JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

A.-H. ANGLIN

Sur le coefficient du terme général dans certains développements

Journal de mathématiques pures et appliquées 4e série, tome 2 (1886), p. 139-150.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1886_4_2__139_0>

Sur le coefficient du terme général dans certains développements ;

PAR M. A.-H. ANGLIN.

L'objet de ce Mémoire est d'obtenir sous forme finie le coefficient du terme général de quelques développements, qui n'a été obtenu jusqu'ici que sous forme de séries, en déterminant la somme de certaines de ces séries.

La méthode employée est une conséquence de ce théorème que

$$a^{n+2}(b-c)+b^{n+2}(c-a)+c^{n+2}(a-b)$$

est divisible par

$$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b),$$

le quotient étant h_n, où h_n est la somme des produits homogènes de a, b, c et de leurs puissances, ces produits étant de degré n.

1. Nous établirons donc d'abord ce théorème fondamental, à savoir que

$$a^{n+2}(b-c)+b^{n+2}(c-a)+c^{n+2}(a-b)=kh_n,$$

k désignant

$$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b).$$

Nous avons

$$\frac{1}{1-ax}\,\frac{1}{1-bx}\,\frac{1}{1-cx}$$
$$=(1+ax+\ldots+a^n x^n+\ldots)(1+bx+\ldots+b^n x^n+\ldots)(1+cx+\ldots+c^n x^n+\ldots)$$
$$=1+h_1 x+h_2 x^2+\ldots+h_n x^n+\ldots,$$

où h_n désigne la somme des produits homogènes de degré n, de a, b, c et de leurs puissances.

Mais on démontre aussi que

$$\frac{1}{1-ax}\,\frac{1}{1-bx}\,\frac{1}{1-cx}=\frac{A}{1-ax}+\frac{B}{1-bx}+\frac{C}{1-cx},$$

où

$$A=\frac{a^2}{(a-b)(a-c)},\qquad B=\frac{b^2}{(b-a)(b-c)},\qquad C=\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}.$$

Par conséquent

$$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}(1+ax+\ldots+a^n x^n+\ldots)$$
$$+\frac{b^2}{(b-a)(b-c)}(1+bx+\ldots+b^n x^n+\ldots)$$
$$+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}(1+cx+\ldots+c^n x^n+\ldots)$$
$$=1+h_1 x+h_2 x^2+\ldots+h_n x^n+\ldots.$$

Alors, en égalant les coefficients de x dans les deux membres, nous obtenons

$$\frac{a^{n+2}}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^{n+2}}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^{n+2}}{(c-a)(c-b)}=h_n,$$

et par conséquent

$$a^{n+2}(b-c)+b^{n+2}(c-a)+c^{n+2}(a-b)=kh_n.$$

2. Afin de donner une solution complète du problème qui forme le

sujet de ce Mémoire, il est nécessaire d'exposer d'abord le lemme suivant :

Dans l'expression

$$(1+ax+\ldots+a^n x^n)(1+bx+b^2x^2+\ldots+b^n x^n)(1+cx+c^2x^2+\ldots+c^n x^n),$$

où chaque facteur s'arrête au terme en x^n, le coefficient de x^n est h_n, qui renferme a^n, b^n et c^n.

Le coefficient de x^{n+1} est formé par la somme des produits homogènes de degré $n+1$, de a, b, c, moins les puissances $(n+1)^{\text{ièmes}}$, a^{n+1}, b^{n+1}, c^{n+1}; et il est ainsi égal à $h_{n+1}-s_{n+1}$, en désignant généralement par s_r la somme $a^r+b^r+c^r$.

De même, le coefficient de x^{n+2} est la somme des produits homogènes de degré $n+2$ de a, b, c, moins les termes renfermant les exposants $n+2$ et $n+1$, et il est par conséquent égal à

$$h_{n+2}-a^{n+2}-b^{n+2}-c^{n+2}-a^{n+1}(b+c)-b^{n+1}(c+a)-c^{n+1}(a+b),$$

c'est-à-dire

$$h_{n+2}-h_1 s_{n+1}.$$

Le coefficient de x^{n+3} est h_{n+3}, moins les termes renfermant les exposants $n+3$, $n+2$ et $n+1$, et l'on peut, par conséquent, montrer qu'il est égal à

$$h_{n+3}-s_{n+1}h_2.$$

Plus généralement, le coefficient de x^{n+m} est égal à la somme des produits homogènes de degré $n+m$ de a, b, c, moins les termes renfermant les exposants $n+m$, $n+m-1\ldots n+1$, et il est par conséquent égal à

$$\begin{aligned}h_{n+m}-a^{n+m}-a^{n+m-1}(b+c)-\ldots-a^{n+m-2}(b^2+bc+c^2)-\ldots\\ -a^{n-1}(b^{m+1}+b^{m-2}c+b^{m-3}c^2+\ldots+c^{m-1}),\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$h_{n+m}-s_{n+1}h_{m-1}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}&(1+ax+\ldots+a^n x^n)(1+bx+\ldots+b^n x^n)(1+cx+\ldots+c^n x^n)\\&\quad=1+h_1 x+\ldots+h_n x^n+(h_{n+1}-s_{n+1})x^{n+1}+(h_{n+2}-s_{n+1}h_1)x^{n+2}\\&\qquad+(h_{n+3}-s_{n+1}h_2)x^{n+3}+\ldots+(h_{n+m}-s_{n+1}h_{m-1})x^{n+m}+\ldots.\end{aligned}$$

En particulier, le coefficient de x^{2n+2} peut être exprimé autrement que par $a_{2n+2}-s_{n+1}h_{n+1}$, sous une forme plus commode; en effet, ce coefficient est celui de x^{2n+2} dans le produit de

$$a^n x^n(1+a^{-1}x^{-1}+a^{-2}x^{-2}+\ldots+a^{-n}x^{-n})$$

par deux expressions analogues, formées en remplaçant successivement a par b et c dans celle-là, ce qui donne le produit

$$\begin{aligned}&(abc)^n x^{3n}(1+a^{-1}x^{-1}+\ldots+a^{-n}x^{-n})\\&\quad\times(1+b^{-1}x^{-1}+\ldots+b^{-n}x^{-n})(1+c^{-1}x^{-1}+\ldots+c^{-n}x^{-n}).\end{aligned}$$

Ce coefficient de x^{2n+2} est égal à $(abc)^n$ multiplié par le coefficient de $x^{-(n-2)}$ dans l'expression

$$\begin{aligned}&(1+a^{-1}x^{-1}+\ldots+a^{-n}x^{-n})\\&\quad\times(1+b^{-1}x^{-1}+\ldots+b^{-n}x^{-n})(1+c^{-1}x^{-1}+\ldots+c^{-n}x^{-n}).\end{aligned}$$

Il est donc égal à $(abc)^n h'_{n-2}$, h'_n désignant la somme des produits homogènes de degré n, des inverses de a, b, c et de leurs puissances.

3. Nous allons maintenant considérer le coefficient général dans une certaine forme de développement, et, pour plus de clarté, nous commencerons par le chercher dans des cas particuliers avant d'aborder le cas général.

Nous avons

$$(1)\qquad a^{n+2}(b-c)+b^{n+2}(c-a)+c^{n+2}(a-b)=kh_n,$$

où k représente $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$. En multipliant les deux membres de (1) par $a+b+c$ (qui a été désigné par s_1), et en groupant convenablement les termes, nous aurons

$$\begin{aligned}&a^{n+2}(b+c)(b-c)+b^{n+2}(c+a)(c-a)+c^{n+2}(a+b)(a-b)\\&\quad=k(s_1h_n-h_{n+1}).\end{aligned}$$

Multipliant encore par $a+b+c$ et groupant les termes, nous aurons

$$a^{n+2}(b+c)^2(b-c)+\ldots=k(s_1^2h_n-2s_1h_{n+1}+h_{n+2}),$$

et de la même manière

$$a^{n+2}(b+c)^3(b-c)+\ldots=k(s_1^3h_n-3s_1^2h_{n+1}+3s_1h_{n+2}-h_{n+3}).$$

Enfin on peut déduire par le même procédé que

$$(2)\quad\left\{\begin{aligned}&a^{n+2}(b+c)^r(b-c)+b^{n+2}(c+a)^r(c-a)+c^{n+2}(a+b)^r(c-a)\\&\quad=k(s_1-1)^r[h]_{n+r}^n,\end{aligned}\right.$$

$(s_1-1)^r[h]_{n+r}^n$ étant une représentation symbolique de la suite

$$(\mathrm{A})\quad\left\{\begin{aligned}&s_1^rh_n-rs_1^{r-1}h_{n+1}+\frac{r(r-1)}{1.2}s^{r-2}h_{n+2}\\&\qquad-\frac{r(r-1)(r-2)}{1.2.3}s_1^{r-3}h_{n+3}+\ldots+(-1)^rh_{n+r}.\end{aligned}\right.$$

Maintenant, on a

$$(s_1x-1)^r=s_1^rx^r-rs_1^{r-1}x^{r-1}+\frac{r(r-1)}{1.2}s_1^{r-2}x^{r-2}+\ldots+(-1)^r$$

et

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(1-ax)(1-bx)(1-cx)}\\&\quad=1+\ldots+h_nx^n+h_{n+1}x^{n+1}+h_{n+2}x^{n+2}+\ldots+h_{n+r}x^{n+r}+\ldots.\end{aligned}$$

Par conséquent, la suite (A) est le coefficient de x^{n+r} dans le développement de $\frac{(s_1 x - 1)^r}{(1-ax)(1-bx)(1-cx)}$; et ce coefficient est alors égal à l'expression

$$\frac{a^{n+2}(b+c)^r(b-c)+b^{n+2}(c+a)^r(c-a)+c^{n+2}(a+b)^r(a-b)}{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}.$$

4. Si nous multiplions les deux membres de l'équation fondamentale (1) par $a^2+b^2+c^2$ (c'est-à-dire s_2) et si nous groupons les termes convenablement, nous trouvons

$$\begin{aligned}&a^{n+2}(b^2+c^2)(b-c)+b^{n+2}(c^2+a^2)(c-a)+c^{n+2}(a^2+b^2)(a-b)\\&\quad=k(s_2 h_n - h_{n+2}).\end{aligned}$$

Multiplions encore par $a^2+b^2+c^2$, nous obtiendrons

$$a^{n+2}(b^2+c^2)^2(b-c)+\ldots=k(s_2^2 h_n - 2s_2 h_{n+2} + h_{n+4})$$

et de la même manière

$$a^{n+2}(b^2+c^2)^3(b-c)+\ldots=k(s_2^3 h_n - 3s_2^2 h_{n+2} + 3s_2 h_{n+4} - h_{n+6}).$$

Finalement, on arrive par ce moyen au résultat suivant

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned}&a^{n+2}(b^2+c^2)^r(b-c)+b^{n+2}(c^2+a^2)^r(c-a)\\&\quad+c^{n+2}(a^2+b^2)^r(a-b)=k(s_2-1)^r(h)^n_{n+2r},\end{aligned}\right.$$

où $(s_2-1)^r[h]^n_{n+2r}$ représente symboliquement la suite

$$(\mathrm{B})\qquad \left\{\begin{aligned}&s_2^r h_n - r s_2^{r-1} h_{n+2} + \frac{r(r-1)}{1.2} s_2^{r-2} h_{n+4}\\&\quad-\frac{r(r-1)(r-2)}{1.2.3} s_2^{r-3} h_{n+6}+\ldots+(-1)^r h_{n+2r}.\end{aligned}\right.$$

Or

$$\frac{1}{(1-ax)(1-bx)(1-cx)}=\ldots+h_n x^n + h_{n+1}x^{n+1}+h_{n+2}x^{n+2}+\ldots,$$

$$\frac{1}{(1+ax)(1+bx)(1+cx)}=\ldots\pm h_n x^n \mp h_{n+1}x^{n+1}\pm h_{n+2}x^{n+2}\mp\ldots.$$

suivant que n est pair ou impair; de sorte que la série

$$h_n x^n + h_n x^{n+2} + h_{n+4} x^{n+4} + \ldots + h_{n+2r} x^{n+2r} + \ldots$$
$$= \frac{[1 + (bc + ca + ab)x^2] \quad \text{ou} \quad [(a+b+c)x + abcx^3]}{(1 - a^2x^2)(1 - b^2x^2)(1 - c^2x^2)},$$

suivant que n est pair ou impair.

Mais on a

$$(s_2 x^2 - 1)^r = s_2^r x^{2r} - r s_2^{r-1} x^{2r-2} + \frac{r(r-1)}{1.2} s_2^{r-2} x^{2r-4}$$
$$- \frac{r(r-1)(r-2)}{1.2.3} s_2^{r-3} x^{2r-6} + \ldots + (-1)^r.$$

Donc la suite B est le coefficient de x^{n+2r} dans le développement de

$$\frac{1 + (bc + ab + ca)x^2}{(1 - a^2x^2)(1 - b^2x^2)(1 - c^2x^2)} (s_2 x^2 - 1)^r,$$

n étant pair et dans le développement de

$$\frac{(a + b + c)x + abcx^3}{(1 - a^2x^2)(1 - b^2x^2)(1 - c^2x^2)} (s_2 x^2 - 1)^r,$$

n étant impair, et alors chacun de ces coefficients est égal à

$$\frac{a^{n+2}(b^2 + c^2)^r (b - c) + b^{n+2}(c^2 + a^2)^r (c - a) + c^{n+2}(a^2 + b^2)^r (a - b)}{a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b)}.$$

5. Si nous appliquons à l'équation (1) la même méthode de multiplication par $a^3 + b^3 + c^3$, puis par des sommes analogues de puissances plus élevées de a, b, c, des difficultés nouvelles en même temps que des formes intéressantes se présentent, la manière de procéder restant la même dans tous les cas; mais, pour plus de clarté, nous allons encore indiquer un cas particulier avant de passer au cas général.

Multiplions l'équation (1) par $a^4 + b^4 + c^4$ (ou s_4), comme il a été indiqué, on trouvera finalement que

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} & a^{n+2}(b^4 + c^4)^r (b - c) + b^{n+2}(c^4 + a^4)^r (c - a) + c^{n+2}(a^4 + b^4)^r (a - b) \\ & \quad = k(s_4 - 1)^r [h]_{n+4r}^n, \end{aligned} \right.$$

où $(s_4 - 1)^r[h]^n_{n+4r}$ représente la suite

$$(C)\quad \begin{cases} s_4^r h_n - r s_4^{r-1} h_{n+4} + \dfrac{r(r-1)}{1.2} s_4^{r-2} h_{n+8} \\ \qquad - \dfrac{r(r-1)(r-2)}{1.2.3} s_4^{r-3} h_{n+12} + \ldots + (-1)^r h_{n+4r}. \end{cases}$$

Maintenant

$$\frac{1}{(1-ax)(1-bx)(1-cx)} = \ldots + h_n x^n + h_{n+1} x^{n+1} + h_{n+2} x^{n+2} + \ldots.$$

Il faudrait trouver la somme des termes pris de quatre en quatre dans la série, en commençant à partir de h_n. Si nous procédons à la manière habituelle, en remplaçant x successivement par αx, βx, γx, δx, où α, β, γ, δ désignent les quatre racines de l'unité, en ajoutant membre à membre et observant que $\alpha^n + \beta^n + \gamma^n + \delta^n = 0$, excepté lorsque n est multiple de 4, auquel cas cette expression est égale à 4, nous obtiendrons, si n est un multiple de 4,

$$\begin{aligned} &4(\ldots + h_n x^n + h_{n+4} x^{n+4} + h_{n+8} x^{n+8} + \ldots + h_{n+4r} x^{n+4r} + \ldots) \\ &= \frac{1}{(1-a\alpha x)(\ldots)} + \frac{1}{(1-a\beta x)(\ldots)} + \frac{1}{(1-a\gamma x)(\ldots)} + \frac{1}{(1-a\delta x)(\ldots)}. \end{aligned}$$

Lorsque le second membre de cette équation est réduit à un seul terme, on voit aisément que le dénominateur de ce terme est

$$(1 - a^4 x^4)(1 - b^4 x^4)(1 - c^4 x^4);$$

et le numérateur est la somme de quatre expressions semblables de la forme

$$1 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_q x^q.$$

La première de ces expressions est égale au produit de

$$(1 - a\beta x)(1 - a\gamma x)(1 - a\delta x)$$

et de deux autres groupes de facteurs analogues obtenus en remplaçant a successivement par b et c dans celui-là.

Or on a

$$(1 - a\beta x)(1 - a\gamma x)(1 - a\delta x) = 1 + ax\alpha + a^2x^2\alpha^2 + a^3x^3\alpha^3,$$

puisque

$$\beta + \gamma + \delta = -\alpha, \qquad \beta\gamma + \gamma\delta + \delta\beta = -\alpha(\beta + \gamma + \delta) = \alpha^2$$

et

$$\beta\gamma\delta = -\frac{1}{\alpha} = -\alpha^3.$$

Donc le premier terme du numérateur est égal à

$$\begin{aligned}&(1 + ax\alpha + a^2x^2\alpha^2 + a^3x^3\alpha^3)\\ &\quad\times(1 + bx\alpha + b^2x^2\alpha^2 + b^3x^3\alpha^3)(1 + cx\alpha + c^2x^2\alpha^2 + c^3x^3\alpha^3),\end{aligned}$$

produit qui est de la forme

$$1 + B_1 x\alpha + B_2 x^2\alpha^2 + \ldots + B_8 x^8\alpha^8 + B_9 x^9\alpha^9,$$

et les autres termes du numérateur sont obtenus en remplaçant dans celui-là α successivement par β, γ, δ.

Donc, ajoutant ces quatre expressions, et observant la remarque faite sur la valeur de $\alpha^n + \beta^n + \gamma^n + \delta^n$, on a, pour valeur du numérateur,

$$4(1 + B_4 x^4 + B_8 x^8).$$

Mais, d'après le lemme, $B_4 = h_4 - s_4$ que nous désignerons par t_4 et $B_8 = \mu^3 h'_1$, μ représentant abc; nous avons donc

$$\begin{aligned}&\ldots + h_n x^n + h_{n+4} x^{n+4} + h_{n+8} x^{n+8} + \ldots + h_{n+4r} x^{n+4r} + \ldots\\ &= \frac{1 + t^4 x^4 + \mu^3 h'_1 x^8}{(1 - a^4x^4)(1 - b^4x^4)(1 - c^4x^4)}.\end{aligned}$$

Alors, si nous reprenons, comme nous l'avons déjà fait, le développement de $(s_4 x^4 - 1)^r$, nous verrons que la suite C est le coefficient de x^{n+4r} dans le développement de

$$\frac{(1 + t_4 x^4 + \mu^3 h'_1 x^8 (s_4 x^4 - 1)^r}{(1 - a^4x^4)(1 - b^4x^4)(1 - c^4x^4)},$$

n étant un multiple de 4; et alors ce coefficient est égal à

$$\frac{a^{n+2}(b^4+c^4)^r(b-c)+b^{n+2}(c^4+a^4)^r(c-a)+c^{n+2}(a^4+b^4)^r(a-b)}{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}.$$

6. Généralement, si nous appliquons le même procédé à l'équation (1) en employant $a^m+b^m+c^m$ (ou s_m) comme multiplicateur, nous aurons

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} & a^{n+2}(b^m+c^m)^r(b-c)+b^{n+2}(c^m+a^m)^r(c-a)+c^{n+2}(a^m+b^m)^r(a-b) \\ & \quad = k(s_m-1)^r[h]_{n+mr}^n, \end{aligned}\right.$$

où $(s_m-1)^r[h]_{n+mr}^n$ représente la suite

$$(\mathrm{D})\quad \left\{\begin{aligned} & s_m^r h_n - r s_m^{r-1} h_{n+m} + \frac{r(r-1)}{1.2} s_m^{r-2} h_{n+2m} \\ & \qquad - \frac{r(r-1)(r-2)}{1.2.3} s_m^{r-3} h_{n+3m} + \ldots + (-1)^r h_{n+rm}. \end{aligned}\right.$$

Il faut trouver les sommes des termes de m en m de la série

$$\ldots h_n x^n + h_{n+1} x^{n+1} + h_{n+3} x^{n+3} + h_{n+4} x^{n+4} + \ldots + h_{n+mr} x^{n+mr} + \ldots,$$

n étant un multiple de m. Employons la méthode déjà indiquée, nous aurons

$$\begin{aligned} & m(\ldots + h_n x^n + h_{n+m} x^{n+m} + h_{n+2m} x^{n+2m} + \ldots + h_{n+mr} x^{n+mr} + \ldots) \\ & = \frac{1}{(1-a\alpha_1 x)\ldots} + \frac{1}{(1-a\alpha_2 x)\ldots} + \frac{1}{(1-a\alpha_3 x)\ldots} + \ldots + \frac{1}{(1-a\alpha_m x)\ldots}, \end{aligned}$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ désignant les racines $m^{\text{ièmes}}$ de l'unité.

Lorsque le second membre de cette équation est réduit à un seul terme, on voit facilement que le dénominateur est égal à

$$(1-a^m x^m)(1-b^m x^m)(1-c^m x^m);$$

et le numérateur est une somme de m expressions semblables de la forme

$$1 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots + A_{3m-3} x^{3m-3}.$$

La première de ces expressions est identique au produit de

$$(1 - a\alpha_2 x)(1 - a\alpha_3 x)\ldots(1 - a\alpha_m x)$$

par deux autres groupes semblables de facteurs, qu'on obtient en remplaçant a successivement par b et c dans celui-là.

Or

$$\begin{aligned}&(1 - a\alpha_2 x)(1 - a\alpha_3 x)\ldots(1 - a\alpha_m x)\\&\qquad = 1 - axS_1 + a^2x^2S_2 + \ldots + (-ax)^{m-1}S_{m-1},\end{aligned}$$

S_r désignant la somme des produits r à r de $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_m$, et par conséquent S_1 étant égal à $-\alpha_1$, S_2 à $-\alpha_1 S_1 = \alpha_1^2$, S_3 à $-\alpha_1 S_2 = -\alpha_1^3, \ldots$, S_{m-1} à $\frac{(-1)^{m-1}}{\alpha_1} = (-\alpha_1)^{m-1}$.

Donc le premier terme du numérateur est égal au produit des facteurs

$$[1 + ax\alpha_1 + a^2x^2\alpha_1^2 + a^3x^3\alpha_1^3 + \ldots + (ax\alpha_1)^{m-1}],$$

$$[1 + bx\alpha_1 + b^2x^2\alpha_1^2 + b^3x^3\alpha_1^3 + \ldots + (bx\alpha_1)^{m-1}]$$

et

$$[1 + cx\alpha_1 + c^2x^2\alpha_1^2 + c^3x^3\alpha_1^3 + \ldots + (cx\alpha_1)^{m-1}];$$

et ce produit est de la forme

$$1 + B_1 x\alpha_1 + B_2 x^2\alpha_1^2 + B_3 x^3\alpha_1^3 + \ldots + B_{3m-3}(x\alpha_1)^{3m-3}.$$

Les autres termes du numérateur s'obtiennent en remplaçant dans celui-là α_1 successivement par $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_m$.

Par conséquent, en ajoutant ces m expressions et en observant que $\alpha_1^n + \alpha_2^n + \ldots + \alpha_m^n = 0$, excepté quand n est un multiple de m, auquel cas la valeur de cette somme est m, on obtient pour expression complète du numérateur

$$m(1 + B_m x^m + B_{2m} x^{2m}).$$

Mais, d'après le lemme, $B_m = h_m - s_m$, que nous désignerons par t_m, et $B_{2m} = \mu^{m-1} h'_{m-3}$; donc nous avons

$$\ldots + h_n x^n + h_{n+m} x^{n+m} + h_{n+2m} x^{n+2m} + \ldots + h_{n+mr} x^{n+rm} + \ldots$$
$$= \frac{1 + t_m x^m + \mu^{m-1} h'_{m-3} x^{2m}}{(1 - a^m x^m)(1 - b^m x^m)(1 - c^m x^m)}.$$

Alors, en considérant, comme ci-dessus, le développement de $(s_m x^m - 1)^r$, on verra que la suite (D) est le coefficient de x^{n+mr} dans le développement de

$$\frac{(1 + t_m x^m + \mu^{m-1} h'_{m-3} x^{2m})(s_m x^m - 1)^r}{(1 - a^m x^m)(1 - b^m x^m)(1 - c^m x^m)},$$

n étant un multiple de m; et alors ce coefficient est égal à l'expression

$$\frac{a^{n+2}(b^m + c^m)^r(b - c) + b^{n+2}(c^m + a^m)^r(c - a) + c^{n+2}(a^m + b^m)^r(a - b)}{a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b)}.$$