JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

CAMILLE JORDAN

Sur les transformations d'une forme quadratique en elle-même

Journal de mathématiques pures et appliquées 4e série, tome 4 (1888), p. 349-368.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1888_4_4__349_0>

Sur les transformations d'une forme quadratique en elle-même;

Par M. Camille JORDAN.

Nous déterminons dans ce Mémoire les conditions nécessaires et suffisantes auxquelles doit satisfaire une substitution linéaire pour être capable de transformer en elle-même une forme quadratique de discriminant différent de zéro.

Ces conditions étant supposées remplies, nous montrons que la substitution donnée S et l'une quelconque F des formes quadratiques (de discriminant $\gtrless 0$), qu'elle transforme en elle-même, peuvent être ramenées simultanément à une expression canonique dépendant exclusivement des invariants de S.

De là résulte cette conséquence, que les diverses formes F sont transformables les unes dans les autres par des substitutions linéaires qui n'altèrent pas l'expression de S.

ANALYSE.

1. Considérons une forme quadratique F de déterminant $\gtrless 0$, et une substitution linéaire S qui la transforme en elle-même.

Pour nous rendre compte des propriétés de ce système, nous nous proposerons de chercher une forme type à laquelle on puisse ramener simultanément F et S par un choix convenable des variables indépendantes.

On peut tout d'abord, sans se préoccuper de la forme F, ramener la substitution S à son expression canonique. Rappelons, à ce sujet, les résultats connus (*voir*, pour la démonstration, notre *Traité des substitutions*, Livre II, Chap. II, § V et VI).

Soient

$$\begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{matrix}$$

les coefficients de F; formons l'équation caractéristique

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} - s & \alpha_{12} & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - s & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots\dots\dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{nn} - s \end{vmatrix} = 0.$$

Soient s_1, s_2, ... les racines distinctes de cette équation. On pourra, en prenant pour nouvelles variables des fonctions linéaires convenables des variables primitives, donner à S la forme canonique suivante :

$$S = \begin{vmatrix} x'_1, x'_2, \dots, x'_{m'} & s_1 x'_1, s_1(x'_2 + x'_1) & \dots & s_1(x'_{m'} + x'_{m'-1}) \\ x''_1, \dots, \dots, x''_{m''} & s_1 x''_1, \dots\dots\dots\dots & \dots & s_1(x''_{m''} + x''_{m''-1}) \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots\dots \\ y'_1, y'_2, \dots, y'_{n'} & s_2 y'_1, s_2(y'_2 + y'_1) & \dots & s_2(y'_{n'} + y'_{n'-1}) \\ y''_1, \dots, \dots, y''_{n''} & s_2 y''_1, \dots\dots\dots\dots & \dots & s_2(y''_{n''} + y''_{n''-1}) \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots\dots \end{vmatrix}.$$

On voit que les nouvelles variables se répartissent en classes x, y, ... correspondant aux diverses racines s_1, s_2, ... de l'équation $\Delta = 0$.

Le nombre total des variables de chaque classe est égal au degré de multiplicité de la racine correspondante. Dans chacune de ces classes, celle des x par exemple, les variables se groupent en une ou plusieurs séries x', x'', ... telles que S remplace les variables de chaque série par des fonctions linéaires très simples de ces seules variables.

Les racines s_1, s_2, ... et les nombres $m', m'', \ldots, n', n''$, ... des variables de chaque série sont des invariants. La substitution S n'est donc susceptible que d'une forme canonique unique. Toutefois, il existe des changements de variables qui n'altèrent pas cette forme canonique, et qui pourront être utilisés pour simplifier subsidiairement l'expression de F.

2. Ces changements de variables rentrent dans les deux catégories suivantes :

1° Soient $x'_1, \ldots, x'_{m'}$; $x''_1, \ldots, x''_{m'}$; ...; $x^\lambda_1, \ldots, x^\lambda_{m'}$ des séries appartenant à la même classe et contenant un même nombre m' de variables; on n'altérera pas S en opérant sur ces variables les substitutions linéaires suivantes :

$$\left.\begin{array}{ll} x'_k & a_{11}x'_k + \ldots + a_{1\lambda}x^\lambda_k \\ x''_k & a_{21}x'_k + \ldots + a_{2\lambda}x^\lambda_k \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^\lambda_k & a_{\lambda 1}x'_k + \ldots + a_{\lambda\lambda}x^\lambda_k \end{array}\right\} \quad k = 1, 2, \ldots, m',$$

où les a désignent des coefficients quelconques dont le déterminant ne soit pas nul.

2° On ne l'altérera pas davantage par une substitution de la forme suivante

$$\begin{array}{ll} x^\mu_{m'} & x^\mu_{m'} + a x^i_k, \\ x^\mu_{m'-1} & x^\mu_{m'-1} + a x^i_{k-1}, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x^\mu_{m'-k+1} & x^\mu_{m'-k+1} + a x^i_k, \end{array}$$

x^i_k étant une variable quelconque de la même classe que $x^\mu_{m'}$, mais dont l'indice k soit $\overline{\underline{<}}\, m'$.

3. Supposons donc la substitution S ramenée à la forme canonique que nous venons d'indiquer. La forme F doit être transformée en elle-même par cette substitution; cherchons les conséquences qui en découlent.

Soient x, y deux classes quelconques de variables, et soit

$$B_{x,y} = \Sigma A_{kk'}^{ii'} x_k^i y_{k'}^{i'}$$

l'ensemble des termes de F qui contiennent leurs rectangles mutuels. Nous appellerons *rang* de chacun de ces termes, tel que $A_{kk'}^{ii'} x_k^i y_{k'}^{i'}$, la somme $k + k'$ des indices des variables qui y figurent.

Dans la transformée FS de F par la substitution S, ce terme se trouvera remplacé par $s_1 s_2 A_{kk'}^{ii'}(x_k^i + x_{k-1}^i)(y_{k'}^{i'} + y_{k'-1}^{i'})$. Ce produit développé donne quatre termes, tous d'ordre $< k + k'$, sauf le premier, qui sera $s_1 s_2 A_{kk'}^{ii'} x_k^i y_{k'}^{i'}$.

L'ensemble des termes bilinéaires en x et y et de rang maximum contenus dans FS est donc égal à l'ensemble des termes analogues dans F, multiplié par $s_1 s_2$. L'identité

$$FS = S$$

ne pourra donc subsister que si $s_1 s_2 \gtrless 1$, à moins que les termes bilinéaires en x et y ne disparaissent complètement de F.

Rien dans le raisonnement précédent ne suppose que les deux classes x et y sont différentes. Donc, si $s_1^2 \gtrless 1$, F ne pourra contenir aucun terme quadratique par rapport aux x.

Le déterminant de F étant d'ailleurs supposé $\gtrless 0$, cette forme doit contenir les variables x. Si donc $s_1^2 \gtrless 1$, il existe nécessairement une autre classe y correspondant à une racine $s_2 = \frac{1}{s_1}$; on aura d'ailleurs

$$s_2^2 \gtrless 1,$$

et, les autres racines $s_3, \ldots$ différant de s_1 et de s_2, on aura

$$s_1 s_3 \gtrless 1, \quad s_2 s_3 \gtrless 1, \quad \ldots;$$

on aura donc

$$F = B_{x,y} + \Phi,$$

$B_{x,y}$ étant une forme bilinéaire par rapport aux x et aux y, et Φ ne contenant que les autres variables. D'ailleurs, le déterminant de $B_{x,y}$, entrant en facteur dans celui de F, ne sera pas nul; donc les variables x et les variables y seront en nombre égal, et s_1, $\frac{1}{s_1}$ seront des racines du même degré de multiplicité pour l'équation $\Delta = 0$.

Soit, au contraire, $s_1^2 = 1$; on aura

$$s_1 s_2 \gtrless 1, \quad \ldots.$$

Donc F ne contiendra pas les rectangles des variables x avec les variables des autres séries, et sera de la forme

$$Q_x + \Phi,$$

Q_x étant quadratique par rapport aux x, et Φ ne les contenant plus.

Nous obtenons donc ce premier résultat :

L'équation caractéristique $\Delta = 0$ de la substitution S est nécessairement réciproque, et la forme F se décompose en une somme de formes partielles, à savoir :

1° *Des formes $B_{x,y}$ bilinéaires par rapport aux deux classes de variables correspondant à deux racines réciproques s_1 et $\frac{1}{s_1}$ différentes de l'unité.*

2° *Des formes quadratiques par rapport aux variables des classes qui correspondent aux racines $+1$ et -1, lorsque l'équation caractéristique admet l'une ou l'autre de ces quantités pour racines.*

La substitution S étant elle-même un produit de substitutions partielles dont chacune n'altère que les variables correspondant à un couple de racines de variables réciproques, ou à la racine $+1$, ou à la racine -1, on voit que la question se trouve ramenée au cas où l'équation caractéristique n'admet que deux racines réciproques et du même ordre de multiplicité, ou une seule racine égale à ± 1.

4. Considérons d'abord le premier cas. La forme F se réduira à

$$B_{x,y} = \Sigma x_k^i \eta_k^i,$$

les η_k^i étant des fonctions des y, linéairement distinctes, puisque le déterminant n'est pas nul.

Prenons les η_k^i pour variables indépendantes à la place des y. La substitution S, remplaçant les y par des fonctions des y, remplacera les η_k^i par des fonctions des mêmes variables, que nous désignerons respectivement par $\frac{1}{s_1}\mathrm{H}_k^i$. On aura donc

$$\mathrm{S} = \begin{vmatrix} x_1^i, \ldots, x_{m^i}^i & s_1 x_1^i, \ldots, s_1(x_{m^i}^i + x_{m^i-1}^i \\ \eta_1^i, \ldots, \eta_{m^i}^i & \frac{1}{s_1}\mathrm{H}_1^i, \ldots, \frac{1}{s_1}\mathrm{H}_{m^i}^i \end{vmatrix}.$$

Il est aisé de déterminer les fonctions H_k^i d'après la condition que S transforme en elle-même la fonction

$$\Sigma x_k^i \eta_k^i.$$

Elle la change, en effet, en

$$\Sigma (x_k^i + x_{k-1}^i)\mathrm{H}_k^i$$

(sauf à remplacer x_{k-1}^i par zéro, lorsque $k-1=0$).

Identifiant cette expression à la précédente, il viendra

$$\eta_1^i = \mathrm{H}_1^i + \mathrm{H}_2^i, \qquad \ldots, \qquad \eta_k^i = \mathrm{H}_k^i + \mathrm{H}_{k+1}^i, \qquad \ldots, \qquad \eta_{m^i}^i = \mathrm{H}_{m^i}^i.$$

La résolution de ces équations donnera

$$\mathrm{H}_{m^i}^i = \eta_{m^i}^i, \qquad \mathrm{H}_{m^i-1}^i = \eta_{m^i-1}^i - \eta_{m^i}^i, \qquad \ldots,$$
$$\mathrm{H}_1^i = \eta_1^i - \eta_2^i + \ldots + (-1)^{m^i-1}\eta_{m^i}^i.$$

On voit que $\mathrm{B}_{x,y}$ est une somme de formes partielles, $\mathrm{F}_1, \ldots, \mathrm{F}_i, \ldots$ contenant respectivement les variables qui correspondent à une même valeur de i, de même que S est un produit de substitutions partielles, $\mathrm{S}_1, \ldots, \mathrm{S}_i, \ldots$ altérant respectivement ces divers systèmes de variables.

Considérons séparément un de ces systèmes de variables. L'indice i

étant le même partout pourra être supprimé, et nous aurons

$$F = \sum_{1}^{m} x_k \eta_k,$$

$$S = \left| \begin{array}{cl} x_1, \ldots, x_m & s_1 x_1, \ldots, s_1(x_m + x_{m-1}) \\ \eta_1 & \frac{1}{s_1}[\eta_1 - \eta_2 + \ldots + (-1)^{m-1}\eta_m] \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \eta_k & \frac{1}{s_1}[\eta_k - \eta_{k+1} + \ldots + (-1)^{m-k}\eta_m] \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \eta_m & \frac{1}{s_1}\eta_m \end{array} \right|.$$

5. La substitution S a perdu la forme canonique, mais il est facile de la lui rendre par un nouveau changement de variables.

Posons, en effet,

$$\eta_k = (-1)^{k-1}\left[y_{m-k+1} + (m-k)y_{m-k} + \frac{(m-k)(m-k-1)}{1.2} y_{m-k-1} + \ldots\right].$$

La substitution S remplacera cette expression par

$$\begin{aligned} &\frac{1}{s_1}(\eta_k - \eta_{k+1} + \eta_{k+2} - \ldots) \\ &= \frac{1}{s_1}\eta_k + \frac{(-1)^{k-1}}{s_1}\left\{ y_{m-k} + \begin{array}{c|} m-k-1 \\ +1 \\ \end{array}\; y_{m-k-1} + \begin{array}{c|} \frac{(m-k-1)(m-k-2)}{1.2} \\ +m-k-2 \\ +1 \end{array}\; y_{m-k-2} + \ldots \right\} \\ &= \frac{1}{s_1}\eta_k + \frac{(-1)^{k-1}}{s_1}\left\{ y_{m-k} + (m-k)y_{m-k-1} + \frac{(m-k)(m-k-1)}{1.2} y_{m-k-2} + \ldots \right\}. \end{aligned}$$

Ce résultat est celui qu'on obtiendrait en augmentant $y_m, y_{m-1}, \ldots$ respectivement de $y_{m-1}, y_{m-2}, \ldots$.

Si donc on prend pour nouvelles variables les y, S reprendra sa forme canonique, et F prendra en même temps la forme suivante, où ne figure plus rien d'indéterminé :

$$\begin{aligned} F = &+ x_1\left[y_m + (m-1)y_{m-1} + \frac{(m-1)(m-2)}{1.2}y_{m-2} + \ldots\right] \\ &- x_2\left[y_{m-1} + (m-2)y_{m-2} + \frac{(m-2)(m-3)}{1.2}y_{m-3} + \ldots\right] \\ &+ x_3\left[y_{m-2} + (m-3)y_{m-3} + \ldots\right] + \ldots. \end{aligned}$$

6. Passons au cas où l'équation caractéristique de S n'admet qu'une seule racine s_1 égale à $+1$ ou à -1.

Si cette racine était égale à -1, on aurait

$$S = TS',$$

T étant la substitution qui multiplie toutes les variables par -1, et S' admettant $+1$ comme racine de son équation caractéristique. La substitution T transformant évidemment toute forme quadratique en elle-même, les formes F qui sont transformées en elles-mêmes par S le seront également par S' et réciproquement. Nous pouvons donc supposer $s_1 = 1$.

7. La substitution S étant ramenée à sa forme canonique, soient

$$x'_1, \quad \ldots, \quad x'_{m'}; \quad \ldots; \quad x^i_1, \quad \ldots, \quad x^i_{m^i}; \quad \ldots$$

les diverses séries entre lesquelles se répartissent les variables; et soit

$$F = \Sigma A^{ii'}_{kk'} x^i_k x^{i'}_{k'}.$$

Sa transformée FS sera

$$\Sigma A^{ii'}_{kk'}(x^i_k + x^i_{k-1})(x^{i'}_{k'} + x^{i'}_{k'-1}),$$

pourvu qu'on supprime de cette expression les termes où figureraient des variables avec un indice inférieur nul. On aura donc

$$FS - S = \Sigma A^{ii'}_{kk'}(x^i_{k-1}x^{i'}_{k'} + x^i_k x^{i'}_{k'-1} + x^i_{k-1}x^{i'}_{k'-1}),$$

expression qui doit être identiquement nulle.

Considérons, parmi les termes de **F** pour lesquels i et i' ont des valeurs données, ceux dont le *rang* $k+k'$ a la plus grande valeur r; ils fourniront à la différence FS — S les termes de rang $r-1$,

$$(1) \qquad \Sigma A_{kk'}^{ii'}(x_{k-1}^{i} x_{k'}^{i'} + x_{k}^{i} x_{k'-1}^{i'}).$$

Tous les autres termes de cette différence contenant d'autres variables, ou étant d'ordre moindre, ne pourront se réduire avec ceux-ci; ils doivent donc se détruire mutuellement.

Soit $A_{\rho,r-\rho}^{ii'} x_{\rho}^{i} x_{r-\rho}^{i'}$ celui des termes considérés où l'indice ρ de la première variable est minimum. Il fournira à l'expression (1) les deux termes

$$A_{\rho,r-\rho}^{ii'}(x_{\rho-1}^{i} x_{r-\rho}^{i'} + x_{\rho}^{i} x_{r-\rho-1}^{i'}),$$

dont le premier ne peut se réduire avec aucun autre; car il est évidemment le seul qui contienne une variable x^i affectée d'un indice $< \rho$; il doit donc disparaître de lui-même; donc son indice est nul, et l'on a nécessairement

$$\rho = 1.$$

Le terme considéré aura donc pour expression

$$A_{1,r-1}^{ii'} x_{1}^{i} x_{r-1}^{i'}.$$

D'ailleurs, la série $x_1^{i'}, x_2^{i'}, \ldots$ contient, par hypothèse, $m^{i'}$ variables seulement. Pour que ce terme puisse exister, il faut donc qu'on ait

$$r \overline{\overline{<}} 1 + m^{i'}.$$

Par un raisonnement semblable, on établira l'inégalité

$$r \overline{\overline{<}} 1 + m^{i}.$$

Deux cas seront à distinguer ici, suivant que i' est différent de i ou égal à i.

8. *Premier cas : $i' \gtrless i$.* — Les termes considérés seront

$$A_{1,r-1}^{ii'} x_1^{i} x_{r-1}^{i'} + A_{2,r-2}^{ii'} x_2^{i} x_{r-2}^{i'} + \ldots + A_{r-1,1}^{ii'} x_{r-1}^{i} x_1^{i'}.$$

Les termes de rang $r-1$ qu'ils fournissent à FS — S seront

$$(A^{ii'}_{1,r-1}+A^{ii'}_{2,r-2})x^i_1x^{i'}_{r-2}+(A^{ii'}_{2,r-2}+A^{ii'}_{3,r-3})x^i_2x^{i'}_{r-3}+\ldots,$$

et, comme ils doivent se détruire, on aura

$$A^{ii'}_{1,r-1}+A^{ii'}_{2,r-2}=0,\qquad A^{ii'}_{2,r-2}+A^{ii'}_{3,r-3}=0,\qquad \ldots.$$

Par suite de ces relations, l'ensemble des termes considérés sera de la forme

$$A^{ii'}_{1,r-1}[x^i_1x^{i'}_{r-1}-x^i_2x^{i'}_{r-2}+x^i_3x^{i'}_{r-3}-\ldots+(-1)^rx^i_{r-1}x^{i'}_1].$$

9. *Second cas : $i'=i$.* — Dans ce cas, r sera nécessairement un nombre pair.

Supposons, en effet, qu'on eût $r=2p+1$. Les termes à considérer seraient

$$A^{ii}_{1,2p}x^i_1x^i_{2p}+A^{ii}_{2,2p-1}x^i_2x^i_{2p-1}+\ldots+A^{ii}_{p,p+1}x^i_px^i_{p+1}.$$

Ils fournissent à FS — S les termes suivants d'ordre $r-1$,

$$(A^{ii}_{1,2p}+A^{ii}_{2,2p-1})x^i_1x^i_{2p-1}+\ldots+A^{ii}_{p,p+1}x^i_px^i_p,$$

qui ne peuvent disparaître que si tous les coefficients A sont nuls.

Soit donc $r=2p$. Les termes à considérer seront

$$A^{ii}_{1,2p-1}x^i_1x^i_{2p-1}+A^{ii}_{2,2p-2}x^i_2x^i_{2p-2}+\ldots+A^{ii}_{pp}x^i_px^i_p,$$

et fournissent à FS — S les termes d'ordre $r-1$,

$$(A^{ii}_{1,2p-1}+A^{ii}_{2,2p-2})x^i_1x^i_{2p-2}+\ldots+(A^{ii}_{p-1,p+1}+2A^{ii}_{pp})x^i_{p-1}x^i_p.$$

Pour qu'ils s'annulent, on doit avoir

$$A^{ii}_{1,2p-1}=-A^{ii}_{2,2p-2}=\ldots=(-1)^{p-1}2A^{ii}_{pp},$$

ce qui réduit les termes considérés à la forme

$$A^{ii}_{pp}[x^i_px^i_p-2x^i_{p-1}x^i_{p+1}+\ldots+(-1)^{p-1}2x^i_1x^i_{2p-1}].$$

Nous obtenons donc le résultat suivant :

Si, pour un système de valeurs déterminées de i, i', *on considère les termes* $A_{kk'}^{ii'}x_k^i x_{k'}^{i'}$ *de rang le plus élevé qui sont contenus dans* F, *leur rang* r *ne pourra surpasser la plus petite des deux quantités* $1+m^i$, $1+m^{i'}$.

Si $i \gtrless i'$, *l'ensemble de ces termes sera de la forme*

$$A_{1,r-1}^{ii'}[x_1^i x_{r-1}^{i'} - x_2^i x_{r-2}^{i'} + \ldots + (-1)^r x_{r-1}^i x_1^{i'}].$$

Si $i = i'$, r *sera un nombre pair* $2p$, *et l'ensemble de ces termes sera*

$$A_{pp}^{ii}[x_p^i x_p^i - 2x_{p-1}^i x_{p+1}^i + \ldots + (-1)^{p-1} 2x_1^i x_{2p-1}^i].$$

10. Cela posé, les quantités $m', \ldots, m^i, \ldots$ étant supposées rangées par ordre de grandeur décroissante, admettons que $m', \ldots, m^q$ aient une même valeur m, mais que $m^{q+1}, \ldots$ soient $< m$. D'après ce qui précède, aucun terme de F ne peut être de rang supérieur à $1+m$. Mais, d'autre part, il existe effectivement des termes de ce rang : car les q premières séries contiennent des variables d'indice m qui figurent nécessairement dans F; les termes qui les contiennent renferment une seconde variable, dont l'indice est au moins égal à l'unité; leur rang ne peut donc être inférieur à $1+m$.

Il résulte d'ailleurs de ce qui précède que ces termes ne peuvent contenir que les variables des q séries à m variables et que leur ensemble est donné, si m est pair, par une expression telle que

$$(2) \qquad \sum_{i,i'} A_{1m}^{ii'}[x_1^i x_m^{i'} - x_2^i x_{m-1}^{i'} + \ldots + (-1)^{m-1} x_m^i x_1^{i'}],$$

$$i = 1, 2, \ldots, q, \qquad i' = 1, 2, \ldots, q, \qquad i' \gtrless i$$

et, si m est impair $= 2p - 1$, par l'expression

$$(3) \quad \begin{cases} \sum_{i,i'} A_{1,2p-1}^{ii'}[x_1^i x_{2p-1}^{i'} - x_2^i x_{2p-2}^{i'} + \ldots] \\ \quad + \sum_i A_{pp}^{ii}[x_p^i x_p^i - 2x_{p-1}^i x_{p+1}^i + \ldots + (-1)^{p-1} x_1^i x_{2p-1}^i]. \end{cases}$$

Il est maintenant aisé de simplifier l'expression de la forme F, par des substitutions qui conservent à S sa forme canonique et qui ont été indiquées plus haut. Ici encore nous aurons à distinguer les deux cas de m pair ou impair.

11. 1° Soit m pair. Soit x'_m une quelconque des variables d'indice m. Les termes de F qui la renferment, étant de rang $1+m$, sont contenus dans l'expression (2) et leur ensemble sera de la forme

$$x'_m(A''x''_1+\ldots+A^i x^i_1+\ldots).$$

L'un au moins des coefficients $A'', \ldots, A^i, \ldots$, par exemple A'', sera $\gtrless 0$; et, comme on peut, sans altérer S, remplacer $x''_1, \ldots, x''_m$ par $\frac{1}{A''}x''_1, \ldots, \frac{1}{A''}x''_m$, il est permis de le supposer égal à l'unité.

La forme F, contenant le terme $x''_1 x'_m$, contiendra parmi ses termes d'ordre $m+1$ les suivants

$$x''_1 x'_m - x''_2 x'_{m-1} + \ldots + (-1)^{m-1} x''_m x'_1. \tag{4}$$

Cela posé, nous allons montrer qu'on peut, sans altérer S, faire disparaître de F tous ceux de ses termes qui contiennent une des variables $x'_1, \ldots, x'_m$; $x''_1, \ldots, x''_m$ sans être bilinéaires par rapport à ces deux séries de variables.

Soit d'abord $x^i_1, \ldots, x^i_k, \ldots$ une autre série de variables, distincte des deux précédentes; s'il existe des termes bilinéaires par rapport aux deux séries x'' et x^i, considérons ceux d'entre eux dont le rang r est le plus élevé; il seront de la forme

$$B(x''_1 x^i_{r-1} - x''_2 x^i_{r-2} + \ldots).$$

Changeons

$$x'_m, \quad x'_{m-1}, \quad \ldots, \quad x'_{m-r+2}$$

en

$$x'_m - Bx^i_{r-1}, \quad x'_{m-1} - Bx^i_{r-2}, \quad \ldots, \quad x'_{m-r+2} - Bx^i_1.$$

L'accroissement subi par les termes (4) par suite de cette substitution détruira ces termes de rang r; et les autres termes bilinéaires en $x''_1, \ldots, x''_m$ et $x^i_1, \ldots,$ que cette même substitution pourra introduire seront évidemment de rang $< r$. Cette opération aura donc pour effet de diminuer r. Par une série d'abaissements de ce genre, on finira par faire disparaître complètement les termes bilinéaires par rapport aux séries x'' et x^i.

En second lieu, s'il existe des termes quadratiques par rapport aux variables x'', considérons ceux dont le rang est le plus élevé. Ce rang sera un nombre pair $2p$, et ces termes seront de la forme

$$B(x''^2_p - 2x''_{p-1}x''_{p+1} + \ldots + (-1)^{p-1}2x''_1 x''_{2p-1}).$$

Changeons

$$x'_m, \quad \ldots, \quad x'_{m-2p+2}$$

en

$$x'_m + (-1)^p B x''_{2p-1}, \quad \ldots, \quad x'_{m-2p+2} + (-1)^p B x''_1.$$

L'accroissement des termes (4) détruira les termes de rang $2p$, et les autres termes quadratiques par rapport aux x'' qui pourront être introduits seront de rang $< 2p$. Par une suite d'opérations analogues, on pourra faire disparaître complètement ces termes quadratiques.

On fera disparaître par un procédé tout semblable les termes bilinéaires par rapport aux x' et aux x^i, ou quadratiques par rapport aux x'.

On ramènera donc finalement F à la forme

$$F = B_{x'x''} + \Phi,$$

$B_{x'x''}$ étant bilinéaire par rapport aux x' et aux x'' et Φ ne contenant plus ces variables.

La forme bilinéaire $B_{x'x''}$ pourra être traitée par le procédé employé dans le cas où s_1^2 était $\gtrless 1$ (n^{os} 4 et 5) et ramenée à une forme canonique complètement déterminée.

Quant à la forme Φ, si elle contient encore des séries de m variables, on pourra en extraire une seconde forme bilinéaire, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on arrive à une forme Ψ ne contenant plus que des séries de moins de m variables, et à laquelle on appliquera les mêmes procédés de traitement qu'à la forme primitive F.

12. 2° Soit m impair $= 2p - 1$. Les termes de rang $m+1$ seront donnés par la formule (3). Considérons ceux de ces termes qui ne contiennent que les variables d'indice p. Ils constituent une forme quadratique

$$(5) \qquad (-1)^{p-1}\sum_{i,i'} A_{pp}^{ii'} x_p^i x_p^{i'} + \sum_i A_{pp}^{ii} x_p^i x_p^i,$$

qu'on peut réduire à une somme de carrés par une substitution de la forme

$$\begin{array}{ll} x'_p & \alpha_{11}x'_p + \alpha_{12}x''_p + \ldots, \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x^i_p & \alpha_{i1}x'_p + \alpha_{i2}x''_p + \ldots, \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Cela posé, la substitution

$$\left.\begin{array}{ll} x'_k & \alpha_{11}x'_k + \alpha_{12}x''_k + \ldots \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^i_k & \alpha_{i1}x'_k + \alpha_{i2}x''_k + \ldots \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} (k = 1, \ldots, 2p-1),$$

qui n'altère pas S, ramènera (5) à une somme de carrés. Les rectangles $x^i_p x^{i'}_p$ ayant ainsi disparu de l'expression (3), elle se réduira à sa seconde partie, où les coefficients A^{ii}_{pp} seront d'ailleurs égaux à 1. Elle deviendra donc

$$\sum \left[x^i_p x^i_p - 2x^i_{p-1}x^i_{p+1} + \ldots + (-1)^{p-1} 2x^i_1 x^i_{2p-1}\right].$$

Nous allons montrer qu'on peut encore transformer F, de telle sorte qu'elle ne contienne plus que des termes quadratiques par rapport aux variables de l'une des séries x^i qui figurent dans l'expression précédente.

Supposons en effet que F contienne des termes bilinéaires par rapport aux deux séries x^i, $x^{i'}$. Considérons ceux de ces termes dont le rang r est maximum ; ils sont de la forme

$$A(x^i_1 x^{i'}_{r-1} - x^i_2 x^{i'}_{r-2} + \ldots).$$

En changeant

$$x^i_{2p-1}, \quad \ldots, \quad x^i_{2p-r+1}$$

en

$$x^i_{2p-1}+(-1)^p \frac{A}{2} x^{i'}_{r-1}, \quad \ldots, \quad x^i_{2p-r+1}+(-1)^p \frac{A}{2} x^{i'}_1,$$

on les fera disparaître, et l'on n'introduira en fait de termes analogues que des termes de rang moindre. En répétant cette opération, on arrivera à la destruction complète de ces termes.

On aura donc

$$F=f+\Phi,$$

f étant une fonction quadratique des x^i et Φ ne contenant plus cette série de variables.

Il ne nous reste évidemment qu'à achever la réduction de la forme f, la forme Φ pouvant ensuite être traitée comme l'a été la forme F.

13. Soit, en supprimant l'indice i désormais inutile,

$$\begin{aligned} f=x_p^2 &- 2x_{p-1}x_{p+1}+\ldots \\ &+(-1)^{p-1}2x_1x_{2p-1}+\sum A_{kk'}x_kx_{k'} \qquad (k+k')<2p, \quad k'\gtreqless k). \end{aligned}$$

On pourra faire disparaître les termes qui contiennent les carrés des variables $x_{p-1}, \ldots, x_1$.

Supposons, en effet, qu'après s'être déjà débarrassé des carrés de $x_{p-1}, \ldots, x_{p-k+1}$, on cherche à faire disparaître le terme $A_{p-k,p-k}x^2_{p-k}$ sans réintroduire les termes déjà supprimés.

On y parviendra en opérant la substitution suivante

$$\begin{array}{ll} x_{2p-1} & x_{2p-1}-\dfrac{(-1)^k}{2}A_{p-k,p-k}x_{2p-1-2k}, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_{p+k} & x_{p+k}-\dfrac{(-1)^k}{2}A_{p-k,p-k}x_{p-k}, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_{2k+1} & x_{2k+1}-\dfrac{(-1)^k}{2}A_{p-k,p-k}x_1. \end{array}$$

Lorsque ces carrés auront ainsi disparu, la forme f ne pourra plus contenir aucun terme où les indices k et k' soient tous deux $< p$. En effet, s'il existait des termes de ce genre, soit $A_{kk'}x_k x_{k'}$ l'un d'eux, choisi de telle sorte que $k' - k$ soit minimum.

Les termes qui contiennent les carrés des variables d'indice $< p$ ayant été supprimés, $k' - k$ ne pourra être nul, et, comme $k' < p$, k sera $< p - 1$. Cela posé, la substitution S opérée sur f accroîtra le terme considéré de trois autres

$$A_{kk'}(x_{k'}x_{k'-1} + x_{k-1}x_{k'} + x_{k-1}x_{k'-1}).$$

Le premier de ces termes ne peut disparaître; car les seuls termes de f d'où pourrait résulter un terme qui se réduise avec celui-là seraient les termes en $x_{k+1}x_{k'-1}$ ou en $x_{k+1}x_{k'}$. Le second de ces termes ne peut exister, par hypothèse, car les indices y sont $< p$ et leur différence est moindre que $k' - k$. La même observation s'applique au premier, sauf le cas où $k' - k = 1$; mais alors il se confond avec le terme primitif en $x_k x_{k'}$.

14. Il résulte de ce qui précède qu'on pourra mettre f sous la forme

$$f = \sum_{\mu, \mu'} (-1)^{\mu+\mu'} a_{\mu\mu'} x_{p+\mu} x_{p-\mu-\mu'},$$

les indices de sommation μ, μ' variant respectivement de 0 à $p - 1$ et de 0 à $p - \mu - 1$, et les $a_{\mu\mu'}$ étant des coefficients à déterminer.

D'après ce que nous connaissons déjà sur la forme des termes de rang maximum, on a

$$a_{00} = 1, \qquad a_{10} = a_{20} = \ldots = 2.$$

D'ailleurs f doit être transformée en elle-même par S; et cette condition va nous permettre de calculer de proche en proche les autres coefficients a.

En effet, remplaçant généralement x_k par $x_k + x_{k-1}$, $f\mathrm{S} - \mathrm{S}$ sera une somme de termes, dont chacun contient une variable affectée d'un indice au moins égal à $p - 1$ et a un rang au plus égal à $2p - 1$.

D'ailleurs les termes de rang $2p-1$ se détruisent mutuellement, car c'est par cette condition que nous avons déterminé les coefficients $a_{00}, \ldots, a_{\mu 0}, \ldots$.

Le terme général de $fS - S$ sera donc de la forme

$$B_{kk'} x_{p-1+k} x_{p-k-k'},$$

k étant $\gtreqless 0$ et $k' > 0$.

Il existe en général dans S trois termes qui peuvent concourir à le produire; ce sont les suivants

$$(-1)^{k+k'} a_{kk'} x_{p+k} x_{p-k-k'},$$
$$(-1)^{k+k'-1} a_{k-1,k'} x_{p-1+k} x_{p-k-k'+1},$$
$$(-1)^{k+k'-1} a_{k,k'-1} x_{p+k} x_{p-k-k'+1}$$

et l'on aura

$$B_{kk'} = (-1)^{k+k'} (a_{kk'} - a_{k-1,k'} - a_{k,k'-1}).$$

Mais $B_{kk'}$ doit être nul; on a donc la formule récurrente

$$a_{kk'} = a_{k-1,k'} + a_{k,k'-1}.$$

Remarquons toutefois que, si $k=0$, il n'existe pas dans S de terme affecté du coefficient $a_{k-1,k'}$; alors la formule se réduit à la forme plus simple

$$a_{0k'} = a_{0,k'-1}.$$

Posons dans ces formules $k = 0, 1, \ldots, \mu$ et ajoutons; il viendra

$$a_{\mu k'} = \sum_0^\mu a_{k,k'-1}.$$

Soit d'abord $k'=1$; on aura, d'après la valeur connue des coefficients a_{k0},

$$a_{\mu 1} = 2\mu + 1.$$

Faisant ensuite $k'=2$, il viendra

$$a_{\mu 2} = \sum_0^\mu (2k+1) = 2\frac{\mu(\mu+1)}{2} + \mu + 1.$$

On trouvera ensuite

$$a_{\mu 3} = \sum_0^{\mu}\left[2\,\frac{k(k+1)}{2}+k+1\right] = 2\,\frac{\mu(\mu+1)(\mu+2)}{2.3}+\frac{(\mu+1)(\mu+2)}{2}$$

et enfin, généralement,

$$\begin{aligned} a_{\mu\mu'} &= 2\,\frac{\mu(\mu+1)\ldots(\mu+\mu'-1)}{1.2\ldots\mu'}+\frac{(\mu+1)\ldots(\mu+\mu'-1)}{1.2\ldots(\mu'-1)} \\ &= (2\mu+\mu')\,\frac{(\mu+1)\ldots(\mu+\mu'-1)}{1.2\ldots\mu'}. \end{aligned}$$

15. L'expression que nous venons de trouver pour la forme f peut être simplifiée, si l'on consent à faire perdre à la substitution S sa forme canonique.

On a, en effet, en réunissant ensemble les termes de f qui contiennent chacune des quantités $x_1, \ldots, x_{p-1}$,

$$f = x_1\eta_1 + \ldots + x_{p-1}\eta_{p-1} + x_p^2,$$

$\eta_1, \ldots, \eta_{p-1}$ étant des fonctions de $x_{2p-1}, \ldots, x_{p+1}, x_p$, linéairement indépendantes par rapport à $x_{2p-1}, \ldots, x_{p+1}$.

La substitution S les remplacera par des fonctions $H_1, \ldots, H_{p-1}$ de $x_{2p-1}, \ldots, x_p, x_{p-1}$, qu'on peut exprimer au moyen de $\eta_1, \ldots, \eta_{p-1}$, x_p, x_{p-1}.

Prenons les η pour variables indépendantes à la place de $x_{2p-1}, \ldots, x_{p+1}$; f aura pour expression

$$x_1\eta_1 + \ldots + x_{p-1}\eta_{p-1} + x_p^2$$

et S prendra la forme

$$S = \left|\begin{matrix} x_1, \ldots, x_p & x_1, \ldots, x_p + x_{p-1} \\ \eta_1, \ldots, \eta_{p-1} & H_1, \ldots, H_{p-1} \end{matrix}\right|.$$

Il reste à déterminer les fonctions inconnues H par la condition

$$fS = f,$$

qui donne

$$x_1 H_1 + (x_2 + x_1) H_2 + \ldots + (x_{p-1} + x_{p-2}) H_{p-1} + (x_p + x_{p-1})^2$$
$$= x_1 \eta_1 + \ldots + x_{p-1} \eta_{p-1} + x_p^2.$$

L'identification des termes en $x_1, \ldots, x_{p-2}$ donnera

$$\eta_1 = H_1 + H_2, \quad \ldots, \quad \eta_{p-2} = H_{p-2} + H_{p-1}$$

et celle des termes restants donnera ensuite

$$\eta_{p-1} = H_{p-1} + x_{p-1} + 2x_p.$$

La résolution de ces équations donnera

$$H_k = \eta_k - \eta_{k+1} + \ldots + (-1)^{p-1-k}(\eta_{p-1} - x_{p-1} - 2x_p).$$

16. Nous obtenons, comme conclusion de cette analyse, la proposition suivante :

Pour qu'une substitution S *puisse transformer en elle-même une forme quadratique de déterminant* $\gtrless 0$, *il faut et il suffit qu'on puisse, par un choix convenable des variables indépendantes, la mettre sous la forme*

$$S = S'S'' \ldots,$$

les substitutions partielles S', S'', ... *altérant chacune des variables distinctes et ayant l'une des deux expressions suivantes :*

$$(\mathrm{I}) \qquad \left| \begin{array}{ll} x_1, \ldots, x_m & s x_1, \ldots, s(x_m + x_{m-1}) \\ y_1, \ldots, y_m & \frac{1}{s} y_1, \ldots, \frac{1}{s}(y_m + y_{m-1}) \end{array} \right|$$

(*le nombre* m *étant assujetti à être pair si* $s = \pm 1$),

$$(\mathrm{II}) \qquad | \, z_1, \ldots, z_{2p-1} \quad t z_1, \ldots, t z_{2p-1} \, |, \qquad (t = \pm 1).$$

Ces conditions étant supposées satisfaites, toute forme quadra-

tique F *de déterminant différent de zéro et que* S *transforme en elle-même pourra, par un changement de variables qui n'altère pas l'expression déjà donnée à* S, *être ramenée à la forme*

$$F = F' + F'' + \ldots,$$

F', F'', ... *étant des formes quadratiques partielles, contenant respectivement les mêmes variables que les substitutions* S', S'', ...

Si l'une de ces substitutions, telle que S', *est de forme* (I), F' *aura pour expression*

$$\begin{aligned} &x_1 \left[y_m + (m-1) y_{m-1} + \frac{(m-1)(m-2)}{1.2} y_{m-2} + \ldots \right] \\ &\quad - x_2 \left[y_{m-1} + (m-2) y_{m-2} + \frac{(m-2)(m-3)}{1.2} y_{m-3} + \ldots \right] \\ &\quad + x_3 [y_{m-2} + (m-3) y_{m-3} + \ldots] + \ldots + (-1)^{m-1} x_m y_1. \end{aligned}$$

Si, au contraire, S' *est de la forme* (II), F' *aura pour expression*

$$\begin{aligned} &z_p^2 - 2 z_{p+1} z_{p-1} + 2 z_{p+2} z_{p-2} - \ldots + (-1)^{p-1} 2 z_{2p-1} z_1 \\ &\quad + \sum_{\mu, \mu'} (-1)^{\mu+\mu'} (2\mu + \mu') \frac{\mu + \mu' - 1!}{\mu! \, \mu'!} z_{p+\mu} z_{p-\mu-\mu'}, \end{aligned}$$

où μ *varie de* 0 *à* $p - 1$, *et* μ' *de* 1 *à* $p - 1 - \mu$.