JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

G. HUMBERT

Sur les courbes algébriques planes rectifiables

Journal de mathématiques pures et appliquées 4e série, tome 4 (1888), p. 133-151.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1888_4_4__133_0>

Sur les courbes algébriques planes rectifiables;

PAR M. G. HUMBERT.

1. Nous appellerons, à l'exemple de Serret, *courbe algébrique rectifiable* toute courbe dont l'arc peut être exprimé par une fonction algébrique des coordonnées; parmi les courbes rectifiables, on peut considérer en particulier celles dont l'arc est exprimable par une fonction rationnelle des coordonnées. Cela posé, les problèmes que nous aborderons dans ce travail sont les suivants :

I. *Déterminer toutes les courbes algébriques planes rectifiables, et trouver la forme de l'équation qui lie l'arc aux coordonnées.*

II. *Déterminer toutes les courbes algébriques planes, dont l'arc est une fonction rationnelle des coordonnées.*

Nous terminerons en donnant quelques exemples de courbes rectifiables, et en indiquant quelques propriétés relatives aux longueurs de l'arc sur ces courbes.

2. Soit $f(x, y) = 0$ l'équation d'une courbe algébrique : supposons qu'il existe entre l'arc s, compté à partir d'un point fixe, et les coordonnées, x, y, de l'extrémité de l'arc, une relation algébrique, $F(s, x, y) = 0$.

Nous allons montrer que cette équation peut se ramener, dans tous les cas, au second degré par rapport à s.

Cherchons en effet combien de valeurs peut avoir la fonction s quand on donne à x et y les valeurs qui correspondent à un point de la courbe $f = 0$.

Représentons sur un plan la variable x, selon le mode ordinaire de représentation des quantités imaginaires; soient x_0 et x_1 deux points donnés de ce plan, y_0 et y_1 deux valeurs de y correspondant respectivement à ces points par la relation $f(x, y) = 0$.

Tous les chemins allant de x_0 à x_1, et tels, qu'en partant de x_0 avec la valeur y_0 de la fonction y on arrive en x_1 avec la valeur y_1, peuvent, comme on sait, se ramener à un chemin déterminé L, allant de x_0 en x_1, précédé d'un nombre quelconque de cycles, c'est-à-dire de contours fermés, allant de x_0 à x_0, et tels, qu'en partant de ce point avec la valeur y_0 de y, on y revienne avec la même valeur.

Chercher les valeurs que peut avoir la fonction s pour des valeurs données, x_1 et y_1, des coordonnées d'un point de la courbe $f = 0$, c'est chercher les valeurs que prend cette fonction au point x_1, quand on part du point x_0 avec une valeur initiale déterminée s_0 et que l'on décrit la ligne L, précédée d'un nombre quelconque des cycles définis plus haut.

Or on a

$$ds = \frac{dx}{f'_y}\sqrt{f'^2_x + f'^2_y}.$$

Soit s_1 la valeur de l'intégrale $\int ds$, suivant la ligne L, quand on part de x_0 avec la valeur y_0 de y et un signe déterminé du radical qui figure dans l'expression de ds.

Évaluons maintenant cette intégrale le long des différents cycles considérés.

Ces cycles se divisent en deux catégories : en décrivant un cycle de la première catégorie, on revient au point x_0 avec la valeur initiale du radical $\sqrt{f'^2_x + f'^2_y}$; un cycle de seconde catégorie, au contraire, ramène la valeur de signe contraire de ce radical.

Cela posé, je dis que la valeur de l'intégrale

$$\int dx \frac{\sqrt{f'^2_x + f'^2_y}}{f'_y}$$

est nulle le long de tout cycle de première catégorie : si elle était égale en effet à une quantité σ, différente de zéro, l'intégrale, en supposant qu'on décrive m fois le cycle considéré, puis la ligne L, prendrait la valeur $m\sigma + s_1$, et l'arc aurait, pour des valeurs données x_1, y_1 des coordonnées, les valeurs en nombre infini comprises dans la formule $s_0 + s_1 + m\sigma$. L'arc ne serait donc pas fonction algébrique de x, y, contrairement à l'hypothèse.

Soit, en second lieu, $2\omega_1$ la valeur de l'intégrale $\int ds$ le long d'un cycle de deuxième catégorie : deux cycles de cette catégorie décrits successivement constituent évidemment un cycle de première catégorie, et l'intégrale correspondante est nulle; de plus, $2\omega_1$ est la valeur commune de l'intégrale $\int ds$ le long de tous les cycles de la seconde espèce.

Si donc l'on décrit un nombre quelconque de cycles, puis la ligne L, on n'aura, pour la valeur de l'intégrale $\int ds$ le long de ces chemins, que deux expressions différentes qui seront s_1 et $2\omega_1 - s_1$: on trouvera s_1 si l'on a décrit un nombre pair de cycles de la deuxième catégorie et $2\omega_1 - s_1$ si l'on a décrit un nombre impair de ces cycles.

En d'autres termes, l'arc s n'aura, pour des valeurs données de x et y, que deux valeurs, dont la somme ne dépend pas des coordonnées x, y; et par suite l'équation algébrique à laquelle satisfait s sera nécessairement de la forme

$$s^2 - 2\omega s + \mathrm{R} = 0,$$

R désignant une fonction rationnelle de x, y, et ω une constante, qui dépend des coordonnées du point origine des arcs.

3. On peut, dans une certaine mesure, préciser la forme de la fonction $\mathrm{R}(x, y)$: on tire en effet de la relation précédente

$$s - \omega = \sqrt{\omega^2 - \mathrm{R}},$$

d'où

$$\frac{ds}{dx} = -\tfrac{1}{2}(\omega^2 - \mathrm{R})^{-\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{R}'_x f'_y - \mathrm{R}'_y f'_x}{f'_y}.$$

En égalant le second membre de cette relation à $\frac{1}{f'_y}(f'^2_x + f'^2_y)^{\frac{1}{2}}$, on voit que $\sqrt{\omega^2 - R}$ est de la forme

$$\sqrt{\omega^2 - R} = P\sqrt{f_x'^2 + f_y'^2},$$

P étant une fonction rationnelle de x, y, et l'équation en s devient

$$(s - \omega)^2 = P^2(f_x'^2 + f_y'^2).$$

4. De cette équation on déduit que la courbe $f = 0$ est la développée d'une courbe algébrique, et que ces deux courbes se correspondent rationnellement point par point.

Portons en effet, sur la tangente au point x, y de la courbe $f = 0$, dans le sens de l'accroissement de s, une longueur à $\omega - s$: l'extrémité de cette tangente décrira une courbe, dont la courbe $f = 0$ est la développée. Soit ξ, η le point de cette courbe qui correspond ainsi au point x, y; on aura

$$\xi = x + (\omega - s)\frac{f_y'}{\sqrt{f_x'^2 + f_y'^2}} = x - Pf_y',$$

$$\eta = y + (\omega - s)\frac{f_x'}{-\sqrt{f_x'^2 + f_y'^2}} = y + Pf_x';$$

ξ et η sont donc des fonctions rationnelles de x, y et la courbe décrite par le point ξ, η est algébrique. Inversement, on sait, par la théorie générale des courbes, que x, y, qui sont les coordonnées du centre de courbure de la développante au point ξ, η, sont fonctions rationnelles de ξ, η.

La proposition est donc démontrée. Il est clair d'ailleurs que l'arc de la développée d'une courbe algébrique est une fonction algébrique des coordonnées de ses extrémités, et l'on peut, par conséquent, énoncer le théorème suivant, dont la première partie était évidente :

Toute courbe algébrique rectifiable est la développée d'une courbe algébrique, et réciproquement.

L'arc d'une courbe algébrique rectifiable, $f(x, y) = 0$, *est donné par une expression de la forme*

$$s = \omega + P\sqrt{f_x'^2 + f_y'^2},$$

où x, y désignent les coordonnées de l'extrémité de l'arc; ω une constante qui dépend du choix du point origine des arcs, et P *une fonction rationnelle de x, y.*

5. La forme de la relation qui lie l'arc aux coordonnées permet de déterminer immédiatement celles des courbes rectifiables pour lesquelles l'arc est une *fonction rationnelle* des coordonnées : si en effet $f(x, y) = 0$ est l'équation d'une courbe rectifiable, il faut et il suffit, pour que l'expression de l'arc soit rationnelle, que le radical $\sqrt{f_x'^2 + f_y'^2}$ soit égal, en chaque point de la courbe, à une fonction rationnelle, $Q(x, y)$.

Cette propriété caractérise les courbes dites *de direction*, que Laguerre a introduites dans la Géométrie, et que nous avons nous-même étudiées, au point de vue des propriétés de leurs arcs, dans un travail récent (¹). Ces courbes sont celles dont l'équation, en coordonnées tangentielles, peut se mettre sous la forme

$$(u^2 + v^2) F^2(u, v) - \varphi^2(u, v) = 0,$$

F et φ étant des polynômes entiers en u, v.

Les courbes que nous cherchons sont donc les développées de direction des courbes algébriques.

Or nous allons montrer que, si la développée d'une courbe algébrique est de direction, cette courbe est elle-même de direction, et, inversement, que la développée d'une courbe de direction est généralement une courbe de direction.

6. Pour démontrer la première proposition, considérons une courbe de direction $f(x, y) = 0$, qui soit la développée d'une courbe algébrique : d'après ce qui précède, l'arc de la courbe $f = 0$ sera exprimé par une fonction rationnelle $s(x, y)$ des coordonnées.

Une quelconque des courbes qui ont pour développée $f = 0$ s'obtiendra en portant sur la tangente à la courbe $f(x, y) = 0$, au poin x, y qui correspond à la valeur s de l'arc, une longueur égale à $a - s$,

(¹) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 4ᵉ série, t. III; 1887.

dans le sens de l'accroissement de s : a désigne une constante, quelconque d'ailleurs.

Soient ξ, η les coordonnées du point ainsi obtenu, qui décrira une courbe algébrique $F(\xi, \eta) = 0$, dont $f = 0$ sera la développée : les coordonnées x, y du centre de courbure de $F = 0$ au point ξ, η seront fonctions rationnelles de ξ, η.

Le rayon de courbure R de la courbe $F = 0$ au point ξ, η sera égal à $a - s$, c'est-à-dire à une fonction rationnelle de x, y et par suite de ξ, η.

On aura ainsi

$$[F'^2_\xi + F'^2_\eta]^{\frac{3}{2}} = \text{fonction rationnelle de } \xi,\ \eta,$$

ce qui exprime que la courbe $F(\xi, \eta) = 0$ est de direction. Ainsi :

Quand la développée d'une courbe algébrique est de direction, cette courbe est elle-même de direction.

7. Arrivons maintenant à la deuxième proposition, énoncée pour la première fois par Laguerre : la développée $f(x, y) = 0$ d'une courbe de direction $F(\xi, \eta) = 0$ est elle-même de direction.

Soient x, y les coordonnées du centre de courbure de la courbe $F = 0$, au point ξ, η : deux cas sont à distinguer, selon qu'au point x, y correspond ou non un *seul* point ξ, η.

Dans le premier cas, les normales à la courbe $F(\xi, \eta) = 0$ ne coupent orthogonalement cette courbe qu'en un point; dans le second cas, elles la coupent orthogonalement en deux points au moins.

La courbe $F = 0$ étant de direction, le rayon de courbure au point ξ, η est une fonction rationnelle de ξ, η; et, par suite, si l'on se trouve placé dans le premier cas, de x, y. La différentielle de ce rayon de courbure étant égale à celle de l'arc s de la courbe $f = 0$, il en résulte que la différentielle de l'arc de cette courbe sera égale à dx multiplié par une fonction rationnelle de x, y. En d'autres termes, la courbe $f = 0$ est de direction.

La démonstration précédente ne s'applique pas au second cas; nous allons faire voir que le théorème de Laguerre n'est pas lui-même applicable à ce cas, c'est-à-dire que la développée d'une courbe de direction coupée orthogonalement en deux points par chacune de ses normales n'est pas une courbe de direction.

Il est nécessaire pour cela d'entrer dans quelques détails sur la théorie des courbes parallèles, c'est-à-dire des courbes qui ont même développée.

8. Soit $f(x, y) = 0$ la développée d'une courbe algébrique : pour obtenir une quelconque des courbes dont elle est la développée, il faut, comme on l'a déjà fait observer, porter sur la tangente, au point x, y correspondant à la valeur s de l'arc, une longueur $a - s$, dans le sens de l'accroissement positif de s. Soient ξ, η les coordonnées du point ainsi obtenu : on aura, en gardant les notations des nos **3** et **4**,

$$\begin{aligned}
\xi &= x + (a - s)\frac{f'_y}{\sqrt{f'^2_x + f'^2_y}} \\
&= x + \left(a - \omega - \mathrm{P}\sqrt{f'^2_x + f'^2_y}\right)\frac{f'_y}{\sqrt{f'^2_x + f'^2_y}}, \\
\eta &= y + (a - s)\frac{f'_x}{-\sqrt{f'^2_x + f'^2_y}} \\
&= y + \left(a - \omega - \mathrm{P}\sqrt{f'^2_x + f'^2_y}\right)\frac{f'_x}{-\sqrt{f'^2_x + f'^2_y}}
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
\xi &= x - \mathrm{P}f'_y + (a - \omega)\frac{f'_y}{\sqrt{f'^2_x + f'^2_y}}, \\
\eta &= y + \mathrm{P}f'_x + (a - \omega)\frac{f'_x}{-\sqrt{f'^2_x + f'^2_y}}.
\end{aligned}$$

On peut, dans les seconds membres, prendre pour le radical des signes quelconques, à condition toutefois que le quotient des fonctions $\eta - y - \mathrm{P}f'_x$ et $\xi - x + \mathrm{P}f'_y$ soit égal au coefficient angulaire de la tangente à la courbe $f = 0$, c'est-à-dire à $-\dfrac{f'_x}{f'_y}$.

Il en résulte qu'à un point x, y correspondent deux points ξ, η équidistants du point ξ_1, η_1, dont les coordonnées sont

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= x - \mathrm{P}f'_y, \\
\eta_1 &= y + \mathrm{P}f'_x
\end{aligned}$$

et qui est également sur la tangente à $f = 0$ au point x, y. La distance au point ξ_1, η_1 d'un des points ξ, η est d'ailleurs égale à $(a - \omega)$, c'est-à-dire à une constante.

Si nous appelons *courbe simple* une courbe qui n'est coupée orthogonalement par ses normales qu'en un point, *courbe complexe* une courbe coupée orthogonalement par ses normales en plus d'un point, on voit que le point ξ_1, η_1 décrit une courbe simple, et les points ξ, η une courbe complexe parallèle à la première.

Inversement, toute courbe simple ou complexe peut être obtenue de cette manière à l'aide de sa développée.

Il résulte de là que :

Une courbe algébrique indécomposable ne peut être coupée orthogonalement par ses normales en plus de deux points (¹).

Une courbe algébrique indécomposable, coupée orthogonalement par toutes ses normales en deux points, s'obtient en portant sur les normales à une courbe simple, de part et d'autre de leur pied, une longueur constante.

On peut démontrer que toute courbe parallèle à une courbe algébrique est une courbe de direction : si la courbe primitive n'est pas elle-même de direction, la courbe parallèle se compose de deux branches parallèles, algébriquement inséparables, et se trouve ainsi coupée orthogonalement en deux points par toutes ses normales; si la courbe primitive est de direction, la courbe parallèle se décompose en deux courbes parallèles distinctes, qui ne sont coupées orthogonalement par leurs normales qu'en un seul point. Les démonstrations de ces théorèmes sont données dans le *Traité de Géométrie* de Salmon (*Courbes planes*) (²), appliquées aux courbes dont l'équation tangentielle est de la forme $(u^2 + v^2)\,F^2(u, v) - \varphi^2(u, v) = 0$, c'est-à-dire précisément aux courbes que Laguerre a appelées depuis *courbes de direction*.

(¹) Il n'est pas sans intérêt de faire observer qu'un théorème analogue n'existe pas pour les courbes algébriques sphériques et les grands cercles normaux.

(²) Trad. O. Chemin, pages 150 et suiv.

En combinant tous ces résultats, on arrive, pour notre objet, aux conclusions suivantes :

La développée d'une courbe de direction simple est une courbe de direction.

Toute courbe complexe est une courbe de direction.

La développée d'une courbe complexe n'est jamais de direction.

Cette dernière proposition se démontre en observant que, si la développée d'une courbe complexe était de direction, il en serait de même, d'après le théorème du n° **6**, de la courbe simple à laquelle la courbe complexe est parallèle; cette dernière courbe serait alors décomposable en deux courbes simples.

9. Nous avons maintenant démontré cette proposition :

Théorème. — *Les courbes algébriques planes, dont l'arc peut être exprimé par une fonction rationnelle des coordonnées, sont les développées des courbes algébriques simples de direction.*

10. On peut donner à ce résultat une forme plus élégante. Laguerre a démontré, en effet, que toute courbe de direction peut être, d'une infinité de manières, considérée comme une anticaustique par réflexion d'une courbe algébrique, les rayons incidents étant parallèles, et, réciproquement, que toute anticaustique d'une courbe algébrique est une courbe de direction (*Nouvelles Annales,* 3e série, t. II, p. 29 et suivantes; 1883).

Il est nécessaire, toutefois, de compléter ce théorème en introduisant la distinction des courbes de direction simples et complexes.

Rappelons d'abord la construction des anticaustiques par réflexion d'une courbe C.

Soient

D une droite perpendiculaire à la direction des rayons lumineux;
m un point de C;
mx le rayon incident;
mx' le rayon réfléchi;
mt la tangente en m.

Si, par le point de rencontre de mt et de D, on mène la droite Δ, symétrique de mt par rapport à D, l'enveloppe de cette droite est une anticaustique A, à laquelle le rayon réfléchi est normal au point où il rencontre Δ.

Le rayon réfléchi n'est ainsi normal à A qu'en un point : pour qu'il en fût autrement, il faudrait qu'un même rayon réfléchi pût correspondre à deux points m et m' de C, ou, en d'autres termes, que les points de C fussent associés deux à deux, m et m', de façon que les rayons incidents, tombant en m et m', se réfléchissent tous deux suivant mm'.

Si cette condition est remplie, on voit immédiatement que les normales, et par suite les tangentes à C en m et m', sont rectangulaires, et que la droite qui joint le point de concours o de ces tangentes au milieu de mm' est parallèle à la direction des rayons incidents : il résulte de là, par l'application d'un théorème élémentaire de Cinématique, que la normale, au lieu du point o, est parallèle aux rayons incidents, c'est-à-dire que le point o décrit une droite normale à ces rayons.

Cette discussion montre que les anticaustiques par réflexion des courbes algébriques, pour des rayons parallèles, sont des courbes simples, qu'on sait d'ailleurs être de direction; il n'y a qu'un cas d'exception, celui où la courbe réfléchissante est telle qu'on puisse lui mener deux tangentes rectangulaires par tous les points d'une droite normale aux rayons incidents : les anticaustiques sont alors des courbes complexes, une seule est une courbe simple, non de direction.

11. On déduit de là le théorème suivant :

Théorème. — *Les courbes planes algébriques, dont l'arc peut être exprimé par une fonction rationnelle des coordonnées, sont les caustiques par réflexion de courbes algébriques, les rayons incidents étant parallèles, et réciproquement.*

Toutefois, si la courbe réfléchissante est telle qu'on puisse lui mener deux tangentes rectangulaires de tous les points d'une droite normale aux rayons incidents, la caustique aura son arc exprimable algébriquement, mais non rationnellement.

Si l'on observe que, d'après un théorème bien connu dû à Quételet, la caustique par réflexion d'une courbe algébrique, les rayons incidents étant concourants, est la développée d'une courbe algébrique, qui est arbitraire, si la courbe réfléchissante l'est elle-même, on voit que :

Les courbes planes algébriques, dont l'arc peut être exprimé par une fonction algébrique des coordonnées, sont les caustiques par réflexion des courbes algébriques, les rayons incidents étant concourants, et réciproquement.

12. Nous allons donner maintenant quelques exemples de courbes dont l'arc est une fonction rationnelle des coordonnées; nous insisterons sur le cas, particulièrement intéressant, des épicycloïdes.

Exemple I. — *Caustique d'un cercle.* — La caustique par réflexion d'un cercle, les rayons incidents étant parallèles, est, comme on sait, une épicycloïde engendrée par un point d'un cercle roulant sur un cercle de rayon double.

Son équation peut se mettre sous la forme

$$4(x^2+y^2)-a^2=3a^{\frac{4}{3}}y^{\frac{2}{3}}. \tag{1}$$

On a, pour l'arc s, l'expression

$$s=3a^{\frac{2}{3}}\frac{x}{a^{\frac{2}{3}}+2y^{\frac{2}{3}}}+\text{const.}$$

ou, d'après (1),

$$s=\frac{9a^2x}{4(x^2+y^2)+2a^2}+\text{const.}$$

On a donc bien une expression rationnelle, comme on devait s'y attendre.

13. Exemple II. — Un autre exemple de courbe rectifiable est fourni par l'*hypocycloïde à quatre rebroussements*, engendrée par un point d'un cercle roulant intérieurement sur un cercle de rayon quadruple.

Cette courbe, bien connue, a pour équation

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}};$$

on trouve, pour l'arc,

$$s = \frac{3a}{2} \frac{2x^2 - y^2 + a^2}{x^2 + y^2 - 2a^2} + \text{const.}$$

La courbe est donc une caustique par réflexion de courbe algébrique pour des rayons parallèles; nous allons faire voir qu'on peut la considérer comme la caustique d'une hypocycloïde à trois rebroussements.

En effet, l'axe des x passant par un des trois points de rebroussement de cette dernière courbe, et l'origine étant au centre du cercle fixe, on a, pour les équations de la tangente et de la normale en un point de l'hypocycloïde à trois rebroussements (Salmon, *Courbes planes*),

$$\begin{aligned} x \sin \tfrac{1}{2}\varphi + y \cos \tfrac{1}{2}\varphi &= -\ \ k \sin \tfrac{3}{2}\varphi, \\ x \cos \tfrac{1}{2}\varphi - y \sin \tfrac{1}{2}\varphi &= -3k \cos \tfrac{3}{2}\varphi, \end{aligned}$$

k étant une constante et φ un paramètre variable. Si les rayons lumineux sont parallèles à Ox, le rayon réfléchi au point d'intersection des deux droites précédentes aura pour équation

$$x \sin\varphi + y \cos\varphi = -3k \cos \tfrac{3}{2}\varphi \sin \frac{\varphi}{2} - k \sin \tfrac{3}{2}\varphi \cos \frac{\varphi}{2}$$

ou

$$x \sin\varphi + y \cos\varphi = -2k \sin 2\varphi + k \sin\varphi.$$

En transportant l'origine des coordonnées au point $y = 0$, $x = k$, cette équation devient

$$x' \sin\varphi + y' \cos\varphi = -2k \sin 2\varphi.$$

C'est celle d'une droite dont la partie comprise entre les axes a une longueur constante égale à $4k$: l'enveloppe de cette droite, c'est-à-dire la caustique cherchée, est donc une hypocycloïde à quatre rebroussements. Ainsi :

La caustique par réflexion d'une hypocycloïde à trois rebroussements, les rayons lumineux étant parallèles à un des axes de symétrie de la courbe, est une hypocycloïde à quatre rebroussements.

De plus, on déduit sans difficulté des formules qui précèdent que les deux hypocycloïdes peuvent être engendrées de la manière suivante :

Soient trois cercles, de rayons a, $3a$, $4a$, tangents entre eux intérieurement en un point m. Si l'on fait rouler successivement le premier cercle à l'intérieur de chacun des deux autres, le point m décrit deux hypocycloïdes, dont la seconde est la caustique par réflexion de la première, pour les rayons lumineux parallèles à la ligne des centres des cercles fixes.

14. Exemple III. — *Épicycloïdes algébriques.* — On peut se demander, en présence des résultats qu'on vient d'obtenir, si, dans la famille des épicycloïdes ou des hypocycloïdes algébriques, il n'existe pas d'autres courbes ayant leur arc exprimable rationnellement en fonction des coordonnées.

En désignant par a le rayon du cercle mobile, par n le rapport de ce rayon au rayon du cercle fixe, on a, pour les coordonnées des points d'une épicycloïde,

$$\frac{x}{a} = \frac{n+1}{n}\cos n\varphi - \cos(n+1)\varphi,$$

$$\frac{y}{a} = \frac{n+1}{n}\sin n\varphi - \sin(n+1)\varphi,$$

d'où l'on tire

$$\frac{s}{a} = -4(n+1)\cos\frac{\varphi}{2} + \text{const.}$$

Il ne paraît pas facile de déterminer, d'après ces formules, dans quels cas s est fonction rationnelle de x, y; mais on peut aborder la question d'une autre manière.

Dans le cas où n est une fraction, on déduit des relations précédentes que s est une fonction algébrique de x, y, c'est-à-dire que toute épicycloïde algébrique est une courbe rectifiable; par conséquent, les épicycloïdes dont l'arc est rationnel sont les épicycloïdes de direction.

Pour trouver toutes ces courbes, observons que, l'équation tangentielle des courbes de direction étant de la forme

$$(u^2 + v^2)\,F(u, v) - \varphi^2(u, v) = 0,$$

les réciproques de ces courbes, par rapport à un cercle ayant l'origine pour centre, auront une équation de la forme

$$(x^2 + y^2)\,F^2(x, y) - \varphi^2(x, y) = 0.$$

En d'autres termes, pour qu'une courbe soit de direction, il faut et il suffit que la distance à l'origine d'un point quelconque de sa réciproque, prise par rapport à un cercle ayant l'origine pour centre, soit une fonction rationnelle des coordonnées de ce point. Cette propriété caractérise les courbes que M. Halphen appelle de *première catégorie*, c'est-à dire les courbes dont l'équation en coordonnées polaires est changée quand on remplace r par $-r$ et θ par $\theta + \pi$.

D'un autre côté, la réciproque d'une épicycloïde a pour équation polaire, le centre du cercle fixe étant pris pour origine,

$$r \cos \frac{1}{2n+1}\,\theta = k. \tag{2}$$

M. Halphen a fait remarquer que les courbes, dont l'équation est

$$\frac{1}{r} = \cos \frac{p}{q}\,\theta,$$

sont de première catégorie seulement si l'un des nombres, supposés premiers entre eux, p et q, est pair. Appliquons ce résultat à la courbe (2); soit $n = \frac{\lambda}{\mu}$; on aura alors

$$\frac{p}{q} = \frac{\mu}{2\lambda + \mu}.$$

Deux cas sont à distinguer : si μ est impair, μ et $2\lambda + \mu$ sont premiers entre eux, en supposant que μ et λ le soient; de plus, ces deux nombres sont impairs, et la courbe n'est pas de première catégorie; si μ est pair, soit $\mu = 2\mu'$, on aura

$$\frac{\mu}{2\lambda + \mu} = \frac{\mu'}{\lambda + \mu'};$$

les deux nombres μ' et $\lambda + \mu'$ seront premiers entre eux, et la courbe sera de première catégorie si l'un de ces nombres est pair, c'est-à-dire si leur somme est impaire. Or cette somme, égale à $\lambda + 2\mu'$, a la parité de λ; il en résulte que n sera de la forme $\frac{2\lambda' + 1}{2\mu'}$, et, par suite :

Les épicycloïdes algébriques, dont l'arc est une fonction rationnelle des coordonnées, sont celles qu'on obtient en prenant, pour l'expression du rapport du rayon du cercle mobile au rayon du cercle fixe, une fraction irréductible de dénominateur pair.

Les deux courbes trouvées plus haut rentrent bien dans cette catégorie, puisque l'on a, dans le cas de l'exemple I,

$$n = \tfrac{1}{2},$$

et, dans celui de l'exemple II,

$$n = -\tfrac{1}{4}.$$

15. Exemple IV. — *Caustique par réflexion de la parabole.* — La caustique par réflexion d'une parabole, en supposant les rayons lumineux perpendiculaires à l'axe de la conique, est la développée de la courbe de direction remarquable que Laguerre a nommée *hypercycle cubique;* son équation peut, comme on le sait, se mettre sous la forme

$$(x+4m)^3 = 27m(x^2+y^2),$$

en supposant que l'équation de la parabole soit

$$y^2 = 4(mx+m^2).$$

La courbe caustique est donc une cubique qui a, comme on le voit sans difficulté, un point double pour $y=0$, $x=8m$. C'est, après la ligne droite, la courbe de moindre degré dont l'arc est exprimable en fonction rationnelle des coordonnées; il est clair, en effet, qu'aucune conique ne remplit cette condition, et parmi les cubiques il n'y a, comme nous l'avons montré dans un autre Travail, que deux espèces de courbes de direction. Les cubiques de la première espèce ont leur arc exprimable par une intégrale elliptique; celles de la seconde sont précisément celles que nous venons de rencontrer (¹).

On peut mettre sans difficulté les coordonnées des points de la caustique de parabole sous la forme suivante :

$$x = \lambda\left(\frac{t^3}{3}-t\right)+\alpha, \qquad y=\lambda t^2+\beta,$$

t étant un paramètre variable, et λ, α, β des constantes; d'où

$$ds^2 = dx^2+dy^2 = \lambda^2(t^2+1)^2\,dt$$

et

$$s = \lambda\int(t^2+1)\,dt;$$

s est donc une fonction rationnelle de t, et par suite de x, y, comme on le savait d'avance.

(¹) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 4ᵉ série, t. III; 1887.

16. Il est intéressant, dans le cas où l'arc d'une courbe algébrique est une fonction rationnelle des coordonnées, de déterminer la forme de cette fonction.

M. Poincaré a démontré que les coordonnées des points d'une courbe algébrique, $f(x, y) = 0$, peuvent s'exprimer en fonction fuchsienne d'un paramètre t; il en résulte que l'arc, dans le cas où il est fonction rationnelle des coordonnées, sera lui-même une fonction fuchsienne de t.

Si, au lieu des coordonnées cartésiennes x et y, on introduit des coordonnées homogènes en posant $x = \frac{x_1}{x_3}$, $y = \frac{x_2}{x_3}$, on pourra considérer x_1, x_2, x_3 comme des fonctions thêtafuchsiennes de t, de même degré μ, holomorphes à l'intérieur du cercle fondamental, et ayant k zéros communs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$.

Si l'arc s est une fonction fuchsienne de t, la fonction $s(t)\, x_3(t)$ sera une fonction thêtafuchsienne de degré μ : je dis qu'elle est holomorphe dans le cercle fondamental.

On a en effet

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{x_3 \frac{dx_1}{dt} - x_1 \frac{dx_3}{dt}}{x_3^2}\right)^2 + \left(\frac{x_3 \frac{dx_2}{dt} - x_2 \frac{dx_3}{dt}}{x_3^2}\right)^2.$$

Cette expression montre que les infinis de $\frac{ds}{dt}$, ne peuvent être que les zéros de $x_3(t)$, non communs aux trois fonctions x_1, x_2, x_3, et que, si β est un zéro d'ordre h de $x_3(t)$, il est, pour $\frac{ds}{dt}$, un infini d'ordre $h+1$, au plus. Par conséquent, les infinis de $s(t)$ ne peuvent être que les zéros de $x_3(t)$, les quantités $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ exceptées; et un zéro d'ordre h de $x_3(t)$ est pour $s(t)$ un infini d'ordre h, au plus. La fonction $s(t)\, x_3(t)$ est donc une fonction thêtafuchsienne holomorphe dans le cercle fondamental; elle est de degré μ, et de plus elle s'annule pour $t = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$.

Or nous avons démontré dans un travail antérieur (¹) que les zéros de toute fonction de cette nature, les quantités $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ exceptées, sont

---

(¹) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 4ᵉ série, t. II.

les arguments de points de la courbe $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ situés, avec les points où cette courbe est coupée par une courbe adjointe quelconque $P = 0$ de degré $n-3$, sur une courbe adjointe $C = 0$, de degré $n-2$, n désignant l'ordre de la courbe $f = 0$.

Il résulte de là que la fonction

$$\frac{C[x_1(t),\, x_2(t),\, x_3(t)]}{P[x_1(t),\, x_2(t),\, x_3(t)]},$$

qui évidemment est une fonction thêtafuchsienne holomorphe de degré μ, s'annulant pour $t = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, a les mêmes zéros que la fonction $s(t)\, x_3(t)$; ces deux fonctions sont donc identiques, à un facteur constant près, et l'on a

$$sx_3 = A\,\frac{C}{P}.$$

En revenant aux coordonnées cartésiennes, on trouve ainsi, pour l'expression de l'arc de la courbe $f(x, y) = 0$,

$$s = \frac{C(x, y)}{P(x, y)},$$

$P = 0$ étant l'équation d'une courbe de degré $n-3$ adjointe à la courbe $f = 0$, et que l'on peut choisir arbitrairement; $C = 0$ étant l'équation d'une courbe adjointe d'ordre $n-2$, passant par les points où la courbe $P = 0$ rencontre la courbe $f = 0$.

C'est la forme cherchée de l'expression de l'arc.

On voit aisément que, dans le cas des courbes unicursales, auquel le raisonnement précédent n'est pas applicable, on a pour s une expression analogue, seulement les degrés respectifs de P et C sont $n-2$ et $n-1$.

17. Les résultats précédents montrent que l'arc s, dans le cas où il s'exprime rationnellement, ne peut devenir infini que pour les points à l'infini de la courbe, car les arguments de ces points sont les seuls qui annulent x_3. De plus, la fonction sx_3 ne devient plus infinie en ces points.

Si donc on applique à la fonction s un théorème que nous avons démontré dans notre Mémoire sur le théorème d'Abel, on arrive sans difficulté au résultat suivant, qui ne serait pas vrai pour une courbe de direction quelconque.

Soit C *une courbe algébrique dont l'arc est une fonction rationnelle des coordonnées : la somme algébrique des arcs interceptés sur* C *par deux courbes quelconques de même degré, appartenant à un même faisceau ponctuel, est toujours nulle, si chacune des asymptotes de la courbe* C *est asymptote à l'une des courbes du faisceau.*