JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

G. HUMBERT

Sur le théorème d'Abel et quelques-unes de ses applications à la Géométrie

Journal de mathématiques pures et appliquées 4e série, tome 5 (1889), p. 81-134.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1889_4_5__81_0>

Sur le théorème d'Abel et quelques-unes de ses applications à la Géométrie;

Par M. G. HUMBERT.

---

1. Dans un Mémoire publié au tome III (4^e Série) de ce Journal, nous avons fait connaître une formule simple, qui permet, étant données une courbe algébrique plane et une intégrale abélienne appartenant à cette courbe, de calculer *a priori* la somme des variations de l'intégrale proposée sur les arcs décrits par les points d'intersection de la courbe considérée et d'une courbe algébrique variable, faisant partie d'un faisceau ponctuel.

Cette somme est, comme on le sait, depuis Abel, une fonction algébrique et logarithmique du paramètre du faisceau, et la formule que nous rappelons donne un moyen facile de calculer cette fonction, ou plutôt sa dérivée par rapport au paramètre : on est ramené à une simple évaluation de résidus.

Il n'y aurait presque rien à changer à cette théorie pour passer du cas de la courbe plane à celui d'une courbe gauche : les coordonnées d'un point d'une telle courbe peuvent en effet s'exprimer en fonction fuchsienne d'un même paramètre, et, en partant de ce principe, on n'a qu'à répéter pour la courbe gauche les raisonnements faits pour la courbe plane. La formule fondamentale du Mémoire précité permet ainsi de calculer la somme des variations d'une intégrale abélienne sur les arcs décrits par les points d'intersection d'une courbe gauche et d'une surface algébrique variable appartenant à un faisceau ponctuel.

Au lieu de supposer que la surface variable appartient à un faisceau, on peut considérer le cas plus général où elle fait partie d'un système algébrique : la question se traite d'une manière toute semblable, et l'on arrive à une formule de même nature que celle dont nous venons de parler.

C'est cette nouvelle formule que nous allons tout d'abord démontrer : nous étendrons ainsi aux courbes gauches, en les généralisant notablement, les résultats que nous avons établis pour les courbes planes.

En second lieu, de la formule nouvelle, nous déduirons un certain nombre de conséquences analytiques, dont la plus importante nous permettra de donner une extension du théorème d'Abel aux intégrales doubles et triples, et de retrouver, pour ces intégrales, un certain nombre de propriétés que nous avons rencontrées dans le cas des intégrales abéliennes ordinaires.

Ces développements analytiques constituent la première Partie du présent Mémoire : la deuxième contiendra les applications géométriques, parmi lesquelles nous signalerons celles qui concernent les aires et les courbures sphériques des surfaces algébriques, et les volumes limités par de telles surfaces.

PREMIÈRE PARTIE.

I. — Le théorème d'Abel pour les intégrales dépendant d'une courbe gauche.

2. Soient deux surfaces algébriques

$$f(X, Y, Z) = 0 \qquad \text{et} \qquad \varphi(X, Y, Z) = 0,$$

de degrés m et n, se coupant suivant une ou plusieurs courbes gauches indécomposables; considérons spécialement l'une de ces courbes que nous désignerons par C.

Les coordonnées X, Y, Z d'un point de C peuvent, d'après un théorème de M. Poincaré, s'exprimer en fonction fuchsienne d'un paramètre λ; ou, si l'on veut, les coordonnées homogènes x, y, z, t d'un point de la courbe $\left(\text{étant posé } X = \frac{x}{t}, \; Y = \frac{y}{t}, \; Z = \frac{z}{t}\right)$ peuvent se mettre sous la forme

$$x = \theta_1(\lambda), \qquad y = \theta_2(\lambda), \qquad z = \theta_3(\lambda), \qquad t = \theta_4(\lambda),$$

$\theta_1, \ldots, \theta_4$ désignant des fonctions thêtafuchsiennes holomorphes de la variable λ.

Ces fonctions appartiennent à la première famille de M. Poincaré; le polygone fuchsien correspondant à $4p$ côtés, les côtés opposés sont conjugués deux à deux, et la somme des angles est égale à 2π.

Cela posé, considérons une intégrale abélienne quelconque appartenant à la courbe C,

$$I = \int \frac{Q_1(X, Y, Z)}{S_1(X, Y, Z)} dX,$$

Q_1 et S_1 étant des polynômes entiers. Remplaçons-y X, Y, Z par $\frac{x}{t}$, $\frac{y}{t}$, $\frac{z}{t}$, et supposons x, y, z, t exprimés en fonction thêtafuchsienne de λ; l'intégrale prend la forme

$$I = \int \frac{Q(x, y, z, t)}{S(x, y, z, t)} (x't - xt') d\lambda,$$

x', t' désignant les dérivées de x et t par rapport à λ. Par suite de la différence des degrés des polynômes Q_1 et S_1 et du facteur $\frac{1}{t^2}$ provenant de la différentielle $d\left(\frac{x}{t}\right)$, il a pu s'introduire, au numérateur ou au dénominateur de l'expression soumise au signe $\int$, un facteur t^k; nous ne le mettrons pas en évidence, le supposant compris dans Q ou dans S, mais alors la différence des degrés en x, y, z, t des polynômes S et Q sera égale à 2.

Nous désignerons par q le degré de Q; celui de S sera $q + 2$.

3. Soit maintenant un système de surfaces algébriques dont l'équation dépend algébriquement d'un paramètre u,

$$\Phi(X, Y, Z, u) = 0$$

ou, en coordonnées homogènes,

$$\Phi(x, y, z, t, u) = 0.$$

Proposons-nous d'évaluer la somme des intégrales I, dont les limites inférieures sont respectivement les arguments des points communs à la courbe C et à une surface

$$\Phi(x, y, z, t, u_0) = 0,$$

et les limites supérieures les arguments des points communs à C et à la surface

$$\Phi(x, y, z, t, u) = 0.$$

Considérons, à cet effet, l'intégrale

$$J = \int \frac{Q(x, y, z, t)}{S(x, y, z, t)}(x't - xt') \frac{\Phi'_u(x, y, z, t, u)}{\Phi(x, y, z, t, u)} d\lambda,$$

x, y, z, t étant toujours supposés exprimés en fonction thêtafuchsienne de λ.

La fonction soumise au signe $\int$, c'est-à-dire la fonction que nous désignerons par $\Theta(\lambda)$,

$$\Theta(\lambda) = \frac{Q\Phi'_u}{S\Phi}(x't - xt')$$

est une fonction thêtafuchsienne de degré un, car elle peut s'écrire

$$\Theta(\lambda) = \frac{Qt^2}{S} \frac{\Phi'_u}{\Phi} d\left(\frac{x}{t}\right),$$

et, sous cette forme, on voit qu'elle est le produit de trois facteurs, dont les deux premiers sont des fonctions fuchsiennes, comme étant les quotients de deux fonctions thêtafuchsiennes de même degré, et dont le troisième est la dérivée d'une fonction fuchsienne, c'est-à-dire une fonction thêtafuchsienne de degré un.

Il résulte de là que l'intégrale $\int \Theta(\lambda) d\lambda$, prise le long du polygone fuchsien fondamental, est nulle : nous n'insistons pas sur cette démonstration qui est, sans aucun changement, celle que nous avons donnée dans le Mémoire mentionné plus haut ([1]).

On en conclut que la somme des résidus de la fonction $\Theta(\lambda)$ dans l'intérieur du polygone fondamental est nulle : c'est en évaluant ces résidus que nous allons arriver à la formule cherchée.

Les infinis de $\Theta(\lambda)$ sont les zéros de S et ceux de Φ, c'est-à-dire les arguments des points de C situés sur les surfaces $S = 0$ et $\Phi = 0$.

Soit d'abord λ l'argument d'un point de C situé sur la surface

$$\Phi(x, y, z, t, u) = 0;$$

le résidu correspondant ρ a pour valeur

$$\rho = \frac{Q(x, y, z, t)}{S(x, y, z, t)}(x't - xt')\frac{\Phi'_u(x, y, z, t, u)}{\Phi'_\lambda(x, y, z, t, u)}.$$

Or on a, par hypothèse, entre les coordonnées du point considéré, la relation

$$\Phi(x, y, z, t, u) = 0.$$

On en conclut, lorsque l'on passe de la valeur u du paramètre à la valeur $u + du$, que l'argument, λ, du point éprouve une variation définie par l'équation

$$\Phi'_\lambda(x, y, z, t, u)\,d\lambda + \Phi'_u(x, y, z, t, u)\,du = 0;$$

d'où

$$\frac{\Phi'_u}{\Phi'_\lambda} = -\frac{d\lambda}{du}$$

et, par suite,

$$\rho = -\frac{Q}{S}(x't - xt')\frac{d\lambda}{du},$$

ce qu'on peut écrire, en se reportant à la définition de l'intégrale I,

$$\rho = -\frac{dI}{du}.$$

([1]) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 4e série, t. III, p. 332.

La somme des résidus ρ, changée de signe, est donc égale à la dérivée de la somme cherchée par rapport au paramètre u.

D'après ce qui précède, cette dernière somme est égale à celle des résidus, par rapport aux zéros de S, de la fonction $\Theta(\lambda)$.

On a donc, en désignant par r un de ces résidus,

$$\sum \frac{d\mathrm{I}}{du} = \sum r;$$

d'où

$$\sum \mathrm{I} = \int_{u_0}^{u} \left(\sum r\right) du, \tag{1}$$

$\sum r$ désignant la somme des résidus par rapport aux zéros de

$$\mathrm{S}(x, y, z, t)$$

de la fonction

$$\Theta(\lambda) = \frac{\mathrm{Q}\Phi'_u}{\mathrm{S}\Phi}(x't - xt'). \tag{2}$$

C'est l'extension de la formule démontrée dans notre Mémoire sur le théorème d'Abel.

4. *Remarque I.* — Si tous les zéros de S sont simples, c'est-à-dire si la surface $\mathrm{S} = 0$ ne touche pas la courbe C, il est aisé d'évaluer les résidus correspondants.

Soit λ l'un de ces zéros; on aura, pour le résidu,

$$r = \frac{\mathrm{Q}(x't - xt')}{\mathrm{S}'_\lambda \Phi} \Phi'_u;$$

or

$$\mathrm{S}'_\lambda = \frac{\partial \mathrm{S}}{\partial x} x' + \frac{\partial \mathrm{S}}{\partial y} y' + \frac{\partial \mathrm{S}}{\partial z} z' + \frac{\partial \mathrm{S}}{\partial t} t'.$$

D'ailleurs on a, par la formule des fonctions homogènes,

$$x\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial x} + y\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial y} + z\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial z} + t\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial t} = (q+2)\mathrm{S} = 0,$$

puisque le point x, y, z, t est sur la surface $\mathrm{S} = 0$.

Si l'on tire de cette relation la valeur de S'_t en la portant dans celle de S'_λ, il vient

$$tS'_\lambda = \frac{\partial S}{\partial x}(x't - xt') + \frac{\partial S}{\partial y}(y't - yt') + \frac{\partial S}{\partial z}(z't - zt').$$

D'un autre côté, les quantités $(x't - xt')$, $(y't - yt')$, $(z't - zt')$ sont proportionnelles aux différentielles $d\left(\frac{x}{t}\right)$, $d\left(\frac{y}{t}\right)$, $d\left(\frac{z}{t}\right)$, c'est-à-dire aux cosinus directeurs de la tangente à la courbe C au point $\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}$; ces cosinus, puisque C est à l'intersection des surfaces $f = 0$, $\varphi = 0$, sont eux-mêmes proportionnels aux fonctions

$$f'_y\varphi'_z - f'_z\varphi'_y, \qquad f'_z\varphi'_x - f'_x\varphi'_z, \qquad f'_x\varphi'_y - f'_y\varphi'_x,$$

et l'on a dès lors

$$r = \frac{Q(f'_y\varphi'_z - f'_z\varphi'_y)}{\Delta_{sf\varphi}\Phi}\Phi'_u = \sigma\frac{\Phi'_u}{\Phi},$$

en posant

$$(3) \qquad \sigma = \frac{Q(f'_y\varphi'_z - f'_z\varphi'_y)}{\Delta_{sf\varphi}},$$

et en désignant par $\Delta_{sf\varphi}$ le déterminant

$$\Delta_{sf\varphi} = \begin{vmatrix} S'_x & S'_y & S'_z \\ f'_x & f'_y & f'_z \\ \varphi'_x & \varphi'_y & \varphi'_z \end{vmatrix}.$$

Il vient donc

$$(4) \qquad \sum I = \sum \int_{u_0}^{u} r\,du$$

ou, puisque Q et S sont indépendants de u,

$$\sum I = \sum \sigma \log\frac{\Phi(x, y, z, t, u)}{\Phi(x, y, z, t, u_0)};$$

a somme du second membre étant étendue aux points communs à la courbe C et à la surface $S = 0$, et σ étant défini, en chacun de ces points, par la relation (3), c'est-à-dire $\sigma = \frac{Q(f'_y\varphi'_z - f'_z\varphi'_y)}{\Delta_{Sf\varphi}}$. On peut dire aussi que σ est le résidu, au point considéré, de la fonction $\Theta_1(\lambda) = \frac{Q}{S}(x't - xt')$.

5. *Remarque II.* — L'intégration par rapport à u de la quantité Σr, qui figure dans la formule (1), est tout aussi aisée si l'on suppose que $S(x, y, z, t)$ admette des zéros multiples. Soit, en effet, λ un zéro d'ordre h de S; écrivons $\Theta(\lambda)$ sous la forme

$$\Theta(\lambda) = \frac{Q(x't - xt')}{S}\frac{\Phi'_u}{\Phi}.$$

Le résidu de $\Theta(\lambda)$, correspondant au zéro considéré, sera de la forme :

$$r = \mathcal{A}\frac{\Phi'_u}{\Phi} + \mathcal{B}\frac{d}{d\lambda}\frac{\Phi'_u}{\Phi} + \ldots + \mathcal{L}\frac{d^{h-1}}{d\lambda^{h-1}}\frac{\Phi'_u}{\Phi},$$

$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \ldots, \mathcal{L}$ étant indépendants de u, puisque Q et S le sont eux-mêmes, et l'intégrale correspondante, $\int r\,du$, sera

$$\int \mathcal{A}\frac{\Phi'_u}{\Phi}du + \int \mathcal{B}\frac{d}{d\lambda}\frac{\Phi'_u}{\Phi}du + \ldots + \int \mathcal{L}\frac{d^{h-1}}{d\lambda^{h-1}}\frac{\Phi'_u}{\Phi}du.$$

La première intégrale est $\mathcal{A}\log\Phi$; une quelconque des autres se calculera par la formule

$$\int \frac{d^k}{d\lambda^k}\frac{\Phi'_u}{\Phi}du = \frac{d^k}{d\lambda^k}\int\frac{\Phi'_u}{\Phi}du = \frac{d^k}{d\lambda^k}\log\Phi.$$

6. La formule (1) montre que la somme des intégrales I sera nulle lorsque Σr sera lui-même nul. Ce cas se présente, en particulier, si la fonction $\Theta(\lambda)$ ne devient infinie pour aucun des zéros de S, parce que tous les résidus r sont alors nuls.

Comme exemple, supposons que les surfaces $\Phi = 0$ forment un faisceau ponctuel $\Phi_0 + u\Phi_1 = 0$; Φ'_u est alors égal à Φ_1 et la fonction $\Theta(\lambda)$ devient

$$\Theta(\lambda) = \frac{Q\Phi_1(x't - xt')}{S(\Phi_0 + u\Phi_1)}. \tag{5}$$

Elle n'aura pas d'autres infinis que les zéros de $\Phi_0 + u\Phi_1$, si Φ_1 s'annule pour tous les zéros de S qui n'annulent pas $Q(x't - xt')$. De là résulte cette proposition que nous avons énoncée déjà dans le cas des courbes planes [1].

Soit I *une intégrale abélienne, relative à une courbe gauche algébrique* C. *La somme des intégrales* I, *dont les limites inférieures et supérieures sont respectivement les systèmes de valeurs des coordonnées qui correspondent aux points d'intersection de la courbe* C *avec deux surfaces quelconques de même degré, est nulle, si, parmi les surfaces du faisceau ponctuel déterminé par les surfaces sécantes, il en est une,* Σ, *qui passe par tous les points de la courbe* C *rendant l'intégrale infinie.*

Si la quantité sous le signe $\int$ *devient infinie d'ordre* h *en un point de* C, *la surface* Σ *doit avoir au même point avec* C *un contact d'ordre* $h - 1$.

On suppose que *toutes* les surfaces du faisceau considéré ne passent pas par un de ces points, sinon $\Theta(\lambda)$ pourrait devenir infini en ce point, comme le montre l'expression (5).

7. Si les surfaces $\Phi = 0$ forment un système algébrique quelconque, on arrive à un résultat analogue.

Soit

$$\Phi(x, y, z, t, u) = u^\rho A + u^{\rho-1} B + \ldots + K u + L.$$

Pour que $\Theta(\lambda)$ reste fini aux points de la courbe qui annulent S, il faut, d'après (2), que Φ'_u s'annule en ces points, quel que soit u, c'est-à-dire que l'on ait en chacun d'eux $A = B = \ldots = K = 0$.

Cela montre qu'une seule et même surface du système $\Phi = 0$ passe par tous ces points; cette surface est la surface $L = 0$.

(1) *Loc. cit.*, p. 338.

Cette condition nécessaire est évidemment suffisante, et l'on peut dire que :

La somme des intégrales I *dont les limites inférieures et supérieures sont respectivement les systèmes de valeurs des coordonnées qui correspondent aux points d'intersection de la courbe* C *avec deux surfaces quelconques d'un système algébrique à un paramètre est nulle, si les surfaces de ce système qui passent respectivement par les points de la courbe* C, *rendant l'intégrale infinie, se réduisent à une seule et même surface du système.*

8. Un autre cas particulier intéressant est celui où, S n'ayant que des zéros multiples, la fonction Φ'_u a, quel que soit u, les mêmes zéros, à un ordre de multiplicité inférieur.

Supposons d'abord que l'on ait $\Phi = \Phi_0 + u\Phi_1$; $\Theta(\lambda)$ est encore donné par la formule (5).

Soit λ_0 un zéro d'ordre h de S : le résidu correspondant de Θ est, comme on l'a vu au n° 5, de la forme

$$r = \mathcal{A}\frac{\Phi_1}{\Phi} + \mathcal{B}\frac{d}{d\lambda}\frac{\Phi_1}{\Phi} + \ldots + \mathcal{L}\frac{d^{h-1}}{d\lambda^{h-1}}\frac{\Phi_1}{\Phi}.$$

La fonction Φ_1 s'annule pour la valeur λ_0 par hypothèse; supposons que λ_0 soit pour cette fonction un zéro d'ordre k. Les fonctions $\frac{\Phi_1}{\Phi}$, $\frac{d}{d\lambda}\frac{\Phi_1}{\Phi}$, $\ldots$, $\frac{d^{k-1}}{d\lambda^{k-1}}\frac{\Phi_1}{\Phi}$ s'annuleront dans l'expression de r; on aura ensuite :

$$\frac{d^k}{d\lambda^k}\frac{\Phi_1}{\Phi} = \frac{1}{\Phi}\frac{d^k}{d\lambda^k}\Phi_1,$$

$$\frac{d^{k+1}}{d\lambda^{k+1}}\frac{\Phi_1}{\Phi} = \frac{1}{\Phi}\frac{d^{k+1}}{d\lambda^{k+1}}\Phi_1 + (k+1)\frac{d}{d\lambda}\frac{1}{\Phi}\frac{d^k}{d\lambda^k}\Phi_1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Si l'on remplace Φ par $\Phi_0 + u\Phi_1$, on voit que, pour $\lambda = \lambda_0$, u disparaît dans les dénominateurs Φ, Φ^2, ... de ces expressions; pour qu'il apparaisse au numérateur, dans une des dérivées $\frac{d^p}{d\lambda^p}\frac{1}{\Phi}$, c'est-à-dire

$\frac{d^p}{d\lambda^p}\frac{1}{\Phi_0 + u\Phi_1}$, il faut que p soit au moins égal à k, puisque les dérivées de Φ_1 s'annulent pour $\lambda = \lambda_0$ jusqu'à l'ordre $k - 1$ inclus.

Il en résulte que les dérivées de $\frac{\Phi_1}{\Phi}$, jusqu'à l'ordre $h - 1$ inclus, seront indépendantes de u, pour $\lambda = \lambda_0$, si l'on a

$$h - 1 - k \leqq k - 1,$$

c'est-à-dire

$$h \leqq 2k.$$

Si, au contraire, $h - 1 - k = k$, c'est-à-dire si $h = 2k + 1$, u apparaîtra au premier degré au numérateur de $\frac{d^{h-1}}{d\lambda^{h-1}}\frac{\Phi_1}{\Phi}$; et, en général, on voit aisément, en discutant la forme des dérivées successives de $\frac{1}{\Phi}$, que u n'apparaîtra pas au second degré dans les numérateurs si l'on a

$$h \leqq 3k,$$

et ainsi de suite.

Le résidu r sera donc un polynôme entier en u; il sera de degré zéro si h est inférieur ou égal à $2k$, de degré 1 si h est compris entre $2k + 1$ et $3k$, de degré 2 si h est compris entre $3k + 1$ et $4k$, et ainsi de suite.

Nous pouvons énoncer maintenant la proposition suivante :

Soit I *une intégrale abélienne relative à une courbe plane ou gauche algébrique* C, *et telle que la quantité sous le signe* $\int$ *n'ait que des infinis d'ordre de multiplicité supérieur à un. La somme des intégrales* I *dont les limites inférieures et supérieures sont respectivement les systèmes de valeurs des coordonnées qui correspondent aux points d'intersection de la courbe* C *avec deux surfaces quelconques d'un faisceau ponctuel,* $\Phi_0 + u_0\Phi_1 = 0$, $\Phi_0 + u\Phi_1 = 0$ *s'exprimera par un polynôme entier en* u_0 *et* u *si la surface* $\Phi_1 = 0$ *passe par tous les points de la courbe* C *rendant l'intégrale infinie, quel que soit d'ailleurs l'ordre du contact qu'elle ait en ces points avec* C.

Le degré du polynôme entier se calculera aisément par ce qui précède.

9. On a une proposition tout à fait analogue dans le cas où les surfaces $\Phi = 0$ forment un système algébrique quelconque.

La somme des intégrales I prises sur la courbe C, entre les points d'intersection de cette courbe avec deux surfaces $\Phi(x, y, z, t, u_0) = 0$ et $\Phi(x, y, z, t, u) = 0$, sera encore exprimable par un polynôme entier en u_0 et u, si Φ'_u s'annule, quel que soit u, pour les points de la courbe C qui rendent l'intégrale infinie.

Soit toujours

$$\Phi = u^\rho A + u^{\rho-1} B + \ldots + K u + L;$$

il faudra, pour cela, que les surfaces

$$A = 0, \qquad B = 0, \qquad \ldots, \qquad K = 0$$

passent toutes par les points considérés.

Nous n'insisterons pas davantage sur les conséquences analytiques qu'on pourrait déduire de ces résultats; nous nous bornerons, au point de vue des applications géométriques, à développer le cas où l'intégrale abélienne considérée est de seconde espèce, et, en particulier, celui où elle est la dérivée d'une fonction rationnelle.

II. — Application aux fonctions rationnelles et aux intégrales de seconde espèce.

10. Soit une fonction rationnelle quelconque de x, y, z, t

$$U = \frac{Q(x, y, z, t)}{S(x, y, z, t)},$$

Q et S désignant des polynômes homogènes en x, y, z, t, de même degré, q : cette hypothèse ne restreint pas la généralité, car nous supposerons toujours qu'on a mis en facteur, au numérateur ou au dénominateur, une puissance de t convenable, de manière à réaliser la condition indiquée.

La formule fondamentale (1) permet de calculer la somme des valeurs que prend la fonction U, aux points communs à la courbe gauche C et aux surfaces $\Phi(x, y, z, t, u) = 0$; il suffit en effet d'appliquer cette formule à l'intégrale

$$I = \int \frac{dU}{d\lambda} d\lambda,$$

en supposant toujours les coordonnées des points de C exprimées en fonction thètafuchsienne de λ.

On a ainsi

$$\Sigma U = \Sigma \int r\, du,$$

r désignant le résidu de la fonction

$$\Theta(\lambda) = \frac{dU}{d\lambda} \frac{\Phi'_u}{\Phi},$$

par rapport à un quelconque des infinis de $\Theta(\lambda)$ qui ne sont pas des zéros de Φ, c'est-à-dire par rapport à un zéro de S.

Soit λ_0 un de ces zéros, supposé simple. On a, dans le voisinage de la valeur λ_0,

$$U = \frac{\mathcal{A}}{\lambda - \lambda_0} + \mathcal{B} + \mathcal{C}(\lambda - \lambda_0) + \ldots,$$

$$\frac{dU}{d\lambda} = -\frac{\mathcal{A}}{(\lambda - \lambda_0)^2} + \mathcal{C} + \ldots,$$

et, par suite, il vient, pour le résidu r de $\Theta(\lambda)$,

$$r = -\mathcal{A} \frac{d}{d\lambda} \frac{\Phi'_u}{\Phi}.$$

On a donc

$$\int_{u_0}^{u} r\, du = -\left[\mathcal{A} \frac{d}{d\lambda} \log \Phi\right]_{u_0}^{u} = -\left[\mathcal{A} \frac{\Phi'_\lambda}{\Phi}\right]_{u_0}^{u},$$

et la formule qui donne ΣU devient

$$[\Sigma U]_{u_0}^{u} = -\Sigma \left[\mathcal{A} \frac{\Phi'_\lambda}{\Phi}\right]_{u_0}^{u},$$

la somme du second membre étant étendue aux points communs à la courbe C et à la surface $S = 0$.

Il est aisé de transformer cette formule.

On a, en effet, puisque $\mathcal{A}$ est le résidu de $\mathrm{U} = \frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{S}}$, pour $\lambda = \lambda_0$,

$$\mathcal{A} = \frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{S}'_\lambda}$$

et, par suite,

$$\frac{\mathcal{A}\Phi'_\lambda}{\Phi} = \frac{\mathrm{Q}}{\Phi}\frac{\Phi'_\lambda}{\mathrm{S}'_\lambda}.$$

Or

$$\mathrm{S}'_\lambda = \frac{\partial \mathrm{S}}{\partial x}x' + \frac{\partial \mathrm{S}}{\partial y}y' + \frac{\partial \mathrm{S}}{\partial z}z' + \frac{\partial \mathrm{S}}{\partial t}t',$$

et, puisque le point x, y, z, t est sur la surface $\mathrm{S} = 0$,

$$0 = \frac{\partial \mathrm{S}}{\partial x}x + \frac{\partial \mathrm{S}}{\partial y}y + \frac{\partial \mathrm{S}}{\partial z}z + \frac{\partial \mathrm{S}}{\partial t}t,$$

d'où

$$t\mathrm{S}'_\lambda = \frac{\partial \mathrm{S}}{\partial x}(x't - xt') + \frac{\partial \mathrm{S}}{\partial y}(y't - yt') + \frac{\partial \mathrm{S}}{\partial z}(z't - zt').$$

De même

$$\Phi'_\lambda = \frac{\partial \Phi}{\partial x}x' + \frac{\partial \Phi}{\partial y}y' + \frac{\partial \Phi}{\partial z}z' + \frac{\partial \Phi}{\partial t}t'.$$

et, si p est le degré de Φ,

$$p\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x}x + \frac{\partial \Phi}{\partial y}y + \frac{\partial \Phi}{\partial z}z + \frac{\partial \Phi}{\partial t}t,$$

d'où, en éliminant $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ entre les deux dernières relations,

$$t\Phi'_\lambda = \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x't - xt') + \frac{\partial \Phi}{\partial y}(y't - yt') + \frac{\partial \Phi}{\partial z}(z't - zt') + pt'\Phi.$$

Il vient ainsi

$$\frac{\mathcal{A}\Phi'_\lambda}{\Phi} = \frac{\mathrm{Q}\left[\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x't - xt') + \ldots + \frac{\partial \Phi}{\partial z}(z't - zt')\right]}{\Phi\left[\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial x}(x't - xt') + \ldots\right]} + p\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{S}'_\lambda}t'.$$

La quantité $\frac{p\mathrm{Q}}{\mathrm{S}'_\lambda}t'$ est indépendante de u; prise entre u_0 et u, elle donne donc un résultat nul, et il reste

$$\left[\sum U\right]_{u_0}^{u} = -\sum \left\{ \frac{Q}{\Phi} \frac{\left[\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x't - xt') + \ldots\right]}{\left[\frac{\partial S}{\partial x}(x't - xt') + \ldots\right]} \right\}_{u_0}^{u}.$$

Remplaçant $x't - xt', \ldots$ par les valeurs proportionnelles, introduites déjà plus haut, $f'_y \varphi'_z - f'_z \varphi'_y$, et désignant par $\Delta_{sf\varphi}$ le déterminant

$$\Delta_{sf\varphi} = \begin{vmatrix} S'_x & S'_y & S'_z \\ f'_x & f'_y & f'_z \\ \varphi'_x & \varphi'_y & \varphi'_z \end{vmatrix},$$

on arrive à la formule exprimée par le théorème suivant :

Soit $\frac{Q(x,y,z,t)}{S(x,y,z,t)}$ *une fonction rationnelle de degré zéro en* x, y, z, t; *la somme des valeurs que prend cette fonction aux points communs à une courbe gauche* C, *et à une surface algébrique* $\Phi = 0$, *est donnée par la formule*

$$\sum \frac{Q}{S} = -\sum \frac{Q}{\Phi} \frac{\Delta_{\Phi f\varphi}}{\Delta_{sf\varphi}} + \text{const.},$$

la constante étant indépendante des coefficients de la surface $\Phi = 0$, *et la somme du second membre étant étendue aux points communs à la courbe* C *et à la surface* $S = 0$.

On suppose toutefois que cette courbe et cette surface ne sont tangentes en aucun de leurs points communs.

Cette formule met en évidence la manière dont les coefficients de la surface variable, $\Phi = 0$, entrent dans la somme cherchée; sans y insister davantage, nous tirerons de ce qui précède l'extension aux surfaces de propriétés simples indiquées par nous dans le cas des courbes planes.

11. Nous avons trouvé, pour un résidu r de la fonction

$$\Theta(\lambda) = \frac{dU}{d\lambda} \frac{\Phi'_u}{\Phi}$$

correspondant à un zéro λ_0 de S, supposé simple, la relation

$$r = -\mathcal{E}\,\frac{d}{d\lambda}\,\frac{\Phi'_u}{\Phi} = -\mathcal{E}\,\frac{d}{du}\,\frac{\Phi'_\lambda}{\Phi}.$$

Il résulte de là que r sera nul si $\frac{\Phi'_\lambda}{\Phi}$ est indépendant de u, pour $\lambda = \lambda_0$.

Or soit

$$\Phi = u^\rho A + u^{\rho-1} B + \ldots + L,$$

A, B, ..., L étant des polynômes en x, y, z, t.

On a

$$\Phi'_\lambda = u^\rho A'_\lambda + u^{\rho-1} B'_\lambda + \ldots + L.$$

Pour que $\frac{\Phi'_\lambda}{\Phi}$ ne dépende pas de u, il faut et il suffit qu'on ait, pour $\lambda = \lambda_0$,

$$\frac{A'_\lambda}{A} = \frac{B'_\lambda}{B} = \ldots = \frac{L'_\lambda}{L}.$$

Ces relations peuvent s'interpréter géométriquement d'une manière simple; elles signifient que toutes les surfaces du système

$$\Phi(x, y, z, t, u) = 0,$$

qui passent par le point d'argument λ_0 sur la courbe C, sont tangentes à cette courbe en ce point.

Si donc cette condition est vérifiée pour tous les points communs à C et à la surface $S = 0$, les résidus r seront nuls, et par suite la fonction ΣU sera constante.

En d'autres termes, si l'on suppose que la surface $S = 0$ ne touche en aucun point la courbe C, la somme $\sum \frac{Q}{S}$, étendue aux points communs à cette courbe et à chacune des surfaces du système

$$\Phi(x, y, z, t, u) = 0,$$

sera indépendante du paramètre u, si toutes les surfaces du système qui passent par les points communs à la surface $S = 0$ et à la courbe C touchent cette courbe en ces points.

Cette proposition peut s'étendre aisément au cas où la surface $S = 0$ a, en un ou plusieurs points, un contact d'un ordre quelconque avec la courbe C.

Supposons en effet que la surface $S = 0$ ait avec la courbe C, en un point d'argument λ_0, un contact d'ordre $h - 1$, et admettons, pour plus de généralité, que la surface $Q = 0$ passe aussi par ce point et qu'elle y ait, avec la courbe, un contact d'ordre $k - 1$.

On aura, dans le voisinage de la valeur λ_0 du paramètre λ,

$$U = \frac{Q}{S} = \frac{\mathcal{A}}{(\lambda - \lambda_0)^{h-k}} + \frac{\mathcal{B}}{(\lambda - \lambda_0)^{h-k-1}} + \ldots + \frac{\mathcal{L}}{\lambda - \lambda_0} + \mathcal{M} + \ldots.$$

Le résidu r de la fonction

$$\Theta(\lambda) = \frac{dU}{d\lambda}\,\frac{\Phi'_u}{\Phi},$$

pour la valeur λ_0, sera

$$r = -\mathcal{L}\,\frac{d}{d\lambda}\,\frac{\Phi'_u}{\Phi} - \ldots - (h-k-1)\,\mathcal{B}\,\frac{d^{h-k-1}}{d\lambda^{h-k-1}}\,\frac{\Phi'_u}{\Phi} - (h-k)\,\mathcal{A}\,\frac{d^{h-k}}{d\lambda^{h-k}}\,\frac{\Phi'_u}{\Phi},$$

ce qu'on peut écrire

$$r = -\mathcal{L}\,\frac{d}{du}\,\frac{\Phi'_\lambda}{\Phi} - \ldots - (h-k)\,\mathcal{A}\,\frac{d}{du}\,\frac{d^{h-k-1}}{d\lambda^{h-k-1}}\,\frac{\Phi'_\lambda}{\Phi_\lambda}.$$

Cette valeur sera nulle si la quantité $\frac{\Phi'_\lambda}{\Phi}$ et ses dérivées par rapport à λ, jusqu'à l'ordre $h - k - 1$, sont indépendantes de u, pour $\lambda = \lambda_0$.

Or on a

$$\frac{d}{d\lambda}\,\frac{\Phi'_\lambda}{\Phi} = \frac{\Phi''_\lambda}{\Phi} - \frac{\Phi'^2_\lambda}{\Phi^2},$$

et, si l'on suppose que $\frac{\Phi'_\lambda}{\Phi}$ est indépendant de u, il faut et il suffit, pour que le premier membre le soit également, que $\frac{\Phi''_\lambda}{\Phi}$ ne dépende pas de u.

On voit de même que, pour que $\frac{d^2}{d\lambda^2}\,\frac{\Phi'_\lambda}{\Phi}$ soit indépendant de u, il faut et il suffit, les conditions précédentes étant supposées remplies, que $\frac{\Phi'''_\lambda}{\Phi}$ ne dépende pas de u; et ainsi de suite.

En résumé, r sera nul si les quantités

$$\frac{\Phi'_\lambda}{\Phi}, \quad \frac{\Phi''_\lambda}{\Phi}, \quad \dots, \quad \frac{\Phi_\lambda^{(h-k)}}{\Phi}$$

sont indépendantes de u quand on y fait $\lambda = \lambda_0$.

Soit toujours posé

$$\Phi = u^\rho A + u^{\rho-1} B + \dots + L,$$

on a

$$\Phi'_\lambda = u^\rho A'_\lambda + \dots\dots\dots\dots + L'_\lambda,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

La condition nécessaire et suffisante pour que $\frac{\Phi'_\lambda}{\Phi}, \frac{\Phi''_\lambda}{\Phi}, \dots$ soient indépendants de u est que les équations en u, de degré ρ,

$$\Phi = 0, \qquad \Phi'_\lambda = 0, \qquad \dots, \qquad \Phi_\lambda^{(h-k)} = 0,$$

aient les mêmes racines, quand on y fait $\lambda = \lambda_0$.

Soit u_0 une racine de l'équation $\Phi = 0$; dire qu'elle annule aussi $\Phi'_\lambda = 0$, c'est dire que la surface $\Phi(x, y, z, t, u_0)$, qui passe par le point d'argument λ_0 sur la courbe C, touche cette courbe en ce point; si u_0 annule aussi Φ''_λ, c'est que la surface $\Phi(x, y, z, t, u_0)$ a, au même point, un contact du second ordre avec la courbe, et ainsi de suite.

Il en résulte que la surface $\Phi(x, y, z, t, u_0)$ a, au point λ_0, un contact d'ordre $h - k$ avec la courbe C, et, par suite, la fonction $\frac{\Phi(x, y, z, t, u_0)}{\mu^p} \frac{Q(x, y, z, t)}{S(x, y, z, t)}$ s'annule en ce point, en désignant par μ une fonction linéaire quelconque de x, y, z, t, ne s'annulant pas au point considéré, et introduite pour l'homogénité.

Ainsi la somme $\sum \frac{Q}{S}$, étendue aux points communs à la courbe C et à chacune des surfaces du système $\Phi(x, y, z, t, u) = 0$, sera indépendante de u si, en chaque point de la courbe C rendant la fonction $\frac{Q}{S}$ infinie, les surfaces du système passant par ce point

$$\Phi(x, y, z, t, u_0) = 0, \qquad \Phi(x, y, z, t, u_1) = 0, \qquad \dots$$

sont telles que les fonctions $\frac{\Phi(x, y, z, t, u_0) Q(x, y, z, t)}{\mu^p S(x, y, z, t)}$, ... s'annulent au point considéré.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant, qui est une généralisation de celui que nous avons démontré dans le cas des courbes planes.

La somme des valeurs que prend une fonction rationnelle, $\frac{Q(x, y, z, t)}{S(x, y, z, t)}$ *homogène et de degré zéro, aux points communs à une courbe gauche algébrique* C *et à chacune des surfaces d'un système algébrique de degré* p, $\Phi(x, y, z, t, u) = 0$, *dont l'équation renferme un paramètre variable* u, reste constante, *si les surfaces de ce système,* $\Phi(x, y, z, t, u_i) = 0$, *qui passent respectivement par les points de la courbe* C *rendant la fonction* $\frac{Q}{S}$ *infinie, sont telles qu'en chacun de ces points les fonctions* $\frac{\Phi(x, y, z, t, u_i)}{\mu^p} \frac{Q(x, y, z, t)}{S(x, y, z, t)}$ *s'annulent,* μ *étant une fonction linéaire quelconque de* x, y, z, t *ne s'annulant en aucun des points considérés.*

Géométriquement, cela revient à dire que *les surfaces*

$$\Phi(x, y, z, t, u_i) = 0$$

ont, en chacun des points considérés, avec la courbe C, *un contact d'ordre supérieur au contact de cette courbe avec la surface* $S = 0$, et même, dans le cas où la surface $Q = 0$ passe par le point, il suffit que le contact de la courbe C et des surfaces $\Phi = 0$ soit d'ordre supérieur à la différence entre les ordres des contacts de la courbe avec les surfaces $S = 0$ et $Q = 0$.

12. Ce théorème s'étend immédiatement aux *intégrales abéliennes de seconde espèce,* puisque toute la démonstration repose sur ce fait que, dans le développement de la fonction $\frac{dU}{d\lambda}$ au voisinage d'un de ses infinis, λ_0, il n'existe pas de terme en $\frac{1}{\lambda - \lambda_0}$; on peut donc énoncer la proposition suivante :

Soit I *une intégrale abélienne de seconde espèce appartenant à* *une courbe gauche C. La somme des intégrales I, dont les limites inférieures et supérieures sont respectivement les systèmes de valeurs des coordonnées x, y, z, t, qui correspondent aux points d'intersection de la courbe C avec deux surfaces quelconques du système $\Phi(x, y, z, t, u) = 0$, est nulle, si les surfaces de ce système $\Phi(x, y, z, t, u_i) = 0$, qui passent respectivement par les points de la courbe C rendant l'intégrale I infinie, sont telles qu'en chacun de ces points les fonctions $\frac{\Phi(x, y, z, t, u_i)}{\mu^p}$ I s'annulent.*

On peut dire aussi qu'en ces points les fonctions

$$\frac{\Phi(x, y, z, t, u_i)}{\mu^p} \frac{dI}{d\left(\frac{x}{t}\right)}$$

doivent rester finies.

13. On peut étendre le théorème du n° **11** au cas où la courbe C est variable dans l'espace, et énoncer à cet égard la proposition suivante, qui se déduit sans difficulté de ce qui précède :

La somme des valeurs que prend une fonction rationnelle

$$\frac{Q(x, y, z, t)}{S(x, y, z, t)},$$

homogène et de degré zéro, aux points communs à trois surfaces algébriques,

$$f(x, y, z, t, u) = 0, \qquad \varphi(x, y, z, t, v) = 0, \qquad \psi(x, y, z, t, w) = 0,$$

est indépendante des paramètres u, v, w, dans le cas suivant :

Soient $f_1, f_2, \ldots; \varphi_1, \varphi_2, \ldots; \psi_1, \psi_2, \ldots$ les surfaces de chacun des trois systèmes qui passent par un même point, A, situé sur la surface $S = 0$: il faudra d'abord qu'elles admettent en A une même tangente commune T.

Soient de plus (f_i, φ_j), (f_i, ψ_k), (φ_j, ψ_k) les courbes communes à deux de ces surfaces, de système différent; il faudra que les courbes de ces trois séries aient entre elles, au point A, un contact d'un ordre supérieur au contact de l'une quelconque d'entre elles, en ce même point, avec la surface $S = 0$.

Dans le cas où la surface $S = 0$ est une surface simple, c'est-à-dire, si S n'est pas la puissance d'un polynôme Σ, la seconde condition est remplie d'elle-même si la première est vérifiée, pourvu toutefois que la tangente T ne touche pas S. Si T touche S au point A, il faudra que les courbes (f, φ), (f, ψ), (φ, ψ) soient osculatrices entre elles en ce point, etc.

Le théorème s'applique en particulier si l'équation $f = 0$ ne renferme pas de paramètre variable : il peut alors s'énoncer un peu plus simplement.

La somme des valeurs que prend la fonction $\frac{Q}{S}$ aux points communs à une surface fixe $f = 0$, et à deux surfaces mobiles

$$\varphi(x, y, z, t, v) = 0, \qquad \psi(x, y, z, t, w) = 0,$$

est indépendante des paramètres v et w, si, toutes les fois qu'un de ces points vient à coïncider avec un point A, situé sur la surface $S = 0$, les surfaces des systèmes mobiles $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \psi_1, \psi_2, \ldots$, passant par A, sont telles que les courbes (φ_j, ψ_k) aient en ce point avec la surface $f = 0$ un contact d'ordre supérieur au contact de l'une quelconque d'entre elles avec la surface $S = 0$.

14. Le produit des valeurs que prend une fonction rationnelle homogène et de degré zéro, $\frac{Q}{S}$, aux points communs à la courbe C et à chacune des surfaces du système $\Phi(x, y, z, t, u) = 0$, donne également lieu à quelques remarques intéressantes.

Soit $\prod_u \frac{Q}{S}$ ce produit, pour la surface correspondant à la valeur u du paramètre. Pour l'évaluer, nous considérerons, en posant toujours $U = \frac{Q}{S}$, l'intégrale

$$I = \int \frac{dU}{U} = \int \frac{dU}{d\lambda} \frac{1}{U} d\lambda.$$

Les infinis de la fonction $\frac{dU}{d\lambda} \frac{1}{U}$ sont tous simples, ce sont les zéros de S et les zéros de Q. Nous pouvons donc appliquer à I la formule du n° **14**, et nous aurons, les intégrales I étant prises entre les points communs à C et aux surfaces,

$$\Phi(x, y, z, t, u_0) = 0, \qquad \Phi(x, y, z, t, u) = 0 :$$

$$\Sigma \mathrm{I} = \Sigma \sigma \log \frac{\Phi(x, y, z, t, u)}{\Phi(x, y, z, t, u_0)},$$

la somme du second membre s'étendant aux points communs à la courbe C et aux surfaces $Q = 0$, $S = 0$, et σ étant en chacun de ces points le résidu de la fonction

$$\Theta_1(\lambda) = \frac{d\mathrm{U}}{d\lambda} \frac{1}{\mathrm{U}}.$$

Soit λ_0 l'argument d'un point commun à C et à la surface $Q = 0$. On a, au voisinage de cette valeur,

$$\mathrm{U} = \frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{S}} = \mathcal{A}(\lambda - \lambda_0)^k + \mathcal{B}(\lambda - \lambda_0)^{k-1} + \ldots,$$

$$\frac{d\mathrm{U}}{d\lambda} = \mathcal{A} k (\lambda - \lambda_0)^{k-1} + \ldots,$$

et, par suite, le résidu correspondant de $\Theta(\lambda)$ sera

$$\sigma_0 = k.$$

Si, de même, λ_1 est l'argument d'un point commun à C et à la surface $S = 0$, et si l'on a, au voisinage de cette valeur,

$$\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{S}} = \mathcal{A}_1 (\lambda - \lambda_1)^{-h} + \ldots,$$

on trouvera, pour résidu correspondant,

$$\sigma_1 = -h.$$

Il vient ainsi

$$\sum \mathrm{I} = \sum \int \frac{d\mathrm{U}}{\mathrm{U}} = \sum k \log \frac{\Phi(x, \ldots, u)}{\Phi(x, \ldots, u_0)} - \sum h \log \frac{\Phi(x, \ldots, u)}{\Phi(x, \ldots, u_0)}.$$

Dans le second membre, la première somme est étendue aux points communs à la courbe C et à la surface $Q = 0$; dans la deuxième, aux points communs à C et à la surface $S = 0$.

Si l'on passe des logarithmes aux fonctions, on arrive à la formule suivante :

$$\prod_u \frac{Q}{S} = \prod_{u_0} \frac{Q}{S} \prod_Q \frac{\Phi(x, y, z, t, u)}{\Phi(x, y, z, t, u_0)} \prod_S \frac{\Phi(x, y, z, t, u_0)}{\Phi(x, y, z, t, u)}.$$

Les produits $\prod_Q$ s'étendent aux points communs à C et à la surface $Q = 0$; les produits $\prod_S$ aux points communs à C et à $S = 0$. On peut écrire plus simplement

$$\prod_u \frac{Q}{S} = A \frac{\Pi_Q \Phi(x, y, z, t, u)}{\Pi_S \Phi(x, y, z, t, u)}, \tag{6}$$

A étant une constante indépendante de u.

15. Il est aisé de trouver la condition nécessaire pour que le second membre soit lui-même indépendant de u.

Le numérateur $\Pi_Q \Phi(x, y, z, t, u)$ est un polynôme en u, dont les racines sont celles des équations

$$\Phi(x_1, y_1, z_1, t_1, u) = 0, \qquad \Phi(x_2, \ldots, t_2, u) = 0, \qquad \ldots,$$

$x_1, \ldots, t_1$; $x_2, \ldots, t_2$; ... étant les coordonnées des points communs à la surface $Q = 0$ et à la courbe C. Ces racines sont donc les valeurs de u qui correspondent aux surfaces du système $\Phi(x, y, z, t, u)$, passant par les points en question.

De même, les racines du dénominateur $\Pi_S \Phi(x, y, z, t, u)$ sont les valeurs de u qui correspondent aux surfaces du système passant par les points communs à la surface $S = 0$ et à la courbe C.

Pour que le second membre de la relation (6) soit indépendant de u, il faut et il suffit donc que les deux séries précédentes de valeurs de u soient identiques.

Donc :

Le produit des valeurs que prend une fonction rationnelle,

$\frac{Q}{S}(x, y, z, t)$, *homogène et de degré zéro, aux points communs à une courbe gauche algébrique*, C, *et à chacune des surfaces du système* $\Phi(x, y, z, t, u) = 0$, *est indépendant du paramètre* u, *si les surfaces de ce système qui passent par chacun des points communs à la courbe* C *et à la surface* $Q = 0$ *sont les mêmes que celles qui passent par chacun des points communs à la courbe et à la surface* $S = 0$.

En particulier, le produit restera constant si toutes les surfaces du système qui passent par un quelconque des points communs à la courbe C *et à l'ensemble des deux surfaces* $Q = 0$, $S = 0$, *passent en même temps par tous les autres.*

Cette proposition subsiste sans modification, quels que soient les contacts de la courbe C avec les surfaces $Q = 0$, $S = 0$.

III. — Extension d'une formule de Jacobi.

16. Pour l'application du théorème d'Abel aux intégrales multiples, nous nous appuierons sur une formule qu'on peut considérer comme l'extension d'une formule célèbre, donnée autrefois par Jacobi, et qui joue en Analyse un rôle important. Elle se déduit de considérations analogues à celles dont nous venons de faire usage.

La formule de Jacobi est la suivante.

Si $f(X, Y) = 0$ et $\varphi(X, Y) = 0$ sont les équations de deux courbes planes algébriques, de degrés respectifs m et n, et si $Q(X, Y)$ est un polynôme en X, Y, de degré égal ou inférieur à $m + n - 3$, on a identiquement

$$\sum \frac{Q(X, Y)}{f'_X \varphi'_Y - f'_Y \varphi'_X} = 0,$$

la somme étant étendue à tous les points (X, Y) communs aux deux courbes $f = 0$, $\varphi = 0$. Jacobi a même donné un moyen de calculer cette somme, dans le cas où le degré du polynôme Q est égal à $m + n - 2$.

L'importance de la formule de Jacobi est mise en évidence par ce fait qu'on peut, en la prenant comme point de départ, établir le théorème d'Abel pour les intégrales de première et de troisième espèce : c'est la marche qu'ont suivie MM. Clebsch et Gordan.

Cette formule s'étend sans difficulté au cas d'un plus grand nombre de variables et de fonctions : Jacobi l'avait observé lui-même; après lui, Liouville et Clebsch ont donné des démonstrations de la formule ainsi généralisée, qui, dans le cas des surfaces, peut s'énoncer comme il suit :

Si $f(X, Y, Z) = 0$, $\varphi(X, Y, Z) = 0$, $\psi(X, Y, Z) = 0$ sont les équations de trois surfaces algébriques de degrés respectifs m, n et p; si l'on désigne par Δ le déterminant

$$\begin{vmatrix} f'_X & f'_Y & f'_Z \\ \varphi'_X & \varphi'_Y & \varphi'_Z \\ \psi'_X & \psi'_Y & \psi'_Z \end{vmatrix}$$

et si $Q(X, Y, Z)$ est un polynôme en X, Y, Z, de degré inférieur au degré de Δ, c'est-à-dire à $m + n + p - 3$, on a identiquement

$$\sum \frac{Q(X, Y, Z)}{\Delta(X, Y, Z)} = 0,$$

la somme étant étendue aux points (X, Y, Z) communs aux trois surfaces $f = 0$, $\varphi = 0$, $\psi = 0$.

17. Que devient cette formule dans le cas où le degré de Q est supérieur ou égal à celui de Δ? C'est ce que nous allons rechercher, en examinant même le cas où Q est non plus un polynôme, mais une fonction rationnelle quelconque; nous arriverons ainsi à une expression relativement simple, qui servira de base à nos recherches ultérieures sur le théorème d'Abel.

Désignons toujours par C la courbe gauche, intersection complète ou partielle, des deux surfaces $f(X, Y, Z) = 0$, $\varphi(X, Y, Z) = 0$, de degrés respectifs m et n.

Soient $Q(X, Y, Z)$ un polynôme de degré q en X, Y, Z; $\psi(X, Y, Z)$ un autre polynôme de degré p : désignons toujours par x', y', z', t' les dérivées des coordonnées x, y, z, t d'un point de la courbe C par rapport au paramètre fuchsien λ, et considérons l'intégrale

$$I = \int \frac{Q(X,Y,Z)}{\psi(X,Y,Z)[f'_Y\varphi'_Z - f'_Z\varphi'_Y]}\, dX,$$

X, Y, Z étant liés par les relations $f = 0$, $\varphi = 0$; ou, plus exactement, X, Y, Z étant les coordonnées d'un point de la courbe C. Si nous rendons cette intégrale homogène par la substitution de $\frac{x}{t}$, $\frac{y}{t}$, $\frac{z}{t}$ à X, Y, Z et si nous remplaçons x, y, z, t par leurs valeurs en fonction thêtafuchsienne de λ, l'intégrale devient

$$I = \int \frac{Q(x,y,z,t)}{\psi(x,y,z,t)[f'_y\varphi'_z - f'_z\varphi'_y]}\, \frac{x't - xt'}{t^k}\, d\lambda.$$

Dans cette expression, k est un entier défini par la relation

$$k = q - (m + n + p) + 4.$$

Désignons par $\Theta(\lambda)$ la fonction de λ soumise au signe $\int$,

$$\Theta(\lambda) = \frac{Q}{\psi[f'_y\varphi'_z - f'_z\varphi'_y]}\, \frac{x't - xt'}{t^k}.$$

Nous savons (n° 5) que la somme des résidus de cette fonction, dans l'intérieur du polygone fondamental, est égale à zéro.

Les infinis de la fonction $\Theta(\lambda)$ sont de trois sortes :

1° Ceux qui correspondent à un zéro de $\psi(x,y,z,t)$, c'est-à-dire les arguments, λ, des points communs à la courbe C et à la surface $\psi(x,y,z,t) = 0$;

2° Ceux qui correspondent à un zéro de la fonction $f'_y\varphi'_z - f'_z\varphi'_y$;

3° Ceux qui correspondent à un zéro de t^k, dans le cas où le nombre k est au moins égal à 1, c'est-à-dire si l'on a $q \geqq m + n + p - 3$.

Soit d'abord λ l'argument d'un point de la courbe C situé sur la surface $\psi(x,y,z,t) = 0$.

Si nous admettons que cette surface ne touche C en aucun point, λ est un zéro simple de $\psi(x,y,z,t)$ et le résidu r est donné par la formule

$$r = \frac{Q(x, y, z, t)}{f'_y \varphi'_z - f'_z \varphi'_y} \frac{x't - xt'}{t^k} \frac{1}{\psi'_x x' + \psi'_y y' + \psi'_z z' + \psi'_t t'},$$

et, d'après un calcul déjà fait plusieurs fois,

$$r = \frac{Q(x, y, z, t)}{f'_y \varphi'_z - f'_z \varphi'_y} \frac{x't - xt'}{t^{k-1}} \frac{1}{\psi'_x(x't - xt') + \psi'_y(y't - yt') + \psi'_z(z't - zt')}.$$

Remplaçant $x't - xt'$, $y't - yt'$, $z't - zt'$ par les quantités proportionnelles (n° 4)

$$f'_y \varphi'_z - f'_z \varphi'_y, \qquad f'_z \varphi'_x - f'_x \varphi'_z, \qquad f'_x \varphi'_y - f'_y \varphi'_x,$$

on trouve

$$r = \frac{Q(x, y, z, t)}{t^{k-1} \Delta(x, y, z, t)} = \frac{Q(X, Y, Z)}{\Delta(X, Y, Z)},$$

Δ étant le déterminant défini au n° **16**, et X, Y, Z étant les coordonnées d'un des points communs à la courbe C et à la surface $\psi(X, Y, Z) = 0$.

La somme des résidus de la fonction $\Theta(\lambda)$, correspondant aux zéros de ψ, est donc précisément égale à la somme cherchée, $\sum \frac{Q}{\Delta}$, étendue aux points communs à la courbe C et à la surface $\psi = 0$.

Soit maintenant un zéro, λ, de $f'_y \varphi'_z - f'_z \varphi'_y$.

On a en chaque point de la courbe C (n° 4)

$$\frac{x't - xt'}{f'_y \varphi'_z - f'_z \varphi'_y} = \frac{y't - yt'}{f'_z \varphi'_x - f'_x \varphi'_z} = \frac{z't - zt'}{f'_x \varphi'_y - f'_y \varphi'_x}.$$

Si le zéro, λ, de $f'_y \varphi'_z - f'_z \varphi'_y$ n'annule pas $x't - xt'$, c'est-à-dire si le point correspondant de la courbe C n'est pas le point de contact d'une tangente parallèle au plan des YZ, il annulera nécessairement les fonctions $f'_z \varphi'_x - f'_x \varphi'_z$ et $f'_x \varphi'_y - f'_y \varphi'_x$. Deux cas sont donc à distinguer :

1° Le zéro, λ, de $f'_y \varphi'_z - f'_z \varphi'_y$ annule $x't - xt'$; la relation

$$\Theta(\lambda) = \frac{Q}{\psi t^k} \frac{x't - xt'}{f'_y \varphi'_z - f'_z \varphi'_y}$$

montre que Θ reste fini pour cette valeur, et par suite le résidu correspondant est nul.

2° Le zéro considéré annule $f'_y\varphi'_z - f'_z\varphi'_y$; $f'_z\varphi'_x - f'_x\varphi'_z$; $f'_x\varphi'_y - f'_y\varphi'_x$; les deux surfaces $f = 0$, $\varphi = 0$ sont alors tangentes au point correspondant de la courbe C, ou, plus exactement, leur intersection présente en ce point un point singulier. Ce cas va lui-même se subdiviser en deux autres, selon que le point singulier de l'intersection sera ou non un point singulier de la courbe C; ce sera nécessairement un point singulier de C, si C constitue l'intersection complète des deux surfaces, ce que nous allons supposer.

18. Admettons, dans cette hypothèse, qu'il s'agisse d'un point double, A, de la courbe C, de coordonnées a, b, c, auquel correspondent les deux valeurs μ et μ_1 du paramètre λ.

Posons, pour simplifier,

$$R = f'_Y\varphi'_Z - f'_Z\varphi'_Y.$$

Le résidu r_μ de la fonction $\Theta(\lambda)$, correspondant à l'infini simple μ, sera

$$r_\mu = \frac{Q(a, b, c)}{\psi(a, b, c)} \frac{a'}{R'_a a' + R'_b b' + R'_c c'},$$

a', b', c' étant les dérivées X, Y, Z par rapport à λ, pour la valeur $\lambda = \mu$: ces dérivées sont proportionnelles aux cosinus directeurs de la tangente menée, au point A, à la branche de la courbe C qui correspond à la valeur μ du paramètre.

On a de même, pour le résidu correspondant à $\lambda = \mu_1$,

$$r_{\mu_1} = \frac{Q(a, b, c)}{\psi(a, b, c)} \frac{a'_1}{R'_a a'_1 + R'_b b'_1 + R'_c c'_1};$$

d'où

$$r_\mu + r_{\mu_1} = \frac{Q(a, b, c)}{\psi(a, b, c)} \left(\frac{a'}{R'_a a' + R'_b b' + R'_c c'} + \frac{a'_1}{R'_a a'_1 + R'_b b'_1 + R'_c c'_1}\right).$$

Je dis que la quantité entre crochets dans le second membre est égale à zéro.

Soit, en effet, $P(X, Y, Z)$ un polynôme de degré $m+n-4$ en X, Y, Z.

On voit, comme plus haut, que l'intégrale, appartenant à la courbe C,

$$\int \frac{P(X, Y, Z)}{f'_Y \varphi'_Z - f'_Z \varphi'_Y} dX,$$

prise le long du polygone fondamental est nulle. Cette intégrale peut s'écrire

$$\int \frac{P(x, y, z, t)}{f'_y \varphi'_z - f'_z \varphi'_y} (x't - xt')\, d\lambda,$$

et, t n'étant pas en facteur au dénominateur à cause du degré de P, la quantité sous le signe $\int$ n'a pas d'autres infinis que les valeurs de λ qui correspondent aux points singuliers de la courbe C. La somme des résidus relatifs à ces valeurs est donc nulle. Or, on peut choisir pour P le premier membre de l'équation d'une surface de degré $m+n-4$, présentant en tous les points singuliers de la courbe C, le point A excepté, le caractère d'une surface adjointe (¹); les seuls infinis de la fonction $\frac{P(x't - xt')}{f'_y \varphi'_z - f'_z \varphi'_y}$ sont alors les quantités μ et μ_1; la somme des résidus correspondants étant nulle, on a, comme plus haut,

$$0 = r'_\mu + r'_{\mu_1} = P(a, b, c)\left(\frac{a'}{R'_a a' + R'_b b' + R'_c c'} + \frac{a'_1}{R'_a a'_1 + R'_b b'_1 + R'_c c'_1}\right),$$

et, par suite, on a bien aussi, puisque $P(a, b, c)$ n'est pas nul,

$$r_\mu + r_{\mu_1} = 0.$$

Il n'y aurait d'exception que si, dans l'expression de $r_\mu + r_{\mu_1}$, on ne pouvait pas mettre en facteur $\frac{Q(a, b, c)}{\psi(a, b, c)}$, c'est-à-dire si $\psi(a, b, c)$ était nul, ce qui, géométriquement, signifierait que la surface $\psi = 0$ passe par le point singulier. Écartons ce cas particulier; nous voyons que, si la courbe C est l'intersection complète des deux surfaces $f = 0$, $\varphi = 0$,

(¹) *Voir*, pour la démonstration de l'existence d'un tel polynôme P le Mémoire de M. Nöther sur les courbes gauches (*Journal de Crelle*, t. **93**).

il n'y a pas, dans l'évaluation des résidus de $\Theta(\lambda)$, à tenir compte des zéros de $f'_z\varphi'_y - f'_y\varphi'_z$.

Si C ne forme pas l'intersection complète des deux surfaces $f=0$, $\varphi=0$, nous nous bornerons à faire observer qu'on n'a pas à tenir compte de ces zéros s'ils annulent en même temps $Q(x, y, z, t)$, parce qu'alors $\Theta(\lambda)$ reste fini pour les valeurs correspondantes.

19. Revenant au cas où C est l'intersection complète des deux surfaces $f=0$, $\varphi=0$, il résulte de tout ce qui précède que *la somme* à évaluer, $\sum \frac{Q}{\Delta}$, ou, en coordonnées homogènes, $\sum \frac{Q}{t^{k-1}\Delta}$, *étendue à tous les points communs aux trois surfaces* $f=0$, $\varphi=0$, $\psi=0$, *est égale et de signe contraire à la somme des résidus, correspondant aux zéros de* t, *de la fonction*

$$\Theta(\lambda) = \frac{Q(x, y, z, t)}{\psi(x, y, z, t)[f'_y\varphi'_z - f'_z\varphi'_y]} \frac{x't - xt'}{t^k}, \tag{7}$$

où l'on suppose les coordonnées de la courbe $f=0$, $\varphi=0$ exprimées en fonction thêtafuchsienne d'un paramètre λ.

Rappelons que m, n, p, q sont les degrés en X, Y, Z de f, φ, ψ, Q et qu'on a

$$k = q - (m+n+p) + 4.$$

Pour arriver à ce résultat nous avons dû faire plusieurs hypothèses, dont il est aisé de nous débarrasser.

Nous avons admis que la surface $\psi=0$ ne touchait pas la courbe C et ne passait par aucun des points singuliers de cette courbe.

S'il en est autrement, désignons par x, y, z, t les coordonnées d'un point de contact de $\psi=0$ et de C, ou celles d'un point double de C par lequel passerait la surface $\psi=0$. Il est clair qu'en ce point le déterminant Δ s'annule; de plus, deux des points communs aux trois surfaces $f=0$, $\varphi=0$, $\psi=0$ étant confondus avec le point x, y, z, t, deux des termes de la somme $\sum \frac{Q}{\Delta}$ deviennent infinis, et cette somme est indéterminée.

Mais, si nous supposons que la surface $\psi = 0$ dépende d'un paramètre variable, le théorème précédent s'appliquera lorsque cette surface, par exemple, sera sur le point de toucher la courbe C, et il restera vrai à la limite, lorsqu'elle touchera cette courbe; la somme $\sum \frac{Q}{\Delta}$, dont deux termes tendent vers l'infini, aura ainsi une limite bien déterminée. Il en sera de même si la surface $\psi = 0$ vient à passer, en variant d'une manière continue, par un point multiple de C.

Il faut seulement que la surface mobile, $\psi = 0$, ne passe pas *constamment* par un point multiple de C, et ne touche pas constamment cette courbe en un même point.

Remarquons enfin qu'il n'est pas nécessaire, pour qu'on puisse appliquer la formule précédente, que les surfaces $f = 0$, $\varphi = 0$ se coupent suivant une courbe indécomposable : si ces surfaces se coupaient en effet suivant plusieurs courbes distinctes, on pourrait modifier infiniment peu leurs coefficients de façon à rester dans l'hypothèse d'une intersection indécomposable, et le théorème serait applicable. Il restera donc à la limite, puisqu'il conduit à une formule parfaitement déterminée; seulement il faudra former autant de fonctions $\Theta(\lambda)$ qu'il y a de courbes distinctes dans l'intersection des deux surfaces, et faire la somme des résidus de toutes ces fonctions pour tous les zéros de t.

20. On peut, dans certains cas, transformer ce résultat, pour le présenter sous une forme plus simple.

Soit λ_0 un zéro de t, c'est-à-dire l'argument d'un point à l'infini sur la courbe $f = 0$, $\varphi = 0$. Le résidu correspondant de $\Theta(\lambda)$ est égal, au facteur $\frac{1}{2\pi i}$ près, à la valeur de l'intégrale $\int \Theta(\lambda)\, d\lambda$ le long d'un petit contour entourant le point λ_0. Effectuons un changement de variable, en prenant pour nouvelle variable, à la place de λ, la quantité $\frac{t}{x}$, et posons

$$\frac{t}{x} = \theta, \qquad \frac{y}{x} = \eta, \qquad \frac{z}{x} = \zeta.$$

Soient 0, η_0, ζ_0 les valeurs de θ, η, ζ pour $\lambda = \lambda_0$; l'intégrale précédente peut s'écrire

$$\int \Theta(\lambda)\,d\lambda = \int \Theta(\lambda)\frac{1}{\left(\frac{d\theta}{d\lambda}\right)}\,d\theta,$$

c'est-à-dire

$$\int \Theta(\lambda)\,d\lambda = \int \frac{Q(1,\eta,\zeta,\theta)}{\psi(1,\eta,\zeta,\theta)}\,\frac{x't-xt'}{f'_\eta\varphi'_\zeta - f'_\zeta\varphi'_\eta}\,\frac{x^2}{t'x-x't}\,\frac{x^{q-p-m-n-k+2}}{\theta^k}\,d\theta,$$

ou, en simplifiant et remarquant que $k = q-(m+n+p)+4$,

$$\int \Theta(\lambda)\,d\lambda = -\int \frac{Q(1,\eta,\zeta,\theta)}{\psi(1,\eta,\zeta,\theta)\,[f'_\eta\varphi'_\zeta - f'_\zeta\varphi'_\eta]}\,\frac{d\theta}{\theta^k}.$$

Si λ_0 est un zéro simple de t, pendant que la variable λ décrit un contour autour du point λ_0, la variable θ décrira une fois un contour autour du point $\theta = 0$, et, par suite, le résidu que nous cherchons sera égal au produit de $\frac{1}{2\pi i}$ par la valeur de l'intégrale du second membre le long d'un petit contour entourant le point $\theta = 0$, les fonctions η et ζ étant définies par les équations

$$f(1,\eta,\zeta,\theta) = 0, \qquad \varphi(1,\eta,\zeta,\theta) = 0,$$

et ayant les valeurs initiales η_0 et ζ_0 pour $\theta = 0$. On peut donc dire que le résidu cherché est le résidu de la fonction de θ

$$-\frac{Q}{\psi}\,\frac{1}{[f'_\eta\varphi'_\zeta - f'_\zeta\varphi'_\eta]\theta^k},$$

pour $\theta = 0$, η et ζ étant définis comme on vient de l'expliquer. Ce résidu est évidemment égal au coefficient de θ^{k-1} dans le développement, suivant les puissances croissantes de θ, de la fonction

$$-\frac{Q}{\psi[f'_\eta\varphi'_\zeta - f'_\zeta\varphi'_\eta]},$$

c'est-à-dire à l'expression

$$\frac{-1}{1.2\ldots(k-1)}\,\frac{d^{k-1}}{d\theta^{k-1}}\left[\frac{Q(1,\eta,\zeta,\theta)}{\psi(1,\eta,\zeta,\theta)\,[f'_\eta\varphi'_\zeta - f'_\zeta\varphi'_\eta]}\right],$$

où l'on a fait $\theta = 0$.

Nous sommes ainsi arrivé à la formule suivante :

Soient trois surfaces algébriques,

$$f(x, y, z, t) = 0, \qquad \varphi(x, y, z, t) = 0, \qquad \psi(x, y, z, t) = 0,$$

de degrés respectifs m, n, p; *soit de plus* $Q(x, y, z, t)$ *un polynôme homogène en* x, y, z, t, *dont le degré* q *est supérieur ou égal à* $m+n+p-3$, *et soit posé*

$$k = q-(m+n+p)+4.$$

Désignons par Δ *le déterminant*

$$\Delta = \begin{vmatrix} f'_x & f'_y & f'_z \\ \varphi'_x & \varphi'_y & \varphi'_z \\ \psi'_x & \psi'_y & \psi'_z \end{vmatrix}.$$

La valeur de la somme $\sum \frac{Q}{t^{k-1}\Delta}$, *étendue à tous les points communs aux trois surfaces* $f=0$, $\varphi=0$, $\psi=0$, *est donnée par la formule*

$$(8)\qquad \sum \frac{Q}{t^{k-1}\Delta} = \frac{1}{1.2\ldots(k-1)} \sum \frac{d^{k-1}}{d\theta^{k-1}} \left[\frac{Q(1, \eta, \zeta, \theta)}{\psi(1, \eta, \zeta, \theta)\,[f'_\eta \varphi'_\zeta - f'_\zeta \varphi'_\eta]}\right]_0.$$

Dans le second membre, la somme s'étend à tous les points à l'infini de la courbe $f=0$, $\varphi=0$; η, ζ, θ *désignent* $\frac{y}{x}, \frac{z}{x}, \frac{t}{x}$; η et ζ *sont considérées comme des fonctions de* θ *définies par les équations*

$$f(1, \eta, \zeta, \theta) = 0, \qquad \varphi(1, \eta, \zeta, \theta) = 0,$$

et, dans la dérivée d'ordre $k-1$ *calculée d'après ces bases, on fait finalement* $\theta = 0$.

On suppose toutefois que la courbe $f=0$, $\varphi=0$ ne touche pas le plan de l'infini.

21. *Remarque I.* — Dans cet énoncé, nous n'avons pas laissé subsister la restriction faite plus haut que la courbe commune aux surfaces $f=0$, $\varphi=0$ est indécomposable : si en effet les deux surfaces se coupent suivant plusieurs courbes distinctes, modifions infiniment peu leurs coefficients de manière qu'elles se rencontrent suivant une courbe indécomposable; le théorème est alors applicable, et il est clair qu'il reste vrai à la limite, puisque la formule continue à se présenter sous une forme bien déterminée. Seulement il importe d'observer que la somme $\sum \frac{Q}{t^{k-1}\Delta}$ ainsi calculée s'étend à *tous* les points communs aux surfaces $f=0$, $\varphi=0$, $\psi=0$, et qu'elle ne serait pas vraie si on l'appliquait seulement aux points communs à la surface $\psi=0$ et à une partie de l'intersection des surfaces $f=0$, $\varphi=0$.

22. *Remarque II.* — La formule se présente sous une forme non symétrique par rapport aux fonctions f, φ et ψ : il est clair qu'elle peut prendre deux autres formes, par la permutation entre elles de ces fonctions. Dans chaque cas particulier, on choisira ainsi la forme la plus commode pour le développement de la dérivée d'ordre $k-1$.

23. *Remarque III.* — Si le degré de Q est inférieur ou égal à

$$m+n+p-4,$$

k est négatif ou nul, et t ne figure plus en dénominateur dans $\Theta(\lambda)$: il n'y a donc pas de résidus correspondant aux zéros de t, et la somme $\sum \frac{Q t^{1-k}}{\Delta}$ étendue aux points d'intersection des trois surfaces $f=0$, $\varphi=0$, $\psi=0$, est nulle. C'est le théorème de Jacobi, Liouville et Clebsch.

24. *Remarque IV.* — Si Q est de même degré que Δ, c'est-à-dire de degré $m+n+p-3$, on aura $k=1$, et la formule devient

$$\sum \frac{Q}{\Delta} = \sum \frac{Q(1,\eta,\zeta,0)}{\psi(1,\eta,\zeta,0)\,[f'_\eta \varphi'_\zeta - f'_\zeta \varphi'_\eta]}$$

ou, si l'on veut,

$$\sum \frac{Q}{\Delta} = \sum \frac{x\,Q(x,y,z,t)}{\psi(x,y,z,t)\,[f'_y \varphi'_z - f'_z \varphi'_y]}.$$

la somme du second membre étant étendue aux points à l'infini de la courbe $f=0$, $\varphi=0$.

Cette somme ne dépend que des termes des degrés le plus élevés en x, y, z dans les polynômes f, φ, ψ et Q, c'est-à-dire des courbes à l'infini sur les surfaces $f=0$, $\varphi=0$, $\psi=0$, $Q=0$; elle ne change donc pas si l'on remplace ces surfaces par des surfaces qui leur soient respectivement asymptotiques.

25. *Remarque V.* — On voit de même, en général, que la somme $\sum \frac{Q}{t^{k-1}\Delta}$, étendue aux points d'intersection des trois surfaces $f=0$, $\varphi=0$, $\psi=0$, ne change pas si l'on remplace f, φ, ψ et Q respectivement par $f+t^k f_1$; $\varphi+t^k\varphi_1$; $\psi+t^k\psi_1$; $Q+t^k Q_1$; f_1, φ_1, ψ_1, Q_1 étant des polynômes quelconques de degrés respectifs $m-k$, $n-k$, $p-k$, $q-k$; car, dans la dérivée d'ordre $k-1$ qui figure dans le second membre de (8), f_1, φ_1, ψ_1, Q_1 et leurs dérivées n'apparaîtront que multipliés par des puissances de θ, et par suite ne subsisteront plus dans l'équation quand on y fera $\theta=0$.

26. *Remarque VI.* — La forme de la fonction $\Theta(\lambda)$

$$\Theta(\lambda)=\frac{Q}{\psi(f'_y\varphi'_z-f'_z\varphi'_y)}\,\frac{x't-xt'}{t^k}$$

montre que les résidus par rapport aux zéros de t^k seront tous nuls, non seulement si Q est divisible par t^k, ce qui est le cas de la *Remarque III*, mais encore si $\frac{Q}{t^k}$ reste fini pour les points de la courbe $f=0$, $\varphi=0$, situés dans le plan de l'infini, $t=0$. Donc :

La somme $\sum \frac{Q(x,y,z,t)}{t^{k-1}\Delta(x,y,z,t)}$, étendue aux points d'intersection des trois surfaces $f=0$, $\varphi=0$, $\psi=0$, est nulle si la fonction $\frac{Q(x,y,z,t)}{t^k\mu^{q-k}}$ reste finie pour les points à l'infini de la courbe commune à deux de ces surfaces, en désignant par μ une fonction linéaire quelconque de x, y, z, t, introduite pour l'homogénéité, et ne s'annulant en aucun de ces points.

27. La formule du n° **19** est susceptible d'une extension importante, à laquelle on arrive par l'application des principes employés plus haut.

Si l'on part en effet de l'intégrale, appartenant toujours à la courbe $f=0$, $\varphi=0$,

$$I=\int\frac{Q(X,Y,Z)}{\psi(X,Y,Z)[f'_Y\varphi'_Z-f'_Z\varphi'_Y]}\frac{dX}{R^\alpha T^\beta\ldots},$$

Q étant un polynôme de degré q; R, T, ... des polynômes de degrés r, s, ... en X, Y, Z, on voit qu'en la rendant homogène et en substituant à x, y, z, t leurs valeurs en fonction thêtafuchsienne de λ, elle prend la forme

$$I=\int\frac{Q}{\psi[f'_y\varphi'_z-f'_z\varphi'_y]}\frac{x't-xt'}{R^\alpha T^\beta\ldots}\frac{d\lambda}{t^k},$$

étant posé

$$k=q+4-(m+n+p)-(\alpha r+\beta s+\ldots).$$

Le facteur t ne figurera pas au dénominateur si l'on a $k\leqq 0$, c'est-à-dire si

$$m+n+p+\alpha r+\beta s+\ldots\geqq q+4.$$

Cela posé, on voit, comme plus haut, que la somme des résidus, dans le polygone fondamental, de la fonction

$$\Theta(\lambda)=\frac{Q}{\psi(f'_y\varphi'_z-f'_z\varphi'_y)}\frac{x't-xt'}{R^\alpha T^\beta\ldots t^k}, \tag{9}$$

est nulle, et qu'il n'y a pas lieu de tenir compte de ceux qui proviennent des zéros de $f'_y\varphi'_z-f'_z\varphi'_y$, pourvu toutefois qu'aucune des surfaces $\psi=0$; $R=0$; $T=0$; ...; $t=0$ ne passe par un point singulier de la courbe $f=0$, $\varphi=0$.

Le résidu de $\Theta(\lambda)$ pour un zéro de ψ, correspondant à un point x, y, z, t de la courbe $f=0$, $\varphi=0$, est, d'après le calcul du n° **17**, égal à

$$\frac{Q}{\Delta R^\alpha T^\beta\ldots}.$$

On a donc la relation

$$\sum\frac{Q}{\Delta R^\alpha T^\beta\ldots}+\sum\rho_R+\sum\rho_T+\ldots=0, \tag{10}$$

la première somme s'étendant aux points communs aux surfaces $f=0$, $\varphi=0$, $\psi=0$; $\sum \rho_R$, $\sum \rho_T$, ... désignant les sommes des résidus de la fonction $\Theta(\lambda)$ par rapport aux zéros de R, T, ..., t^k.

Si l'on suppose $\alpha=\beta=\ldots=1$, et si k est nul ou négatif, la formule devient

$$(11)\quad \sum \frac{Q}{\Delta_{f\varphi\psi} RS\ldots} + \sum \frac{Q}{\Delta_{f\varphi R}\psi T\ldots} + \sum \frac{Q}{\Delta_{f\varphi T}\psi R\ldots} + \ldots = 0,$$

$\Delta_{f\varphi\psi}$ désignant toujours le déterminant dont les lignes sont les dérivées partielles de f, φ, ψ par rapport à x, y, z. La première somme s'étend aux points communs aux surfaces $f=0$, $\varphi=0$, $\psi=0$; la seconde aux points communs à $f=0$, $\varphi=0$, $R=0$, et ainsi de suite.

28. *Remarque I.* — La formule (10) montre que la somme $\sum \frac{Q}{\Delta R^\alpha T^\beta \ldots}$ est nulle si $\Theta(\lambda)$ n'a pas d'autres infinis que les zéros de ψ et ceux de $f'_y \varphi'_z - f'_z \varphi'_y$, c'est-à-dire si la surface $Q=0$ a un contact d'ordre $\alpha-1$ avec la courbe $f=0$, $\varphi=0$, en tout point de cette courbe situé sur $R=0$; un contact d'ordre $\beta-1$ en tout point situé sur $T=0$, ..., un contact d'ordre $k-1$ en tout point situé sur $t=0$, $[k \geqq 1]$.

D'une manière plus précise, on peut dire que la somme $\sum \frac{Q}{\Delta R^\alpha T^\beta \ldots}$ étendue aux points communs aux surfaces $f=0$, $\varphi=0$, $\psi=0$ est nulle, si la fonction $\frac{Q}{R^\alpha T^\beta \ldots t^k \mu^h}$ reste finie pour tous les points de la courbe $f=0$, $\varphi=0$ situés sur les surfaces $R=0$, $T=0$, ..., $t=0$, μ étant une fonction linéaire de x, y, z, t, introduite à une puissance convenable pour l'homogénéité, et ne s'annulant en aucun de ces points.

29. *Remarque II.* — Si, dans ce qui précède, on remplace le polynôme Q par un polynôme de même degré, Q_1, de la forme

$$Q_1 = Q + Af + B\varphi + C\psi,$$

A, B, C étant des polynômes entiers, la somme $\sum \frac{Q_1}{\Delta R^\alpha T^\beta \ldots}$, étendue aux points d'intersection des surfaces $f=0$, $\varphi=0$, $\psi=0$, sera égale à la somme analogue, où Q_1 est remplacé par Q.

Elle aura encore pour valeur la somme, changée de signe, des résidus par rapport aux zéros de R, S, ..., t de la fonction

$$\Theta_1(\lambda)=\frac{Q+Af+B\varphi+C\psi}{\psi(f'_y\varphi'_z-f'_z\varphi'_y)}\,\frac{x't-xt'}{R^\alpha T^\beta\ldots t^k}.$$

Elle sera nulle si la fonction $\dfrac{Q+Af+B\varphi+C\psi}{R^\alpha T^\beta\ldots t^k\mu^h}$ reste finie pour tous les points de la courbe $f=0$, $\varphi=0$, et en particulier si

$$Q+Af+B\varphi+C\psi,$$

est divisible par $R^\alpha T^\beta\ldots t^k$.

IV. — Application aux intégrales multiples du théorème d'Abel.

30. Soit $f(X,Y,Z)=0$ l'équation d'une surface algébrique de degré m; considérons l'intégrale double, appartenant à cette surface,

$$J=\int\int\frac{Q(X,Y,Z)}{S(X,Y,Z)}\,\frac{dX\,dY}{f'_z}.$$

Soient maintenant deux systèmes de surfaces algébriques :

$$\Phi(X,Y,Z,u)=0,\qquad \Psi(X,Y,Z,v)=0,$$

dont les équations, de degrés n et p en X, Y, Z, renferment respectivement deux paramètres, u et v.

Deux surfaces voisines du premier système et deux surfaces voisines du second découpent sur la surface fixe, $f(X,Y,Z)=0$, des quadrilatères curvilignes infiniment petits, dont le nombre est égal à celui des points de rencontre des surfaces $f=0$, $\Phi=0$, $\Psi=0$, c'est-à-dire à mnp.

Si l'on fait varier la deuxième surface du système u, en laissant la première fixe, et si l'on fait de même varier la deuxième surface du système v, les quadrilatères découpés prendront des dimensions finies : le problème que nous nous proposons est d'évaluer la somme algébrique des valeurs de l'intégrale J, prise dans tous les quadrilatères ainsi déterminés.

Soient

$$\Phi(X, Y, Z, u) = 0, \qquad \Phi(X, Y, Z, u + du) = 0,$$
$$\Psi(X, Y, Z, v) = 0, \qquad \Psi(X, Y, Z, v + dv) = 0$$

les équations de deux surfaces voisines du système u et de deux surfaces voisines du système v. Transformons l'intégrale J en prenant pour variables u et v à la place de X, Y.

Il faut, pour cela, remplacer $dX\,dY$ par $\frac{du\,dv}{\operatorname{mod} H}$, H désignant le jacobien de u et v, considérés comme fonctions de X et Y.

Or on a les relations

$$f(X, Y, Z) = 0,$$
$$\Phi(X, Y, Z, u) = 0,$$
$$\Psi(X, Y, Z, v) = 0,$$

d'où

$$\frac{\partial f}{\partial X} dX + \frac{\partial f}{\partial Y} dY + \frac{\partial f}{\partial Z} dZ = 0,$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial X} dX + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = -\frac{\partial \Phi}{\partial u} du,$$
$$\frac{\partial \Psi}{\partial X} dX + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = -\frac{\partial \Psi}{\partial v} dv.$$

Si l'on tire dZ de la première de ces équations pour le porter dans les deux autres, on trouve

$$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial X}\frac{\partial f}{\partial Z} - \frac{\partial \Phi}{\partial Z}\frac{\partial f}{\partial X}\right] dX + \left[\frac{\partial \Phi}{\partial Y}\frac{\partial f}{\partial Z} - \frac{\partial \Phi}{\partial Z}\frac{\partial f}{\partial Y}\right] dY = -\frac{\partial \Phi}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial Z} du,$$

et une équation analogue pour dv.

Ces relations donnent $\frac{\partial u}{\partial X}, \frac{\partial u}{\partial Y}, \frac{\partial v}{\partial X}, \frac{\partial v}{\partial Y}$ et l'on a, par suite,

$$\begin{aligned} H &= \frac{\partial u}{\partial X}\frac{\partial v}{\partial Y} - \frac{\partial v}{\partial X}\frac{\partial u}{\partial Y} \\ &= \frac{1}{\frac{\partial \Phi}{\partial u}\frac{\partial \Psi}{\partial v}} \frac{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial X}\frac{\partial f}{\partial Z} - \frac{\partial \Phi}{\partial Z}\frac{\partial f}{\partial X}\right)\left(\frac{\partial \Psi}{\partial Y}\frac{\partial f}{\partial Z} - \frac{\partial \Psi}{\partial Z}\frac{\partial f}{\partial Y}\right) - \left(\frac{\partial \Psi}{\partial X}\frac{\partial f}{\partial Z} - \frac{\partial \Psi}{\partial Z}\frac{\partial f}{\partial X}\right)\left(\frac{\partial \Phi}{\partial Y}\frac{\partial f}{\partial Z} - \frac{\partial \Phi}{\partial Z}\frac{\partial f}{\partial Y}\right)}{\left(\frac{\partial f}{\partial Z}\right)^2}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$H = \frac{\Delta}{\frac{\partial\Phi}{\partial u}\frac{\partial\Psi}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial Z}},$$

en posant

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial X} & \frac{\partial f}{\partial Y} & \frac{\partial f}{\partial Z} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial X} & \frac{\partial\Phi}{\partial Y} & \frac{\partial\Phi}{\partial Z} \\ \frac{\partial\Psi}{\partial X} & \frac{\partial\Psi}{\partial Y} & \frac{\partial\Psi}{\partial Z} \end{vmatrix}.$$

L'élément de l'intégrale double J devient ainsi

$$\frac{Q}{S}\frac{dX\,dY}{f_z'} = \frac{Q}{Sf_z'}\frac{du\,dv}{\operatorname{mod}\left[\dfrac{\Delta}{\frac{\partial\Phi}{\partial u}\frac{\partial\Psi}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial Z}}\right]}.$$

La somme de ces éléments dans les quadrilatères infiniment petits découpés sur la surface $f = 0$ par les quatre surfaces considérées a donc pour valeur

$$du\,dv\sum\frac{Q}{Sf_z'}\operatorname{mod}\frac{\frac{\partial\Phi}{\partial u}\frac{\partial\Psi}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial Z}}{\Delta}.$$

Au lieu de considérer la somme de ces éléments, considérons leur somme algébrique, en supprimant le signe mod; nous aurons alors à évaluer l'expression

$$du\,dv\sum\frac{Q}{S\Delta}\frac{\partial\Phi}{\partial u}\frac{\partial\Psi}{\partial v},$$

la somme s'étendant à tous les points communs aux surfaces $f = 0$, $\Phi = 0$, $\Psi = 0$; et par suite, la somme algébrique des valeurs que prend l'intégrale J dans les quadrilatères curvilignes compris sur la surface $f = 0$, entre les surfaces

$$\Phi(X, Y, Z, u_0) = 0, \qquad \Phi(X, Y, Z, u) = 0,$$
$$\Psi(X, Y, Z, v_0) = 0, \qquad \Psi(X, Y, Z, v) = 0,$$

aura pour expression

$$(12) \qquad K = \int_{u_0}^{u} \int_{v_0}^{v} du\, dv \sum \frac{Q \frac{\partial \Phi}{\partial u} \frac{\partial \Psi}{\partial v}}{S\Delta}.$$

la somme s'étendant aux points communs aux trois surfaces

$$f = 0, \qquad \Phi(X, Y, Z, u) = 0, \qquad \Psi(X, Y, Z, v) = 0.$$

Comme nous l'avons fait observer, c'est là l'expression de la somme algébrique des valeurs de l'intégrale J; pour préciser, on peut dire que, dans cette somme, chaque élément de l'intégrale $J\,\frac{Q}{Sf'_z}dX\,dY$ figure, multiplié par $(-1)^{\frac{\partial \Phi}{\partial u}\frac{\partial \Psi}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial z}\Delta}$.

31. Dans la nouvelle intégrale double (12), en u et v, entre une somme de la nature de celles que nous avons étudiées précédemment.

Cette somme est une fonction symétrique des coordonnées des points communs aux surfaces $f = 0$, $\Phi = 0$, $\Psi = 0$: c'est donc une fonction rationnelle de u et v.

L'intégrale double K est donc de la forme

$$\int_{u_0}^{u} \int_{v_0}^{v} \frac{M(u, v)}{N(u, v)} du\, dv,$$

M et N étant des polynômes entiers. Cette intégrale ne peut donc, en général, se ramener aux fonctions rationnelles et logarithmiques, comme dans le cas d'une seule variable.

Une étude approfondie des différentes formes dont elle est susceptible sortirait du cadre du présent Mémoire, et nous nous réservons de revenir plus tard sur ce point; nous nous contenterons de signaler ici, en raison de leurs applications géométriques, quelques cas particuliers très étendus où l'intégrale K se présente sous une forme simple.

32. Supposons d'abord que les systèmes de surfaces $\Phi = 0$, $\Psi = 0$ soient deux faisceaux ponctuels, et posons

$$\Phi(X, Y, Z, u) = \Phi_1(X, Y, Z) + u\,\Phi_2(X, Y, Z),$$
$$\Psi(X, Y, Z, v) = \Psi_1(X, Y, Z) + v\,\Psi_2(X, Y, Z).$$

On aura

$$K = \int\int du\,dv \sum \frac{Q\Phi_2\Psi_2}{S\Delta},$$

la somme $\sum$ s'étendant aux points communs aux surfaces $f = 0$, $\Phi = 0$, $\Psi = 0$.

Soient toujours m, n, p, q, s les degrés, en X, Y, Z, de f, Φ, Ψ, Q, S.

La somme $\sum \frac{Q\Phi_2\Psi_2}{S\Delta}$ devient, en coordonnées homogènes,

$$\sum \frac{Q\Phi_2\Psi_2}{t^{k-1}S\Delta},$$

étant posé

$$k = q - s - m + 4.$$

Nous distinguerons deux cas, selon que k est ou n'est pas supérieur à zéro.

1° Soit d'abord $k \leqq 0$.

D'après les propositions du n° **28**, la somme précédente sera nulle si la fonction

$$(13) \qquad \frac{Q\Phi_2\Psi_2 t^{-k}}{S\mu^h},$$

reste finie en tous les points de la courbe $f = 0$, $\Phi = 0$, situés sur la surface $S = 0$; μ désigne une fonction linéaire quelconque de x, y, z, t, ne devenant pas nulle en ces points, et h est défini par la relation

$$h = m + n + p - 4.$$

A fortiori, la somme dont il s'agit sera nulle si la fonction (13) reste finie en chacun des points de la courbe commune aux surfaces $f = 0$; $S = 0$: cette condition est plus avantageuse à étudier que la précédente, parce que la courbe $f = 0$, $S = 0$ est une courbe fixe, indépendante des paramètres u et v.

Seulement, il importe de remarquer que μ est alors une fonction linéaire de x, y, z, t, qu'on devra faire varier d'un point à l'autre de cette courbe, de telle façon qu'elle ne s'annule pas au point de la courbe que l'on considère.

Posons, pour abréger,

$$\mathfrak{F}(x, y, z, t) = \frac{Q\Phi_2\Psi_2 t^{-k}}{\mu^h},$$

et supposons que l'on ait

$$S = R^\alpha T^\beta \dots.$$

Imaginons que les coordonnées d'un point de la surface $f = 0$ soient exprimées en fonction de deux paramètres, σ et ω; $\mathfrak{F}(x, y, z, t)$ devient alors une fonction $\mathfrak{F}(\sigma, \omega)$.

Cherchons d'abord à quelles conditions $\frac{\mathfrak{F}(\sigma, \omega)}{R^\alpha T^\beta \dots}$ restera fini en un point, de paramètres ω_0, σ_0, situé sur la surface $R = 0$.

Si ce point est un point ordinaire de la surface $f = 0$, et si la surface $R = 0$ ne la touche pas en ce point, on aura, au voisinage des valeurs ω_0, σ_0 :

$$R(\omega, \sigma) = \mathcal{A}(\omega - \omega_0) + \mathcal{B}(\sigma - \sigma_0) + \mathcal{C}(\omega - \omega_0)^2 + \dots,$$

$\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ n'étant pas nuls à la fois.

Si les surfaces $T = 0$, ... ne passent pas par le point considéré, il faudra, pour que $\frac{\mathfrak{F}}{R^\alpha T^\beta \dots}$ reste fini pour $\omega = \omega_0$, $\sigma = \sigma_0$, que l'on ait, pour ces valeurs,

$$\mathfrak{F}(\omega, \sigma) = 0, \quad \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \omega} = 0, \quad \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \sigma} = 0, \quad \dots,$$
$$\frac{\partial^{\alpha-1} \mathfrak{F}}{\partial \omega^{\alpha-1}} = 0, \quad \frac{\partial^{\alpha-1} \mathfrak{F}}{\partial \omega^{\alpha-1} \partial \sigma} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial^{\alpha-1} \mathfrak{F}}{\partial \sigma^{\alpha-1}} = 0.$$

Si la surface $R = 0$ touche au point ω_0, σ_0 la surface $f = 0$, ou, plus généralement, si la surface $S = 0$ a en ce point, avec cette dernière, un contact d'ordre $l - 1$ (l étant supérieur à α), ce qui se présente notamment aux points communs à $f = 0$ et à deux des surfaces $R = 0$, $T = 0$, ..., il faudra, pour que $\frac{\mathfrak{F}}{R^\alpha T^\beta} \cdots$ reste fini au point considéré, ajouter aux équations qui précèdent les suivantes :

$$\begin{array}{ccc}
\dfrac{\partial^\alpha \mathfrak{F}}{\partial \omega^\alpha} = 0, & \ldots, & \dfrac{\partial^\alpha \mathfrak{F}}{\partial \sigma^\alpha} = 0, \\
\ldots\ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots\ldots, \\
\dfrac{\partial^{l-1} \mathfrak{F}}{\partial \omega^{l-1}} = 0, & \ldots, & \dfrac{\partial^{l-1} \mathfrak{F}}{\partial \sigma^{l-1}} = 0.
\end{array}$$

Comme la fonction μ ne s'annule pas pour $\omega = \omega_0$, $\sigma = \sigma_0$, il faut évidemment que ces conditions soient vérifiées par la fonction $Q\Phi_2\Psi_2 t^{-k}$ qui figure au numérateur de $\mathfrak{F}$; géométriquement, d'après la théorie du contact, cela revient à dire que la surface $Q\Phi_2\Psi_2 t^{-k} = 0$ passe par la courbe commune aux surfaces $f = 0$, $S = 0$, et que, si en un point de cette courbe la surface $S = 0$ a un contact d'ordre $l - 1$ avec la surface $f = 0$, la surface $Q\Phi_2\Psi_2 t^{-k} = 0$ a, au même point, avec cette dernière, un contact d'ordre supérieur.

La surface $Q\Phi_2\Psi_2 t^{-k} = 0$ se décomposant en surfaces distinctes, il suffit que la condition précédente soit remplie par l'une d'elles, et en particulier par la surface $\Phi_2\Psi_2 = 0$.

2° Soit maintenant $k > 0$. La somme $\sum \frac{Q\Phi_2\Psi_2}{S\Delta}$ s'écrit, en coordonnées homogènes,

$$\sum \frac{Q\Phi_2\Psi_2}{S\Delta t^{k-1}};$$

et l'on voit comme précédemment qu'elle sera nulle si la fonction

$$(14) \qquad \frac{Q\Phi_2\Psi_2}{S t^k \mu^h}$$

reste finie en tous les points de la courbe commune à la surface $f = 0$ et à la surface $S t^k = 0$.

On arrive ainsi à un résultat semblable à celui que l'on a trouvé plus haut, en ayant soin de traiter le facteur t^k qui figure au dénominateur comme on a traité les facteurs R^α, T^β, ...

33. Toutes ces conséquences peuvent se résumer en une formule simple.

Soit I une intégrale double abélienne appartenant à une surface algébrique, $f(X, Y, Z) = 0$, de degré m,

$$I = \int\int \frac{Q}{Sf'_z} dX\,dY,$$

Q et S étant des polynômes de degrés q et s en X, Y, Z.

La somme algébrique des valeurs que prend l'intégrale I dans les polygones curvilignes découpés sur la surface $f = 0$ par deux surfaces quelconques d'un premier faisceau ponctuel de degré n, et deux surfaces quelconques d'un second faisceau de degré p, est égale à zéro si l'on peut trouver une surface $\Phi_2 = 0$ du premier faisceau et une surface $\Psi_2 = 0$ du second, telles que la fonction

$$\frac{Q\Phi_2\Psi_2}{S t^k \mu^h}$$

reste finie en chacun des points de la surface $f = 0$ situés sur les surfaces $s = 0$, $t = 0$, étant posé

$$\begin{aligned} k &= q - s - m + 4, \\ h &= m + n + p - 4. \end{aligned}$$

Dans cette fonction, μ désigne une expression linéaire quelconque en x, y, z, t, introduite pour l'homogénéité, et qu'on choisira de manière à ne pas s'annuler au point de la surface $f = 0$ que l'on considérera.

Géométriquement, cette condition est équivalente à la suivante : il faut qu'on puisse trouver une surface $\Phi_2 = 0$ du premier faisceau, et une surface $\Psi_2 = 0$ du second, telles que la surface $\Phi_2\Psi_2 = 0$ passe par tous les points de la surface $f = 0$ situés sur la surface $St^k = 0$, et qu'elle ait avec $f = 0$, en chacun de ces points, un contact d'ordre supérieur à celui des surfaces $f = 0$, $St^k = 0$ au même point.

34. On peut encore transformer ce résultat pour lui donner une forme identique à celle du théorème du n° **6**, relatif aux intégrales abéliennes simples.

A cet effet, soit I_1 une intégrale double abélienne de la forme

$$I_1 = \iint \frac{Q_1}{S_1}\, dX\, dY,$$

Q_1 et S_1 étant des polynômes en X, Y et Z, de degrés q_1 et s_1, et X, Y, Z étant liés par l'équation $f(X, Y, Z) = 0$.

Cherchons à déterminer les infinis de l'intégrale I_1. A cet effet, remplaçons X, Y, Z par $\frac{x}{t}$, $\frac{y}{t}$, $\frac{z}{t}$, et supposons x, y, z, t exprimés en fonction de deux paramètres, σ et ω. Il vient

$$dX\, dY = \left[\frac{\partial\left(\frac{x}{t}\right)}{\partial\omega}\frac{\partial\left(\frac{y}{t}\right)}{\partial\sigma} - \frac{\partial\left(\frac{x}{t}\right)}{\partial\sigma}\frac{\partial\left(\frac{y}{t}\right)}{\partial\omega}\right] d\sigma\, d\omega,$$

ce qui s'écrit

$$dX\, dY = \frac{d\sigma\, d\omega}{t^4}\left\{\left[t\frac{\partial x}{\partial\omega} - x\frac{\partial t}{\partial\omega}\right]\left[t\frac{\partial y}{\partial\sigma} - y\frac{\partial t}{\partial\sigma}\right] - \left[t\frac{\partial x}{\partial\sigma} - x\frac{\partial t}{\partial\sigma}\right]\left[t\frac{\partial y}{\partial\omega} - y\frac{\partial t}{\partial\omega}\right]\right\}$$

c'est-à-dire

$$dX\, dY = \frac{d\sigma\, d\omega}{t^3}\begin{vmatrix} x & y & t \\ \frac{\partial x}{\partial\omega} & \frac{\partial y}{\partial\omega} & \frac{\partial t}{\partial\omega} \\ \frac{\partial x}{\partial\sigma} & \frac{\partial y}{\partial\sigma} & \frac{\partial t}{\partial\sigma} \end{vmatrix}. \tag{15}$$

On a d'ailleurs

$$\frac{Q_1}{S_1} = \frac{1}{t^{q_1 - s_1}}\frac{Q_1}{S_1}(x, y, z, t).$$

Ces expressions montrent que les infinis de l'élément différentiel de l'intégrale I_1 sont les points de la courbe $f = 0$, $S_1 t^{q_1 - s_1 + 3} = 0$.

Nous dirons que cette courbe, ou une portion de cette courbe, est un infini d'ordre l pour l'élément différentiel si la surface $S t^{q_1 - s_1 + 3} = 0$ a, le long de cette courbe, avec $f = 0$, un contact d'ordre $l - 1$. Ainsi, en général, le long de la courbe à l'infini sur la surface $f = 0$, l'élément différentiel sera infini d'ordre $q_1 - s_1 + 3$.

Dans le cas où f'_z figure au dénominateur de l'élément différentiel, il est aisé de voir que, le long de la courbe $f = 0$, $f'_z = 0$, l'élément différentiel ne devient pas infini, parce que le déterminant qui figure dans l'expression (15) s'annule en tous les points de cette courbe qui ne sont pas des points singuliers.

Ainsi, en revenant aux notations des nos **30** et suivants, l'élément différentiel

$$\frac{Q}{Sf'_z}\,dX\,dY$$

devient infini le long de la courbe $St^{q-s-m+4}=0$, c'est-à-dire de la courbe $St^k=0$; il devient en outre infini aux points singuliers de la surface $f=0$.

Si maintenant on se reporte à la proposition du n° **33**, on voit qu'elle peut s'énoncer ainsi :

I. *La somme algébrique des valeurs que prend une intégrale double abélienne appartenant à une surface algébrique*

$$f(X,Y,Z)=0,$$

dans les polygones découpés sur cette surface par deux surfaces quelconques d'un premier faisceau ponctuel et deux surfaces quelconques d'un deuxième faisceau est égale à zéro, s'il existe une surface Σ, formée par l'ensemble d'une surface du premier faisceau et d'une surface du second, passant par tous les points de la surface $f=0$, qui rendent l'élément de l'intégrale infini, avec la condition d'avoir avec la surface $f=0$, en tout point de cette surface qui est infini d'ordre l pour l'élément de l'intégrale, un contact d'ordre $l-1$.

De plus, quand l'intégrale est sous la forme $\int\int \frac{Q}{Sf'_z}\,dX\,dY$, il n'y a pas, dans l'énoncé précédent, à tenir compte de ceux des infinis de l'élément différentiel qui annulent f'_z, même s'ils correspondent à des points singuliers de la surface $f=0$.

Dans le cas où les surfaces $\Phi=0$, $\Psi=0$ forment deux systèmes algébriques quelconques, il faut que la condition précédente soit remplie, quels que soient les paramètres u et v, par la surface $\frac{\partial\Phi}{\partial u}\frac{\partial\Psi}{\partial v}=0$, comme le montre la formule (12).

35. On peut signaler, en raison de l'intérêt géométrique de ses applications, un nouveau cas particulier, où la somme algébrique des intégrales doubles I, au lieu d'être nulle comme dans l'exemple précédent, s'exprime en fonction rationnelle et logarithmique des paramètres u et v.

Soit, pour fixer les idées, l'intégrale

$$I = \int\int \frac{Q}{Sf'_z}\, dX\, dY,$$

où le degré de $\frac{Q}{Sf'_z}$ est égal à -3; et soit posé

$$S = R^\alpha T^\beta \ldots.$$

Les infinis de l'élément différentiel sont les points communs à $f = 0$ et aux surfaces $R = 0$, $T = 0$, ...

Imaginons que, parmi les surfaces de l'un des faisceaux sécants, il en existe une passant par les courbes d'intersection de $f = 0$ et des surfaces $R = 0$, $T = 0$, ..., soit par exemple

$$\Phi_2 = Af + BRT \ldots.$$

Nous ne supposons pas que cette surface ait avec $f = 0$, le long de ces courbes, des contacts d'ordre plus ou moins élevé, comme on l'admettait dans le théorème précédent.

L'intégrale K est ici

$$K = \int\int du\, dv \sum \frac{Q\Psi_2 BRT\ldots}{S\Delta} = \int\int du\, dv \sum \frac{Q\Psi_2 B}{R^{\alpha-1}T^{\beta-1}\ldots\Delta}.$$

Nous avons supprimé au numérateur de la somme Σ le terme Af, parce que la somme s'étend aux points communs aux trois surfaces $f = 0$, $\Phi_1 + u\Phi_2 = 0$, $\Psi_1 + v\Psi_2 = 0$.

La proposition que nous allons établir est que l'intégrale K est une fonction entière de u, et une fonction rationnelle et logarithmique de v.

On a, en effet, en remarquant qu'en vertu de l'hypothèse faite sur le degré de $\frac{Q}{Sf'_z}$ le numérateur de la quantité sous le signe Σ est de degré inférieur au dénominateur et en appliquant la formule (10) du n° **27**,

$$\sum \frac{Q\Psi_2 B}{\Delta R^{\alpha-1} T^{\beta-1}\ldots} + \sum \rho_R + \sum \rho_T + \ldots = 0,$$

$\Sigma\rho_R$, $\Sigma\rho_T$, ... désignant les sommes des résidus, par rapport aux zéros de R, T, ..., de la fonction

$$\Theta(\lambda) = \frac{Q\Psi_2 B}{(f'_z \Psi'_y - f'_y \Psi'_z)[\Phi_1 + u\Phi_2]} \frac{x't - xt'}{R^{\alpha-1} T^{\beta-1}\ldots}.$$

Dans cette fonction, x, y, z, t sont les coordonnées, exprimées en fonction thêtafuchsienne de λ, d'un point de la courbe $f = 0$, $\Psi = 0$. Si l'on remarque maintenant que Φ_2 s'annule pour les points de cette courbe situés sur les surfaces $R = 0$, $T = 0$, ..., on voit que dans les résidus de $\Theta(\lambda)$ par rapport aux zéros de R, T, ..., u ne figurera pas au dénominateur, car il n'entre, au dénominateur, que dans des puissances de la fonction $\frac{1}{\Phi_1 + u\Phi_2}$, fonction prise en un point commun à la courbe $f = 0$, $\Psi = 0$ et à l'une des surfaces $R = 0$, $T = 0$, ... Comme pour ces points Φ_2 s'annule, u ne figurera pas au dénominateur.

On voit ainsi que la somme

$$\sum \frac{Q\Psi_2 B}{\Delta R^{\alpha-1} T^{\beta-1}\ldots},$$

qui est une fonction rationnelle de u et de v, est une fonction entière de u. Il serait aisé de préciser son degré en u; nous en donnerons des exemples dans les applications.

Cette fonction est donc de la forme

$$\mathfrak{F}_0(v) + u\mathfrak{F}_1(v) + u^2\mathfrak{F}_2(v) + \ldots,$$

$\mathfrak{F}_0$, $\mathfrak{F}_1$, ... étant des fonctions rationnelles de v. On a donc

$$\begin{aligned} K &= \int_{u_0}^{u}\int_{v_0}^{v} du\,dv[\mathfrak{F}_0(v) + u\mathfrak{F}_1(v) + \ldots] \\ &= (u - u_0)\int \mathfrak{F}_0(v)\,dv + \frac{u^2 - u_0^2}{2}\int \mathfrak{F}_1(v)\,dv + \ldots, \end{aligned}$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

Dans le cas où la surface du second faisceau $\Psi_2 = 0$ passe également par les courbes situées sur $f = 0$ rendant l'intégrale I infinie, on voit de même que K est une fonction entière de v; cette intégrale est alors fonction entière des paramètres u et v.

On aurait un résultat analogue si $\frac{Q}{Sf'_z}$ était de degré supérieur à -3.

Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

II. *La somme algébrique des valeurs que prend une intégrale double abélienne, appartenant à une surface $f(X, Y, Z) = 0$, dans les polygones découpés sur cette surface par deux surfaces quelconques d'un premier faisceau $\Phi_1 + u\Phi_2 = 0$, et deux surfaces quelconques d'un autre faisceau, $\Psi_1 + v\Psi_2 = 0$, est une fonction entière du paramètre u et une fonction rationnelle et logarithmique du paramètre v, si la surface $\Phi_2 = 0$ du premier faisceau passe par tous les points de la surface $f = 0$ qui rendent l'élément de l'intégrale infini.*

Si la surface $\Psi_2 = 0$ du second faisceau satisfait également à la même condition, la somme précédente est une fonction entière des deux paramètres u et v.

36. On a un résultat semblable dans le cas où les surfaces $\Phi = 0$, $\Psi = 0$ forment deux systèmes algébriques quelconques.

La somme des intégrales I sera une fonction entière de u et une fonction rationnelle et logarithmique de v si la surface $\frac{\partial \Phi}{\partial u} = 0$ passe, quel que soit u, par tous les points rendant l'élément différentiel infini.

Si $\Phi = Au^p + Bu^{p-1} + \ldots + Ku + L$, il faut pour cela que les surfaces $A = 0$, $B = 0$, ..., $K = 0$ passent par ces points.

V. — Le théorème d'Abel pour les intégrales de différentielles totales.

37. Soit toujours $f(X, Y, Z) = 0$ l'équation d'une surface algébrique de degré m; considérons l'intégrale, appartenant à cette surface,

$$I = \int \frac{Q(X, Y, Z)}{S(X, Y, Z)} dX + \frac{R(X, Y, Z)}{T(X, Y, Z)} dY,$$

Q, R, S, T étant des polynômes de degrés q, r, s, t, et les fractions rationnelles $\frac{Q}{S}$, $\frac{R}{T}$ satisfaisant à la condition d'intégrabilité

$$\frac{\partial}{\partial Y}\left(\frac{Q}{S}\right) = \frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{R}{T}\right).$$

On suppose, dans cette intégrale, que Z est une fonction de X et Y, satisfaisant à l'équation $f(X, Y, Z) = 0$.

Cela posé, soient deux systèmes de surfaces algébriques

$$\Phi(X, Y, Z, u) = 0, \qquad \Psi(X, Y, Z, v) = 0,$$

dont les équations, de degrés m et p en X, Y, Z, renferment respectivement deux paramètres u et v.

Considérons deux surfaces du premier système, correspondant aux valeurs u_0 et u_1 du paramètre u, et de même deux surfaces du second, correspondant aux valeurs v_0 et v_1; proposons-nous d'évaluer la somme des intégrales I, dont les limites inférieures sont les valeurs de X et Y qui correspondent aux points communs à $f = 0$ et aux surfaces de paramètres u_0 et v_0, et dont les limites supérieures sont les valeurs de X et Y correspondant aux points communs à $f = 0$ et aux surfaces de paramètres u_1 et v_1.

Soient u et v des valeurs des paramètres, comprises respectivement entre u_0 et u_1, v_0 et v_1; transformons l'intégrale I en prenant pour variables u et v à la place de X et Y.

On a les relations

$$f(X, Y, Z) = 0, \qquad \Phi(X, Y, Z, u) = 0, \qquad \Psi(X, Y, Z, v) = 0;$$

d'où

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial X}dX + \frac{\partial f}{\partial Y}dY + \frac{\partial f}{\partial Z}dZ = 0,\\
&\frac{\partial \Phi}{\partial X}dX + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = -\frac{\partial \Phi}{\partial u}du,\\
&\frac{\partial \Psi}{\partial X}dX + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = -\frac{\partial \Psi}{\partial v}dv.
\end{aligned}$$

On tire de là

$$\Delta dX = \frac{\partial\Phi}{\partial u}\left\{\frac{\partial f}{\partial Y}\frac{\partial\Psi}{\partial Z} - \frac{\partial f}{\partial Z}\frac{\partial\Psi}{\partial Y}\right\} du + \frac{\partial\Psi}{\partial v}\left\{\frac{\partial f}{\partial Z}\frac{\partial\Phi}{\partial Y} - \frac{\partial f}{\partial Y}\frac{\partial\Phi}{\partial Z}\right\} dv$$

et

$$\Delta dY = \frac{\partial\Phi}{\partial u}\left\{\frac{\partial f}{\partial Z}\frac{\partial\Psi}{\partial X} - \frac{\partial f}{\partial X}\frac{\partial\Psi}{\partial Z}\right\} du + \frac{\partial\Psi}{\partial v}\left\{\frac{\partial f}{\partial X}\frac{\partial\Phi}{\partial Z} - \frac{\partial f}{\partial Z}\frac{\partial\Phi}{\partial X}\right\} dv,$$

Δ désignant toujours le déterminant $\sum \pm \frac{\partial f}{\partial X}\frac{\partial\Phi}{\partial Y}\frac{\partial\Psi}{\partial Z}$. On a donc, pour l'élément de l'intégrale I,

$$\frac{Q}{S}dX + \frac{R}{T}dY = \frac{\partial\Phi}{\partial u}\left[\frac{Q}{S\Delta}M_1 + \frac{R}{T\Delta}N_1\right]du + \frac{\partial\Psi}{\partial v}\left[\frac{Q}{S\Delta}M_2 + \frac{R}{T\Delta}N_2\right]dv.$$

M_1, N_1; M_2, N_2 étant les coefficients de $\frac{\partial\Phi}{\partial u}du$ et $\frac{\partial\Psi}{\partial v}dv$ dans les valeurs de ΔdX et ΔdY.

La somme de ces éléments, pour les points communs à la surface $f=0$ et aux surfaces $\Phi(X, Y, Z, u) = 0$, $\Psi(X, Y, Z, v) = 0$, est donc de la forme

$$(16) \qquad du\sum\frac{G\frac{\partial\Phi}{\partial u}}{ST\Delta} + dv\sum\frac{H\frac{\partial\Psi}{\partial v}}{ST\Delta},$$

les sommes s'étendant aux points communs aux trois surfaces.

On est donc encore ramené au calcul de sommes analogues à celles que nous avons si souvent introduites dans ce travail, et ce calcul se fera par l'application de la formule générale du n° **27**.

Il est clair d'ailleurs que chacune des sommes qui figurent dans l'expression (16) est une fonction rationnelle de u et de v, et l'on en conclut aisément que l'intégrale de cette expression est une fonction rationnelle et logarithmique de u et de v.

En effet, soit la fonction

$$J = \int M(u, v)\,du + N(u, v)\,dv,$$

où M et N sont rationnels.

On a

$$J = \int_{u_0}^{u} M(u, v)\,du + \int_{v_0}^{v} N(u_0, v)\,dv.$$

La première intégrale étant une fonction rationnelle et logarithmique de u, et la seconde étant indépendante de u, on voit bien que J est fonction rationnelle et logarithmique de u et, par suite, de v, puisqu'on peut répéter pour v le raisonnement fait pour u. C'est l'extension évidente du théorème d'Abel aux intégrales de différentielles totales.

Le cas où les surfaces $\Phi = 0$, $\Psi = 0$ appartiennent respectivement à un faisceau ponctuel donne des résultats simples.

Soit toujours

$$\Phi = \Phi_1 + u\,\Phi_2,$$
$$\Psi = \Psi_1 + v\,\Psi_2.$$

L'intégrale à calculer est

$$J = \int du \sum \frac{G\Phi_2}{ST\Delta} + dv \sum \frac{H\Psi_2}{ST\Delta}.$$

On arrive sans difficulté, en répétant les raisonnements faits dans le paragraphe précédent, aux propositions suivantes.

Soit l'intégrale

$$I = \int \frac{Q}{S}\,dX + \frac{R}{T}\,dY,$$

que nous ramènerons à la forme

$$I = \int \frac{M_1\,dX + N_1\,dY}{S_1}.$$

Nous appellerons infini de l'élément de I, en désignant par m_1, n_1, s_1 les degrés de M_1, N_1, S_1, les infinis des fonctions

$$\frac{M_1(x, y, z, t)}{S_1(x, y, z, t)}\,\frac{1}{t^{m_1 - s_1 + 2}}, \qquad \frac{N_1(x, y, z, t)}{S_1(x, y, z, t)}\,\frac{1}{t^{n_1 - s_1 + 2}}.$$

L'ordre d'un infini, défini comme au n° **34**, sera l'ordre de cet infini dans celle des deux fonctions qui l'admet avec l'ordre le plus élevé.

I. *La somme des valeurs des intégrales* I, *dont les limites inférieures sont les valeurs de* X, Y, Z *qui correspondent aux points d'intersection de la surface* $f = 0$ *avec deux surfaces* $\Phi_1 + u_0\Phi_2 = 0$, $\Psi_1 + v_0\Psi_2 = 0$, *et dont les limites supérieures sont les valeurs qui correspondent aux points d'intersection de* $f = 0$ *avec les surfaces* $\Phi_1 + u\Phi_2 = 0$, $\Psi_1 + v\Psi_2 = 0$, *est nulle si l'une des surfaces du faisceau* $\Phi_1 + v\Phi_2 = 0$ *et l'une des surfaces du faisceau* $\Psi_1 + v\Psi_2 = 0$ *passent par les points de la surface* $f = 0$ *qui rendent l'élément de l'intégrale* I *infini, avec la condition d'avoir avec la surface* $f = 0$, *en tout point de cette surface qui est pour l'élément de* I *un infini d'ordre* l, *un contact d'ordre* $l - 1$.

II. *La somme des valeurs précédentes des intégrales* I *sera une fonction entière de* u *si la surface* $\Phi_2 = 0$ *passe simplement par les points de* $f = 0$ *qui rendent l'élément de l'intégrale infini.*

Elle sera de même une fonction entière de v *si la surface* $\Psi_2 = 0$ *satisfait à la même condition.*

On a des résultats analogues dans le cas où les surfaces $\Phi = 0$, $\Psi = 0$ appartiennent à deux systèmes algébriques quelconques.

(*A suivre.*)