réduite déjà obtenue, à laquelle se trouve ainsi correspondre un nouveau domaine D.

Soit encore, pour ne pas multiplier les notations,

$$f = u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 - u_4^2$$

cette réduite. En faisant passer (ξ, η) du domaine D dans le domaine D_1, on est alors conduit à une substitution S à coefficients entiers, transformant f en elle-même. A une telle substitution correspond manifestement une substitution linéaire faite sur u_1, u_2, u_3 et u_4, soit

$$\begin{aligned}(u_1, u_2, u_3, u_4;\ & A u_1 + B u_2 + C u_3 + D u_4,\ A' u_1 + B' u_2 + C' u_3 + D' u_4,\\ & A'' u_1 + B'' u_2 + C'' u_3 + D'' u_4,\ A''' u_1 + B''' u_2 + C''' u_3 + D''' u_4),\end{aligned}$$

et cette substitution transforme en elle-même l'expression

$$u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 - u_4^2.$$

Reprenons maintenant la forme φ, en l'écrivant, comme au n° 6,

$$\varphi = u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 - u_4^2 + 2\,\mathrm{norme}(\mu u_1 + \pi u_2 + \varkappa u_3 + \rho u_4).$$

Si l'on effectue sur φ la substitution S, cette forme deviendra

$$u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 - u_4^2 + 2\,\mathrm{norme}(\mu' u_1 + \pi' u_2 + \varkappa' u_3 + \rho' u_4),$$

et l'on aura

$$\begin{aligned}
\mu' &= A\mu + A'\pi + A''\varkappa + A'''\rho, \\
\pi' &= B\mu + B'\pi + B''\varkappa + B'''\rho, \\
\varkappa' &= C\mu + C'\pi + C''\varkappa + C'''\rho, \\
\rho' &= D\mu + D'\pi + D''\varkappa + D'''\rho,
\end{aligned}$$

et cette dernière substitution transformera en elle-même l'expression

$$\mu^2 + \pi^2 - \varkappa^2 - \rho^2,$$

et, puisque l'on a

$$\mu^2 + \pi^2 - \varkappa^2 - \rho^2 = 0,$$

on aura pareillement

$$\mu'^2 + \pi'^2 - \varkappa'^2 - \rho'^2 = 0$$

et aussi

$$\mu'\mu'_0 + \pi'\pi'_0 - \varkappa'\varkappa'_0 - \rho'\rho'_0 = -2.$$

Nous avons précédemment posé (n° 6)

$$\frac{\mu}{\varkappa} = \frac{\eta - \xi}{\eta + \xi}, \quad \frac{\pi}{\varkappa} = \frac{1 + \xi\eta}{\eta + \xi}, \quad \frac{\rho}{\varkappa} = \frac{1 - \xi\eta}{\eta + \xi},$$

d'où l'on peut tirer

$$\xi = \frac{\varkappa - \mu}{\rho - \pi}, \quad \eta = \frac{\varkappa + \mu}{\rho - \pi}.$$

Nous poserons pareillement ici

$$\xi' = \frac{\varkappa' - \mu'}{\rho' - \pi'}, \quad \eta' = \frac{\varkappa' + \mu'}{\rho' - \pi'}.$$

ξ' et η' vont être des fonctions de ξ et η, que nous nous proposons maintenant de trouver. Or posons, pour un instant,

$$\varkappa - \mu = \omega_1, \quad \varkappa + \mu = \omega_2, \quad \rho - \pi = \omega_3, \quad \rho + \pi = \omega_4,$$

on aura

$$\omega_1\omega_2 + \omega_3\omega_4 = 0.$$

Soient de même

$$\varkappa' - \mu' = \omega'_1, \quad \varkappa' + \mu' = \omega'_2, \quad \rho' - \pi' = \omega'_3, \quad \rho' + \pi' = \omega'_4$$

et

$$\omega'_1\omega'_2 + \omega'_3\omega'_4 = 0;$$

les ω' sont des fonctions linéaires et homogènes des ω, et cette substitution, dont les coefficients sont réels, faite sur les ω, transforme en elle-même l'expression $\omega_1\omega_2 + \omega_2\omega_1$.

On aura

$$\xi = \frac{\omega_1}{\omega_3}, \quad \eta = \frac{\omega_2}{\omega_3},$$

$$\xi' = \frac{\omega'_1}{\omega'_3}, \quad \eta' = \frac{\omega'_2}{\omega'_3}.$$

On voit d'abord immédiatement que ξ' et η' sont des fonctions rationnelles de ξ et η de la forme

$$\xi' = \frac{A'\xi\eta + B'\eta + C'\xi + D'}{A\xi\eta + B\eta + C\xi + D}, \quad \eta' = \frac{A''\xi\eta + B''\eta + C''\xi + D''}{A\xi\eta + B\eta + C\xi + D},$$

les divers coefficients étant réels; mais on peut aller plus loin, en employant les considérations dont a fait usage M. Goursat dans sa belle étude sur les équations linéaires du quatrième ordre ayant quatre intégrales liées par une relation quadratique (*Bulletin de la Société mathématique*, 1883). On reconnaît alors que les expressions de ξ' et η' en fonction de ξ et η sont de l'une ou l'autre forme

$$(\mathrm{I}) \qquad \xi' = \frac{a\xi + b}{c\xi + d}, \quad \eta' = \frac{l\eta + m}{n\eta + p},$$

$$(\mathrm{II}) \qquad \xi' = \frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta}, \quad \eta' = \frac{\lambda\xi + \mu}{\nu\xi + \pi},$$

les coefficients de ces différentes substitutions étant réels.

On en conclut le théorème suivant qui est fondamental :

On passera du domaine D *au domaine* D_1 *en effectuant sur* (ξ, η) *une substitution de la forme* (I) *ou de la forme* (II).

En continuant d'effectuer la réduction continuelle de la forme φ, on obtiendra un *groupe* G d'une infinité de substitutions, telles que (I) ou (II); ce groupe sera *discontinu*, car à un système de valeurs de (ξ, η) ne correspond qu'une seule réduite arithmétiquement équivalente à la forme définie φ (nous regardons toujours comme identiques, ainsi qu'il a été dit plus haut, les réduites qui ne diffèrent que par la permutation des variables); le point (ξ, η) ne peut donc appartenir qu'à un seul domaine D.

Le domaine δ est un domaine *fondamental* de ce groupe, c'est-à-dire qu'à tout point (ξ, η) à l'intérieur de S correspond par une substitution du groupe *un point et un seul* à l'intérieur de δ; c'est ce qui résulte immédiatement de ce que δ est l'ensemble des domaines D correspondant à *toutes* les réduites distinctes arithmétiquement équivalentes à f.

Nous donnerons le nom de *groupe hyperabélien* à tout groupe discontinu de substitutions relatives à deux variables complexes ξ et η, chacune de ces substitutions étant de la forme (I) ou de la forme (II).

Il résulte des considérations qui viennent d'être développées qu'*à chaque forme quadratique quaternaire à coefficients entiers, réductible au type*

$$u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 - u_4^2,$$

correspond un groupe hyperabélien.

CHAPITRE II.

1. On vient de voir que les formes quadratiques indéfinies conduisaient à une classe étendue de *groupes hyperabéliens*. On est alors tout naturellement conduit à se demander si l'on peut faire la recherche générale des groupes *hyperabéliens*, absolument comme M. Poincaré a fait l'étude complète des groupes *fuchsiens*. C'est ce que je me propose maintenant d'examiner, en me bornant au cas où toutes les substitutions seraient de la forme $\left(\xi, \eta, \frac{a\xi + b}{c\xi + d}, \frac{a'\eta + b'}{c'\eta + d'}\right)$.

Dans l'exemple précédent, on a vu que le groupe avait un domaine fondamental limité par des *surfaces* que nous avons appelées δ et dont l'équation était de la forme

$$\begin{aligned}\xi\xi_0 (A\eta\eta_0 + B(\eta + \eta_0) + C) \\ + (\xi + \xi_0)[A'\eta\eta_0 + B'(\eta + \eta_0) + C'] + A''\eta\eta_0 + B''(\eta + \eta_0) + C'' = 0,\end{aligned}$$

où les A, B, C sont réels.

Nous allons considérer les groupes ayant un *domaine* fondamental limité par des *surfaces* de cette nature, et, pour avoir des groupes analogues à ceux que nous venons d'étudier, nous supposons que la limite de ce domaine fondamental n'ait aucun point commun avec la limite de S (cette limite est formée, comme on se le rappelle, par les valeurs de ξ et η pour lesquelles le coefficient de $\sqrt{-1}$ est nul). Le domaine fondamental est de plus convexe, c'est-à-dire que le domaine tout entier est situé d'un même côté d'une quelconque des faces.

Les faces du domaine δ sont en nombre pair et se correspondent deux à deux par une substitution fondamentale du groupe. Nous avons à distinguer particulièrement les *arêtes*, c'est-à-dire les *continuum* de points, intersections de deux faces, puis les sommets par où passent au moins quatre faces.

Considérons une face F_0 du domaine δ et sur cette face une arête A_0; soit F'_0 la face conjuguée de F_0 et sur cette face A'_0 l'arête correspondant à A_0. L'arête A'_0 est l'intersection de la face F'_0 et d'une autre face F''_0; opérons sur F''_0 comme nous avons opéré sur F_0, et continuons ainsi. Nous obtiendrons une suite d'arêtes $A_0, A_1, \ldots,$ et il est clair que nous finirons par retomber sur l'arête A_0; supposons donc que l'arête A_n coïncide avec l'arête A_0; il importe maintenant de nous arrêter sur la substitution S qui transforme l'arête A_0 en l'arête A_n. Trois cas vont pouvoir se présenter :

1° Tout d'abord, si cette substitution S se réduit à la substitution unité, nous serons ramené évidemment après les n substitutions indiquées au domaine primitif δ, et l'arête considérée appartiendra à n domaines congrus à δ et à n seulement.

2° Supposons maintenant que l'arête A_n coïncide encore avec l'arête A_0, *point par point*, mais cela de la manière la plus générale qu'il soit possible. La substitution S devra être alors de l'une ou l'autre forme

$$\left(\xi, \eta, \frac{a\xi + b}{c\xi + d}, \eta\right),$$

$$\left(\xi, \eta, \xi, \frac{a'\eta + b'}{c'\eta + d'}\right),$$

et l'arête A_0 aura, par suite, une équation de la forme $\xi = \alpha$ dans le premier cas, et $\eta = \beta$ dans le second cas.

Plaçons-nous dans la première hypothèse pour fixer les idées; α correspondra au point double de la substitution

$$\left(\xi, \frac{a\xi+b}{c\xi+d}\right).$$

Ceci posé, considérons un point (ξ, η) situé dans le domaine fondamental S, ξ étant voisin de α, et η étant, sauf la condition précédente, arbitraire. Laissant η fixe, faisons décrire à ξ un petit contour autour de α; en décrivant ce contour, on rencontrera successivement différentes régions $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$. Quand on arrivera à δ_n, l'arête A_n, homologue dans δ_n à l'arête A_0 de δ, coïncidera avec l'arête A_0. Qu'on prenne alors une des faces de S passant par l'arête A_0, soit

$$F_0 = 0,$$

la substitution (S) transforme cette face $F_0^{(n)}$ en

$$F_0^{(n)} = 0.$$

Pour une valeur fixe, mais arbitraire, donnée à η, les équations précédentes représentent, dans le plan de la variable ξ, deux cercles passant par $\zeta = \alpha$; d'après ce qui vient d'être dit, l'angle de ces deux cercles devra être une fraction aliquote de 2π, soit $\frac{2\pi}{p}$, et, en répétant p fois la substitution S, on reviendra au domaine primitif δ. La substitution

$$\left(\xi, \frac{a\xi+b}{c\xi+d}\right)$$

aura pour multiplicateur

$$e^{\frac{2i\pi}{p}}.$$

3° Il peut arriver enfin que l'arête A_n coïncide avec l'arête A_0, mais non point par point. Reprenons la substitution S

$$\left(\xi, \eta, \frac{a\xi+b}{c\xi+d}, \frac{a'\eta+b'}{c'\eta+d'}\right).$$

Supposons, comme dans le second cas, que l'arête A_0 ait pour équation $\xi = \alpha$; en répétant un nombre convenable p de fois la substitution S, on devra rentrer dans le second cas, et l'on en conclut, par conséquent, que le multiplicateur de la substitution

$$\left(\xi, \frac{a\xi + b}{c\xi + d}\right)$$

est de la forme

$$e^{\frac{2i\pi}{pq}},$$

q étant, comme p, un entier. Quant au multiplicateur de la substitution relative à η,

$$\left(\eta, \frac{a'\eta + b'}{c'\eta + d'}\right),$$

il est évident qu'il sera une racine $p^{\text{ième}}$ de l'unité, et, en faisant décrire à η un contour infiniment petit autour du point double, pendant que ξ garde la valeur α, on démontre de suite que cette racine est $e^{\frac{2i\pi}{p}}$.

2. Nous venons de trouver un certain nombre de conditions nécessaires pour que le groupe soit discontinu; ces conditions sont-elles suffisantes? On le démontrera en suivant absolument la même marche que M. Poincaré dans sa théorie des groupes fuchsiens.

Soient A un point quelconque intérieur S, B un point pris arbitrairement dans le domaine S. Joignons A à B par une succession de valeurs de (ξ, η), ne coupant pas la limite du domaine S. Cet *arc* sortira du domaine δ par une face, on construira le domaine limitrophe δ_1, puis on opérera sur δ_1 comme sur δ, et ainsi de suite.

On établit, en raisonnant comme M. Poincaré :

Qu'après un nombre *fini* d'opérations, on arrive à un domaine à l'intérieur duquel se trouve le point B, et que ce domaine est toujours *le même*, quel que soit l'arc qui joigne A à B.

Il n'y a donc aucune difficulté *théorique* à la recherche des groupes hyperabéliens. La recherche effective présentera certainement de grandes complications de calculs, d'autant qu'on n'est plus aidé ici par des constructions géométriques.

3. Nous avons supposé, dans ce qui précède, que le domaine fondamental n'avait aucun point commun avec la limite de S. Bien des cas pourraient se présenter; je me borne à signaler celui qui se rapproche le plus des cas qui viennent d'être examinés. Nous n'avons qu'à supposer qu'une des *arêtes*

$$\xi = \alpha$$

est sur la limite de S, c'est-à-dire que α est réel; soit

$$\left(\xi, \eta, \frac{a\xi + b}{c\xi + d}, \eta\right)$$

la substitution fondamentale conservant cette arête; il est clair que la substitution

$$\left(\xi, \frac{a\xi + b}{c\xi + d}\right)$$

sera parabolique et aura α pour point double.

4. On se rappelle qu'à chaque groupe fuchsien M. Poincaré fait correspondre un nombre p qu'il appelle le *genre* de groupe. Nous allons montrer maintenant qu'à chaque groupe hyperabélien *correspondent trois nombres* p_1, p_2, p_3.

Soit δ un domaine fondamental du groupe; ce domaine à quatre dimensions est limité par certains espaces à trois dimensions, dont les points se correspondent respectivement deux à deux par les substitutions fondamentales du groupe et devront, dans ce qui va suivre, être considérés comme confondus. C'est ainsi que nous dirons qu'un espace à m dimensions $(m < 4)$ contenu dans δ est *fermé*, quand les points, où cet espace rencontre la limite de δ, se correspondent deux à deux par une substitution fondamentale du groupe; un espace *fermé* peut nécessairement alors se composer de parties distinctes : nous ne considérons d'ailleurs que des espaces fermés ne se coupant pas eux-mêmes. Un ou plusieurs espaces *fermés* à m dimensions constitueront le contour d'un espace à $(m+1)$ dimensions contenu dans δ, quand, par ces espaces à m dimensions, on pourra faire passer un espace *fermé* à $(m+1)$ dimensions, dont ils limiteront une partie.

---

(1) La connexité dans les espaces à m dimensions a déjà été étudiée par divers géomètres; on pourra consulter à ce sujet un savant Mémoire de M. Betti (*Annali di Matematica*, 2e série, t. IV).

Ceci posé, si l'on peut imaginer dans δ un nombre p_m d'espaces *fermés* à m dimensions, qui ne puissent pas constituer le contour d'un espace *fermé* à $(m+1)$ dimensions, mais tel que tout autre espace *fermé* à m dimensions puisse constituer avec une partie d'entre eux ou avec tous le contour d'un espace *fermé* à $m+1$ dimensions contenu dans δ, *nous dirons que le domaine δ a une connexion de $m^{\text{ième}}$ espèce d'ordre* (p_m+1).

Nous avons à faire successivement $m=1, 2, 3$, ce qui nous donne *trois nombres p_1, p_2, p_3 correspondant aux diverses connexions du groupe.*

5. Arrêtons-nous sur un cas particulier. Je suppose que le groupe hyperabélien considéré résulte simplement de la superposition de deux groupes fuchsiens relatifs respectivement aux variables u et v. Les substitutions fondamentales sont donc de l'une et l'autre forme

$$\left(u, v, \frac{au+b}{cu+d}, v\right),$$

$$\left(u, v, u, \frac{\alpha v+\beta}{\gamma v+\delta}\right);$$

concevons, dans le plan des u, un polygone fondamental du groupe fuchsien $\left(u, \frac{au+b}{cu+d}\right)$, et faisons de même dans le plan des v pour le groupe $\left(v, \frac{\alpha v+\beta}{\gamma v+\delta}\right)$.

Nous pouvons appliquer au polygone fondamental d'un groupe fuchsien les considérations que nous avons indiquées au paragraphe précédent; le nombre m est ici unique et égal à l'unité, et la connexion de première espèce n'est évidemment autre chose que $2p+1$, en désignant par p le genre du groupe fuchsien d'après M. Poincaré. Désignons par p et p' les genres respectifs des groupes relatifs à u et à v. On pourra donc tracer sur les polygones représentatifs de ces groupes respectivement $2p$ et $2p'$ courbes *fermées* (au sens indiqué plus haut) qui ne limiteront aucune partie des polygones. Proposons-nous de rechercher la valeur de p_3 relative au domaine fondamental du groupe obtenu en superposant ces deux groupes fuchsiens.

Je dis d'abord que l'on a

$$p_3 = 2p + 2p'.$$

Imaginons, en effet, sur les deux polygones les $2p$ et $2p'$ courbes *fermées*, que nous désignerons par C et C'; une quelconque de ces courbes prise seule constitue relativement aux quatre variables un espace *fermé à trois* dimensions. Nous avons donc là $2p + 2p'$ espaces fermés à trois dimensions; or ces espaces ne constituent pas évidemment le contour d'un espace à quatre dimensions, puisque sur chacun des polygones on peut tracer une ligne allant d'un point à un autre et ne rencontrant pas les courbes fermées qui sont tracées sur lui. Il faut montrer maintenant que tout autre espace fermé à trois dimensions peut constituer, avec les $(2p + 2p')$ espaces dont il vient d'être question, le contour d'un espace fermé à quatre dimensions. Soit donc E un espace fermé à trois dimensions; s'il ne limite pas avec les $(2p + 2p')$ premiers une portion du domaine fondamental, on pourra certainement tracer une courbe fermée L, rencontrant seulement E en un seul point et ne rencontrant aucun des $2p + 2p'$ autres espaces. Or toute courbe fermée, tracée dans l'un et l'autre polygone, et qui ne rencontre aucune des $2p$ et $2p'$ courbes C et C', limite sur chacun des polygones une aire déterminée; la courbe fermée L rencontrera donc certainement au moins une seconde fois l'espace E, ce qui ne devrait pas être. Nous avons donc bien, comme connexion de troisième espèce du domaine fondamental,

$$2p + 2p' + 1.$$

Je ne m'arrêterai pas à chercher la valeur de p_2; qu'il me suffise de dire, en vue d'une remarque ultérieure, que p_2 doit être nécessairement une fonction entière et symétrique de p et p', par conséquent une fonction de pp' et $p + p'$.

6. Quoique le groupe précédent soit bien spécial, il n'en présente pas moins quelque intérêt.

Que l'on conçoive, en effet, un groupe hyperabélien, dans lequel les coefficients des substitutions fondamentales dépendraient d'un ou plusieurs paramètres; lorsque les paramètres varient entre certaines limites, les divers ordres de connexion du groupe ne changeront pas, et si, pour un système de valeurs convenables des paramètres, le groupe hyperabélien coïncide avec un groupe du type examiné dans le paragraphe précédent, l'étude du groupe général se trouvera notablement simplifiée.

Un exemple bien simple nous sera fourni par un groupe qui, quoique ne rentrant pas complètement dans la catégorie des groupes hyperabéliens, n'en diffère pas cependant au point de vue de la Géométrie de situation, dont nous nous occupons en ce moment. Que l'on prenne le groupe des fonctions quadruplement périodiques

$$(G)\quad \begin{cases} (x, y, x+\alpha_1, y+\beta_1), \\ (x, y, x+\alpha_2, y+\beta_2), \\ (x, y, x+\alpha_3, y+\beta_3), \\ (x, y, x+\alpha_4, y+\beta_4), \end{cases}$$

le domaine fondamental est une sorte de parallélépipède dans un espace à quatre dimensions; on peut, par une déformation continue, transformer ce groupe dans le suivant

$$(\Gamma)\quad \begin{cases} (x, y, x+\omega, y), \ (x, y, x+\omega', y), \\ (x, y, x, y+\Omega), \ (x, y, x, y+\Omega') \end{cases}$$

qui résulte de la superposition des deux groupes effectués respectivement sur x et y. Les ordres de connexion sont les mêmes pour les groupes G et Γ; on a en particulier $p_3 = 4$.

CHAPITRE III.

1. Après avoir étudié les groupes hyperabéliens, nous avons maintenant à rechercher s'il existe des fonctions des deux variables indépendantes ξ et η, qui se reproduisent quand on effectue sur ces variables les substitutions d'un groupe hyperabélien donné. Nous commençons par remplacer le domaine des deux demi-plans relatifs aux variables ξ et η, par deux cercles C et C' ayant pour centres respectifs les points $\xi = 0$ et $\eta = 0$ et des rayons égaux à l'unité, et soient, comme précédemment,

$$(\mathrm{I})\quad \left(\xi, \eta, \frac{a\xi + b}{c\xi + d}, \frac{a'\eta + b'}{c'\eta + d'}\right),$$

$$(\mathrm{II})\quad \left(\xi, \eta, \frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta}, \frac{\alpha'\xi + \beta'}{\gamma'\xi + \delta'}\right)$$

les deux types des substitutions du groupe hyperabélien; de plus, chacun des déterminants $ad-bc$, ... de ces substitutions reste supposé égal à l'unité.

Désignons par $R(\xi, \eta)$ une fonction rationnelle de ξ et η, qui est finie et déterminée quand ξ ou η sont sur les circonférences C ou C'; elle est, de plus, continue pour des systèmes de valeurs correspondant à des points à l'intérieur de ces cercles. Ainsi, par exemple, la fonction

$$\frac{1}{\xi-\eta-3}$$

reste finie et déterminée si ξ et η restent à l'intérieur ou sur la limite de leur domaine respectif.

Ceci posé pour toutes les substitutions du type (I), formons l'expression

$$R\left(\frac{a\xi+b}{c\xi+d}, \frac{a'\eta+b'}{c'\eta+d'}\right)\frac{1}{(c\xi+d)^{2m}(c'\eta+d')^{2m}}$$

et, pour celles du type (II), l'expression analogue

$$R\left(\frac{\alpha\eta+\beta}{\gamma\eta+\delta}, \frac{\alpha'\xi+\beta'}{\gamma'\xi+\delta'}\right)\frac{1}{(\gamma\eta+\delta)^{2m}(\gamma'\xi+\delta')^{2m}},$$

où m est un entier supérieur à 1.

En faisant la somme de toutes ces expressions, nous obtenons une série qui est absolument convergente pour toute valeur de ξ et de η situés à l'intérieur des cercles C et C'.

Pour le montrer, j'emploierai une méthode semblable à celle dont j'ai fait usage pour prouver la convergence de séries analogues dans la théorie des fonctions hyperfuchsiennes. Soit (ξ, η) un système de valeurs des variables indépendantes; décrivons autour de ce point un petit domaine δ, et envisageons tous les domaines correspondant à δ par toutes les substitutions du groupe : on pourra évidemment, puisque le groupe est discontinu, choisir δ de telle manière que tous ces domaines n'aient aucun point commun.

Posons alors

$$\xi=\xi'+i\xi'', \quad \eta=\eta'+i\eta'',$$

et formons l'intégrale quadruple

$$\int\int\int\int d\xi' d\xi'' d\eta' d\eta''$$

étendue à chacun de ces domaines. La somme de ces intégrales sera finie, car elles sont toutes positives, et leur somme est manifestement moindre que le produit des aires des deux cercles. Or cette somme peut s'écrire

$$\int\int\int\int \left\{ \sum \left[\frac{1}{\text{norme}(c\xi + d)(c'\eta + d')} \right]^2 \right. \\ \left. + \sum \left[\frac{1}{\text{norme}(\gamma\eta + \delta)(\gamma'\xi + \delta')} \right]^2 \right\} d\xi' d\xi'' d\eta' d\eta'',$$

intégrale étendue au petit domaine δ. On en conclut que la série formée précédemment est convergente, puisque la série des modules des termes est convergente; m toutefois doit être égal ou supérieur à deux.

Désignons par $\Theta(\xi, \eta)$ la fonction dont l'existence vient d'être ainsi établie; elle est uniforme et continue pour toute valeur des variables à l'intérieur des cercles C et C'. De plus, la fonction se reproduit à un facteur près, quand on effectue sur les variables une substitution quelconque du groupe; on voit de suite, en effet, qu'on a

$$\Theta\left(\frac{a\xi + b}{c\xi + d}, \frac{a'\eta + b'}{c'\eta + d'}\right) = (c\xi + d)^{2m}(c'\eta + d')^{2m}\Theta(\xi, \eta),$$

et l'identité toute semblable

$$\Theta\left(\frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta}, \frac{\alpha'\xi + \beta'}{\gamma'\xi + \delta'}\right) = (\gamma\eta + \delta)^{2m}(\gamma'\xi + \delta')^{2m}\Theta(\xi, \eta).$$

Une difficulté peut se présenter, si l'on craignait que les fonctions Θ ne fussent identiquement nulles; c'est un point que j'ai examiné en détail dans mon Mémoire sur les fonctions hyperfuchsiennes (*Acta mathematica*, t. V). Les considérations dont j'ai fait usage alors s'appliquent sans modification au cas actuel, et l'on arrive toujours à cette conclusion que, si la fonction rationnelle R est arbitraire et que m soit suffisamment grand, la fonction correspondante Θ ne sera certainement pas identiquement nulle.

2. Le quotient de deux fonctions Θ donne évidemment une fonction qui ne change pas, quand on effectue sur (ξ, η) une substitution du groupe : c'est à de telles fonctions que je donne le nom de *fonctions hyperabéliennes*. Nous pouvons d'abord énoncer la proposition fondamentale suivante : *Entre trois fonctions hyperabéliennes existe une relation algébrique*. Si l'on se borne d'abord au cas où le domaine fondamental δ n'a pas de points communs avec la limite de S, la démonstration est immédiate, puisque, pour tout système de valeurs données à deux de ces fonctions, la troisième n'a qu'un nombre limité de valeurs, ou présente seulement une indétermination à la manière des fonctions algébriques.

On établit encore, en raisonnant comme je l'ai fait (*Acta mathematica*, t. V) à propos des fonctions hyperfuchsiennes, que, un groupe hyperabélien étant donné, toutes les fonctions hyperabéliennes correspondantes *sont fonctions rationnelles de trois d'entre elles*, soit x, y et z; et l'on a, entre ces trois fonctions, une relation algébrique

$$f(x, y, z) = 0.$$

3. Les fonctions hyperabéliennes peuvent être obtenues par l'inversion de quotients d'intégrales d'équations différentielles partielles convenablement choisies.

Prenons deux fonctions hyperabéliennes $F(u, v)$ et $F_1(u, v)$, soit

$$x = F(u, v), \quad y = F_1(u, v).$$

Formons les quatre expressions suivantes

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial F_1}{\partial v} - \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial F_1}{\partial u}}, \quad \omega_2 = u\sqrt{\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial F_1}{\partial v} - \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial F_1}{\partial u}},$$

$$\omega_3 = v\sqrt{\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial F_1}{\partial v} - \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial F_1}{\partial u}}, \quad \omega_4 = uv\sqrt{\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial F_1}{\partial v} - \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial F_1}{\partial u}},$$

entre lesquelles existe manifestement la relation

$$\omega_1\omega_4 = \omega_2\omega_3.$$

Nous pouvons considérer les ω comme fonctions de x et y; ces quatre fonctions satisfont à un système de deux équations aux dérivées partielles de la forme

$$(1)\qquad \begin{cases} r = as + bp + cq + dz, \\ t = a_1 s + b_1 p + c_1 q + d_1 z, \end{cases}$$

p, q, r, s, t étant, suivant l'usage, les dérivées partielles de la fonction z de x et y. On voit bien facilement que les a, b, c, d sont des fonctions algébriques de x et y; de plus, si

$$\lambda = F_2(u, v)$$

est une troisième fonction hyperabélienne, telle que toutes les fonctions relatives au même groupe s'expriment par des fonctions rationnelles de x, y et λ (*voir* le paragraphe précédent), les a, b, c, d seront fonctions rationnelles de x, y et λ, celles-ci étant, d'ailleurs, liées par une relation algébrique

$$f(x, y, \lambda) = 0.$$

Nous avons donc un système (1) de deux équations linéaires simultanées aux dérivées partielles ayant quatre solutions communes linéairement indépendantes ω_1, ω_2, ω_3 et ω_4 liées par la relation quadratique

$$\omega_1 \omega_4 = \omega_2 \omega_3;$$

il est clair que, si l'on pose

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = u, \quad \frac{\omega_3}{\omega_1} = v,$$

ces deux équations donneront pour x et y les deux fonctions hyperabéliennes $F(u, v)$ et $F_1(u, v)$.

4. Reprenons les trois fonctions

$$x = F(u, v), \quad y = F_1(u, v), \quad z = F_2(u, v)$$

liées par la relation algébrique de degré m

$$f(x, y, z) = 0,$$

à l'aide desquelles toutes les autres fonctions hyperabéliennes de même groupe s'expriment rationnellement. A un point *quelconque* de la surface précédente correspond un *seul* système de valeurs de u et v, abstraction faite de ceux qui s'en déduisent par des substitutions du groupe.

Nous avons maintenant à envisager ces intégrales doubles considérées par Clebsch et M. Nœther (*Math. Annalen*, t. VI), intégrales qui sont, dans la théorie des surfaces, les analogues des intégrales de première espèce pour le cas des courbes algébriques. C'est un sujet qui se rattache à la notion du *genre* d'une relation algébrique entre trois variables, notion indiquée par Clebsch et développée dans plusieurs beaux Mémoires de M. Nœther (*Math. Annalen*, t. VI et VIII).

Plaçons-nous d'abord dans un cas très simple. Je suppose que la surface

$$f(x, y, z) = 0$$

n'ait d'autres singularités que des courbes doubles, et que, en tout point de ces courbes doubles, les deux plans tangents à la surface soient distincts; elle peut avoir aussi des points doubles isolés, le cône des tangentes en chacun de ces points doubles ne se réduisant pas à deux plans.

Soit maintenant $Q(x, y, z) = 0$ l'équation d'une surface d'ordre $(m-4)$ passant par les courbes doubles. Les intégrales doubles, auxquelles je faisais allusion plus haut, sont de la forme

$$\int\int \frac{Q(x, y, z)\, dx\, dy}{f'_z(x, y, z)}.$$

Le nombre des coefficients restant arbitraires dans le polynôme $Q(x, y, z)$ d'ordre $(m-4)$ est ce que Clebsch a appelé le *genre de la surface* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, 1868).

Considérons, en prenant pour variables u et v l'élément de l'intégrale double qui devient alors

$$\frac{Q(x, y, z)\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)}{f'_z(x, y, z)};$$

cette expression est une fonction de u et v. Or j'ai déjà considéré une expression de même nature dans mon travail sur les surfaces dont les coordonnées sont des fonctions abéliennes de deux paramètres (*Math. Annalen*, 1882) [1]; en raisonnant comme je l'ai fait alors, on établit sans peine que cette expression est une fonction continue de u et v dans le domaine fondamental δ et, par suite, dans tout le domaine des cercles C et C'. Nous poserons

$$\frac{Q(x,y,z)\left(\dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial y}{\partial v}-\dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{\partial y}{\partial u}\right)}{f'_z(x,y,z)} = G(u,v),$$

$G(u,v)$ étant uniforme et continue dans les cercles C et C'. On voit facilement ce que devient la fonction $G(u,v)$ quand on effectue sur les variables une substitution du groupe. Soient une substitution quelconque du groupe

$$(u, v, U, V)$$

et $(au+b)(cv+d)$ le dénominateur commun à U et à V.

On aura

$$G(U,V) = (au+b)^2(cv+d)^2 G(u,v).$$

Ainsi, à chaque polynôme Q d'ordre $(m-4)$ donnant une surface passant par la courbe double correspond une fonction $G(u,v)$ uniforme et continue dans les cercles C et C', et satisfaisant à la relation indiquée.

Réciproquement, à toute fonction $G(u,v)$, qui vérifie les conditions précédentes, correspond un polynôme $Q(x,y,z)$ d'ordre $(m-4)$, tel que la surface

$$Q(x,y,z) = 0$$

passe par la courbe double. Pour le démontrer, il suffit de considérer l'expression

$$\frac{G(u,v)\,f'_z(x,y,z)}{\dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial y}{\partial v}-\dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{\partial y}{\partial u}},$$

[1] Je n'ai pas supposé dans ce travail que la surface eût des points doubles isolés, mais cette circonstance ne change en rien le mode de raisonnement.

qui est une fonction hyperabélienne de u et v et, par suite, une fonction rationnelle de x, y et z. Or nous allons rapidement montrer que cette fonction rationnelle se réduit à un polynôme d'ordre $m-4$.

Considérons l'intégrale double

$$\int_{u_0}^{u}\int_{v_0}^{v} G(u, v)\, du\, dv,$$

qui reste toujours finie; en désignant par $\varphi(x, y, z)$ l'expression (α), l'intégrale précédente pourra s'écrire

$$\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} \frac{\varphi(x, y, z)\, dx\, dy}{f'_z(x, y, z)},$$

et l'on montrera facilement que, si φ ne se réduit pas à un polynôme, cette intégrale ne pourra pas rester toujours finie. Désignons ce polynôme par $Q(x, y, z)$. Il résulte d'ailleurs d'une des trois formes que l'on peut donner à $Q(x, y, z)$, grâce aux identités

$$\frac{f'_z(x, y, z)}{\dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial y}{\partial v}-\dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{\partial y}{\partial u}} = \frac{f'_x(x, y, z)}{\dfrac{\partial y}{\partial u}\dfrac{\partial z}{\partial v}-\dfrac{\partial y}{\partial v}\dfrac{\partial z}{\partial u}} = \frac{f'_y(x, y, z)}{\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial x}{\partial v}-\dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial x}{\partial u}},$$

que ce polynôme s'annule pour les points de la courbe double. Il reste à démontrer que $Q(x, y, z)$ est au plus de degré $(m-4)$.

On se rappelle que les fonctions hyperabéliennes considérées x, y, z sont obtenues en faisant le quotient de deux fonctions Θ; désignons-les par $\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}$, où x, y, z et t désignent maintenant quatre fonctions Θ; $G(u, v)$ deviendra alors, en désignant par n le degré de Q,

$$\frac{Q(x, y, z, t)\begin{vmatrix} x & y & t \\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial t}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial t}{\partial v}\end{vmatrix}}{t^{n-m+4} f'_z(x, y, z, t)},$$

et sous cette forme on voit immédiatement que $G(u, v)$ serait infinie pour les valeurs de u et v qui annulent la fonction t, si l'on n'avait pas

$$n \leq m - 4,$$

inégalité que nous voulions précisément établir.

5. On voit, d'après le cas que nous venons de traiter, et nous dirons d'une manière générale, que *le genre relatif à un groupe hyperabélien donné* (¹) *est égal au nombre des fonctions* $G(u, v)$ *linéairement indépendantes.*

Ces fonctions $G(u, v)$ sont uniformes et continues dans le domaine des cercles C et C', et, en désignant par

$$(u, v, U, V)$$

une substitution quelconque du groupe, $(cu + d)(\gamma v + \delta)$ étant le dénominateur commun à U et à V,

$$G(U, V) = (cu + d)^2(\gamma v + \delta)^2 G(u, v).$$

6. Arrêtons-nous un moment sur le groupe hyperabélien bien simple, qui résulte de la superposition de deux groupes fuchsiens relatifs séparément aux variables u et v. Les substitutions fondamentales du groupe sont donc de l'un et l'autre type

$$\left(u, v, \frac{au + b}{cu + d}, v\right),$$
$$\left(u, v, u, \frac{\alpha v + \beta}{\gamma v + \delta}\right).$$

Aux substitutions $\left(u, \frac{au + b}{cu + d}\right)$ correspond, dans le plan de la variable u, un groupe fuchsien Γ, et pareillement les substitutions $\left(v, \frac{\alpha v + \beta}{\gamma v + \delta}\right)$ déterminent un second groupe fuchsien Γ' dans le plan de la variable v.

(¹) On ne doit pas oublier que le domaine fondamental des groupes considérés n'a aucun point commun avec les cercles C et C'.

Il est facile de former, dans ce cas, les fonctions désignées par $G(u, v)$ dans les paragraphes précédents. Soit $\Theta(u)$ une fonction uniforme et continue de u dans le cercle C, et telle que, pour toute substitution du groupe fuchsien Γ, on ait

$$(1)\qquad \Theta\left(\frac{au+b}{cu+d}\right) = (cu+d)^2\,\Theta(u);$$

soit de même $H(v)$ une fonction uniforme et continue de v dans le cercle C', et telle que, pour toute substitution du groupe Γ', on ait

$$(2)\qquad H\left(\frac{\alpha v+\beta}{\gamma v+\delta}\right) = (\gamma v+\delta)^2\,H(v);$$

le produit $\Theta(u)H(v)$ est évidemment une fonction $G(u, v)$.

Or désignons par p le genre du groupe Γ et p' le genre du groupe Γ'. Le nombre des fonctions entières linéairement indépendantes $\Theta(u)$ satisfaisant aux relations (1) est égal à p, celui des fonctions $H(u)$ est égal à p'; nous obtenons donc ainsi pp' fonctions $G(u, v)$ linéairement indépendantes. Réciproquement, toute fonction $G(u, v)$ relative au groupe hyperabélien considéré sera une combinaison linéaire de ces pp' fonctions particulières : c'est un point dont la démonstration est immédiate.

Ainsi donc le genre de toute surface dont les coordonnées s'expriment par des fonctions fuchsiennes de u et des fonctions fuchsiennes de v, et cela de telle manière qu'à un point *quelconque* de la surface ne correspond qu'un seul système de valeurs de u et v, est égal au produit pp' des genres des deux groupes fuchsiens.

Considérons maintenant un de ces groupes dont il a été question (Chap. II, § 6) et qui renferment un ou plusieurs paramètres arbitraires. Le genre des surfaces correspondantes sera constant, et, en désignant, comme ci-dessus, par p et p' les genres des groupes fuchsiens dans lesquels se décompose le groupe pour des valeurs convenables des paramètres, on aura pour expressions du genre des surfaces le produit pp'. Or, d'après ce que nous avons vu (n° 5), pp' est une fonction de p_2 et p_3; par suite, pour les groupes précédents, *le genre des surfaces correspondantes est une fonction de p_2 et p_3*.

Ce résultat, si particulier, me paraît cependant intéressant, car la question se pose maintenant de savoir si ce résultat subsiste pour tous les groupes hyperabéliens; on rattacherait ainsi, pour une classe étendue de surfaces, la notion de *genre* à une question de Géométrie de situation. J'espère pouvoir revenir un jour sur ce difficile problème, que je me borne maintenant à poser.

7. Revenons, pour terminer, sur les intégrales doubles considérées au n° 4

$$(1) \qquad \iint \frac{Q(x, y, z)\,dx\,dy}{f'_z(x, y, z)}.$$

Les diverses déterminations de cette intégrale, quand on va d'un point analytique, je veux dire d'un système donné (x_0, y_0, z_0) de valeurs de x, y et z, à un autre système de valeurs (x_1, y_1, z_1), ont un sens bien net quand on se reporte aux variables u et v.

Soit (u_0, v_0) un système de valeurs de u, v correspondant à x_0, y_0, z_0, et de même (u_1, v_1) correspondant à (x_1, y_1, z_1); désignons, de plus, par (U_1, V_1) les transformées de (u_1, v_1) par une substitution quelconque du groupe; l'intégrale double

$$\int_{u_0}^{U_1}\int_{v_0}^{V_1} G(u, v)\,du\,dv,$$

dont le sens est parfaitement déterminé [puisque $G(u, v)$ est uniforme et continu], représente les diverses déterminations de l'intégrale (1), quand x, y, z va de (x_0, y_0, z_0) à (x_1, y_1, z_1); cette intégrale reste finie pour tout système de valeurs de (x, y, z). Dans le cas où (x_1, y_1, z_1) coïncide avec (x_0, y_0, z_0), on a à considérer les intégrales

$$\int_{u_0}^{U_0}\int_{v_0}^{V_0} G(u, v)\,du\,dv.$$

Ces intégrales sont, en quelque sorte, les analogues des périodes des intégrales simples; mais, tandis que, pour ces dernières, les périodes sont des constantes, c'est-à-dire qu'elles ne dépendent pas du point de départ, il arrivera ici qu'elles dépendront des valeurs initiales x_0 et y_0.

CHAPITRE IV.

1. Je me propose d'indiquer, dans ce Chapitre, un exemple particulier de fonctions hyperabéliennes, qui a son origine dans la théorie même des fonctions abéliennes.

Considérons une courbe du second genre, et désignons, suivant l'usage, par

$$\begin{matrix} 1 & 0 & G & H \\ 0 & 1 & H & G' \end{matrix}$$

le tableau des périodes des intégrales normales. Supposons qu'on ait, entre ces quantités, la relation

$$H^2 - GG' = D,$$

D étant un entier réel et positif.

On satisfera à la relation précédente, en posant

$$H = \sqrt{D}\,\frac{x-y}{x+y}, \quad G = -\frac{2\sqrt{D}}{x+y}, \quad G' = \frac{2\sqrt{D}\,xy}{x+y},$$

où nous prenons positivement le radical.

Nous avons ainsi une classe de fonctions abéliennes (correspondant à $p=2$), qui ne dépendent que de deux arbitraires x et y. Cherchons d'abord quelles valeurs on pourra donner à x et y; si l'on pose

$$H = h_0 + ih, \quad G = g_0 + ig, \quad G' = g'_0 + ig',$$

il est bien connu qu'on doit avoir

$$g > 0, \quad g' > 0 \quad \text{et} \quad h^2 - gg' < 0.$$

Or, en écrivant

$$x = x' + ix'', \quad y = y' + iy'',$$

on trouve immédiatement

$$h = \frac{2\sqrt{D}(y'x'' - x'y'')}{\text{norme}(x+y)},$$

$$g = \frac{2\sqrt{D}(x''+y'')}{\text{norme}(x+y)},$$

$$g' = \frac{2\sqrt{D}[y''(x'^2+x''^2)+x''(y'^2+y''^2)]}{\text{norme}(x+y)},$$

et l'on a, par suite,

$$h^2 - gg' = \frac{-x''y''}{(x'+y')^2+(x''+y'')^2};$$

x'' et y'' doivent donc être de même signe, puisque $h^2 - gg'$ est négatif. La considération de g et g', qui sont positifs, permet de conclure qu'on doit avoir

$$x'' > 0, \quad y'' > 0.$$

Ainsi les coefficients de i dans x et y sont positifs.

Ceci posé, on sait que, dans les fonctions abéliennes, les transformations du premier ordre effectuées sur les périodes conduisent à un groupe important de substitutions relatives à G, H, G'; ces substitutions ont le type suivant :

$$G_1 = \frac{(db)_{01}+(db)_{31}G+2(db)_{03}H+(db)_{02}G'+(db)_{23}(H^2-GG')}{(ab)_{01}+(ab)_{31}G+2(ab)_{03}H+(ab)_{02}G'+(ab)_{23}(H^2-GG')},$$

$$H_1 = \frac{(ad)_{01}+(ad)_{31}G+[(ad)_{03}+(ad)_{21}]H+(ad)_{02}G'+(ad)_{23}(H^2-GG')}{(ab)_{01}+(ab)_{31}G+2(ab)_{03}H+(ab)_{02}G'+(ab)_{23}(H^2-GG')},$$

$$G'_1 = \frac{(ac)_{01}+(ac)_{31}G+2(ac)_{03}H+(ac)_{02}G'+(ac)_{23}(H^2-GG')}{(ab)_{01}+(ab)_{31}G+2(ab)_{03}H+(ab)_{02}G'+(ab)_{23}(H^2-GG')},$$

où l'on a posé d'une manière générale

$$(ad)_{ij} = a_i d_j - a_j d_i.$$

Les a, b, c, d sont des entiers vérifiant les six relations

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &a_0 d_3 + b_0 c_3 - c_0 b_3 - d_0 a_3 = a_1 d_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2 - d_1 a_2 = 1,\\ &a_0 d_1 + b_0 c_1 - c_0 b_1 - d_0 a_1 = 0,\\ &a_0 d_2 + b_0 c_2 - c_0 b_2 - d_0 a_2 = 0,\\ &a_1 d_3 + b_1 c_3 - c_1 b_3 - d_1 a_3 = 0,\\ &a_2 d_3 + b_2 c_3 - c_2 b_3 - d_2 a_3 = 0. \end{aligned}\right.$$

Ce groupe de transformations a fait l'objet des recherches de M. Hermite [*Mémoire sur la transformation des fonctions abéliennes* (*Comptes rendus*, 1855)].

Dans ce groupe, je ne considère ici que le sous-groupe, qui laisse inaltérée l'expression $H^2 - GG'$; il est facile d'obtenir les nouvelles relations entre les (a, b, c, d) qui sont à ajouter aux précédentes. On a, en effet,

$$(\alpha)\quad H_1^2 - G_1 G_1' = \frac{(cd)_{01} + (cd)_{31} G + 2(cd)_{03} H + (cd)_{02} G' + (cd)_{23}(H^2 - GG')}{(ab)_{01} + (ab)_{31} G + 2(ab)_{03} H + (ab)_{02} G' + (ab)_{23}(H^2 - GG')};$$

or on veut avoir

$$H^2 - GG' = H_1^2 - G_1 G_1' = D,$$

et il ne doit y avoir entre G, H et G' d'autre relation que $H^2 - GG' = D$, puisqu'il doit rester deux paramètres arbitraires. L'égalité (α) sera donc une relation identique entre G, H et G', quand on y aura remplacé $H^2 - GG'$ et $H_1^2 - GG_1'$ par D. On trouve ainsi les nouvelles relations

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &c_3 d_1 - c_1 d_3 = D(a_3 b_1 - a_1 b_3),\\ &c_0 d_3 - c_3 d_0 = D(a_0 b_3 - a_3 b_0),\\ &c_0 d_2 - c_2 d_0 = D(a_0 b_2 - a_2 b_0),\\ &D^2(a_2 b_3 - a_3 b_2)\\ &\quad + D(a_0 b_1 - a_1 b_0 + c_3 d_2 - c_2 d_3) + c_1 d_0 - c_0 d_1 = 0. \end{aligned}\right.$$

Les relations (1) et (2) déterminent le groupe Γ des substitutions que nous allons avoir maintenant à considérer. Nous avons posé

$$H = \sqrt{D}\frac{x-y}{x+y}, \quad G = -\frac{2\sqrt{D}}{x+y}, \quad G' = \frac{2\sqrt{D}\,xy}{x+y}.$$

En effectuant sur H, G, G′ une substitution du groupe Γ, on a les nouvelles valeurs H_1, G_1, G'_1 et, comme on a encore

$$H_1^2 - G_1 G'_1 = D,$$

on peut poser

$$H_1 = \sqrt{D}\frac{x_1-y_1}{x_1+y_1}, \quad G_1 = -\frac{2\sqrt{D}}{x_1+y_1}, \quad G'_1 = \frac{2\sqrt{D}\,x_1 y_1}{x_1+y_1};$$

x_1 et y_1 vont être des fonctions de x et y, et, par suite, au groupe Γ correspond un groupe de substitutions relatives aux deux variables indépendantes x et y; c'est la nature de ces substitutions que nous nous proposons de rechercher.

2. Au lieu de partir de deux intégrales normales, supposons qu'on ait considéré deux intégrales abéliennes quelconques dont les périodes normales soient

$$\omega_0, \ \omega_1, \ \omega_2, \ \omega_3,$$
$$\omega'_0, \ \omega'_1, \ \omega'_2, \ \omega'_3$$

avec la relation fondamentale

$$\omega_0\omega'_3 - \omega_3\omega'_0 + \omega_1\omega'_2 - \omega_2\omega'_1 = 0.$$

Posons d'une manière générale

$$\alpha_{ik} = \omega_i\omega'_k - \omega_k\omega'_i,$$

on aura ainsi six quantités α, et l'on a d'abord entre elles les relations

$$\alpha_{03} + \alpha_{12} = 0,$$
$$\alpha_{10}\alpha_{23} - \alpha_{30}\alpha_{21} = \alpha_{13}\alpha_{20},$$

la première étant la relation fondamentale, et la seconde étant identiquement vérifiée. En passant aux intégrales normales, on trouve, pour valeurs de G, H et G′,

$$G = \frac{\alpha_{31}}{\alpha_{01}}, \quad H = -\frac{\alpha_{03}}{\alpha_{01}}, \quad G' = \frac{\alpha_{02}}{\alpha_{01}}$$

et, par suite,

$$H^2 - GG' = \frac{\alpha_{23}}{\alpha_{01}}.$$

Nous avons donc, à cause de $H^2 - GG' = D$, la nouvelle relation

$$\alpha_{23} = D\alpha_{01},$$

et, par suite, l'identité entre les α devient la relation

$$\alpha_{03}^2 - D\alpha_{01}^2 = \alpha_{31}\alpha_{02},$$

où ne figurent que les quatre expressions α_{01}, α_{02}, α_{03} et α_{13}.

Effectuons maintenant sur les ω et les ω' la substitution linéaire

$$\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \quad a_0\omega_0 + a_1\omega_1 + a_2\omega_2 + a_3\omega_3 + \ldots,$$
$$b_0\omega_0 + \ldots, \quad c_0\omega_0 + \ldots, \quad d_0\omega_0 + \ldots,$$

où les (a, b, c, d) sont des entiers vérifiant les équations (1) du paragraphe précédent, de telle sorte que la relation fondamentale entre les ω et les ω' subsiste après la substitution. Si nous voulons, de plus, que la relation

$$\alpha_{23} = D\alpha_{01}$$

subsiste aussi après la substitution, on retrouve, cela était évident *a priori*, les équations (2) du même paragraphe.

Désignons par des α' ce que deviennent les six quantités α après la transformation; les α' seront évidemment des fonctions linéaires et homogènes des α. Comme on a encore

$$\alpha'_{03} + \alpha'_{12} = 0, \quad \alpha'_{23} = D\alpha'_{01},$$

il s'ensuit que les quatre expressions α'_{01}, α'_{02}, α'_{03} et α'_{13} seront des fonctions linéaires et à coefficients entiers de α_{01}, α_{02}, α_{03} et α_{13}, et la relation

$$\alpha'^2_{03} - D\alpha'^2_{01} = \alpha'_{31}\alpha'_{02},$$

conséquence des deux précédentes, subsiste nécessairement.

5. Ces remarques faites, nous pouvons chercher les expressions de x_1, y_1 en fonction de x et y.

Des expressions de H, G, G′ en fonction de x et y (n° 1) on tire

$$x = -\frac{H+\sqrt{D}}{G}, \quad y = \frac{H-\sqrt{D}}{G}$$

et, par suite,

$$x = \frac{\alpha_{03} - \sqrt{D}\alpha_{01}}{\alpha_{31}}, \quad y = \frac{-\alpha_{03} - \sqrt{D}\alpha_{01}}{\alpha_{31}}.$$

On aura de même

$$x_1 = \frac{\alpha'_{03} - \sqrt{D}\alpha'_{01}}{\alpha'_{31}}, \quad y_1 = \frac{-\alpha'_{03} - \sqrt{D}\alpha'_{01}}{\alpha'_{31}}.$$

Si nous posons

$$\alpha_{03} - \sqrt{D}\alpha_{01} = \omega_1, \quad -\alpha_{03} - \sqrt{D}\alpha_{01} = \omega_2, \quad \alpha_{31} = \omega_3, \quad \alpha_{20} = \omega_4,$$

on aura

$$\omega_1\omega_2 = \omega_3\omega_4;$$

à la substitution effectuée sur les α correspond une substitution effectuée sur les ω, et les coefficients de cette substitution sont toujours réels, mais ne sont plus des entiers, et l'on a entre les ω' la relation

$$\omega'_1\omega'_2 = \omega'_3\omega'_4;$$

nous avons donc

$$x = \frac{\omega_1}{\omega_3}, \quad y = \frac{\omega_2}{\omega_3}$$

et

$$x_1 = \frac{\omega'_1}{\omega'_3}, \quad y_1 = \frac{\omega'_2}{\omega'_3}:$$

ce sont les circonstances dans lesquelles nous nous sommes trouvé précédemment (Chap. Ier, n° 9), et nous aurons, par conséquent, soit

$$x_1 = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad y_1 = \frac{ly+m}{ny+p},$$

soit

$$x_1 = \frac{\alpha y+\beta}{\gamma y+\delta}, \quad y_1 = \frac{\lambda x+\mu}{\nu x+\pi}.$$

Le groupe relatif aux deux variables (x, y) *est un groupe hyperabélien*: il est, en effet, d'après son origine même, évidemment *discontinu*. C'est le groupe que nous nous proposions de trouver.

4. Cherchons maintenant dans quels cas les intégrales normales u et v, de périodes

$$\begin{matrix} 1 & 0 & G & H, \\ 0 & 1 & H & G', \end{matrix}$$

où H, G, G' satisfont à la relation

$$H^2 - GG' = D,$$

conduisent à des cas de réduction d'intégrales abéliennes aux intégrales elliptiques. Si l'on peut déterminer A et B de telle manière que l'intégrale

$$Au + Bv$$

n'ait que deux périodes, on aura nécessairement

$$\begin{aligned} mA + nB + p(AG + BH) + q(AH + BG') &= 0, \\ m'A + n'B + p'(AG + BH) + q'(AH + BG') &= 0, \end{aligned}$$

les (m, n, p, q) étant des entiers, tels qu'on n'ait pas $\frac{m}{m'} = \frac{n}{n'} = \frac{p}{p'} = \frac{q}{q'}$, et, par suite, en éliminant A et B,

$$\begin{aligned} mn' - m'n + G(pn' - p'n) + (qn' - q'n + mp' - m'p)H \\ + (mq' - m'q)G' + (qp' - pq')(H^2 - GG') = 0. \end{aligned}$$

Or nous supposons H, G et G′ *uniquement* assujettis à la relation

$$H^2 - GG' = D,$$

c'est-à-dire que nous considérons les quantités x et y des numéros précédents comme arbitraires. On devra donc avoir, dans ces conditions,

$$pn' - p'n = 0,$$
$$qn' - q'n + mp' - m'p = 0,$$
$$mq' - m'q = 0,$$
$$mn' - m'n + (qp' - pq')D = 0.$$

Je dis qu'il résulte de là que D *doit être un carré parfait;* on le voit tout de suite en partant de l'identité

$$(nm' - mn')(pq' - p'q) - (qm' - q'm)(pn' - p'n)$$
$$= (nq' - n'q)(pm' - p'm)$$

qui, en tenant compte des quatre équations précédentes, devient

$$(pq' - p'q)^2 D = (pm' - p'm)^2.$$

Or on ne peut avoir $pq' - p'q = pm' - p'm = 0$, car ces deux équations, jointes aux quatre précédentes, montreraient que m, n, p, q sont proportionnels à m', n', p', q'. On voit donc que l'entier D sera nécessairement, si l'on est dans un cas de réduction, un carré parfait.

Relativement au groupe hyperabélien que nous venons de définir, il y a une différence essentielle entre le cas où D est un carré parfait et celui où il ne l'est pas. Dans le premier, les coefficients des substitutions relatives à x et à y sont rationnels; les groupes

$$\left(x, \frac{ax + b}{cx + d}\right) \quad \text{et} \quad \left(y, \frac{ly + m}{ny + p}\right)$$

sont séparément discontinus, et les fonctions relatives à ces groupes se ramènent aux fonctions elliptiques modulaires.

Dans le second cas, les coefficients des substitutions sont irrationnelles (à cause du radical $\sqrt{D}$); les groupes précédents pris séparément sont continus, et c'est seulement en effectuant leurs substitutions simultanément sur x et y qu'on obtient un groupe discontinu relatif à ces deux variables.

Je me borne à ces remarques sur le groupe qui vient d'être défini; l'étude des modules et des fonctions Θ à indice zéro, quand on remplace G, H et G' par leur valeur en x et y, ne serait pas sans intérêt, mais elle se rattache plus particulièrement à la théorie des fonctions abéliennes; ce sera l'objet d'un travail spécial.