

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

E. GOURSAT

Recherches sur les intégrales algébriques de l'équation de Kummer

Journal de mathématiques pures et appliquées 4^e série, tome 3 (1887), p. 255-304.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1887_4_3_255_0

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

*Recherches sur les intégrales algébriques de l'équation
de Kummer ;*

PAR M. E. GOURSAT.



Je me suis déjà occupé, dans différents Mémoires, des intégrales rationnelles de l'équation du troisième ordre, introduite par M. Kummer dans la théorie de la transformation des séries hypergéométriques. En particulier, le travail intitulé : *Recherches sur l'équation de Kummer* (*Acta Societatis Fennicæ*, Helsingfors, 1885), qui contient les résultats complets de mes recherches sur ce sujet, donne le tableau de tous les cas où il existe de pareilles intégrales avec une méthode générale pour calculer les coefficients. Depuis la publication de ce Mémoire, M. Erwin Papperitz a étudié, dans son *Habilitationschrift* (Leipzig, 1886), les intégrales algébriques de la même équation, et établi, pour cet objet, un système d'équations arithmétiques analogue à celui dont je m'étais servi. Je reprends, dans ce travail, l'étude de la même question, en m'efforçant de pousser la solution générale aussi loin que possible.

Il existe une différence essentielle entre les deux systèmes d'équations arithmétiques dont dépendent les transformations rationnelles et les transformations irrationnelles. Dans ce dernier cas, en effet, un système de solutions des équations arithmétiques ne fournit pas *en général* d'intégrale algébrique. J'espère avoir établi d'une façon rigoureuse qu'on peut toujours reconnaître, par un nombre *fini* d'essais et de calculs élémentaires, si à un système de solutions correspond effec-

tivement une intégrale algébrique. Je m'attache surtout au cas particulier où l'inversion du quotient de deux intégrales de l'équation hypergéométrique donne naissance à une fonction uniforme; s'il en est ainsi, cette fonction uniforme sera, comme on sait, une fonction fuchsienne. Le problème peut alors être considéré comme un cas particulier du problème général de la transformation des fonctions fuchiennes.

L'existence d'une intégrale algébrique étant reconnue, le calcul des coefficients de cette équation est un problème dont la solution générale paraît fort difficile. On peut cependant indiquer des méthodes générales, lorsque la relation est de genre zéro ou de genre un. Les calculs algébriques auxquels on est conduit paraissent, il est vrai, compliqués, mais il est facile de reconnaître qu'on ne peut les éviter. Je me réserve de revenir sur la formation et les propriétés de ces équations.

La dernière partie contient la démonstration d'un théorème général sur les équations linéaires, dont l'application à l'équation de Kummer est immédiate. De ce théorème se déduisent aussi des conséquences intéressantes, que je ne fais que signaler, relatives à la réduction de certaines intégrales abéliennes.

I.

1. Désignons, pour abrégé, par $(s)_x$ l'invariant différentiel

$$\frac{\frac{d^3 s}{dx^3}}{\frac{ds}{dx}} - \frac{3}{2} \left(\frac{\frac{d^2 s}{dx^2}}{\frac{ds}{dx}} \right)^2,$$

et par $R(\lambda, \mu, \nu, x)$ la fonction rationnelle

$$R = \frac{1 - \lambda^2 + (\lambda^2 + \nu^2 - \mu^2 - 1)x + (1 - \nu^2)x^2}{2x^2(1-x)^2};$$

l'équation de Kummer prend la forme suivante :

$$(1) \quad (x)_y + R(\lambda, \mu, \nu, x) \left(\frac{dx}{dy} \right)^2 = R(\lambda', \mu', \nu', y).$$

Cette équation se présente, comme on sait, quand on cherche un changement de variable permettant de passer de l'équation hypergéométrique

$$(2) \quad x(1-x) \frac{d^2 u}{dx^2} + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x] \frac{du}{dx} - \alpha\beta u = 0$$

à la nouvelle équation

$$(3) \quad y(1-y) \frac{d^2 v}{dy^2} + [\gamma' - (\alpha' + \beta' + 1)y] \frac{dv}{dy} - \alpha'\beta'v = 0,$$

où

$$\begin{aligned} \lambda &= 1 - \gamma, & \mu &= \gamma - \alpha - \beta, & \nu &= \beta - \alpha, \\ \lambda' &= 1 - \gamma', & \mu' &= \gamma' - \alpha' - \beta', & \nu' &= \beta' - \alpha'. \end{aligned}$$

Je me propose de rechercher dans quels cas l'équation (1) admet une intégrale algébrique définie par l'équation entière *irréductible*

$$(4) \quad f(x, y) = 0;$$

je suppose que $\lambda, \mu, \nu, \lambda', \mu', \nu'$ sont des nombres réels, et, comme l'équation (1) ne renferme que leurs carrés, on peut évidemment les regarder comme positifs.

On peut aussi permuter d'une manière quelconque les exposants λ, μ, ν , ainsi que λ', μ', ν' , ce qui revient à effectuer sur x une des substitutions

$$x = x, \quad 1 - x, \quad \frac{1}{x}, \quad \frac{1}{1-x}, \quad \frac{x}{x-1}, \quad \frac{x-1}{x},$$

et sur y une des substitutions

$$y = y, \quad 1 - y, \quad \frac{1}{y}, \quad \frac{1}{1-y}, \quad \frac{y}{y-1}, \quad \frac{y-1}{y}.$$

De toute intégrale algébrique de l'équation (1) on déduira ainsi, au moyen des substitutions précédentes, trente-six intégrales qui pourront ne pas être toutes distinctes; c'est ce qui arrivera si la relation

$$f(x, y) = 0$$

se reproduit par quelques-unes des substitutions précédentes.

Soit s le rapport de deux intégrales particulières de l'équation (2) : on sait que ce quotient satisfait à l'équation différentielle

$$(5) \quad [s]_x = R(\lambda, \mu, \nu, x).$$

Supposons que, dans cette équation (5), on substitue à la variable x la variable y , liée à x par l'équation (1) ; on aboutit à la nouvelle équation

$$(6) \quad [s]_y = R(\lambda', \mu', \nu', y),$$

qui est vérifiée par le quotient de deux intégrales particulières de l'équation (3). Ce résultat s'explique aisément, si l'on a égard à la signification des intégrales de ces trois équations. Ainsi, par l'introduction de la variable auxiliaire s , l'équation (1) peut être remplacée par l'ensemble des équations (5) et (6), et le problème proposé est équivalent à celui-ci :

Trouver dans quels cas il existe une relation algébrique

$$f(x, y) = 0$$

permettant de passer de l'équation (5) à l'équation (6).

2. Avant d'aborder ce problème, il est nécessaire de rappeler les propriétés caractéristiques des intégrales de ces deux équations ; comme elles sont de même nature, il suffit de considérer l'une d'elles, par exemple l'équation (5). Soient y_1 et y_2 deux intégrales particulières distinctes de l'équation (2), et $s = \frac{y_1}{y_2} = S(\lambda, \mu, \nu, x)$. Les propriétés de la fonction $s = S(\lambda, \mu, \nu, x)$ ont été étudiées en détail par M. Schwarz dans son beau Mémoire *Ueber diejenigen Fälle*, etc. (*Journal de Crelle*, t. 75, p. 292-335). Quand on fait décrire à la variable x tous les contours fermés possibles, la fonction $s = S(\lambda, \mu, \nu, x)$ admet, pour une valeur donnée de x , une infinité de valeurs, sauf dans les cas bien connus (que nous écarterons) où l'intégrale générale est algébrique. Toutes ces valeurs se déduisent de l'une d'elles par des sub-

stitutions linéaires de la forme

$$s_i = f_i(s) = \frac{\alpha_i s + \beta_i}{\gamma_i s + \delta_i},$$

où $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$ sont des constantes, et les diverses substitutions $f_i(s)$ forment un groupe G dérivé de deux substitutions fondamentales, qui correspondent à deux lacets décrits autour des points $x = 0, x = 1$. (Pour le calcul des coefficients $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$, voir *Annales de l'École Normale supérieure*, t. X, 2^e série; *Supplément*, p. 28 et suivantes.) Dans le voisinage de toute valeur a de x , différente de 0, 1, ∞ , toute branche de la fonction s est de la forme

$$s - b = k_1(x - a) + k_2(x - a)^2 + \dots,$$

le coefficient k , étant toujours différent de zéro, et ce résultat est général, pourvu que l'on convienne de remplacer $s - \infty$ par $\frac{1}{s}$. Dans le voisinage des points $x = 0, 1, \infty$, les différentes branches de la fonction s ont respectivement les formes suivantes :

$$s = \frac{A_1 s_0 + A_2}{A_3 s_0 + A_4}, \quad s = \frac{B_1 s_1 + B_2}{B_3 s_1 + B_4}, \quad s = \frac{C_1 s_\infty + C_2}{C_3 s_\infty + C_4},$$

où les A, B, C sont des constantes, et s_0, s_1, s_∞ forment ce que nous appellerons les *intégrales normales* relatives aux trois points 0, 1, ∞ . Si aucun de ces trois points n'est un point critique logarithmique, on prendra ces trois intégrales de façon qu'en les multipliant respectivement par $x^\lambda, (x - 1)^\mu, \left(\frac{1}{x}\right)^\nu$, elles soient holomorphes dans le domaine du point correspondant et différentes de zéro en ce point. Dans le cas de points critiques logarithmiques, on les choisira de telle façon que

$$s_0 - \lambda \log x, \quad s_1 - \mu \log(x - 1), \quad s_\infty - \nu \log\left(\frac{1}{x}\right),$$

où λ, μ, ν sont des constantes convenables, soient holomorphes dans le domaine du point correspondant, après qu'on les a multipliées respectivement par $x^\lambda, (x - 1)^\mu, \left(\frac{1}{x}\right)^\nu$, et différentes de zéro en ce point.

Si $s = S(\lambda, \mu, \nu, x)$ est une intégrale particulière de l'équation (5), l'intégrale générale est de la forme

$$\frac{as + b}{cs + d},$$

a, b, c, d désignant des constantes arbitraires. Soient G_0 le groupe de substitutions linéaires relatif à l'intégrale particulière s_0 , et T_0 la substitution linéaire qui permet de passer de l'intégrale particulière s_0 à une intégrale quelconque s . Les opérations V du groupe G relatif à s se déduisent des opérations V_0 du groupe G_0 par la relation

$$V = T_0 V_0 T_0^{-1},$$

de sorte qu'il y a entre ces deux groupes *isomorphisme holoédrique*. Il en est de même des deux groupes relatifs à deux intégrales particulières quelconques.

Faisons décrire à la variable x toute la partie du plan située au-dessus de l'axe réel; le quotient s , si l'on figure la quantité imaginaire s par un point d'un nouveau plan, décrira un triangle limité par trois arcs de cercle qui correspondent respectivement aux bords supérieurs de l'axe réel, $-\infty-0$, $0+1$, $+1+\infty$. Les sommets A, B, C de ce triangle correspondent aux points $0, 1, \infty$, et les angles ont pour valeurs $\lambda\pi, \mu\pi, \nu\pi$. Imaginons une demi-circonférence de rayon très petit ε ayant son centre au point $x = 0$, et située tout entière au-dessus de l'axe réel. Quand on marche sur cette circonférence du point $x = +\varepsilon$ au point $x = -\varepsilon$, le rayon joignant le point A au point qui figure la valeur de s aura tourné d'un angle égal à $\lambda\pi$ autour du point A. Le triangle ABC n'a aucun point de ramification dans son intérieur; mais il peut se recouvrir lui-même plusieurs fois (c'est ce qui arrivera, si quelqu'un des nombres λ, μ, ν est supérieur à 2). Il peut aussi arriver que ce triangle s'étende plusieurs fois jusqu'à l'infini: ce qu'on pourra éviter en prenant une sphère au lieu d'un plan pour représenter la valeur de s . Mais, pour quiconque est familiarisé avec l'emploi des surfaces de Riemann sur le plan ou sur la sphère, il n'y a là aucune difficulté. La fonction analytique $s = S(\lambda, \mu, \nu, x)$ fournit ainsi l'*Abbildung* du demi-plan supérieur des x sur le triangle ABC limité par des arcs de cercle,

Cet *Abbildung* donne encore lieu aux remarques suivantes, dont nous aurons à faire usage :

I. Si l'un des exposants λ, μ, ν est un nombre entier, par exemple λ , les deux arcs de cercle issus du point A qui limitent le triangle sont tangents l'un à l'autre. Si le point $x = 0$ est un point critique logarithmique, ces deux arcs de cercle appartiennent à deux circonférences distinctes. Mais, si le terme logarithmique disparaît dans le développement de s_0 , ces deux arcs de cercle se confondent, ou l'un d'eux est le prolongement de l'autre.

II. Il faut six constantes réelles indépendantes pour fixer la position du triangle ABC; ces six constantes correspondent exactement aux six constantes réelles qui figurent dans l'intégrale générale de l'équation (5). Le choix de ce triangle dans le plan des s équivaut par conséquent au choix d'une intégrale particulière.

Soit ABC le triangle, dont il vient d'être question, qui correspond au demi-plan supérieur des x . Faisons franchir à la variable x l'axe réel, entre les deux points 0 et 1 par exemple, et imaginons que cette variable décrive ensuite le demi-plan négatif. La variable s décrira un nouveau triangle ABC' symétrique du premier par rapport à la circonférence dont fait partie l'arc AB. Je dirai que deux figures sont *symétriques par rapport à un cercle C* lorsqu'elles se déduisent l'une de l'autre au moyen de la transformation par rayons vecteurs réciproques qui a pour pôle le centre du cercle C et k^2 pour module, k désignant le rayon du cercle, et j'appellerai cette transformation *réflexion sur le cercle C*. Cela posé, faisons décrire à la variable x un chemin quelconque ne passant par aucun des points 0, 1, ∞ , et poursuivons la représentation sur le plan des s au moyen de la loi de symétrie précédente. Nous obtenons un réseau R de triangles d'arcs de cercle, d'angles $\lambda\pi, \mu\pi, \nu\pi$, alternativement *congruents* au triangle primitif et à son symétrique, correspondant respectivement aux demi-plans des x .

Ce réseau recouvrira en général le plan, ou du moins une partie, un nombre illimité de fois.

Pour abrégé, j'appellerai *triangle* (λ, μ, ν) un quelconque des triangles de ce réseau, et je les distinguerai en triangles *positifs* ou *négatifs*, suivant qu'ils correspondent à un demi-plan positif ou négatif.

Quand on décrit le contour d'un triangle de façon à avoir à sa gauche l'intérieur de ce triangle, on rencontre les sommets dans l'ordre $0, 1, \infty$ ou dans l'ordre inverse, suivant que l'on a affaire à un triangle positif ou négatif. Le triangle d'où l'on est parti pour former le réseau sera dit *fondamental*; le quadrilatère formé par le triangle fondamental et un quelconque des triangles symétriques par rapport à l'un de ses côtés sera de même appelé *quadrilatère fondamental*. Si l'on déforme ce quadrilatère de façon à joindre les bords congruents, on a une surface fermée qui correspond univoquement au plan des x .

Lorsque x décrit une petite circonférence autour du point $x = 0$, le point s subit deux réflexions successives sur les circonférences AB et AC. Il serait facile de déduire de là les coefficients des substitutions fondamentales du groupe G.

3. Soient $s = S(\lambda, \mu, \nu, x)$ une intégrale particulière de l'équation (5), et $x = \varphi(\lambda, \mu, \nu, s)$ la fonction que l'on en déduit par l'inversion, que j'appellerai, pour abrégé, *fonction inverse*. Les propriétés de la fonction inverse résultent des propriétés de la fonction

$$S(\lambda, \mu, \nu, x)$$

elle-même. Si l'on fait décrire à la variable s un chemin ne passant par aucun des sommets du réseau R, la loi de symétrie déjà vue permet inversement de suivre sur le plan des x le chemin décrit par cette variable. Dans la pratique, si le réseau R recouvre plusieurs fois le plan des s , on devra concevoir le chemin décrit par cette variable comme tracé sur la surface de Riemann que le réseau R recouvre simplement. La fonction inverse est, en général, une fonction multiforme de s ; si, pour une valeur s_0 de s , x prend une valeur x_0 différente de $0, 1, \infty, s_0$ ne coïncide avec aucun des sommets du réseau R, et dans le domaine de ce point, on aura

$$x - x_0 = H_1(s - s_0) + H_2(s - s_0)^2 + \dots,$$

le coefficient H_1 étant toujours différent de zéro. Il est clair que la fonction inverse de l'intégrale générale de l'équation (5) sera

$$x = \varphi\left(\lambda, \mu, \nu, \frac{as + b}{cs + d}\right).$$

Prenons de même une intégrale particulière $s = S(\lambda', \mu', \nu', y)$ de l'équation (6); elle nous fournira, sur le plan des s , un réseau R' formé de triangles (λ', μ', ν') alternativement positifs et négatifs, qui correspondent aux deux demi-plans des y . Soit $y = \psi(\lambda', \mu', \nu', s)$ la fonction inverse de cette intégrale; cette fonction jouira de propriétés analogues à celles que nous avons reconnues à la fonction

$$x = \varphi(\lambda, \mu, \nu, s).$$

Il résulte évidemment des explications précédentes que le problème proposé peut s'énoncer ainsi :

Dans quels cas existe-t-il une relation algébrique entre les deux fonctions inverses $x = \varphi(\lambda, \mu, \nu, s)$ et $y = \psi(\lambda', \mu', \nu', s)$?

Remarquons que l'on peut supposer la fonction φ complètement déterminée; mais il faudra laisser indéterminées les trois constantes complexes dont dépend la fonction ψ .

4. Supposons, par conséquent, qu'il existe une relation algébrique irréductible $f(x, y) = 0$ entre ces deux fonctions inverses; désignons par p le genre de cette équation, par n' et n le degré en x et y respectivement. Soient X et Y les deux surfaces de Riemann relatives à cette équation, où l'on regarde x ou y comme la variable indépendante; la surface X se compose de n feuilletés étendus sur le plan des x , et la surface Y de n' feuilletés étendus sur le plan des y . Les points de chacune de ces surfaces se correspondent d'une façon univoque, et à chacun d'eux est attaché un point analytique x_0, y_0 , tel que $f(x_0, y_0) = 0$. De l'existence de la relation $f(x, y) = 0$ entre deux fonctions inverses on déduit un certain nombre de conséquences qui se traduisent par des équations arithmétiques. Nous allons les établir rapidement, en suivant à peu près la méthode de M. Papperitz.

Soit (x_0, y_0) un système de solutions de l'équation $f(x, y) = 0$, x_0, y_0 étant tous les deux différents de 0, 1, ∞ , et appelons s_0 la valeur correspondante de s , que l'on peut toujours supposer finie. D'après ce qu'on a vu, les fonctions inverses $\varphi(\lambda, \mu, \nu, s)$ et $\psi(\lambda', \mu', \nu', s)$ sont

développables, dans le domaine du point s_0 , en séries convergentes de la forme

$$\begin{aligned}x - x_0 &= K_1(s - s_0) + K_2(s - s_0)^2 + \dots, \\y - y_0 &= H_1(s - s_0) + H_2(s - s_0)^2 + \dots,\end{aligned}$$

les coefficients K_1 et H_1 n'étant pas nuls. Inversement on aura, dans le domaine des points x_0 et y_0 ,

$$\begin{aligned}s - s_0 &= \frac{1}{K_1}(x - x_0) + l_1(x - x_0)^2 + \dots, \\s - s_0 &= \frac{1}{H_1}(y - y_0) + m_1(y - y_0)^2 + \dots\end{aligned}$$

Il suit de là que la valeur de y qui se réduit à y_0 pour $x = x_0$ est une fonction holomorphe de x dans le voisinage, et réciproquement. Par les points des deux surfaces X et Y correspondant au point analytique (x_0, y_0) ne passe qu'un seul feuillet.

Considérons, en second lieu, un système de solutions de l'équation $f(x, y) = 0$, où l'une des inconnues seulement a l'une des valeurs $0, 1, \infty$; supposons, par exemple, que, pour $x = 0$, y prenne une valeur y_0 différente de $0, 1, \infty$. On voit tout d'abord que le point singulier $x = 0$ ne pourra être un point critique logarithmique pour l'équation (2), et que λ ne pourra pas non plus être incommensurable; autrement, il serait impossible de déduire de l'équation (2), par le changement de variable $f(x, y) = 0$, une équation pour laquelle le point $y = y_0$ serait un point singulier que l'on peut faire disparaître en multipliant les intégrales par un même facteur. Soit donc $\lambda = \frac{\alpha}{\rho}$, α et ρ étant deux nombres entiers premiers entre eux. Dans le domaine du point $x = 0$, on a

$$s = \frac{as_0 + b}{cs_0 + d},$$

s_0 désignant l'intégrale normale relative à ce point; on aura donc, dans ce domaine,

$$\frac{1}{s_0} = \frac{cs - a}{b - ds} = x^{\frac{\alpha}{\rho}}(K_0 + K_1 x + \dots), \quad K_0 \neq 0,$$

et dans le domaine du point y_0 ,

$$\frac{cs - a}{b ds} = H_1(y - y_0) + H_2(y - y_0)^2 + \dots, \quad H_1 \neq 0.$$

Par suite, on peut écrire

$$x^{\frac{\alpha}{\rho}}(K_0 + K_1 x + \dots) = (y - y_0)[H_1 + H_2(y - y_0) + \dots].$$

On déduit de cette égalité un développement de $y - y_0$ suivant les puissances positives de $x^{\frac{1}{\rho}}$ et commençant par un terme en $x^{\frac{\alpha}{\rho}}$, et inversement, on aura pour x un développement suivant les puissances croissantes de $(y - y_0)^{\frac{1}{\rho}}$, commençant par un terme en $(y - y_0)^{\frac{\rho}{\rho}}$. Sur la surface X, on aura donc, au point $x = 0$, ρ feuillets réunis en cycle, et sur la surface Y, au point $y = y_0$, α feuillets réunis en cycle. Les sommets de ces deux cycles correspondent au point analytique

$$x = 0, \quad y = y_0.$$

On étudie de la même façon les autres systèmes de solutions analogues, et l'on peut résumer le résultat comme il suit. Supposons, pour fixer les idées, que les nombres $\lambda, \mu, \nu, \lambda', \mu', \nu'$ soient tous rationnels,

$$\lambda = \frac{\alpha}{\rho}, \quad \mu = \frac{\beta}{\sigma}, \quad \nu = \frac{\gamma}{\tau}, \quad \lambda' = \frac{\alpha'}{\rho'}, \quad \mu' = \frac{\beta'}{\sigma'}, \quad \nu' = \frac{\gamma'}{\tau'}.$$

Les trois équations $f(0, y) = 0, f(1, y) = 0, f(\infty, y) = 0$ admettent respectivement r, s, t racines distinctes, différentes de $0, 1, \infty$; désignons-les par $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r; \eta'_1, \eta'_2, \dots, \eta'_s; \eta''_1, \eta''_2, \dots, \eta''_t$. De même, les trois équations $f(x, 0) = 0, f(x, 1) = 0, f(x, \infty) = 0$ admettent respectivement r', s', t' racines distinctes différentes de $0, 1, \infty$, que nous désignerons par $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{r'}; \xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_{s'}; \xi''_1, \xi''_2, \dots, \xi''_{t'}$. Cela posé, on aura, sur la surface X, r cycles de ρ feuillets au point $x = 0, s$ cycles de σ feuillets au point $x = 1, t$ cycles de τ feuillets au point $x = \infty$, un cycle de α feuillets en chacun des points η_i , un cycle de β feuillets en chacun des points η'_i , et un cycle de γ feuillets en chacun

des points η'_i . On aura de même, sur la surface Y, r' cycles de ρ' feuillets au point $y = 0$, s' cycles de σ' feuillets au point $y = 1$, t' cycles de τ' feuillets au point $y = \infty$, un cycle de α' feuillets en chacun des points ξ_i , un cycle de β' feuillets en chacun des points ξ'_i , et un cycle de γ' feuillets en chacun des points ξ''_i .

Si le point $x = 0$ est un point critique logarithmique, ou si λ est incommensurable, le nombre correspondant r est nul, et de même pour les autres. Remarquons que les valeurs η ne sont pas forcément toutes distinctes; il pourrait arriver, par exemple, que l'équation $f(0, y) = 0$ admette 2ρ racines égales à η_i , qui se répartiraient alors en 2 cycles de ρ racines. La remarque se généralise aisément.

Pour abrégér, j'appellerai *cycles de la première catégorie* les cycles dont il vient d'être question.

Il nous reste à nous occuper des systèmes de solutions de l'équation $f(x, y) = 0$, où les deux inconnues ont chacune l'une des valeurs 0, 1, ∞ . Supposons, par exemple, que pour $x = 0$ on ait la solution $y = 0$. Sur la surface X on aura, au point $x = 0$, un certain nombre de feuillets δ_{00} tels que la valeur de y , sur chacun d'eux, au point $x = 0$, soit $y = 0$; sur Y on aura de même, au point $y = 0$, δ'_{00} feuillets tels que la valeur de x sur chacun d'eux, au point $y = 0$, soit $x = 0$. Ces feuillets se répartissent sur les deux surfaces en un même nombre ε_{00} de cycles qui se correspondent deux à deux. Considérons un de ces cycles sur X formé de h feuillets, et le cycle correspondant sur Y formé de h' feuillets. Soit A le point du plan des s qui figure la valeur de s correspondant aux sommets de ces deux cycles. Du point $x = 0$ comme centre avec un rayon très petit, décrivons sur le plan des x une circonférence, et considérons le domaine g formé par les portions des feuillets du cycle précédent, qui sont comprises à l'intérieur de cette circonférence. A ce domaine g correspond sur la surface Y un domaine analogue g' ; le domaine correspondant du plan des s se compose, d'après le théorème de M. Schwarz, de $2h$ portions de triangles d'arcs de cercle ayant un sommet commun en A; la somme des angles de ces triangles, réunis autour du point A, est égale à $2h\lambda\pi$. On peut aussi considérer d'une autre façon ce domaine comme formé de $2h'$ portions de triangles d'arcs de cercle ayant un sommet commun en A, et la somme des angles de ces triangles réunis autour du point A devra

être égale à $2h'\lambda'\pi$. Il faudra donc que l'on ait

$$h\lambda = h'\lambda'.$$

Appliquons cette relation à tous les cycles analogues, et faisons la somme des égalités ainsi obtenues; il viendra

$$\delta_{00}\lambda = \delta'_{00}\lambda'.$$

Attribuons aux lettres $\delta_{01}, \delta_{0x}, \delta_{10}, \delta_{11}, \delta_{1x}, \delta_{x0}, \delta_{x1}, \delta_{xx}; \delta'_{01}, \delta'_{0x}, \delta'_{10}, \delta'_{11}, \delta'_{1x}, \delta'_{x0}, \delta'_{x1}, \delta'_{xx}; \varepsilon_{00}, \varepsilon_{10}, \varepsilon_{01}, \varepsilon_{0x}, \varepsilon_{11}, \varepsilon_{1x}, \varepsilon_{x0}, \varepsilon_{x1}, \varepsilon_{xx}$ des significations analogues à celles de $\delta_{00}, \delta'_{00}, \varepsilon_{00}$; nous aurons un système de neuf équations analogues à la précédente,

$$(7) \quad \begin{cases} \lambda\delta_{00} = \lambda'\delta'_{00}, & \mu\delta_{10} = \lambda'\delta'_{10}, & \nu\delta_{x0} = \lambda'\delta'_{x0}, \\ \lambda\delta_{01} = \mu'\delta'_{01}, & \mu\delta_{11} = \mu'\delta'_{11}, & \nu\delta_{x1} = \mu'\delta'_{x1}, \\ \lambda\delta_{0x} = \nu'\delta'_{0x}, & \mu\delta_{1x} = \nu'\delta'_{1x}, & \nu\delta_{xx} = \nu'\delta'_{xx}. \end{cases}$$

Posons

$$\begin{aligned} q &= \varepsilon_{00} + \varepsilon_{01} + \dots + \varepsilon_{xx}, \\ \delta_{00} + \delta_{01} + \delta_{0x} &= a, & \delta'_{00} + \delta'_{01} + \delta'_{0x} &= a', \\ \delta_{10} + \delta_{11} + \delta_{1x} &= b, & \delta'_{10} + \delta'_{11} + \delta'_{1x} &= b', \\ \delta_{x0} + \delta_{x1} + \delta_{xx} &= c, & \delta'_{x0} + \delta'_{x1} + \delta'_{xx} &= c'; \end{aligned}$$

on déduit des équations (7)

$$(8) \quad a\lambda + b\mu + c\nu = a'\lambda' + b'\mu' + c'\nu'.$$

Les relations (7) ont lieu, quels que soient $\lambda, \mu, \nu, \lambda', \mu', \nu'$. On en déduit immédiatement que, si l'un des nombres λ, μ, ν est nul, un au moins des nombres λ', μ', ν' sera nul aussi; inversement, si λ et λ' sont nuls, cette circonstance ne nous apprend rien sur la ramification de la surface X et de la surface Y au point $x=0, y=0$. Par exemple, considérons les équations modulaires auxquelles donne naissance la transformation des intégrales elliptiques de première espèce, prises sous la forme de Legendre,

$$\int \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}};$$

on a, dans l'équation de Kummer, à laquelle on est conduit,

$$\lambda = \mu = \nu = \lambda' = \mu' = \nu' = 0.$$

L'analyse précédente ne nous apprend qu'une chose relativement à ces équations : c'est que, quand on donne à l'une des variables une des valeurs 0, 1, ∞ , toutes les valeurs que l'on obtient pour l'autre variable ne peuvent être que 0, 1, ∞ .

Reprenons l'égalité précédente $h\lambda = h'\lambda'$, et soient $\lambda = \frac{\alpha}{\rho}$, $\lambda' = \frac{\alpha'}{\rho'}$. Soit m le plus petit multiple commun de α et de α' , et posons

$$m = \alpha d = \alpha' d'.$$

Imaginons que la variable x fasse ρd tours successivement autour du point $x = 0$; le point qui figure s fera $\alpha d = \alpha' d'$ tours autour du point Λ , et la variable y reviendra à sa valeur initiale après avoir fait $\rho' d'$ tours successifs autour du point $y = 0$. Par suite, le nombre h des feuillets du cycle doit être un diviseur de ρd et h' un diviseur de $\rho' d'$; on obtient ainsi des conditions supplémentaires qu'il faut ajouter aux conditions (7). Supposons, en particulier,

$$\alpha = \alpha' = 1;$$

il vient

$$m = d = d' = 1,$$

et l'on voit que h doit être un diviseur de ρ et h' un diviseur de ρ' , de telle sorte que $h\lambda$ sera une partie aliquote de l'unité. Cette remarque nous sera utile plus loin; si, en particulier, ρ et ρ' sont premiers entre eux, on aura forcément

$$h = \rho, \quad h' = \rho'.$$

J'appellerai les q cycles précédents *cycles de la seconde catégorie*.

Aux équations précédentes, on en ajoute immédiatement six autres en écrivant que X se compose de n feuillets, et Y de n' feuillets,

$$(9) \quad \begin{cases} n = a + r\rho = b + s\sigma = c + t\tau, \\ n' = a' + r'\rho' = b' + s'\sigma' = c' + t'\tau'. \end{cases}$$

Enfin, écrivons que le genre de la relation $f(x, y) = 0$ est égal à p ; la formule de Riemann devient, en tenant compte des relations (9),

$$(10) \quad \begin{cases} 2p + q - 2 = n - r - s - t + r'(\alpha' - 1) + s'(\beta' - 1) + t'(\gamma' - 1), \\ 2p + q - 2 = n' - r' - s' - t' + r(\alpha - 1) + s(\beta - 1) + t(\gamma - 1), \end{cases}$$

et il est clair qu'on aura aussi les inégalités

$$(11) \quad a + b + c \geq q, \quad \alpha' + \beta' + \gamma' \geq q,$$

$$(12) \quad \alpha, \beta, \gamma \leq n', \quad \alpha', \beta', \gamma' \leq n.$$

Nous pouvons dire, par conséquent, qu'à toute intégrale algébrique de l'équation de Kummer correspond un système de solutions en nombres entiers et positifs des équations (7), (8), (9), (10) et des inégalités (11) et (12).

§. Nous examinerons tout à l'heure si la réciproque est vraie. Des équations précédentes on déduit sans peine les équations ci-dessous, qui peuvent être utiles dans certains cas,

$$(13) \quad n(1 - \lambda - \mu - \nu) = n'(1 - \lambda' - \mu' - \nu'),$$

$$(14) \quad 3n \geq q, \quad 3n' \geq q,$$

$$(15) \quad \begin{cases} r(\rho - 3) + s(\sigma - 3) + t(\tau - 3) \leq 6p + 2q - 6, \\ r'(\rho' - 3) + s'(\sigma' - 3) + t'(\tau' - 3) \leq 6p + 2q - 6, \end{cases}$$

$$(16) \quad \begin{cases} n - r - s - t \leq 2p + q - 2, \\ n' - r' - s' - t' \leq 2p + q - 2, \end{cases}$$

$$(17) \quad \begin{cases} a + r(\rho - 2) + b + s(\sigma - 2) \leq 2(t + 2p + q - 2), \\ a' + r'(\rho' - 2) + b' + s'(\sigma' - 2) \leq 2(t' + 2p + q - 2). \end{cases}$$

De ces équations, on déduit aisément (voir PAPPERITZ, *loc. cit.*, p. 33) qu'il n'existe qu'un nombre limité de solutions quand on se donne n' et p , pourvu qu'on suppose la quantité $\varpi = 1 - \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\sigma} - \frac{1}{\tau}$ positive (pour un point singulier logarithmique, on pose $\rho = \infty$). En faisant une hypothèse de plus, on est conduit à une conclusion intéressante.

Supposons que chacun des exposants λ, μ, ν soit nul ou égal à une partie aliquote de l'unité. M. Schwarz a démontré que la fonction

$$x = \varphi(\lambda, \mu, \nu, s)$$

sera une fonction uniforme de s . Écartons les cas où cette fonction est rationnelle, simplement périodique ou doublement périodique; alors $x = \varphi(\lambda, \mu, \nu, s)$ sera une fonction fuchsienne de s , et la quantité σ sera positive. Mais les trois produits $s(\alpha - 1)$, $s(\beta - 2)$, $t(\gamma - 1)$ seront nuls, et les équations (9), (10) et (14) donnent une limite pour p et q quand on se donne n' . En rapprochant ce résultat du précédent, nous voyons que :

Si la fonction inverse $x = \varphi(\lambda, \mu, \nu, s)$ est une fonction fuchsienne, l'équation de Kummer n'admet qu'un nombre limité d'intégrales algébriques, d'un degré donné par rapport à x .

Nous supposons implicitement qu'à un système de solutions des équations précédentes ne correspond jamais qu'un nombre fini d'intégrales algébriques; c'est ce qui résulte du paragraphe suivant. Il peut arriver que quelques-uns des nombres r, s, t, r', s', t' soient nuls, comme nous l'avons déjà remarqué; si r est nul, par exemple, λ n'intervient pas dans les équations (9), (10), (11) et (12). Si ce nombre λ n'est pas déterminé par les équations (7), le système précédent admettra une infinité de systèmes de solutions, si l'on considère λ comme une indéterminée. Mais les surfaces X et Y ne dépendent pas de λ , et l'on n'aura encore, dans tous les cas, qu'un nombre limité d'intégrales algébriques.

6. On est naturellement amené à se demander jusqu'à quel point les équations arithmétiques qui viennent d'être établies sont suffisantes pour la détermination du problème. En d'autres termes, à tout système de solutions de ces équations correspond-il *en général* une intégrale algébrique de l'équation de Kummer? C'est là un point que M. Papperitz n'a pas abordé dans son travail. J'ai indiqué brièvement, dans une Note présentée à l'Académie des Sciences (novem-

bre 1886), comment on pouvait répondre à cette question, et comment on était conduit à une réponse *négative*.

Prenons un système de solutions des équations (7), (8), (9), (10), (11) et (12). La construction des surfaces X et Y est un problème de combinaisons que l'on pourra toujours résoudre par un nombre fini d'essais, et qui n'admet dans tous les cas qu'un nombre fini de solutions. Supposons que nous ayons trouvé deux surfaces connexes X et Y satisfaisant à toutes les conditions de cette solution particulière et aux conditions supplémentaires. Nous avons à rechercher s'il existe une relation algébrique irréductible $f(x, y) = 0$, telle que les surfaces de Riemann correspondantes sur les plans des x et des y soient respectivement X et Y. Pour fixer les idées, j'examinerai d'abord un cas simple, celui où $\lambda, \mu, \nu, \lambda', \mu', \nu'$ sont nuls, ou des parties aliquotes de l'unité; X et Y ne seront ramifiées qu'aux points 0, 1, ∞ , et seront complètement déterminées. Appelons encore u une fonction algébrique de x ramifiée comme y , et v une fonction algébrique de y ramifiée comme x , de telle sorte que l'on ait

$$(18) \quad \begin{cases} u = \varphi(x, y), & v = \psi(y, x), \\ y = \varphi_1(x, u), & x = \psi_1(y, v), \end{cases}$$

$\varphi, \varphi_1, \psi, \psi_1$ désignant des fonctions rationnelles; u sera racine d'une équation algébrique entière de degré n en u ,

$$(19) \quad F(x, u) = 0,$$

dont la surface de Riemann sur le plan des x sera précisément X. De même, v sera racine d'une équation algébrique entière de degré n' ,

$$(20) \quad F_1(y, v) = 0,$$

dont la surface de Riemann sur le plan des y sera précisément Y. Les deux équations (19) et (20) devront appartenir à la même classe que l'équation $f(x, y) = 0$ et, par suite, avoir les mêmes modules. Ces deux équations ne sont pas entièrement déterminées, mais il est clair que leurs modules ne dépendent respectivement que des surfaces X et Y. Si ces surfaces ne sont pas de genre 0, rien ne prouve *a priori*

que leurs modules seront égaux, et il est aisé de se convaincre, par des exemples, qu'il n'en est pas ainsi en général. Si ces modules sont égaux, on pourra passer de l'équation (19) à l'équation (20) par une transformation birationnelle; mais il faudra, de plus, que les sommets des q cycles de la seconde catégorie de la surface X aient respectivement pour transformés les sommets des q cycles de la seconde catégorie de la surface Y. Cela posé, il y a plusieurs cas à distinguer.

Premier cas : $p = 0$. — On sait qu'on peut toujours passer par une transformation birationnelle d'une relation algébrique de genre zéro à une autre relation algébrique de genre zéro, et que les coefficients de cette transformation dépendent de trois paramètres arbitraires. Pour que la transformation remplisse les conditions voulues, il faudra donc que $q - 3$ conditions complexes soient vérifiées.

Deuxième cas : $p = 1$. — La transformation ne sera possible que si les deux modules sont égaux, et elle dépendra alors d'un seul paramètre arbitraire. Il faudra donc que q conditions complexes soient remplies.

Troisième cas : $p > 1$. — La transformation ne sera possible que si les surfaces ont les mêmes modules; ce qui fournit $3p - 3$ conditions complexes, et elle ne pourra se faire que d'un nombre fini de manières. On aura donc q nouvelles conditions.

Finalement, on voit que le nombre des conditions complexes qui doivent être vérifiées est, dans tous les cas, $3p + q - 3$. Ce nombre est encore le même lorsque les surfaces X et Y présentent des points de ramification en dehors des points $0, 1, \infty$. Supposons, par exemple, $\lambda = \frac{\alpha}{\rho} (\alpha > 1)$, et soit η_i une racine de l'équation $f(0, y) = 0$ différente de $0, 1, \infty$. La surface X présentera un cycle de ρ feuillets au point $x = 0$, et la surface Y un cycle de α feuillets au point $y = \eta_i$. Les modules de Y dépendront d'une indéterminée η_i ; mais, dans l'application des deux surfaces l'une sur l'autre, le point $x = 0$, sommet du cycle de ρ feuillets, doit venir s'appliquer sur le point $y = \eta_i$, sommet du cycle de α feuillets. Le nombre total des conditions qui doivent être remplies reste donc le même, et il est clair que le raisonnement est général.

Supposons ces conditions remplies; la relation $f(x, y) = 0$ existera, et aura pour surfaces de Riemann X et Y. Cette relation fournira-t-elle une intégrale de l'équation de Kummer? Supposons que, dans le premier membre de l'équation (1), on ait remplacé x par sa valeur en fonction de y . Il est clair que le résultat sera une fonction uniforme du point analytique (x, y) , qui pourra se mettre sous la forme d'une fonction rationnelle de x et de y , $\Phi(x, y)$; mais il ne résulte nullement de ce qui précède que $\Phi(x, y)$ se réduira à la forme

$$\frac{A y^2 + B y + C}{y^2(1-y)^2},$$

sauf dans le cas où la surface Y se réduit au plan des y , c'est-à-dire dans le cas d'une intégrale rationnelle (voir *Recherches sur l'équation de Kummer*, p. 11 et suivantes). Nous suivrons une marche toute différente pour reconnaître si un système de surfaces X et Y fournit une intégrale.

Pour une intégrale rationnelle, on a

$$p = 0, \quad q = 3.$$

On est conduit à se demander s'il y a d'autres intégrales satisfaisant à ces conditions. Dans cette hypothèse, les formules (9), (10) et (11) deviennent

$$\begin{aligned} n &= a + r\rho = b + s\sigma = c + t\tau, \\ 1 &= n - r - s - t + r'(\alpha' - 1) + s'(\beta' - 1) + t'(\gamma' - 1), \\ a + b + c &\geq 3. \end{aligned}$$

On en déduit

$$a + r(\rho - 2) + b + s(\sigma - 2) = 2 + 2t - 2\delta',$$

où

$$\delta' = r'(\alpha' - 1) + s'(\beta' - 1) + t'(\gamma' - 1);$$

j'ai discuté ce système dans le Mémoire déjà cité (p. 31). Si δ' n'est pas nul, on ne trouve de solutions qu'en prenant pour ρ, σ, τ les valeurs

ci-dessous :

$$2, \quad 2, \quad m,$$

$$2, \quad 3, \quad 3,$$

$$2, \quad 3, \quad 4,$$

$$2, \quad 3, \quad 5.$$

L'équation hypergéométrique correspondante s'intègre au moyen des fonctions algébriques, et nous retombons sur un cas qui a été écarté. Il faudra donc que l'on ait $\delta' = 0$, et Y ne sera ramifiée qu'aux points $0, 1, \infty$. Par raison de symétrie, il en sera de même de X ; ce que l'on prouverait du reste de la même façon. La relation $f(x, y) = 0$ étant de genre 0 , les variables x et y pourront s'exprimer rationnellement en fonction d'une variable

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

et l'on reconnaît sans peine, en tenant compte de la ramification, que $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ jouissent des propriétés caractéristiques des intégrales rationnelles de l'équation de Kummer. La transformation algébrique considérée est donc une combinaison de deux transformations rationnelles. On démontre de la même façon que ces cas sont les seuls où l'on puisse avoir $3p + q - 3 = 0$.

Remarque I. — Dans le cas des transformations rationnelles, il existe aussi des solutions du système arithmétique qui ne fournissent pas d'intégrales; telle est la solution

$$n = 8, \quad n' = 1, \quad p = 0, \quad q = 3, \quad a = 0, \quad b = 0, \quad c = 3.$$

$$\lambda = \frac{1}{2}, \quad \mu = \frac{1}{4}, \quad \nu = \frac{1}{3}, \quad \lambda' = \mu' = \nu' = \frac{1}{6}.$$

Mais ici cela tient précisément à ce qu'on ne peut construire de surface connexe X à huit feuillets ayant la ramification demandée, comme il est facile de s'en convaincre.

Remarque II. — Il résulte aussi des considérations précédentes qu'un système de solutions des équations arithmétiques ne peut fournir qu'un nombre fini d'intégrales algébriques.

II.

7. Je me placerais tout d'abord dans un cas simple particulièrement intéressant, car il conduit à la recherche des relations algébriques entre les fonctions fuchsienues qui proviennent de l'équation hypergéométrique. On sait que, lorsque chacun des exposants λ, μ, ν est nul ou égal à une partie aliquote de l'unité, le réseau R de triangles (λ, μ, ν) ne recouvre qu'une seule fois le plan, ou une partie du plan, de sorte que la fonction inverse $x = \varphi(\lambda, \mu, \nu, s)$ est uniforme. Cela posé, on aura trois cas à distinguer suivant le signe de $1 - \lambda - \mu - \nu$.

Premier cas : $1 - \lambda - \mu - \nu < 0$. — La fonction inverse est une fonction rationnelle, et l'on a ainsi les quatre fonctions rationnelles

$$\begin{aligned} x &= \varphi\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{n}, s\right), \\ x &= \varphi\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, s\right), \\ x &= \varphi\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, s\right), \\ x &= \varphi\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, s\right). \end{aligned}$$

Deuxième cas : $1 = \lambda + \mu + \nu$. — Cette hypothèse fournit les quatre fonctions uniformes

$$\begin{aligned} x &= \varphi\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, s\right), \\ x &= \varphi\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, s\right), \\ x &= \varphi\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, s\right), \\ x &= \varphi\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, s\right), \end{aligned}$$

dont la première $x = \sin^2 s$ est simplement périodique, tandis que les trois autres sont doublement périodiques.

Troisième cas : $\lambda + \mu + \nu < 1$. — A cette hypothèse correspondent un nombre illimité de fonctions inverses uniformes. Le cercle orthogonal aux trois côtés du triangle fondamental (λ, μ, ν) est réel, et les répétitions de ce triangle par la loi de symétrie forment un réseau R recouvrant une seule fois une portion du plan limitée par ce cercle.

Le groupe G est un groupe fuchsien de genre 0 et le polygone générateur est le quadrilatère que nous avons appelé *fondamental*. La fonction inverse $x = \varphi(\lambda, \mu, \nu, s)$ est une fonction fuchsienne n'existant que dans une portion du plan limité par le cercle orthogonal et admettant ce cercle pour ligne singulière essentielle [voir POINCARÉ, *Théorie des groupes fuchsien*s (*Acta mathematica*, t. I)].

Supposons de même que chacun des exposants λ', μ', ν' soit nul ou égal à une partie aliquote de l'unité, et que $\lambda' + \mu' + \nu' < 1$; la fonction inverse $y = \psi\left(\lambda', \mu', \nu', \frac{as+b}{cs+d}\right)$ sera aussi une fonction fuchsienne de s . Nous nous proposons de rechercher dans quels cas il existe une relation algébrique $f(x, y) = 0$ entre les deux fonctions fuchiennes $x = \varphi(\lambda, \mu, \nu, s)$ et $y = \psi\left(\lambda', \mu', \nu', \frac{as+b}{cs+d}\right)$, les constantes a, b, c, d étant choisies convenablement.

8. Les équations (9), (10) et (11) deviennent dans ce cas

$$\begin{aligned} (9)' & \quad \begin{cases} n = a + r\rho = b + s\sigma = c + t\tau, \\ n' = a' + r'\rho' = b' + s'\sigma' = c' + t'\tau', \end{cases} \\ (10)' & \quad 2p + q - 2 = n - r - s - t = n' - r' - s' - t', \\ (11)' & \quad a + b + c \geq q, \quad a' + b' + c' \geq q. \end{aligned}$$

Soit (Λ) un système de solutions de ces équations; a, b, c, a', b', c' étant connus, on en déduira pour les δ_{ik} un nombre fini de systèmes de valeurs. Prenons un système de valeurs satisfaisant aux équations (7) et partageons ensuite chaque δ et le δ' correspondant en un même nombre de parties, de façon qu'entre deux parties correspondantes h, h' on ait toujours la relation $h\lambda = h'\lambda'$, et que h soit un diviseur de ρ . Cela fait, adoptons un des systèmes en nombre fini que l'on aura trouvés ainsi.

Il nous faut maintenant former les surfaces de Riemann X et Y dont la ramification résulte du système de solutions adopté; X , par exemple, est composée de n feuillets étendus sur le plan des x , et n'est ramifiée qu'aux trois points $x = 0, 1, \infty$. Au point $x = 0$, si $\lambda = \frac{1}{\rho}$, le nombre des feuillets réunis en cycle est égal à ρ ou à un diviseur de ρ ; si λ est

nul, la ramification en ce point peut être quelconque. Il en est de même pour les points $x = 1$, $x = \infty$. Comme nous l'avons déjà fait remarquer, la formation de la surface connexe X , quand on se donne le nombre des cycles en chacun des points 0 , 1 , ∞ et le nombre des feuillets de chaque cycle, est un problème de combinaisons qui n'admet qu'un nombre fini de solutions. Supposons encore que nous ayons obtenu toutes ces solutions : ce que l'on pourra toujours faire par un nombre limité d'essais. Adoptons l'une d'elles, et proposons-nous de rechercher s'il existe une relation algébrique irréductible $f(x, y) = 0$ admettant cette surface X pour surface de Riemann et répondant à la question.

Représentons-nous pour cela les $2n$ demi-feuillets positifs et négatifs de la surface X ; distinguons les n demi-feuillets positifs par un numéro variant de 1 à n , et les n demi-feuillets négatifs par un numéro variant de -1 à $-n$. Chacun des demi-feuillets positifs est relié au plus à trois demi-feuillets négatifs, quand on fait franchir à la variable l'axe réel, et inversement. Au moyen de coupures pratiquées dans cette surface le long de l'axe réel, on peut la transformer en une surface simplement connexe \mathfrak{X} , telle que deux chemins tracés sur cette surface et joignant deux points quelconques M et M' soient équivalents, c'est-à-dire puissent se réduire l'un à l'autre par une déformation continue sans franchir aucun des points $x = 0$, $x = 1$, $x = \infty$. Soit L la limite de cette surface \mathfrak{X} ; L se composera des bords des coupures qui ont été pratiquées dans X . Cela posé, faisons l'*Abbildung* de la surface \mathfrak{X} sur le plan des s au moyen de la relation

$$x = \varphi(\lambda, \mu, \nu, s).$$

D'après le théorème de M. Schwarz, cet *Abbildung* se composera de $2n$ triangles (λ, μ, ν) alternativement positifs et négatifs. Ces $2n$ triangles formeront un polygone P , ne se recouvrant pas lui-même, et dont les côtés seront des arcs de cercle correspondant aux bords des coupures de X . Les deux côtés de P qui correspondent aux deux bords d'une même coupure peuvent se déduire l'un de l'autre par une substitution linéaire; *donc les côtés du polygone P sont congruents deux à deux*. Imaginons que l'on déforme ce polygone P d'une manière continue de façon que les côtés congruents viennent se coller l'un contre

l'autre; on obtient une surface fermée \mathcal{Q} , de même genre que la surface X , et qui peut remplacer cette dernière dans toutes les considérations qui reposent uniquement sur la géométrie de situation. En particulier, de la manière dont sont disposés les côtés congruents de P , on peut déduire immédiatement la ramification de X . La formation de la surface X ou celle du polygone P sont, par conséquent, deux problèmes équivalents, dont le second peut même, à certains égards, être considéré comme plus simple que le premier. Quelle que soit la voie que l'on adopte, je supposerai désormais que l'on a obtenu la surface X et le polygone P correspondant; j'appellerai $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n$ les substitutions linéaires qui changent l'un en l'autre les côtés congruents de P . Il peut arriver que deux côtés congruents viennent se confondre; dans ce cas, on supprimera ce côté. Quelles sont maintenant les conditions pour qu'il existe une relation algébrique $f(x, y) = 0$ entre les fonctions fuchsienues $x = \varphi(\lambda, \mu, \nu, s)$ et $y = \psi\left(\lambda', \mu', \nu', \frac{as + b}{cs + d}\right)$, admettant X pour surface de Riemann sur le plan des x ?

La réponse est immédiate. *Il faut et il suffit qu'en choisissant convenablement les constantes a, b, c, d , les substitutions $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n$ appartiennent au groupe fuchsien G' relatif à la fonction*

$$y = \psi\left(\lambda', \mu', \nu', \frac{as + b}{cs + d}\right).$$

9. Si l'on connaissait la forme générale des substitutions du groupe G' , comme cela a lieu pour les fonctions modulaires, cet examen serait facile. Mais il n'en est pas ainsi en général, et il est nécessaire d'avoir recours à d'autres considérations. Le groupe G' dépend de trois constantes complexes ou, ce qui revient au même, de six constantes réelles. De ces six constantes, il y en a trois qui se déterminent immédiatement. En effet, toutes les substitutions de ce groupe doivent conserver le cercle orthogonal aux côtés du polygone P ; en d'autres termes, le réseau R' de triangles (λ', μ', ν') doit avoir le même cercle principal que le réseau R de triangles (λ, μ, ν) . Il y a une infinité de réseaux R' jouissant de cette propriété; la position de ce réseau dépend encore de trois constantes réelles. Mais ce réseau R' doit satisfaire à d'autres conditions; en effet, q sommets de ce réseau doivent coïncider

respectivement avec les sommets du polygone P qui sont les images des sommets des cycles de la seconde catégorie de la surface de Riemann X .

Supposons, par exemple, qu'un des sommets (λ') du réseau R' doive coïncider avec un des sommets (λ) du polygone P , et soit $\lambda \neq 0$. On peut construire le polygone P de telle façon que le sommet (λ) en question soit le centre du cercle orthogonal. Admettons qu'on ait fait la figure de cette façon; nous pourrons ensuite construire un réseau R' admettant même cercle principal et dont un sommet (λ') coïncidera avec le sommet (λ) précédent.

Tous les réseaux R' jouissant de la même propriété se déduiront de celui-là par une rotation autour de ce sommet.

Si q est supérieur à 1, un certain nombre d'autres sommets du réseau R' devront coïncider avec des sommets du polygone P ; comme dans une rotation autour du sommet (λ) chaque sommet de R' décrit une circonférence, on pourra toujours trouver toutes les positions de ce réseau qui satisfont aux conditions précédentes, et il n'y en aura jamais qu'un nombre *limité*. Supposons qu'on ait trouvé une de ces positions et construisons la portion de ce réseau qui entoure le polygone P . Soient $AB, A'B'$ deux côtés congruents du polygone P , tels que la substitution Σ_i change AB en $A'B'$. Prenons deux points correspondants M et M' sur ces deux côtés. Pour que la substitution Σ_i appartienne au groupe G' , il faut que les points M et M' soient à l'intérieur de deux triangles congruents (λ', μ', ν') et que la substitution linéaire qui change ces deux triangles l'un en l'autre soit identique à la substitution Σ_i . Une méthode semblable s'applique à tous les couples de côtés congruents du polygone P .

Il est clair que les opérations géométriques précédentes se traduisent analytiquement par des calculs toujours possibles. Dans la pratique, il peut être avantageux de choisir le cercle orthogonal d'une façon particulière, par exemple de supposer qu'il se réduit à l'axe réel. Mais je ne m'arrêterai pas à ces simplifications, que l'on aperçoit aisément dans chaque cas particulier. On en trouvera des exemples plus loin.

La méthode précédente suppose que le nombre q est au moins égal à 2. On peut encore employer une méthode un peu plus générale que la précédente et qui n'exige aucune hypothèse sur le nombre q . Ima-

ginons que le cercle C orthogonal aux côtés du polygone P soit le cercle de rayon un décrit de l'origine comme centre, et que ce polygone soit tout entier à l'intérieur de C . Appelons L de deux points intérieurs la L de l'arc de cercle orthogonal à C qui joint ces deux points. Pour la définition de la L et pour tout ce qui va suivre, je renverrai le lecteur aux Mémoires que M. Poincaré a publiés dans les premiers Volumes des *Acta mathematica*. Si l'on considère diverses circonférences coupant orthogonalement le cercle fondamental C et les arcs de ces circonférences qui sont interceptés par le polygone P , la L de ces arcs restera inférieure à une certaine limite que j'appelle L' et dont il est facile d'avoir des valeurs approchées par excès.

Imaginons maintenant que l'on ait construit un réseau R' de triangles (λ', μ', ν') admettant le cercle C pour cercle fondamental : considérons un point M à l'intérieur d'un de ces triangles et ses divers transformés par les substitutions du groupe G' . Parmi ces divers transformés, il n'y en aura qu'un nombre limité m_1, m_2, \dots, m_k , tels que la L des deux points M et m_i soit inférieure à la limite L' . Soient $\Sigma'_1, \Sigma'_2, \dots, \Sigma'_k$ les substitutions correspondantes du groupe G' , et soit T la substitution linéaire la plus générale qui conserve le cercle fondamental; cette substitution dépend, comme on sait, de trois paramètres arbitraires réels. Si nous appliquons au réseau R' la substitution T , le groupe G' est remplacé par un groupe G'' holoédriquement isomorphe au premier et les substitutions précédentes sont remplacées par les substitutions $\Sigma''_1, \Sigma''_2, \dots, \Sigma''_k$. Mais il est à remarquer que ces substitutions sont les seules du groupe G'' qui jouissent de la propriété suivante : la L de l'arc de cercle orthogonal à C qui joint un point M à l'un de ses transformés par une de ces substitutions est inférieure à la limite L' . Si donc il existe des substitutions du groupe G'' qui changent l'un en l'autre les côtés congruents du polygone P , ces substitutions seront au nombre des substitutions $\Sigma''_1, \Sigma''_2, \dots, \Sigma''_k$. Comme ces dernières sont en nombre fini et qu'elles ne dépendent que de trois paramètres arbitraires, il sera toujours possible, par un nombre fini d'essais, de reconnaître si l'on peut disposer de ces trois paramètres de façon que quelques-unes de ces substitutions changent l'un en l'autre les côtés congruents de P .

En rapprochant ces résultats de ceux qui ont été obtenus dans la première partie de ce travail, nous voyons qu'on pourra toujours, par

un nombre limité d'essais, trouver tous les cas où il existe une relation algébrique d'un degré donné entre deux fonctions fuchsiennes provenant de l'équation hypergéométrique.

10. On peut présenter les recherches précédentes sous une forme un peu différente, de façon à les rattacher plus étroitement à la théorie générale des fonctions fuchsiennes. Je vais démontrer pour cela que *le polygone P est le polygone générateur d'un groupe fuchsien*. Les côtés de ce polygone P sont tous de la première sorte; les sommets sont de la première ou de la seconde catégorie. Le polygone P sera de la première famille si les trois exposants λ, μ, ν sont différents de zéro; dans le cas contraire, il sera de la seconde ou de la sixième famille. Nous avons déjà vu que *les côtés de ce polygone sont congruents deux à deux*. Il ne nous reste plus qu'à examiner si *la somme des angles d'un même cycle de la première catégorie est une partie aliquote de 2π* . C'est ce qui résulte bien aisément de la façon dont ce polygone a été obtenu. En effet, les sommets de P correspondent sur la surface X aux trois points $0, 1, \infty$ et les sommets qui font partie d'un même cycle correspondent sur X au sommet d'un même cycle de feuilletts. Supposons, par exemple, $\lambda \neq 0$, et soit $\lambda = \frac{1}{\rho}$; prenons sur X un cycle de m feuilletts réunis autour du point $x = 0$. Quand on fait l'*Abbildung* de la surface X sur le plan de s , chaque demi-feuillet de cette surface donne un triangle d'angles $\lambda\pi, \mu\pi, \nu\pi$; la somme des angles des sommets de P provenant de ce cycle sera donc égale à $2m\lambda\pi$ ou à $\frac{2m\pi}{\rho}$; comme m , nous l'avons vu plus haut, doit être égal à ρ ou à un diviseur de ρ , il en résulte que la somme des angles de ce cycle sera égale à 2π ou à une partie aliquote de 2π . C. Q. F. D.

Si $m = \rho$, le cycle correspondant sera de la première sous-catégorie, et il peut se faire que ce sommet disparaisse dans le polygone P en réunissant deux côtés contigus. Mais, si m est un diviseur de ρ , le cycle correspondant sera de la deuxième sous-catégorie. J'appellerai Γ le groupe fuchsien auquel le polygone P donne naissance; ce groupe Γ est un sous-groupe de G, d'indice fini, et distingué.

Si, au lieu de partir de la surface X, on était parti de la surface Y, on aurait obtenu de même un polygone P' composé de $2n'$ triangles

(λ', μ', ν') donnant naissance à un groupe fuchsien identique au précédent Γ contenu dans le groupe G' . On peut déduire ces polygones l'un de l'autre au moyen d'une transformation employée déjà par M. Poincaré et que je vais rappeler en quelques mots. Soient S un polygone générateur d'un groupe fuchsien g , $AB, A'B'$ deux côtés congruents de ce polygone et Σ_i la substitution linéaire qui change AB en $A'B'$. Soient ω une portion du polygone S adjacente au côté AB et ω' la portion du plan transformée de ω par la substitution Σ_i . Si du polygone S on retranche la portion ω et qu'on y ajoute la portion ω' , on obtient un nouveau polygone S' que nous dirons *équivalent* au premier. Plus généralement tout polygone qui se déduit de S par une série d'opérations de ce genre sera dit *équivalent* au polygone S . On voit aisément qu'il y a réciprocity entre deux polygones équivalents, et qu'ils définissent l'un et l'autre le même groupe fuchsien. Remarquons que deux polygones équivalents n'ont pas forcément le même nombre de côtés; on peut en effet augmenter à volonté le nombre des côtés. Nous en verrons des exemples un peu plus loin.

Cela posé, revenons à notre polygone P et à la surface découpée X qui lui correspond point par point. À cette dernière on peut faire correspondre, point par point, une surface analogue Y , que l'on déduit de Y par certaines coupures L' pratiquées suivant les lignes de cette surface qui correspondent à la ligne L . Il y aura donc aussi une correspondance univoque entre le polygone P et la surface Y . Mais, quand on fait l'*Abbildung* de Y sur le plan des s au moyen de la relation

$$y = \psi\left(\lambda', \mu', \nu', \frac{as + b}{cs + d}\right),$$

on sait qu'à chaque demi-plan de cette surface correspond sur le plan des s un triangle (λ', μ', ν') . Il faut toutefois remarquer que les diverses portions du plan des s , qui sont les images d'un même demi-plan de la surface Y , ne sont pas forcément adjacentes; c'est ce qui arrivera si la ligne L' de Y , qui correspond à la ligne L de X et par suite au périmètre de P , traverse un ou plusieurs de ces demi-plans. Pour prendre le cas le plus général, supposons qu'un certain demi-plan de Y ait pour images, sur le plan des s , q portions séparées dont chacune sera par con-

séquent adjacente au périmètre de P. Soient l_1, l_2, \dots, l_q ces différentes portions; construisons le triangle (λ', μ', ν') appartenant au réseau R' dont l_1 fait partie et soient l'_2, l'_3, \dots, l'_q les portions de ce triangle qui sont respectivement congruentes à l_2, l_3, \dots, l_q . Prenons une portion adjacente à l_1, l'_i par exemple. La portion l_i se change en l'_i par une des substitutions qui changent l'un en l'autre les bords congruents de P; si donc on retranche l_i du polygone P et qu'on lui ajoute l'_i , on obtiendra un polygone équivalent au premier. En continuant ainsi et en opérant de même pour chacun des triangles du réseau R' qui sont traversés par le périmètre de P, on arrivera à un polygone P', équivalent au premier, dont tous les côtés seront formés par des arcs de cercle appartenant au réseau R'. Ce polygone sera donc formé de $2n'$ triangles (λ', μ', ν') alternativement positifs et négatifs. Par conséquent, la recherche des cas où il existe une relation algébrique entre les deux fonctions fuchsienues $x = \varphi(\lambda, \mu, \nu, s), y = \psi(\lambda', \mu', \nu', s)$ est équivalente à la question de Géométrie suivante :

Trouver deux polygones équivalents P et P' formés respectivement de $2n$ triangles (λ, μ, ν) et de $2n'$ triangles (λ', μ', ν') , alternativement positifs et négatifs.

Les équations (9') et (10') ont une signification géométrique évidente. Considérons la surface fermée \mathfrak{Q} obtenue en déformant le polygone P de façon à réunir les bords congruents; on peut évidemment, au point de vue de la géométrie de situation, assimiler cette surface fermée à un polyèdre limité par $2n$ faces triangulaires, qui correspondent aux $2n$ demi-feuillets de X. Les sommets de ce polyèdre correspondent aux points $0, 1, \infty$ de X et leur nombre sera par conséquent $r + s + t + q$; les arêtes correspondent aux portions de l'axe réel, $-\infty - 0, 0 - +1, +1 - +\infty$, et il y en aura $3n$. Comme chaque arête aboutit à deux sommets, il y aura $2n$ arêtes partant des sommets (λ) , $2n$ partant des sommets (μ) et $2n$ partant des sommets (ν) ; ce qui fournit les relations

$$n = a + rp = b + s\sigma = c + t\tau.$$

La formule d'Euler généralisée sur les polyèdres donne ensuite

$$2n + r + s + t + q = 3n + 2 - 2p,$$

c'est-à-dire

$$2p + q - 2 = n - r - s - t.$$

Les formules analogues s'interprètent de même en considérant la surface fermée \mathcal{Q}' obtenue en déformant le polygone P' de façon à réunir les bords congruents. Si les polygones P et P' sont équivalents, les surfaces fermées \mathcal{Q} et \mathcal{Q}' seront identiques; les équations (7) expriment que la somme des angles des triangles assemblés autour d'un point est la même dans les deux surfaces.

Quant à l'équation (13)

$$n(1 - \lambda - \mu - \nu) = n'(1 - \lambda' - \mu' - \nu'),$$

elle exprime aussi une propriété géométrique. On sait, en effet, que $1 - \lambda - \mu - \nu$ est proportionnel à la S du triangle (λ, μ, ν) . Comme deux figures congruentes ont même S , $n(1 - \lambda - \mu - \nu)$ sera proportionnel à la S du polygone P , et $n'(1 - \lambda' - \mu' - \nu')$ sera de même proportionnel à la S du polygone P' . On obtiendrait donc la relation (13) en écrivant que ces deux polygones équivalents ont la même S .

Pour peu que l'on réfléchisse à la nature des relations précédentes, on conçoit aisément qu'elles expriment des conditions nécessaires, mais nullement suffisantes, pour que le problème de Géométrie posé plus haut admette une solution; ce qui est bien d'accord avec le résultat obtenu dans la première Partie de ce travail.

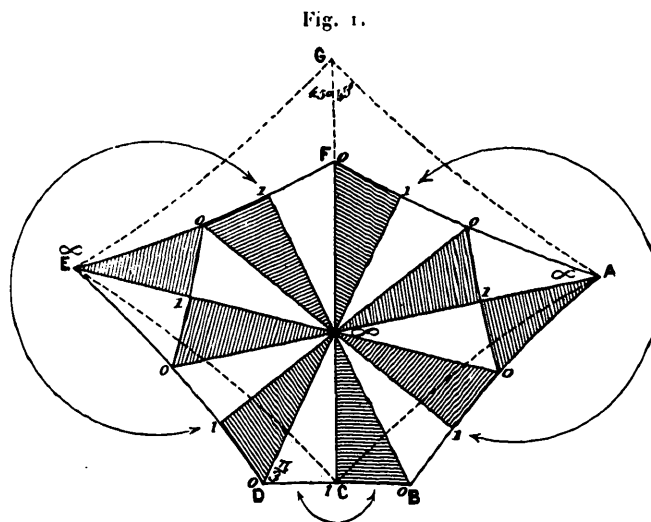
41. Cette théorie présente, comme on voit, beaucoup d'analogie avec la théorie de la transformation elliptique. Mais il y a aussi une différence essentielle; on sait, en effet, que toute transformation algébrique des fonctions elliptiques résulte de la combinaison de deux transformations rationnelles, tandis que nous connaissons déjà pour l'équation de Kummer une infinité d'intégrales algébriques, fournies par les équations modulaires, qui ne résultent pas de la combinaison d'intégrales rationnelles. Nous pouvons maintenant expliquer cette différence : soient (ω, ω') et (ω_1, ω'_1) deux systèmes de périodes; pour qu'il existe une relation algébrique entre deux fonctions doublement périodiques

diques admettant ces périodes respectives, il faut et il suffit que les deux réseaux de parallélogrammes (ω, ω') et (ω_1, ω'_1) aient un réseau de sommets communs. S'il en est ainsi, on pourra trouver deux parallélogrammes équivalents composés respectivement de parallélogrammes élémentaires des deux réseaux. Ces deux parallélogrammes équivalents jouent absolument le même rôle que les polygones P et P' . Mais, tandis que l'on peut toujours ramener ces polygones à des parallélogrammes dans le cas de la transformation elliptique, nous ne pouvons pas, en général, ramener les polygones P et P' à des quadrilatères.

J'ai dit plus haut que le sous-groupe Γ était d'indice fini et distingué. Il est d'indice fini; cela résulte de la façon dont on a obtenu le polygone générateur. Il est distingué dans chacun des groupes G et G' ; on le démontre en remarquant que toute substitution de Γ reproduit les fonctions fuchsiennes x et y .

12. Je vais appliquer la méthode qui vient d'être exposée à quelques exemples.

Exemple I. — L'hexagone ABCDEF (fig. 1) est formé de dix-huit



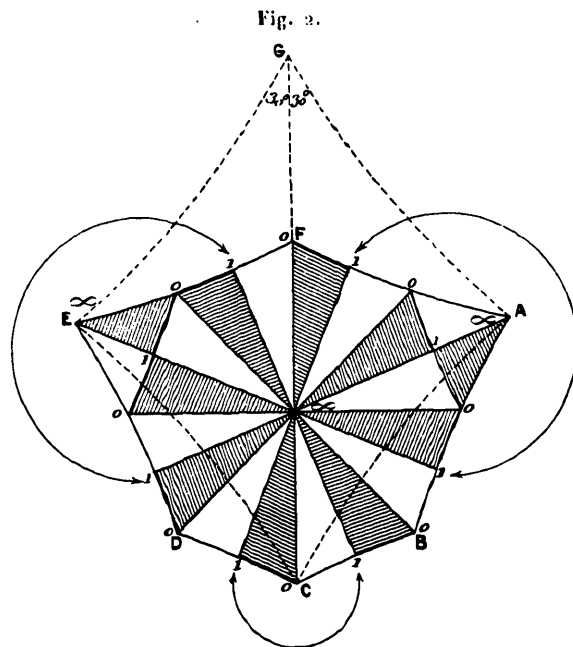
triangles $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{7})$ alternativement positifs et négatifs. Les côtés AB et AF sont congruents, ainsi que BC et DC, ED et EF.

Joignons les sommets A et E au sommet C par deux arcs de circon-

férences orthogonales au cercle fondamental. Soient Σ_1 la substitution qui change AB en AF, et Σ_2 la substitution qui change ED en EF; Σ_1 change le triangle ABC en un triangle AFG, et de même Σ_2 change le triangle EDC en un triangle EFG. L'hexagone ABCDEF est donc équivalent au quadrilatère ACEG, où les côtés AC et AG sont congruents, ainsi que EC et EG. Les angles A et E de ce quadrilatère sont égaux à $\frac{2\pi}{7}$, tandis que les angles C et G sont égaux à $\frac{\pi}{4}$; on pourra regarder ce quadrilatère comme formé de deux triangles $(\frac{1}{2}, \frac{1}{7}, \frac{1}{7})$ symétriques l'un de l'autre par rapport à un côté commun. Il existe donc une relation algébrique entre les deux fonctions fuchsienues

$$x = \varphi\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{7}, s\right), \quad y = \psi\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{7}, \frac{1}{7}, s\right),$$

du premier degré en x et du neuvième degré en y . J'ai obtenu cette relation dans un travail antérieur. [Voir *Recherches sur l'équation de Kummer*, p. 61, formule (55).]



Exemple II. — L'hexagone ABCDEF (*fig. 2*) est composé de vingt triangles $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{8})$ alternativement positifs et négatifs; les côtés conjugués

gués sont AB et AF, CB et CD, ED et EF. Appelons Σ_1 et Σ_2 les deux substitutions qui changent respectivement AB en AF, ED en EF.

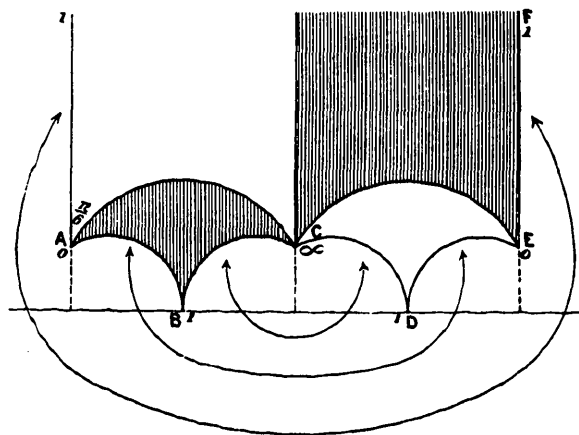
Joignons les sommets A et E au sommet C par des arcs de circonférences orthogonales au cercle fondamental. Si l'on applique aux deux triangles ABC, EDC les substitutions Σ_1 et Σ_2 respectivement, on obtient les deux triangles AFG, EFG, et l'hexagone ABCDEF est remplacé par le quadrilatère équivalent ACEG, où les côtés conjugués sont AC et AG, EC et EG. Les angles A et E de ce quadrilatère sont égaux à $\frac{2\pi}{8}$, et les angles C et G à $\frac{\pi}{3}$; il est donc formé de deux triangles $(\frac{1}{3}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8})$ symétriques l'un de l'autre par rapport à un côté commun. Il en résulte qu'il existe une relation algébrique entre les deux fonctions fuchsienues

$$x = \varphi\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{8}, s\right), \quad y = \psi\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, s\right),$$

du premier degré en x , du dixième degré en y . [Voir *Recherches sur l'équation de Kummer*, p. 62, formule (60).]

Exemple III. — Les *fig. 3* et *4* représentent deux hexagones égaux ABCDEF, *abcdef*, obtenus de deux façons différentes (*fig. 3* et *4*).

Fig. 3.



L'hexagone ABCDEF est formé de quatre triangles $(0, \frac{1}{8}, \frac{1}{8})$, et le second *abcdef* de huit triangles $(0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. On en conclut l'existence

d'une relation algébrique entre les deux fonctions fuchsiennes

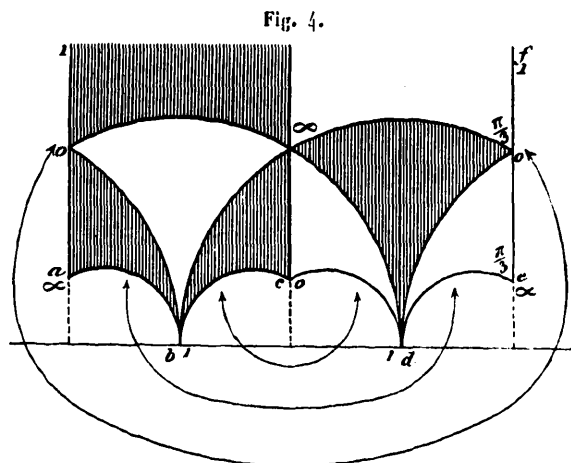
$$x = \varphi\left(0, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, s\right), \quad y = \psi\left(0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, s\right),$$

du second degré en y et du quatrième degré en x . Nous verrons plus loin comment on peut obtenir cette relation qui est équivalente à l'ensemble des deux suivantes

$$y = \frac{t(t-2)^2}{(1-2t)^3}, \quad x = t^2,$$

t désignant une variable auxiliaire.

Les intégrales algébriques que l'on connaît pour l'équation de Kummer



mer donnent lieu à des figures analogues, que le lecteur construira bien aisément.

Remarquons que, si les deux polygones P et P' ont un côté commun, à une suite continue de valeurs réelles de x correspond une suite continue de valeurs réelles de y , et la relation $f(x, y) = 0$ sera à coefficients réels.

15. La connaissance d'un groupe fuchsien permet, dans certains cas, de trouver des intégrales algébriques de l'équation de Kummer. Soient G un groupe fuchsien, et u une fonction fuchsienne admettant le groupe G et existant dans tout l'intérieur du cercle fondamental. Parmi

les substitutions du groupe G , distinguons celles qui jouissent de la propriété suivante : les points doubles sont distincts, et l'on peut les mettre sous la forme

$$\frac{s' - a}{s' - a'} = e^{\frac{2i\pi}{\rho}} \frac{s - a}{s - a'},$$

ρ désignant un nombre entier. Soient Σ_0, Σ_1 deux substitutions de G jouissant de cette propriété, et supposons qu'il en soit de même de la substitution composée $\Sigma_2 = \Sigma_0 \Sigma_1$; appelons $e^{\frac{2i\pi}{\rho}}, e^{\frac{2i\pi}{\sigma}}, e^{\frac{2i\pi}{\tau}}$ les multiplicateurs respectifs de ces trois substitutions et posons

$$\lambda = \frac{1}{\rho}, \quad \mu = \frac{1}{\sigma}, \quad \nu = \frac{1}{\tau}.$$

On démontre aisément que l'on peut disposer des trois constantes arbitraires de la fonction fuchsienne $x = \varphi\left(\lambda, \mu, \nu, \frac{as + b}{cs + d}\right)$, de façon que le groupe de substitutions de x soit identique au groupe dérivé des deux substitutions Σ_0, Σ_1 ; les fonctions fuchiennes x et u seront liées, par conséquent, par une relation algébrique

$$F(x, u) = 0.$$

De même, soient Σ'_0, Σ'_1 deux autres substitutions du groupe G et $\Sigma'_2 = \Sigma'_0 \Sigma'_1$. Si ces trois substitutions jouissent des mêmes propriétés que les précédentes, on pourra trouver une nouvelle fonction fuchsienne $y = \psi\left(\lambda', \mu', \nu', \frac{a's + b'}{c's + d'}\right)$, qui sera liée à u par une relation algébrique

$$F_1(y, u) = 0.$$

On déduit de là qu'il existe une relation algébrique entre les deux fonctions fuchiennes x et y , $f(x, y) = 0$.

14. Les détails dans lesquels je suis entré lorsque $\lambda, \mu, \nu, \lambda', \mu', \nu'$ sont des parties aliquotes de l'unité me dispensent de m'étendre longuement sur le cas général. Prenons une solution du système arithmétique où $\lambda, \mu, \nu, \lambda', \mu', \nu'$ aient des valeurs rationnelles, et supposons

construites, comme plus haut, les deux surfaces de Riemann X et Y correspondant à cette solution; nous pouvons même, pour simplifier, nous borner à considérer X . Cette surface présentera en général, outre les points $0, 1, \infty$, un certain nombre d'autres points de ramification; soit η_i un quelconque de ces points. Imaginons que l'on transforme X en une surface simplement connexe \mathfrak{X} au moyen de coupures pratiquées suivant l'axe réel et suivant les lignes indéfinies allant des points η_i au point $x = \infty$, de telle façon que tout chemin fermé tracé sur \mathfrak{X} puisse se réduire à zéro par une déformation continue sans passer par aucun des points $0, 1, \infty$. Formons ensuite l'*Abbildung* de \mathfrak{X} sur le plan des s au moyen de la relation

$$x = \varphi(\lambda, \mu, \nu, s);$$

nous obtenons ainsi un polygone P formé de $2n$ triangles (λ, μ, ν) alternativement positifs et négatifs. Ce polygone P peut se recouvrir plusieurs fois lui-même, et quelques-uns des triangles dont il se compose seront découpés suivant certaines lignes, images des coupures allant des points η_i à l'infini. Si l'on déforme ce polygone de façon à réunir les bords congruents, on obtient une surface fermée qui correspond d'une façon univoque à la surface X . Que faut-il maintenant pour qu'à cette surface de Riemann corresponde une intégrale algébrique? Il faut que tout chemin fermé tracé sur X ramène à sa valeur initiale la fonction inverse

$$y = \psi\left(\lambda', \mu', \nu', \frac{as + b}{cs + d}\right),$$

quand on choisit convenablement les constantes a, b, c, d . On détermine, comme plus haut, ces constantes en remarquant que q sommets du réseau R' doivent coïncider avec certains sommets de P . On peut aussi remarquer que les images des points η_i sur le plan des s doivent coïncider avec des sommets de ce polygone. Admettons que l'on ait trouvé un réseau R' satisfaisant à toutes ces conditions, et construisons la portion de ce réseau qui recouvre le polygone P . Il faudra, en outre, que ce réseau recouvre simplement le polygone P , et que les bords congruents de P soient aussi congruents dans le réseau R' ; ce que l'on reconnaîtra absolument comme au n° 9.

III.

15. Nous allons maintenant nous occuper de la question suivante. Supposons qu'on ait reconnu, comme il vient d'être expliqué, l'existence d'une relation algébrique entre les deux fonctions fuchsiennes x et y . Comment obtiendra-t-on cette relation elle-même? La question n'est qu'un cas particulier du problème général qui consiste à déterminer les coefficients d'une relation algébrique $f(x, y) = 0$, connaissant les deux surfaces de Riemann X et Y correspondant à cette équation, c'est-à-dire le nombre des feuillettes de chacune de ces surfaces, leurs points de ramification et la manière dont sont reliés les feuillettes les uns aux autres autour des points de ramification.

Supposons d'abord que l'on connaisse une relation algébrique $F(u, v) = 0$ appartenant à la même *classe* que l'équation cherchée. On sait que x et y s'exprimeront par des fonctions rationnelles de u et de v ,

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v);$$

lorsque la variable u décrit, dans son plan, la surface de Riemann qui correspond à la relation $F(u, v) = 0$, la variable x décrit également, dans son plan, une certaine surface de Riemann, dont le nombre des feuillettes et les points de ramification ne dépendent que de la fonction rationnelle $\varphi(u, v)$. Nous sommes donc conduits à déterminer la fonction $\varphi(u, v)$, de façon que la surface de Riemann décrite par x dans son plan coïncide avec X , et la fonction $\psi(u, v)$ se déterminera par des conditions analogues. Le problème se trouve ainsi décomposé en deux problèmes tout à fait distincts; ce qui est un grand avantage dans certains cas, comme on le verra tout à l'heure. Géométriquement, on peut dire que, au lieu d'appliquer directement l'une sur l'autre les surfaces X, Y , nous cherchons à les appliquer séparément sur une surface de Riemann auxiliaire.

Si l'on ne connaît pas, ce qui est le cas général, d'équation de même classe que la relation inconnue, on pourra prendre pour $F(u, v)$ le polynôme qui, égalé à zéro, représente la courbe normale de genre p ; mais il faudra laisser les modules indéterminés.

16. Cette méthode s'applique sans peine au cas où la relation cherchée est du genre zéro. On sait, en effet, que x et y pourront s'exprimer rationnellement en fonction d'une variable auxiliaire t , de façon qu'à un système de valeurs de x et de y ne corresponde qu'une valeur de t

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t);$$

cela revient à prendre pour surface auxiliaire le plan des t lui-même. La fonction $\varphi(t)$ ne dépend que de la surface X . Si cette surface se compose de n feuillets, $\varphi(t)$ sera de degré n ; si, au point $x = a$, on a m feuillets réunis en cycle, l'équation $\varphi(t) = a$ devra admettre une racine multiple d'ordre m . Le nombre des paramètres arbitraires dont dépend $\varphi(t)$ dépasse le nombre des équations de condition de trois unités. [Voir *Sur les transformations rationnelles*, etc. (*Annales de l'École Normale*, 3^e série, t. II; 1885).] On achèvera de déterminer $\varphi(t)$ en choisissant les valeurs de t qui correspondent à trois valeurs données de x . On voit donc que ces coefficients se déterminent par des calculs algébriques.

Dans le cas qui nous occupe, X n'est ramifiée qu'aux points 0 , 1 , ∞ , et le calcul se simplifie. Désignons par i le nombre des cycles de feuillets autour du point $x = 0$, et soient m_1, m_2, \dots, m_i les nombres des feuillets de ces cycles; soit de même j le nombre des cycles qui ont leur sommet au point $x = 1$ et qui se composent respectivement de n_1, n_2, \dots, n_j feuillets. Enfin, soient k le nombre des cycles qui ont leur sommet au point $x = \infty$, et p_1, p_2, \dots, p_k les nombres des feuillets de ces cycles respectifs. On a les relations

$$\begin{aligned} u &= m_1 + m_2 + \dots + m_i = n_1 + n_2 + \dots + n_j = p_1 + p_2 + \dots + p_k, \\ (21) \quad & i + j + k = u + 2, \end{aligned}$$

dont la dernière n'est autre que la formule de Riemann donnant le genre d'une surface fermée. D'après ce que nous avons dit plus haut, on doit avoir

$$x = A \frac{(t-a_1)^{m_1} \dots (t-a_i)^{m_i}}{(t-c_1)^{p_1} \dots (t-c_k)^{p_k}}, \quad x-1 = B \frac{(t-b_1)^{n_1} \dots (t-b_j)^{n_j}}{(t-c_1)^{p_1} \dots (t-c_k)^{p_k}}$$

et, par suite,

$$(22) \quad \begin{cases} A(t - a_1)^{m_1} \dots (t - a_i)^{m_i} - (t - c_1)^{p_1} \dots (t - c_k)^{p_k} \\ = B(t - b_1)^{n_1} \dots (t - b_j)^{n_j}. \end{cases}$$

Les paramètres indéterminés qui figurent dans l'identité précédente sont au nombre de $n + 4$, tandis qu'on n'a que $n + 1$ équations de conditions; ce qui est bien conforme au résultat général.

17. Si la relation inconnue est du genre un, les variables x, y pourront s'exprimer par des fonctions uniformes doublement périodiques d'un paramètre u ,

$$x = \varphi_1(u), \quad y = \psi_1(u),$$

de telle sorte qu'à un point analytique (x, y) ne corresponde qu'une valeur de u , abstraction faite des multiples de périodes. Ici encore la fonction doublement périodique $\varphi_1(u)$ ne dépend que de la surface de Riemann X . Elle sera d'ordre n si X se compose de n feuillets; si, au point $x = a$, on a un point de ramification d'ordre $m - 1$, l'équation $\varphi_1(u) = a$ devra admettre une racine multiple d'ordre m . Bornons-nous, pour fixer les idées, au cas où X n'est ramifiée qu'aux trois points $0, 1, \infty$; les lettres m, n, p ayant la même signification que tout à l'heure, l'équation (21) sera remplacée par la suivante

$$(23) \quad i + j + k = n.$$

On devra avoir à la fois

$$\begin{aligned} x &= A \frac{\sigma^{m_1}(u - u_1) \dots \sigma^{m_i}(u - u_i)}{\sigma^{p_1}(u - w_1) \dots \sigma^{p_k}(u - w_k)}, \\ x - 1 &= B \frac{\sigma^{n_1}(u - v_1) \dots \sigma^{n_j}(u - v_j)}{\sigma^{p_1}(u - w_1) \dots \sigma^{p_k}(u - w_k)}, \end{aligned}$$

et, par suite, on aura l'identité suivante, analogue à l'identité (22),

$$(24) \quad \begin{cases} A \sigma^{m_1}(u - u_1) \dots \sigma^{m_i}(u - u_i) - \sigma^{p_1}(u - w_1) \dots \sigma^{p_k}(u - w_k) \\ = B \sigma^{n_1}(u - v_1) \dots \sigma^{n_j}(u - v_j), \end{cases}$$

avec les relations

$$S = m_1 u_1 + \dots + m_i u_i = n_1 v_1 + \dots + n_j v_j = p_1 w_1 + \dots + p_k w_k.$$

Par un changement de u en $u + \alpha$, on peut ramener à zéro la somme S ; c'est ce que nous supposons désormais. Divisons les deux membres de l'identité (24) par $\sigma^n(u)$; il vient

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} A \frac{\sigma^{m_1}(u-u_1) \dots \sigma^{m_i}(u-u_i)}{\sigma^n(u)} - \frac{\sigma^{p_1}(u-v_1) \dots \sigma^{p_k}(u-w_k)}{\sigma^n(u)} \\ = B \frac{\sigma^{n_1}(u-v_1) \dots \sigma^{n_j}(u-v_j)}{\sigma^n(u)}. \end{array} \right.$$

Posons

$$F(u) = A \frac{\sigma^{m_1}(u-u_1) \dots \sigma^{m_i}(u-u_i)}{\sigma^n(u)};$$

$F(u)$ est une fonction doublement périodique d'ordre n , n'admettant pas d'autre pôle que le point $u = 0$ et les points homologues. On peut donc l'exprimer linéairement en fonction de pu et de ses dérivées jusqu'à celle d'ordre $n-2$, sous la forme

$$F(u) = c_0 + c_1 pu + c_2 p'u + \dots + c_{n-1} p^{(n-2)}(u)$$

(voir HALPHEN, *Traité des fonctions elliptiques*, t. I, p. 214). On déterminera les coefficients c_i ou plutôt les rapports de ces coefficients à l'un d'eux, en écrivant que l'équation $F(u) = 0$ admet la racine u_i au degré de multiplicité m_i , etc. On a ainsi n équations qui déterminent les rapports $\frac{c_i}{c_0}$ en fonction rationnelle de pu_1, pu_2, \dots, pu_i et des dérivées $p'u_1, p'u_2, \dots, p'u_i$.

Posons encore

$$F_1(u) = \frac{\sigma^{p_1}(u-v_1) \dots \sigma^{p_k}(u-w_k)}{\sigma^n(u)},$$

$$F_2(u) = \frac{B \sigma^{n_1}(u-v_1) \dots \sigma^{n_j}(u-v_j)}{\sigma^n(u)};$$

les fonctions doublement périodiques F_1 et F_2 s'expriment de la même

façon que $F(u)$, et l'identité (25) devient

$$F(u) - F_1(u) - F_2(u) = 0.$$

Pour que cette relation ait lieu identiquement, il faut et il suffit que, dans le domaine du point $u = 0$, les coefficients des puissances négatives de u , dans le développement du premier membre, soient nuls, ainsi que le terme constant. On a ainsi $n + 1$ équations de condition et l'on vérifie aisément, en tenant compte de l'équation (23), que l'on a le même nombre de paramètres arbitraires. On voit qu'on est encore ramené à des calculs algébriques.

Les fonctions doublement périodiques $F(u)$, $F_1(u)$, $F_2(u)$ étant déterminées de cette façon, la fonction doublement périodique

$$\varphi_1(u) = \frac{F(u)}{F_1(u)}$$

satisfait à toutes les conditions du problème. Il est facile de démontrer directement que l'équation $\varphi_1(u) = a$ n'a que des racines simples, tant que a ne prend aucune des valeurs $0, 1, \infty$. En effet, toute racine multiple de l'équation $\varphi_1(u) = a$ est racine de l'équation $\varphi_1'(u) = 0$. Or la dérivée $\varphi_1'(u)$ est d'ordre $n + k$, et nous connaissons déjà un certain nombre de racines. Le nombre total des racines connues est égal, en tenant compte du degré de multiplicité de chacune d'elles, à

$$m_1 - 1 + m_2 - 1 + \dots + m_i - 1 + n_1 - 1 + \dots + n_j - 1,$$

c'est-à-dire à $2n - i - j$ et, d'après la relation (23), à $n + k$. L'équation $\varphi_1'(u) = 0$ n'admet donc pas d'autre racine.

Nous venons de voir que, dans le cas de $p = 0$ et de $p = 1$, on était ramené à des calculs algébriques. Il est facile de trouver *a priori* le degré de l'équation finale, débarrassée des facteurs étrangers. En effet, d'après la manière même dont on obtient cette équation, on doit trouver la même équation pour toutes les surfaces de Riemann composées du même nombre de feuillets, ayant les mêmes points de ramification et le même nombre de feuillets dans les différents cycles. La recherche du nombre des surfaces satisfaisant à ces conditions est encore un problème de combinaisons, que l'on peut toujours résoudre par un nombre fini

d'essais. On voit en même temps que l'on sera conduit, en général, à une équation *irréductible* de degré supérieur au premier. La remarque précédente a déjà été faite par M. Klein (*Mathematische Annalen*, Bd. XIV, p. 424).

18. Comme application, proposons-nous de trouver les relations algébriques qui sont du second degré par rapport à x . Si l'on résout l'équation par rapport à x , on trouvera pour x une expression de la forme

$$x = \Phi(y, \sqrt{u}),$$

Φ désignant une fonction rationnelle, et u une des trois expressions y , $(1-y)$, $y(1-y)$, puisque la fonction algébrique x de la variable y ne peut être ramifiée qu'aux points 0 , 1 , ∞ . Par une substitution linéaire, on peut toujours ramener u à la première forme; par conséquent, si l'on pose $y = t^2$, la relation cherchée $f(x, y) = 0$ est équivalente au système des deux équations $y = t^2$, $x = \varphi(t)$, $\varphi(t)$ désignant une nouvelle fonction rationnelle qu'il s'agit maintenant de déterminer.

Dans l'équation (1), faisons $y = t^2$; elle prend la forme

$$(26) \quad [x]_t + \frac{1 - \lambda^2 + (\lambda^2 + \nu^2 - \mu^2 - 1)x + (1 - \nu^2).x^2}{2x^2(x-1)^2} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{At^2 + Bt + C}{2t^2(1-t^2)^2},$$

et nous sommes ramenés à la recherche des intégrales rationnelles de l'équation (26).

Soit $\varphi(t)$ une intégrale rationnelle de cette équation; si dans l'équation (2) on fait le changement de variable $x = \varphi(t)$, puis qu'on multiplie les intégrales par un facteur convenable, la nouvelle équation n'aura que *quatre* points singuliers qui seront ici $t = 0, \infty, 1, -1$. Or la détermination des fonctions rationnelles jouissant de cette propriété est un problème déterminé [(voir *Annales de l'École Normale, loc. cit.*)], et il n'existe qu'un nombre limité de fonctions rationnelles satisfaisant à ces conditions, en dehors des cas où l'intégrale générale de l'équation (1) s'exprime au moyen de fonctions algébriques ou de fonctions doublement périodiques, cas que nous avons écartés. Chacune de ces fonctions rationnelles dépend de trois paramètres arbitraires, dont on devra pouvoir disposer de façon que les quatre points

critiques de la nouvelle équation soient $0, +1, -1, \infty$. Or c'est ce qui n'aura pas lieu en général; nous avons ainsi une nouvelle confirmation du résultat obtenu par d'autres considérations à la fin de la première partie. En effet, les équations arithmétiques dont dépend le problème de transformation dont il vient d'être question coïncident dans le cas actuel avec les équations de M. Papperitz, et nous voyons ici, sans aucun doute, que ces équations ne sont pas suffisantes.

Admettons que l'on ait trouvé une substitution $\varphi(t)$ telle qu'en posant $x = \varphi(t)$ dans l'équation (2), la nouvelle équation ait effectivement les quatre points singuliers $0, +1, -1, \infty$. Quand on remplacera x par $\varphi(t)$ dans le premier membre de l'équation (26), le résultat de la substitution sera de la forme

$$\frac{at^4 + bt^3 + ct^2 + dt + e}{t^2(1-t^2)^2};$$

il faudra encore que l'on ait $b = 0, d = 0$. Imaginons que l'on ait décomposé la fonction précédente en fractions simples :

$$\frac{at^4 + \dots}{t^2(1-t^2)^2} = \frac{e}{t^2} + \frac{d}{t} + \frac{a-b+c-d+e}{4(1+t)^2} + \frac{a+b+c+d+e}{4(1-t)^2} + \dots;$$

les coefficients de $\frac{1}{(t+1)^2}$ et $\frac{1}{(t-1)^2}$ devront être égaux, et celui de $\frac{1}{t}$ devra être nul. Or ces coefficients se calculent facilement. Supposons que $t = 1$ soit racine multiple d'ordre m de l'équation $\varphi(t) = 0$; on aura, dans le domaine du point $t = 1$,

$$x = A_0(t-1)^m + A_1(t-1)^{m+1} + \dots,$$

et, si l'on calcule le coefficient de $\frac{1}{(t-1)^2}$ dans le domaine du point $t = 1$ dans le développement du premier membre de l'équation (26), on trouve aisément, pour la valeur de ce coefficient,

$$\frac{1}{2}(1 - \lambda^2 m^2).$$

Si $t = 1$ était racine d'ordre m de l'équation $\varphi(t) = 1$, ou de l'équation

$\varphi(t) = \infty$, ce coefficient serait

$$\frac{1}{2}(1 - \mu^2 m^2) \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2}(1 - \nu^2 m^2).$$

On calculera de même le coefficient de $\frac{1}{(t+1)^2}$.

Pour obtenir le coefficient de $\frac{1}{t}$, supposons que $t = 0$ soit racine d'ordre m de l'équation $\varphi(t) = 0$, de façon que l'on ait, dans le domaine du point $t = 0$,

$$x = A_0 t^m + A_1 t^{m+1} + \dots;$$

si m est plus grand que 1, le coefficient cherché sera égal à

$$\frac{m A_1}{A_0} \left(\frac{1}{m^2} - \lambda^2 \right).$$

Si $m = 1$, ce coefficient sera

$$(1 - \lambda^2) \frac{A_1}{A_0} + \frac{1 + \nu^2 - \mu^2 - \lambda^2}{2} A_0$$

(voir *Recherches sur l'équation de Kummer*, p. 13). Les conditions précédentes sont donc faciles à vérifier. Si elles sont remplies, le même procédé nous donnera A , B , C et par suite λ' , μ' , ν' .

Comme exemples de relations algébriques obtenues par cette voie, je citerai les deux suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{t(t-2)^2}{(1-2t)^2}, \\ y = t^2, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \left(\frac{t+i}{t-i} \right)^4, \\ y = t^2, \end{array} \right.$$

dont la première correspond à la *fig.* 3 (voir p. 288). Pour la seconde équation, les valeurs de λ , μ , ν , λ' , μ' , ν' sont les suivantes :

$$\lambda = \frac{1}{4}, \quad \mu = \alpha, \quad \nu = \frac{1}{4}, \quad \lambda' = \frac{\alpha}{2}, \quad \mu' = \alpha, \quad \nu' = \frac{\alpha}{2}.$$

Du reste, cette transformation est une combinaison des deux substi-

tutions rationnelles

$$u = \frac{-4x}{(x-1)^2}, \quad u = \frac{(y^2-6y+1)^2}{-16y(1-y)^2}.$$

Remarque. — Nous connaissons déjà un certain nombre de fonctions fuchsienues qui se ramènent, par des transformations algébriques, à la fonction modulaire. Telles sont, en employant toujours la même notation des fonctions inverses, les fonctions

$$\begin{aligned} &\varphi(0, 0, 0, s), \quad \varphi(0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, s), \quad \varphi(0, 0, \frac{1}{2}, s), \\ &\varphi(0, 0, \frac{1}{3}, s), \quad \varphi(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 0, s), \quad \varphi(0, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, s). \end{aligned}$$

Si donc l'on prend pour λ, μ, ν un des systèmes de valeurs précédents, ainsi que pour λ', μ', ν' , il résulte de la théorie des équations modulaires que l'équation de Kummer correspondante admettra une infinité d'intégrales algébriques.

IV.

19. Je vais, en terminant, démontrer un théorème général sur les équations linéaires, qui conduit à une conséquence intéressante relativement à l'équation de Kummer.

Soit

$$(27) \quad \frac{d^2y}{dx^2} = P \frac{dy}{dx} + qy$$

une équation linéaire du second ordre à coefficients rationnels et à intégrales régulières. Considérons sur la sphère les $n + 1$ points singuliers

$$a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1} = \infty,$$

et joignons-les par n coupures

$$a_1 a_2, a_2 a_3, \dots, a_n a_{n+1}.$$

Prenons deux intégrales quelconques distinctes de l'équation (27) et leur rapport z ; lorsque x parcourt toute la sphère sans franchir les coupures, z décrira une certaine région R , analogue au polygone géné-

rateur d'un groupe fuchsien, mais qui pourra se recouvrir elle-même. Elle aura $2n$ côtés

$$\begin{array}{cccc} \alpha_1 \alpha_2, & \alpha_2 \alpha_3, & \dots, & \alpha_n \alpha_{n+1}, \\ \alpha_1 \beta_2, & \beta_2 \beta_3, & \dots, & \beta_n \alpha_{n+1}, \end{array}$$

correspondant aux n coupures

$$a_1 a_2, \quad a_2 a_3, \quad \dots, \quad a_n a_{n+1}.$$

Les côtés $\alpha_i \alpha_{i+1}$ et $\beta_i \beta_{i+1}$ répondent aux deux bords opposés de la coupure $a_i a_{i+1}$. Ces côtés sont conjugués et se déduisent l'un de l'autre par une substitution linéaire Σ_i .

Supposons qu'à une valeur de z ne corresponde qu'un nombre *fini* de valeurs de x ,

$$x_0, \quad x_1, \quad \dots, \quad x_{n-1},$$

ou, ce qui revient au même, que les polygones que l'on déduit de R par les substitutions Σ_i répétées un nombre quelconque de fois ne recouvrent que n fois le plan des z ou une portion de ce plan. Soit

$$P(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$$

une fonction symétrique de ces n valeurs; P sera une fonction uniforme de z reprenant la même valeur quand on fait subir à z une quelconque des substitutions Σ_i . En général, P sera donc une fonction kleinéenne de z , ou, dans certains cas particuliers, une fonction fuchsienne. Il est clair que toutes ces fonctions symétriques jouissent des propriétés suivantes : 1° elles sont uniformes quand z parcourt la région R ; 2° elles reprennent la même valeur en deux points correspondants du périmètre de R ; 3° elles n'ont d'autre singularité que des pôles ou des points singuliers logarithmiques. Elles s'expriment donc rationnellement en fonction de x (voir SCHOTTKY, *Journal de Crelle*, t. 83; POINCARÉ, *Acta mathematica*, t. IV, p. 221).

D'autre part, toutes ces fonctions kleinéennes s'exprimeront rationnellement au moyen de l'une d'elles, et il est clair que l'on aura

$$(28) \quad v = \varphi(x),$$

$\varphi(x)$ désignant une fonction rationnelle.

Cela posé, considérons les deux fonctions

$$Y_1 = \sqrt{\frac{dv}{dz}}, \quad Y_2 = z \sqrt{\frac{dv}{dz}};$$

on aura

$$\frac{1}{Y_1} \frac{d^2 Y_1}{dv^2} = \frac{1}{Y_2} \frac{d^2 Y_2}{dv^2} = \frac{2 \frac{d^3 v}{dz^3} \frac{dv}{dz} - 3 \left(\frac{d^2 v}{dz^2} \right)^2}{4 \left(\frac{dv}{dz} \right)^3}.$$

On vérifie aisément que le troisième membre de cette double inégalité est une fonction kleinéenne de z et, par suite, une fonction rationnelle de v , que j'appellerai $\psi(v)$. Il en résulte que l'équation linéaire du second ordre

$$(29) \quad \frac{d^2 Y}{dv^2} = \psi(v) Y$$

admet les deux intégrales Y_1 et Y_2 dont le rapport est z . Soient y_1 et y_2 les deux intégrales de l'équation (27) dont le rapport est z ; on aura

$$z = \frac{y_2}{y_1} = \frac{Y_2}{Y_1}.$$

La relation (28), jointe aux précédentes, nous montre qu'on passera de l'équation (29) à l'équation (27) en posant $v = \varphi(x)$, puis en multipliant les intégrales par une même fonction. Ainsi, lorsqu'en posant $\frac{y_1}{y_2} = z$ on obtient pour x une fonction analytique de z qui n'admet qu'un nombre fini de valeurs pour une même valeur de z , l'équation (27) se déduit par une substitution rationnelle d'une équation de même forme où l'inversion du quotient des intégrales donne naissance à une fonction uniforme.

20. Supposons que l'équation (27) soit une équation hypergéométrique et que l'inversion du quotient des intégrales donne naissance à une fonction non uniforme, mais n'admettant pour chaque valeur de la variable qu'un nombre fini de valeurs. Appliquons à cette équation le

théorème qui vient d'être démontré; l'équation (29) aura forcément trois points singuliers seulement, puisqu'on sait que le nombre des points singuliers d'une équation linéaire ne peut diminuer par une substitution rationnelle, et la transformation $v = \varphi(x)$ devra provenir d'une intégrale rationnelle de l'équation de Kummer. Il suit de là que, abstraction faite des cas où l'équation s'intègre algébriquement, on peut énumérer toutes les équations hypergéométriques pour lesquelles l'inversion du quotient des intégrales donne une fonction de la nature cherchée. Par suite, si λ, μ, ν sont des parties aliquotes de l'unité et s'il n'en est pas de même de λ', μ', ν' ; si de plus λ', μ', ν' ne satisfont pas à la condition précédente, on pourra affirmer que l'équation (1) n'admet pas d'intégrale algébrique. On élimine ainsi un grand nombre de solutions des équations de M. Papperitz.

21. On peut déduire aussi du théorème démontré plus haut les résultats obtenus par M. Kœnigsberger (*Journal de Crelle*, t. 86) relativement à la réduction aux intégrales elliptiques de certaines intégrales abéliennes. Soit z une intégrale abélienne de première espèce de la forme

$$z = \int (x - a_1)^{\alpha_1} \dots (x - a_n)^{\alpha_n} dx,$$

où

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$$

désignent des nombres commensurables positifs ou négatifs. Supposons que cette intégrale n'admette que deux périodes distinctes; on sait alors que x , considéré comme fonction de z , n'admettra qu'un nombre fini de valeurs pour une valeur de z . Or considérons l'équation

$$(30) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \left(\frac{\alpha_1}{x - a_1} + \frac{\alpha_2}{x - a_2} + \dots + \frac{\alpha_n}{x - a_n} \right) \frac{dy}{dx},$$

qui admet les deux intégrales

$$y_1 = 1, \quad y_2 = \int (x - a_1)^{\alpha_1} \dots (x - a_n)^{\alpha_n} dx,$$

dont le rapport est z . D'après le théorème général, on aura une rela-

tion de la forme

$$v = \varphi(x),$$

v désignant une fonction uniforme de z qui, dans le cas particulier dont il est question, sera nécessairement doublement périodique. De plus, la fonction v devra provenir aussi de l'inversion des intégrales d'une équation linéaire à coefficients rationnels. Mais nous connaissons toutes les équations linéaires jouissant de cette propriété; elles se ramènent aux quatre types suivants :

$$\frac{d^2 Y}{dv^2} + \left(\frac{1}{v+1} + \frac{1}{v-1} + \frac{1}{k^2 v+1} + \frac{1}{k^2 v-1} \right) \frac{dY}{dv} = 0,$$

$$\frac{d^2 Y}{dv^2} + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{v} + \frac{1}{v-1} \right) \frac{dY}{dv} = 0,$$

$$\frac{d^2 Y}{dv^2} + \left(\frac{2}{3} \frac{1}{v} + \frac{1}{2} \frac{1}{v-1} \right) \frac{dY}{dv} = 0,$$

$$\frac{d^2 Y}{dv^2} + \left(\frac{3}{4} \frac{1}{v} + \frac{1}{2} \frac{1}{v-1} \right) \frac{dY}{dv} = 0.$$

Égalons à z le rapport des intégrales de l'une de ces équations, par exemple de la première; on obtient la relation

$$\int \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-k^2 v^2)}} = z = \int (x-a_1)^{\alpha_1} \dots (x-a_n)^{\alpha_n} dx,$$

qui doit être identique à la relation $v = \varphi(x)$. En définitive, si l'intégrale considérée n'admet que deux périodes, elle se déduira par une substitution rationnelle de l'une des quatre intégrales

$$\int \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-k^2 v^2)}}, \quad \int \frac{dv}{v^{\frac{2}{3}}(1-v)^{\frac{2}{3}}}, \quad \int \frac{dv}{v^{\frac{3}{4}}(1-v)^{\frac{1}{2}}}, \quad \int \frac{dv}{v^{\frac{5}{6}}(1-v)^{\frac{1}{2}}}.$$

Or les trois dernières intégrales se ramènent par des substitutions algébriques aux intégrales

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^3-1}}, \quad \int \frac{du}{\sqrt{u^4-1}}, \quad \int \frac{du}{\sqrt{u^6-1}};$$

d'où l'on tire le résultat obtenu par M. Kœnigsberger. Mais nous avons en même temps la forme de la transformation. De là on déduit aussi que les nombres $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, réduits à leur plus simple expression, ne peuvent avoir pour dénominateur que l'un des nombres 2, 3, 4, 6. On peut encore tirer de là d'autres conséquences, pour lesquelles je renverrai le lecteur à mon Mémoire *Sur les transformations rationnelles des équations différentielles linéaires* (*Annales de l'École Normale*, 3^e série, t. II, p. 37).
