JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ÉMILE PICARD

Mémoire sur la théorie des équations aux dérivées partielles et la méthode des approximations successives

Journal de mathématiques pures et appliquées 4e série, tome 6 (1890), p. 145-210.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1890_4_6__145_0>

Mémoire sur la théorie des équations aux dérivées partielles et la méthode des approximations successives;

PAR M. ÉMILE PICARD.

INTRODUCTION.

Considérons une équation du second ordre aux dérivées partielles de la forme

$$(1)\qquad A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=F\left(u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},x,y\right),$$

A, B, C dépendant seulement des deux variables indépendantes x et y. On peut, pour intégrer cette équation, avec des conditions aux limites déterminées, procéder de la manière suivante par approximations successives. Nous mettons dans le second membre une fonction quelconque u_1 de x et y, et formons l'équation

$$\Delta u_2=F\left(u_1,\frac{\partial u_1}{\partial x},\frac{\partial u_1}{\partial y},x,y\right)$$

$\left(\text{en posant ici, pour abréger, } \Delta u = A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$. Concevons qu'on intègre cette équation en u_2, en se donnant certaines conditions aux limites, qui, nous le supposons, déterminent complètement une intégrale que nous désignerons par u_2. On formera ensuite l'équation

$$\Delta u_3 = \mathrm{F}\left(u_2, \frac{\partial u_2}{\partial x}, \frac{\partial u_2}{\partial y}, x, y\right),$$

et l'on intégrera cette équation en u_3, en satisfaisant aux mêmes conditions aux limites que plus haut, et nous continuons ainsi indéfiniment. Si l'intégrale u_n tend vers une limite déterminée u, quand n grandira indéfiniment, on obtiendra ainsi l'intégrale u de l'équation (1) satisfaisant aux conditions données.

Ces généralités n'ont d'intérêt qu'autant qu'on précise les conditions aux limites, et qu'on se place dans des conditions où l'on puisse établir rigoureusement la convergence de u_n vers une limite u : c'est le but de ce Mémoire. Nous allons essentiellement supposer que dans la région du plan où reste le point (x, y) le discriminant $\mathrm{B}^2 - \mathrm{AC}$ garde un signe invariable. Nous pourrons, par suite, réduire notre équation (1) aux deux types suivants

$$\text{(A)} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \mathrm{F}\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, x, y\right),$$

$$\text{(B)} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial y} = \mathrm{F}\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, x, y\right),$$

pour lesquels les problèmes à poser sont entièrement différents.

Pour les équations de la première forme, nous nous donnons, comme condition aux limites, la valeur des fonctions u_n le long d'un contour fermé C, et nous voulons qu'elles restent continues ainsi que leurs dérivées partielles des deux premiers ordres à l'intérieur du contour. L'étude de u_n montre qu'elle converge vers une limite, tant que C satisfait à certaines conditions, qui, en particulier, seront remplies *quand ce contour limitera une aire suffisamment petite.* On obtiendra dans ce cas *une intégrale de l'équation* (A) *prenant sur le contour une succession continue donnée de valeurs.* Cette intégrale, comme nous le montrons, est d'ailleurs *unique,* si l'équation est linéaire, quand le contour est suffisamment petit.

On ne peut pas affirmer, d'une manière générale, que l'intégrale soit unique, quand F n'est pas linéaire en u, $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$.

Dans le cas de l'équation (B), les conditions aux limites doivent être prises d'une manière toute différente. Nous prenons ici un arc de courbe C, et nous nous donnons le long de C les valeurs de $\frac{\partial u_n}{\partial x}$ et $\frac{\partial u_n}{\partial y}$ ainsi que la valeur de u_n en un point A de C. Soit B un second point de la courbe C, et tel que les coordonnées d'un point M de la courbe varient constamment dans le même sens, quand M va de A à B; considérons le rectangle parallèle aux axes, dont A et B sont deux sommets opposés. Si B est suffisamment rapproché de A, u_n tendra vers une limite u pour tous les points de ce rectangle, *et l'on aura l'intégrale de l'équation* (B) *qui prend en* A *une valeur donnée, et pour laquelle* $\frac{\partial u}{\partial x}$ *et* $\frac{\partial u}{\partial y}$ *prennent sur l'arc* AB *une succession continue donnée de valeurs;* u, ainsi que ses deux dérivées partielles du premier ordre, sont des fonctions continues de x et y, même quand on traverse l'arc AB.

Les théorèmes, indiqués plus haut, relatifs à l'équation (A) ne sont exacts que si le contour C a une aire suffisamment petite. Il est très intéressant de trouver des équations, où, *sans restriction,* une intégrale, supposée continue ainsi que ses dérivées partielles, soit toujours déterminée par ses valeurs sur un contour fermé quelconque.

On peut en donner des exemples étendus. Ainsi cette circonstance se présentera pour l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \mathrm{F}\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, x, y\right),$$

si, remplaçant $\frac{\partial u}{\partial x}$ par v, et $\frac{\partial u}{\partial y}$ par w, on a l'inégalité

$$4\mathrm{F}'_u > (\mathrm{F}'_v)^2 + (\mathrm{F}'_w)^2,$$

quels que soient u, v, w. En particulier, si F ne dépend ni de $\frac{\partial u}{\partial x}$ ni de $\frac{\partial u}{\partial y}$ et croît constamment avec u, cette condition sera vérifiée.

Nous faisons spécialement l'étude de ce cas où l'équation peut s'écrire

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \mathrm{F}(u, x, y),$$

F *croissant toujours en même temps que* u.

Supposant d'abord F toujours *positif*, nous cherchons ce que va nous donner ici la méthode d'approximations successives. Son emploi conduit à un résultat bien curieux. *Cette méthode conduit non pas à une, mais à deux limites u et v.* Ces fonctions u et v prennent les valeurs données sur le contour, et satisfont aux deux équations

$$\Delta u = F(v, x, y),$$
$$\Delta v = F(u, x, y).$$

Pour que le problème, de trouver une intégrale de l'équation proposée prenant des valeurs données sur un contour, fût résolu, il faudrait que $u = v$; il n'en est pas ainsi quand le contour C est quelconque, mais cette identité est vérifiée si le contour est suffisamment petit.

De ce cas particulier, nous montrons ensuite qu'on peut passer à un contour quelconque. En effet, *le problème étant traité pour deux contours ayant une partie commune pourra être résolu pour le contour limitant extérieurement l'ensemble des deux aires*. Le procédé alterné, dont ont fait usage M. Schwarz et M. Neumann dans leurs mémorables travaux sur l'équation de Laplace $\Delta u = 0$, peut, avec des modifications d'ailleurs assez sensibles, s'étendre à notre équation générale, et, par suite, *se trouve complètement effectuée la recherche de l'intégrale, d'ailleurs unique, de l'équation*

$$\Delta u = F(u, x, y)$$

prenant une succession continue donnée de valeurs sur un contour fermé quelconque.

Je considère aussi un autre cas intéressant : celui où, la fonction F, toujours croissante avec u, s'annule pour $u = 0$.

Les intégrales considérées jusqu'ici étaient continues à l'intérieur de l'aire. Prenant, en particulier, l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = A(x, y)\, e^u,$$

j'examine le cas où l'intégrale aurait des points singuliers logarithmiques et je porte ensuite particulièrement mon attention sur l'équation suivante qui présente un grand intérêt, tant en Géométrie qu'en Analyse,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = ke^u,$$

où k désigne nne constante positive, et qu'on peut appeler *équation de Liouville*. J'approfondis l'étude des intégrales de cette équation, en les considérant dans tout le plan et en examinant spécialement celles qui sont continues dans tout le plan, à l'exception d'un certain nombre de points singuliers logarithmiques pour lesquels on regarde comme donnés les coefficients correspondants (satisfaisant seulement à certaines inégalités); je signalerai ici le résultat suivant :

Ces intégrales dépendent seulement d'une constante arbitraire, et une intégrale de cette sorte est déterminée quand on donne sa valeur en un point du plan distinct des points singuliers.

Après avoir étudié les intégrales sur le plan simple, j'étends cette théorie au plan multiple, c'est-à-dire au plan recouvert d'un certain nombre de feuillets formant une surface de Riemann.

J'indique, en terminant ce Chapitre, que les résultats précédents relatifs à l'équation

$$\Delta u = ke^u$$

ne sont pas sans intérêt pour la théorie des fonctions fuchsiennes; je me réserve de revenir ultérieurement sur cette application toute spéciale de la théorie générale, que j'ai essayé de développer dans ce Mémoire.

Dans un dernier Chapitre, j'applique aux équations différentielles ordinaires les méthodes d'approximation dont je viens de faire usage. Il est spécialement intéressant de considérer un système d'équations différentielles de la forme

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 y_1}{dx^2} &= f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_m),\\
\frac{d^2 y_2}{dx^2} &= f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_m),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\frac{d^2 y_m}{dx^2} &= f_m(x, y_1, y_2, \ldots, y_m),
\end{aligned}$$

et d'obtenir un système d'intégrales de ces équations, continues depuis

$x = a$ jusqu'à $x = b$, et prenant pour ces valeurs extrêmes des valeurs données.

Les mêmes considérations s'appliqueraient à un système d'équations aux dérivées partielles de la forme

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} &= f_1(x, y, u_1, u_2, \ldots, u_m),\\
\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} &= f_2(x, y, u_1, u_2, \ldots, u_m),\\
\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\frac{\partial^2 u_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_m}{\partial y^2} &= f_m(x, y, u_1, u_2, \ldots, u_m).
\end{aligned}
$$

Moyennant certaines hypothèses très générales sur les f, on peut déterminer *un* système d'intégrales $u_1, u_2, \ldots, u_m$ prenant des valeurs données sur un contour [1].

CHAPITRE I.

ÉQUATIONS DU TYPE (A).

I. — ÉQUATIONS LINÉAIRES.

1. Parmi les équations (A), considérons d'abord le cas où l'équation est linéaire et homogène, c'est-à-dire l'équation de la forme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2d\frac{\partial u}{\partial x} + 2e\frac{\partial u}{\partial y} + fu = 0,$$

d, e, f ne dépendant que de x et y.

[1] J'ai traité dans deux Communications à l'Académie des Sciences de questions se rapportant au sujet qui fait l'objet de ce travail (*Comptes rendus*, 10 décembre 1888 et 23 septembre 1889). J'ai donné un résumé du présent Mémoire dans les *Comptes rendus* du 13 janvier 1890.

Nous allons montrer d'abord qu'*il ne peut exister deux intégrales de cette équation, uniformes et continues dans l'aire limitée par un contour fermé C, et prenant sur C la même valeur, pourvu que ce contour soit suffisamment petit.*

Soit, en effet, u la différence de ces deux intégrales; u s'annulera sur C.

On aura évidemment

$$\iint u\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2d\frac{\partial u}{\partial x}+2e\frac{\partial u}{\partial y}+fu\right)dx\,dy=0,$$

l'intégrale étant étendue à l'aire limitée par C. Après intégration par parties, la relation précédente devient

$$\iint\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+u^2\left(\frac{\partial d}{\partial x}+\frac{\partial e}{\partial y}-f\right)\right]dx\,dy=0.$$

Si le coefficient de u^2 est positif dans la région considérée, la démonstration est achevée, et n'est qu'une copie de ce que l'on fait pour le cas classique de l'équation de Laplace. Dans le cas général, un artifice est nécessaire. Quelles que soient les fonctions réelles et continues B' et B de x et y, on a

$$\iint\left[\frac{\partial(\mathrm{B}u^2)}{\partial x}+\frac{\partial(\mathrm{B}'u^2)}{\partial y}\right]dx\,dy=0,$$

puisque, par hypothèse, u s'annule sur le bord.

Nous pouvons donc écrire, en faisant la somme des deux dernières équations,

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}&\iint\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+2\mathrm{B}u\frac{\partial u}{\partial x}+2\mathrm{B}'u\frac{\partial u}{\partial y}\right.\\&\qquad\left.+u^2\left(\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{B}'}{\partial y}+\frac{\partial d}{\partial x}+\frac{\partial e}{\partial y}-f\right)\right]dx\,dy=0.\end{aligned}\right.$$

Nous avons, entre crochets, une forme quadratique en u, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$. Elle sera *définie*, si l'on a

$$\mathrm{B}^2+\mathrm{B}'^2<\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{B}'}{\partial y}+\theta,$$

en posant

$$\theta = \frac{\partial d}{\partial x} + \frac{\partial e}{\partial y} - f.$$

Or, quelle que soit la fonction continue $\theta(x, y)$, on peut déterminer deux fonctions B et B′, telles que, *dans le voisinage* d'un point arbitraire P, on ait

$$(2) \qquad B^2 + B'^2 - \theta < \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial B'}{\partial y}.$$

Pour le montrer, nous n'avons qu'à remplacer $-\theta$ par sa plus grande valeur absolue. En désignant celle-ci par m^2, nous aurons à satisfaire à l'égalité

$$B^2 + B'^2 + m^2 < \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial B'}{\partial y'},$$

et cette dernière inégalité entraînera évidemment la précédente.

Or faisons $B' = 0$ et prenons B fonction de x seul et satisfaisant à la relation

$$\frac{\partial B}{\partial x} - B^2 = m_1^2,$$

m_1^2 étant une constante supérieure à m^2. On aura

$$B = m_1 \operatorname{tang}(m_1 x + C),$$

C étant une constante; donc, dans un intervalle compris entre deux parallèles à l'axe des y, dont la distance est moindre que $\frac{\pi}{m_1}$, on pourra certainement déterminer B, de façon à satisfaire à la condition indiquée. J'ai discuté d'ailleurs cette inégalité, avec un peu plus de détails, dans un Mémoire inséré aux *Acta mathematica*, t. XII.

En résumé, dans la région du plan autour de P, pour laquelle on peut déterminer des fonctions continues B et B′ satisfaisant à l'inégalité (2), nous devrons avoir nécessairement, pour que l'égalité (1) soit possible,

$$u = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Il ne peut donc y avoir, en dehors de zéro, de solution de l'équation aux dérivées partielles s'annulant sur le contour C et restant, ainsi que ses dérivées, uniforme et continue à l'intérieur. *Le théorème est donc démontré.*

On pourrait encore procéder autrement : la première des intégrales doubles écrites plus haut peut aussi se remplacer par

$$\iint\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2-2du\frac{\partial u}{\partial x}-2eu\frac{\partial u}{\partial y}-fu^2\right]dx\,dy=0;$$

nous aurons donc

$$0=\iint\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+2(B-d)u\frac{\partial u}{\partial x}+2(B'-e)u\frac{\partial u}{\partial y}+\left(\frac{\partial B}{\partial x}+\frac{\partial B'}{\partial y}-f\right)u^2\right]dx\,dy.$$

La forme quadratique entre crochets sera définie si

$$\frac{\partial B}{\partial x}+\frac{\partial B'}{\partial y}-f>(B-d)^2+(B'-e)^2,$$

et l'on retombe sur une inégalité qui se ramène immédiatement à celle que nous avons obtenue plus haut.

En particulier, si l'on a

$$d^2+e^2+f<0$$

pour tous les points d'une certaine aire, on ne pourra avoir qu'une solution.

2. La question, que nous devons examiner maintenant, est la question inverse, c'est-à-dire la démonstration de l'existence et la détermination de l'intégrale donnée par ses valeurs sur un contour suffisamment petit C.

Nous allons chercher à appliquer la méthode d'approximations successives, dont nous avons parlé dans l'Introduction ; mais, auparavant, commençons par étudier l'équation suivante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x,y).$$

On sait qu'on peut trouver facilement l'intégrale de cette équation, restant continue dans un contour C et s'annulant sur ce contour; cette intégrale est donnée par la formule

$$u(x, y) = -\frac{1}{2\pi}\int\int f(\xi, \eta)\, G(\xi, \eta, x, y)\, d\xi\, d\eta,$$

cette intégrale double étant étendue à l'aire limitée par C, et G désignant la *fonction de Green* relative à C et au point (x, y).

Approfondissons l'étude de cette fonction $u(x, y)$. Tout d'abord on peut trouver une limite supérieure de la valeur absolue de u. Si, en effet, F est le module maximum de $f(x, y)$ dans C, on aura

$$|u| < \frac{F}{2\pi}\int\int G(\xi, \eta, x, y)\, d\xi\, d\eta = F.A,$$

en désignant par A l'intégrale double, divisée par 2π; A dépend de x et y, mais a un certain maximum quand le point (x, y) se déplace dans l'aire limitée par C; ce maximum M tend vers zéro quand l'aire tend vers zéro.

La fonction $u(x, y)$ a des dérivées partielles du premier ordre; prenons la dérivée par rapport à x; elle est donnée par la formule

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{2\pi}\int\int f(\xi, \eta)\frac{\partial G}{\partial x}\, d\xi\, d\eta.$$

Cette intégrale double a un sens, parfaitement déterminé, quand le point (x, y) est à l'intérieur de l'aire; en effet, $G(\xi, \eta, x, y)$ est définie par cette condition, d'être une fonction harmonique de ξ et η s'annulant sur le contour C, continue à l'intérieur de C, sauf au point (x, y), où elle devient infinie comme

$$-\tfrac{1}{2}\log[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2].$$

On a donc

$$G = -\tfrac{1}{2}\log[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2] + g,$$

la fonction g étant continue dans C et prenant sur le contour la valeur $\frac{1}{2}\log[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2]$. La fonction g a donc des dérivées partielles $\frac{\partial g}{\partial x}$ et $\frac{\partial g}{\partial y}$ parfaitement déterminées, et $\frac{\partial G}{\partial x}$, par exemple, devient infinie, pour $\xi = x$, $\eta = y$, comme

$$\frac{\xi - x}{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}$$

et, par suite, l'intégrale double écrite plus haut a un sens bien déterminé. On démontre d'ailleurs aisément qu'elle représente $\frac{\partial u}{\partial x}$.

Il est essentiel, pour la suite, d'obtenir une limite supérieure de $\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|$ et $\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|$. Or supposons d'abord que le contour C se réduise à un cercle. Dans ce cas, on a facilement la fonction G. Désignons par R le rayon du cercle, par a la distance du point (x, y) au centre du cercle; soit de plus (x_1, y_1) le conjugué de A_1 par rapport au cercle A. En appelant P le point arbitraire (ξ, η), on a

$$G = -\frac{1}{2}\log[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2] + \log\left(\frac{a.\mathrm{PA}_1}{\mathrm{R}}\right).$$

Nous voulons nous rendre compte que

$$\iint \left|\frac{\partial G}{\partial x}\right| d\xi\, d\eta$$

a un maximum (fini), quand (x, y) décrit l'aire limitée par C. Or $\frac{\partial G}{\partial x}$ se compose de deux parties. En substituant chacun de ces deux termes, on voit immédiatement que cette intégrale reste toujours finie et ne dépasse pas une limite assignable, quelle que soit la position du point (x, y) dans l'aire considérée. Nous représenterons par N le maximum des deux intégrales dans cette aire

$$\iint \left|\frac{\partial G}{\partial x}\right| d\xi\, d\eta, \quad \iint \left|\frac{\partial G}{\partial y}\right| d\xi\, d\eta;$$

N tendra vers zéro, en même temps que l'aire.

Il en résulte que $\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|$ et $\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|$ sont moindres que FN.

Nous avons trouvé plus haut que $|u| < \mathrm{FM}$. Ainsi u et ses dérivées partielles du premier ordre ont leur module limité à l'aide du seul module maximum F de la fonction f; M et N sont indépendants de cette fonction, ils ne dépendent que du contour C, ils varient d'une manière continue avec ce contour, et tendent vers zéro en même temps que lui.

La même conclusion subsiste évidemment pour un contour quelconque, puisqu'une transformation conforme permet toujours de passer d'un tel contour à un cercle.

3. Revenons maintenant à la méthode d'approximations successives. Nous écrivons l'équation

$$\Delta u = a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu \qquad \left(\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right).$$

Conformément à ce que nous avons dit d'une manière générale, nous devons considérer les équations successives, où, pour simplifier, nous partons de $u_1 = 0$,

$$\begin{aligned}
&\Delta u_2 = 0,\\
&\Delta u_3 = a\frac{\partial u_2}{\partial x} + b\frac{\partial u_2}{\partial y} + cu_2,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
&\Delta u_n = a\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} + b\frac{\partial u_{n-1}}{\partial y} + cu_{n-1}.
\end{aligned}$$

On intègre chaque équation en se donnant la valeur de l'intégrale le long d'un contour C; cette succession continue de valeurs est la même pour toutes les équations: u_2 est déterminée par la première équation; la fonction continue

$$a\frac{\partial u_2}{\partial x} + b\frac{\partial u_2}{\partial y} + cu_2$$

aura, dans l'aire limitée par C, un certain maximum, que nous désignerons par F. Nous pouvons aux équations précédentes substituer en posant

$$u_3 - u_2 = v_3, \quad \ldots, \quad u_n - u_{n-1} = v_n, \quad \ldots,$$

$$\Delta v_3 = a\frac{\partial u_2}{\partial x} + b\frac{\partial u_2}{\partial y} + cu_2,$$

$$\Delta v_4 = a\frac{\partial v_3}{\partial x} + b\frac{\partial v_3}{\partial y} + cv_3,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\Delta v_n = a\frac{\partial v_{n-1}}{\partial x} + b\frac{\partial v_{n-1}}{\partial y} + cv_n.$$

Tous les v s'annulent sur le contour. On aura donc, d'après ce qui précède,

$$|v_3| < \mathrm{MF}, \quad \left|\frac{\partial v_3}{\partial x}\right| \text{ et } \left|\frac{\partial v_3}{\partial y}\right| < \mathrm{NF}.$$

Soient maintenant A, B, C les valeurs absolues maxima de a, b, c; nous avons

$$\left|a\frac{\partial v_3}{\partial x} + b\frac{\partial v_3}{\partial y} + cv_3\right| < (\mathrm{AN} + \mathrm{BN} + \mathrm{CM})\mathrm{F}.$$

Par suite, on aura, pour v_4,

$$|v_4| < \mathrm{M}(\mathrm{AN} + \mathrm{BN} + \mathrm{CM})\mathrm{F},$$

$$\left|\frac{\partial v_4}{\partial x}\right| \text{ et } \left|\frac{\partial v_4}{\partial y}\right| < \mathrm{N}(\mathrm{AN} + \mathrm{BN} + \mathrm{CM})\mathrm{F}.$$

Donc

$$\left|a\frac{\partial v_4}{\partial x} + b\frac{\partial v_4}{\partial y} + cv_4\right| < (\mathrm{AN} + \mathrm{BN} + \mathrm{CM})^2\mathrm{F},$$

et il est clair qu'on aura, d'une manière générale,

$$|v_n| < \mathrm{M}(\mathrm{AN} + \mathrm{BN} + \mathrm{CM})^{n-3}\mathrm{F},$$

$$\left|\frac{\partial v_4}{\partial x}\right| \text{ et } \left|\frac{\partial v_4}{\partial y}\right| < \mathrm{N}(\mathrm{AN} + \mathrm{BN} + \mathrm{CM})^{n-3}\mathrm{F}.$$

Nous avons à chercher si u_n tend vers une limite quand n augmente indéfiniment. On voit qu'il en sera certainement ainsi si

$$AN + BN + CM < 1$$

et cette condition sera remplie si le contour est suffisamment petit, car M et N seront alors eux-mêmes très petits.

Supposons donc cette inégalité vérifiée; nous pouvons représenter la limite de u_n par la série

$$u = u_2 + v_3 + v_4 + \ldots + v_n + \ldots.$$

Ce sera une fonction continue de x et y, ayant des dérivées partielles du premier ordre, représentées, d'après ce qui précède, par les séries

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_3}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial v_n}{\partial x} + \ldots,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial y} + \ldots + \frac{\partial v_n}{\partial y} + \ldots.$$

La fonction u prendra sur C les mêmes valeurs que u_2, c'est-à-dire la succession donnée de valeurs.

D'autre part, puisqu'on a d'une manière générale

$$u_n = -\frac{1}{2\pi}\int\int\left[a(\xi,\eta)\frac{\partial u_{n-1}}{\partial \xi} + b(\xi,\eta)\frac{\partial u_{n-1}}{\partial \eta} + c(\xi,\eta)u\right] \times G(\xi,\eta,x,y)\,d\xi\,d\eta,$$

on aura évidemment

$$(\alpha)\quad \left\{ \begin{aligned} u(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\int\int&\left[a(\xi,\eta)\frac{\partial u}{\partial \xi} + b(\xi,\eta)\frac{\partial u}{\partial \eta} + c(\xi,\eta)u\right] \\ &\times G(\xi,\eta,x,y)\,d\xi\,d\eta. \end{aligned} \right.$$

De là peut se conclure que la fonction $u(x,y)$ satisfait à l'équation

$$(\beta)\qquad \Delta u = a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu,$$

mais c'est un point qui demande quelques explications.

4. Revenons un moment à l'équation

$$\Delta u = f(x, y)$$

considérée au n° **2**. Nous avons rappelé qu'on trouvait l'intégrale de cette équation s'annulant sur le bord, à l'aide de la formule

$$u(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\int\int f(\xi, \eta)\, G(\xi, \eta, x, y)\, d\xi\, d\eta.$$

Cette fonction a des dérivées partielles du premier ordre $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ dont nous avons donné la valeur; dans tout ceci, aucune hypothèse spéciale n'est à faire sur la fonction $f(x, y)$, si ce n'est qu'elle est continue. Il n'en est pas de même quand on veut aborder l'étude des dérivées secondes de la fonction u. On suppose généralement, en abordant ce point, que f a des dérivées partielles du premier ordre $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$, elles-mêmes continues, et alors on établit sans peine l'existence des dérivées secondes et la relation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y).$$

A la vérité, l'hypothèse de l'existence des dérivées partielles n'est pas indispensable, et, d'après M. Hölder, que cite M. Harnack dans son Ouvrage *Sur le potentiel logarithmique*, il suffit, pour pouvoir arriver aux conclusions précédentes, que la valeur absolue de la différence $f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0)$ soit moindre que Ar^μ, A et μ étant deux constantes positives, et r la distance de (x_1, y_1) et (x_0, y_0).

Quoi qu'il en soit, la seule continuité de la fonction $f(x, y)$ ne paraît pas suffisante pour établir que u a des dérivées secondes, et satisfait à l'équation $\Delta u = f$.

Nous ne pouvons donc, sans quelques hypothèses, passer de la relation (α) à la relation (β) du précédent paragraphe.

Dans le cas où $f(x, y)$ a des dérivées continues dans C et intégrables, on établit, avons-nous dit, que la fonction $u(x, y)$ a des dérivées du second ordre, continues dans C, et satisfaisant à l'équation $\Delta u = f$. J'ajoute que ces dérivées secondes restent continues, même quand le point (x, y) s'approche indéfiniment d'un point du contour C : c'est ce qu'on vérifiera facilement pour le cas où C est un cercle; car alors la fonction G s'exprime, comme nous l'avons vu, à l'aide de logarithmes. De plus, on peut trouver une limite pour les valeurs absolues des dérivées secondes de u; en désignant, comme plus haut, par F la valeur absolue maxima de $f(x, y)$ et en appelant F_1 la valeur absolue maxima de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$, on aura, pour limite supérieure des valeurs des dérivées secondes,

$$\lambda F + M_1 F_1.$$

λ et M_1 sont deux quantités positives qui ne dépendent pas de la fonction f; la *seconde* tend vers zéro quand la courbe C tend vers zéro.

Ceci posé, revenons à la succession des équations donnant u_2, v_3, v_4, ...; nous supposerons que u_2 et ses dérivées partielles, premières et secondes, sont continues à l'intérieur de C et sur C. Nous calculons alors v_3 au moyen de l'équation

$$\Delta v_3 = a\frac{\partial u_2}{\partial x} + b\frac{\partial u_2}{\partial y} + cu_2.$$

Pour pouvoir affirmer que v_3 a des dérivées secondes jouissant de la propriété indiquée, il faut que le second membre ait des dérivées premières; d'où l'hypothèse nécessaire, que a, b, c aient des dérivées partielles du premier ordre continues.

Cherchons à avoir une limite des dérivées secondes de v_3, v_4, ..., v_n. Soient F le module maximum de $a\frac{\partial u_2}{\partial x} + b\frac{\partial u_2}{\partial y} + cu_2$, et F_1 celui de ses dérivées du premier ordre; nous aurons, d'après ce qui précède,

$$|v_3| < MF, \qquad \left|\frac{\partial v_3}{\partial x}\right| < NF, \qquad \left|\frac{\partial^2 v_3}{\partial x^2}\right| < \lambda F + M_1 F_1.$$

Passons à v_4, qui satisfait à l'équation

$$\Delta v_4 = a\frac{\partial v_3}{\partial x} + b\frac{\partial v_3}{\partial y} + cv_3.$$

Le second membre de cette équation a pour limite supérieure l'expression déjà considérée

$$(AN + BN + CM)F,$$

et pour ses dérivées premières une expression de la forme

$$F(\lambda A' + NB' + MC') + M_1 D' F_1,$$

A', B', C', D' étant des constantes ne dépendant que des limites supérieures de a, b, c et de leurs dérivées premières.

On passera donc des limites supérieures de v_3 et de ses dérivées premières et secondes aux limites relatives à v_n, en remplaçant F et F_1 respectivement par

$$(AN + BN + CM)F,$$
$$(\lambda A' + NB' + MC')F + M_1 D' F_1.$$

Désignons cette substitution linéaire par

$$(F, F_1, \alpha F, aF + \beta F_1).$$

Il faudra faire n fois la substitution, pour obtenir les limites relatives à v_{n+3} et à ses dérivées premières et secondes. Par suite, la limite supérieure pour les dérivées secondes de v_{n+3} sera

$$\lambda\alpha^n F + M_1[aF(\alpha^n + \alpha^{n-1}\beta + \alpha^{n-2}\beta^2 + \ldots + \beta^n) + \beta^{n+1} F_1].$$

Or α et β sont très petits, si le contour est suffisamment petit. La série dont le terme général est

$$\frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 v_n}{\partial y^2}$$

sera donc convergente, si α et β sont moindres que l'unité. Il en résulte que la fonction $u(x, y)$ a des dérivées secondes, elles-mêmes continues dans l'aire C; par suite, la fonction

$$a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu$$

a des dérivés premières; et de la relation

$$u(x, y) = -\frac{1}{2\pi}\int\int G(\xi, \eta, x, y)\left(a\frac{\partial u}{\partial \xi} + b\frac{\partial u}{\partial \eta} + cu\right) d\xi\, d\eta,$$

nous pouvons enfin conclure, en toute rigueur,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu.$$

5. On voit que la présence des dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$ entraîne à quelques longueurs dans la démonstration, surtout pour le dernier point. Dans le cas où l'équation se réduit à

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = cu,$$

le paragraphe précédent est inutile; car de la relation

$$u = -\frac{1}{2\pi}\int\int G(\xi, \eta, x, y)\, c(\xi, \eta)\, u(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta,$$

on peut, cette fois, conclure à l'équation différentielle, si l'on suppose que la fonction $c(x, y)$ a des dérivées partielles du premier ordre.

II. — Équations non linéaires.

6. Examinons maintenant, d'une manière plus générale, les équations

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, x, y\right)$$

et cherchons ce que donneront les approximations successives. Nous considérons les équations

$$\Delta u_2 = F\left(u_1, \frac{\partial u_1}{\partial x}, \frac{\partial u_1}{\partial y}, x, y\right),$$

$$\Delta u_3 = F\left(u_2, \frac{\partial u_2}{\partial x}, \frac{\partial u_2}{\partial y}, x, y\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Delta u_n = F\left(u_{n-1}, \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x}, \frac{\partial u_{n-1}}{\partial y}, x, y\right).$$

On peut, sans diminuer la généralité, supposer que nous fassions toutes les intégrations successives, en supposant que u s'annule sur le contour. Pour bien fixer les idées, nous supposerons d'abord que, (x, y) restant dans une certaine région du plan, la fonction

$$F(u, v, w, x, y),$$

reste finie et bien déterminée quand u, v, w restent compris entre $-L$ et $+L$, L étant une certaine constante positive. Dans ces conditions la fonction F a un certain maximum μ; les valeurs absolues de u_2, $\frac{\partial u_2}{\partial x}$, $\frac{\partial u_2}{\partial y}$ seront moindres que μM, et μN (M et N ayant les mêmes significations qu'au n° **2**). On part évidemment d'une fonction u_1, pour laquelle u_1, $\frac{\partial u_1}{\partial x}$ et $\frac{\partial u_1}{\partial y}$ restent compris entre $-L$ et $+L$. Si donc

$$\mu M < L, \qquad \mu N < L,$$

u_2, $\frac{\partial u_2}{\partial x}$ et $\frac{\partial u_2}{\partial y}$ seront compris entre $-L$ et $+L$; or M et N tendent vers zéro avec le contour C. En prenant celui-ci assez petit, nous pouvons donc supposer les inégalités précédentes vérifiées; on en conclut, de proche en proche, que, pour toute valeur de n,

$$u_n, \quad \frac{\partial u_n}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial u_n}{\partial y}$$

seront compris entre $-L$ et $+L$.

Ceci posé, considérons les équations

$$\Delta u_2 = F\left(u_1, \frac{\partial u_1}{\partial x}, \frac{\partial u_1}{\partial y}, x, y\right),$$

$$\Delta v_3 = F\left(u_2, \frac{\partial u_2}{\partial x}, \frac{\partial u_2}{\partial y}, x, y\right) - F\left(u_1, \frac{\partial u_1}{\partial x}, \frac{\partial u_1}{\partial y}, x, y\right),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\Delta v_n = F\left(u_{n-1}, \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x}, \frac{\partial u_{n-1}}{\partial y}, x, y\right) - F\left(u_{n-2}, \frac{\partial u_{n-2}}{\partial x}, \frac{\partial u_{n-2}}{\partial y}, x, y\right).$$

en posant

$$v_3 = u_3 - u_2, \qquad \dots, \qquad v_n = u_n - u_{n-1}.$$

Or introduisons ici une nouvelle hypothèse sur la fonction

$$F(u, v, w, x, y);$$

je supposerai que, pour deux systèmes de valeurs

$$(u_1, v_1, w_1), \quad (u_2, v_2, w_2)$$

compris dans l'intervalle $(-L, +L)$, on puisse déterminer trois constantes positives A, B, C, telles que

$$\begin{aligned} &|F(u_2, v_2, w_2, x, y) - F(u_1, v_1, w_1, x, y)| \\ &\quad < A|u_2 - u_1| + B|v_2 - v_1| + C|w_2 - w_1|. \end{aligned}$$

Cette condition sera évidemment remplie, en particulier, si la fonction F a des dérivées partielles par rapport à u, v, w.

Le second membre de l'équation, donnant d'une manière générale Δv_n, sera donc moindre alors, en valeur absolue, que

$$A|v_{n-1}| + B\left|\frac{\partial v_{n-1}}{\partial x}\right| + C\left|\frac{\partial v_{n-1}}{\partial y}\right|.$$

Il n'y a, par suite, rien à changer aux raisonnements faits précédemment pour établir que v_n tend vers zéro et que la série

$$u_2 + v_3 + \ldots + v_n + \ldots$$

est convergente, si le contour est suffisamment petit, c'est-à-dire que u_n tend, dans ces conditions, vers une limite u.

Cette fonction $u(x, y)$ a des dérivées partielles du premier ordre; pour établir qu'elle a des dérivées du second ordre, on procédera encore comme plus haut; mais il faut faire l'hypothèse que

$$F(u, v, w, x, y)$$

a des dérivées partielles du premier ordre par rapport aux cinq lettres dont elle dépend. On conclura enfin de là que

$$\Delta u = F\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, x, y\right).$$

Nous devons ajouter une remarque importante. On vient de trouver une intégrale de l'équation

$$\Delta u = F\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, x, y\right),$$

continue, ainsi que ses dérivées partielles des deux premiers ordres, à l'intérieur de C, et prenant sur C une succession continue donnée de valeurs; mais nous n'avons pas démontré ici, d'une manière générale, que cette solution est unique, même si le contour est suffisamment petit.

Ici encore, comme dans le cas des équations linéaires, un cas très simple est celui où F ne dépend que de u, x, y. Arrêtons-nous un moment sur cette équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F(u, x, y),$$

qui fera, dans un autre Chapitre, l'objet d'un examen approfondi.

On a dit que la limite de u_n tendait vers une limite $u(x, y)$, qui a des dérivées partielles du premier ordre. Cette équation satisfait à la relation

$$u(x, y) = -\frac{1}{2\pi}\int\int G(\xi, \eta, x, y)\,F[u(\xi, \eta), \xi, \eta]\,d\xi\,d\eta.$$

De là se conclut que $u(x, y)$ a des dérivées partielles du second ordre, si l'on suppose que $\frac{\partial F}{\partial u}$, $\frac{\partial F}{\partial x}$ et $\frac{\partial F}{\partial y}$ existent. Ajoutons que, si F a des dérivées partielles secondes, $u(x, y)$ aura des dérivées partielles troisièmes continues dans l'aire limitée par C, et, d'une manière générale, si F a des dérivées partielles jusqu'à l'ordre $n-1$, la fonction $u(x, y)$ aura des dérivées partielles jusqu'à l'ordre n continues dans C. Cette remarque nous sera utile dans la suite; elle se démontre immédiatement en intégrant successivement par parties sous le signe d'intégration.

CHAPITRE II.

ÉQUATIONS DU TYPE (B).

1. Parmi les équations (B), il suffira de considérer l'équation linéaire

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz;$$

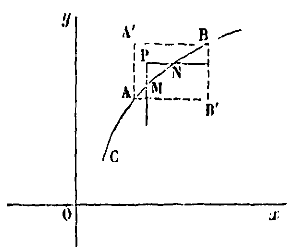
car, cette équation une fois traitée, il suffirait de reprendre les mêmes raisonnements que plus haut, pour traiter de l'équation plus générale

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \mathrm{F}\left(z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, x, y\right).$$

Il ne peut être question ici de déterminer une intégrale par ses valeurs le long d'un contour fermé; nous avons à étudier la méthode d'approximations successives, au point de vue de la détermination de l'intégrale générale.

Considérons dans le plan $(\mathrm{O}x, \mathrm{O}y)$ un arc d'une courbe quelconque

Fig. 1.



C (*fig.* 1), pour lequel nous supposons seulement qu'une quelconque des coordonnées est une fonction continue de l'autre, et variant toujours dans le même sens. Nous voulons obtenir l'intégrale de l'équation (1) pour laquelle les dérivées partielles $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ prennent sur C une succession donnée de valeurs, et qui en un point A de C prend une valeur donnée α.

On traitera d'abord le problème pour l'équation

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x\,\partial y} = 0,$$

ce qui sera immédiat. Soit z_1 cette solution; on doit considérer alors l'équation

$$\frac{\partial^2 z_2}{\partial x\,\partial y} = a\frac{\partial z_1}{\partial x} + b\frac{\partial z_1}{\partial y} + c z_1.$$

On cherchera l'intégrale de cette équation en z_2, pour laquelle $\frac{\partial z_2}{\partial x}$ et $\frac{\partial z_2}{\partial y}$ s'annulent sur C et qui s'annule elle-même en A. On considérera ensuite l'équation en z_3

$$\frac{\partial^2 z_3}{\partial x\,\partial y} = a\frac{\partial z_2}{\partial x} + b\frac{\partial z_2}{\partial y} + c z_2,$$

que l'on intégrera dans les mêmes conditions, et l'on continuera ainsi indéfiniment. Il s'agit maintenant d'étudier la série

$$(2) \qquad z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_n + \ldots$$

et de voir si elle donne la solution du problème proposé. Cette façon de procéder ne diffère évidemment que par la notation de celle à laquelle conduisent les approximations successives indiquées dans l'Introduction.

2. Remarquons auparavant que la solution de l'équation

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x\,\partial y} = 0$$

est immédiate si, *sur* C, on se donne $\frac{\partial z_1}{\partial x}$ en fonction de x, et $\frac{\partial z_1}{\partial y}$ en fonction de y.

Soient $\varphi(x)$ et $\psi(y)$ ces deux fonctions. On aura évidemment

$$z_1 = z_0 + \int_{x_0}^{x} \varphi(x)\,dx + \int_{y_0}^{y} \psi(y)\,dy,$$

en désignant par x_0 et y_0 les coordonnées de A.

Soit, d'autre part, l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = F(x, y),$$

où F est une fonction continue de x et y. L'intégrale de cette équation s'annulant en A, et pour laquelle $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ sont nulles sur C, peut se représenter de la manière suivante : soit P un point de coordonnées x et y; menons par ce point des parallèles aux axes rencontrant la courbe en M et N : l'intégrale cherchée sera représentée par l'intégrale double

$$-\int\int F(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta,$$

étendue au triangle curviligne PMN.

On suppose, comme je l'ai déjà dit, que de A en B sur l'arc C une quelconque des coordonnées est fonction continue de l'autre et variant toujours dans le même sens (en croissant, dans le cas de la figure).

Ceci posé, supposons que le point P reste dans le rectangle ABA′B′, et soient AB′ = α, BB′ = β; nous allons chercher une limite supérieure des différents termes de la série (2). Désignons par M la valeur absolue maxima de

$$a\frac{\partial z_1}{\partial y} + b\frac{\partial z_1}{\partial y} + c z_1,$$

dans le rectangle ABA′B′. On aura alors

$$|z_2| < M\alpha\beta, \qquad \left|\frac{\partial z_2}{\partial x}\right| < M\beta, \qquad \left|\frac{\partial z_2}{\partial y}\right| < M\alpha.$$

Soient d'autre part A, B, C les valeurs absolues maxima des fonctions a, b, c dans le même rectangle, il en résulte que

$$\left| a\frac{\partial z_2}{\partial x} + b\frac{\partial z_2}{\partial y} + cz_2 \right| < \mathrm{M}[\mathrm{A}\beta + \mathrm{B}\alpha + \mathrm{C}\alpha\beta].$$

Par conséquent

$$|z_3| < \mathrm{M}[\mathrm{A}\beta + \mathrm{B}\alpha + \mathrm{C}\alpha\beta]\,\alpha\beta, \qquad \left|\frac{\partial z_3}{\partial x}\right| < \mathrm{M}[\mathrm{A}\beta + \mathrm{B}\alpha + \mathrm{C}\alpha\beta]\,\beta.$$

En continuant ainsi, on arrive d'une manière générale à

$$|z_n| < \mathrm{M}[\mathrm{A}\beta + \mathrm{B}\alpha + \mathrm{C}\alpha\beta]^{n-1}\,\alpha\beta.$$

Il s'ensuit que les termes de la série (2) peuvent être comparés à ceux d'une progression géométrique; si donc

$$(3) \qquad \mathrm{A}\beta + \mathrm{B}\alpha + \mathrm{C}\alpha\beta < 1,$$

la série (2) et les deux séries

$$\frac{\partial z_1}{\partial x} + \frac{\partial z_2}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial z_n}{\partial x} + \ldots,$$
$$\frac{\partial z_1}{\partial y} + \frac{\partial z_2}{\partial y} + \ldots + \frac{\partial z_n}{\partial y} + \ldots,$$

convergeront. Quant à la condition (3), elle sera évidemment vérifiée, si le point B est pris suffisamment voisin de A. Les séries convergeront à l'intérieur du rectangle ABA'B'. La fonction z limite de la série $z_1 + z_2 + \ldots + z_n + \ldots$ aura évidemment des dérivées partielles du premier ordre, et la dérivée seconde $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$; de plus elle satisfera à l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz.$$

3. Ainsi, sous les hypothèses faites, nous avons pour l'équation aux dérivées partielles proposée une intégrale z qui prend en un point A de la courbe une valeur donnée, et pour laquelle les dérivées partielles

$\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ prennent respectivement sur C une succession continue donnée de valeurs. Ces fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(y)$ de notre analyse ne sont assujetties qu'à la seule condition d'être continues. *Remarquons que z, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ sont des fonctions continues de x et y, même quand on traverse l'arc* C; il y a là un point intéressant de la théorie des équations aux dérivées partielles sur lequel il est bon d'insister. Une intégrale z d'une équation linéaire du second ordre aux dérivées partielles est, dit-on d'une manière générale, déterminée quand on se donne les valeurs de z et de $\frac{\partial z}{\partial x}$ sur une courbe C ou, ce qui revient au même, les valeurs de $\frac{\partial z}{\partial x}$ et de $\frac{\partial z}{\partial y}$ sur cette courbe et la valeur de z en un point particulier de C. Mais cette conception générale de l'intégrale n'est valable que pour une courbe C tracée dans une région du plan où les caractéristiques sont réelles, c'est-à-dire que dans ce cas, seulement, on est assuré d'avoir une intégrale satisfaisant aux conditions données, et continue ainsi que ses dérivées partielles du premier ordre quand on traverse l'arc C; notre analyse précédente montre bien nettement que z, $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ restent continues au passage par C. Il en est tout autrement quand les caractéristiques sont imaginaires. Il suffira, pour le voir, de prendre l'exemple simple de l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Il ne peut y avoir, en général, de solution de cette équation, continue dans le rectangle ABA'B', ainsi que ses dérivées partielles du premier ordre, et pour laquelle $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ prennent sur l'arc AB la succession de valeurs désignées plus haut par $\varphi(x)$ et $\psi(y)$, ces dernières fonctions n'étant assujetties qu'à la condition d'être continues. On pourrait, en effet, dans le cas contraire, former une fonction analytique

$$z + iz_1,$$

qui serait holomorphe dans le rectangle considéré; la partie réelle de cette fonction serait arbitraire sur l'arc de courbe AB, ce qui est impossible, puisqu'une fonction holomorphe déterminée sur un arc de courbe, si petit qu'il soit, ne peut être étendue que d'une seule manière.

Ainsi la démonstration, qui vient d'être donnée relativement à l'existence de l'intégrale de l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} + cz$$

et à son développement en série, permet d'aborder une question qu'on laisse nécessairement de côté, quand on suppose que a, b, c sont des fonctions analytiques et que les conditions aux limites sont exprimées aussi au moyen de fonctions analytiques.

4. L'équation linéaire

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} + cz$$

a fait l'objet d'un très remarquable Chapitre de M. Darboux, dans ses *Leçons sur la théorie des surfaces* (t. II, Chap. IV). Suivant une idée de Riemann, M. Darboux ramène l'intégration de cette équation à la recherche d'une solution particulière z; cette intégrale z est déterminée par cette condition de se réduire pour $x = x_0$ à une fonction donnée $\psi(y)$, et pour $y = y_0$ à une fonction donnée $\varphi(x)$. M. Darboux établit l'existence d'une telle solution, en supposant que a, b, c sont des fonctions *analytiques* de x et y, ainsi que φ et ψ, et il se sert, comme intermédiaire, d'une équation célèbre considérée par Euler et Poisson. En restant à notre point de vue des approximations successives, la démonstration de l'existence d'une telle solution z est bien facile, sans faire d'ailleurs sur a, b, c, φ et ψ d'autre hypothèse que celle de la continuité. [On a évidemment $\varphi(x_0) = \psi(y_0)$, et l'on suppose que φ et ψ ont des dérivées premières.]

Partons de

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x\, \partial y} = 0,$$

en l'intégrant avec les conditions données, d'où

$$z_1 = \varphi(x) + \psi(y) - \varphi(x_0).$$

Il faut ensuite, d'une manière générale, trouver une intégrale de l'équation

$$\frac{\partial^2 z_n}{\partial x\, \partial y} = f(x, y),$$

f étant une fonction connue, et telle que z_n s'annule pour $x = x_0$, quel que soit y, et pour $y = y_0$ quel que soit x. Cette solution est donnée par

$$z_n = \int_{x_0}^{x} \int_{y_0}^{y} f(x, y)\, dx\, dy.$$

Soit M le module maximum de z_1, $\frac{\partial z_1}{\partial x}$ et $\frac{\partial z_1}{\partial y}$ dans un rectangle, parallèle aux axes, ayant pour centre (x_0, y_0) et des côtés de longueurs α et β; le module de $a\frac{\partial z_1}{\partial x} + b\frac{\partial z_1}{\partial x} + cz_1$ sera moindre que KM. Donc on a pour $|z_2|$, $\left|\frac{\partial z_2}{\partial x}\right|$ et $\left|\frac{\partial z_2}{\partial y}\right|$ la limite supérieure

$$\mathrm{KM}\alpha\beta.$$

On aura pareillement pour $|z_3|$, $\left|\frac{\partial z_3}{\partial x}\right|$ et $\left|\frac{\partial z_3}{\partial y}\right|$ la limite supérieure

$$\mathrm{K}^2\mathrm{M}(\alpha\beta)^2$$

et, pour $|z_n|$ et ses dérivées du premier ordre

$$\mathrm{M}(\mathrm{K}\alpha\beta)^n.$$

On en conclut la convergence de la série

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_n + \ldots$$

et de ses dérivées du premier ordre, si $K\alpha\beta < 1$, ce qui est vérifié si le rectangle est suffisamment petit. La démonstration est donc complète, sans qu'il soit nécessaire d'insister davantage.

CHAPITRE III.

I. — De l'équation $\Delta u = F(u, x, y)$.

Le théorème démontré au début du Chapitre I est relatif au cas où l'aire considérée est suffisamment petite. Occupons-nous maintenant de classes d'équations où ce théorème soit exact sans restriction. Reprenons l'équation

$$\Delta u = F\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, x, y\right).$$

1. Voici un cas étendu dans lequel il ne pourra y avoir plus d'une intégrale continue prenant une succession de valeurs sur un contour. Soient u_1 et u_2 deux telles intégrales; on aura

$$\frac{\partial^2(u_1-u_2)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(u_1-u_2)}{\partial y^2} = F\left(u_1, \frac{\partial u_1}{\partial x}, \frac{\partial u_1}{\partial y}, x, y\right) - F\left(u_2, \frac{\partial u_2}{\partial x}, \frac{\partial u_2}{\partial y}, x, y\right),$$

ce qui peut s'écrire, en posant $u_1 - u_2 = v$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = {} & F'_u(u_3, v_3, w_3, x, y)\, v \\ & + F'_v(u_3, v_3, w_3, x, y)\frac{\partial v}{\partial x} + F'_w(u_3, v_3, w_3, x, y)\frac{\partial v}{\partial y},\end{aligned}$$

en désignant par u_3, v_3, w_3 des quantités intermédiaires respectivement entre u_1 et u_2, $\frac{\partial u_1}{\partial x}$ et $\frac{\partial u_2}{\partial x}$, $\frac{\partial u_1}{\partial y}$ et $\frac{\partial u_2}{\partial y}$. Nous pouvons considérer les coefficients de v, $\frac{\partial v}{\partial x}$ et $\frac{\partial v}{\partial y}$ comme des fonctions de x et y, et nous avons alors une équation linéaire en v, avec une intégrale v qui s'annule sur le bord. Cette intégrale sera nécessairement nulle, d'après le n° **1** du Chapitre I, si l'on a

$$4\,F'_u(u, v, w, x, y) > [F'_v(u, v, w, x, y)]^2 + [F'_w(u, v, w, x, y)]^2,$$

quels que soient u, v, w, et pour toute valeur de x et y dans la région considérée du plan. En particulier, si F ne renferme pas $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$, cette relation exprimera que F croît toujours avec u. Nous allons donc considérer spécialement l'équation suivante :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F(u, x, y), \tag{1}$$

F étant une fonction de u, x et y, sur laquelle diverses hypothèses doivent être faites. Nous supposons d'abord que la fonction F soit bien déterminée et finie pour toute valeur réelle de u, x et y, et qu'elle soit *positive;* de plus elle *croît* toujours avec u.

Dans ces conditions, je vais d'abord démontrer d'une seconde manière qu'*il ne peut y avoir deux intégrales de cette équation, continues ainsi que leurs dérivées dans un contour* C, *et prenant sur ce contour la même succession de valeurs*. Supposons, en effet, qu'il existe deux intégrales u_1 et u_2; la différence $u_1 - u_2$ s'annule sur C, et, si elle ne garde pas un signe invariable à l'intérieur de l'aire, on peut fractionner celle-ci en plusieurs parties sur le bord desquelles elle s'annulera en gardant le même signe à l'intérieur. Soit Γ un tel contour; on aura

$$\Delta(u_1 - u_2) = F(u_1, x, y) - F(u_2, x, y)$$

Or nous avons déjà rappelé que, si l'on considère l'équation

$$\Delta v + \varphi(x, y) = 0,$$

l'intégrale v de cette équation, s'annulant sur un contour Γ, est donnée par la formule

$$v = \frac{1}{2\pi}\int\!\!\int \varphi(\xi, \eta)\, G(\xi, \eta, x, y)\, d\xi\, d\eta;$$

nous aurons donc ici

$$u_1 - u_2 = \frac{1}{2\pi}\int\int [F(u_2, x, y) - F(u_1, x, y)]\, G(\xi, \eta, x, y)\, d\xi\, d\eta;$$

mais $u_2 - u_1$ a un signe invariable à l'intérieur de Γ, soit, par exemple, le signe *plus*. Or, puisque par hypothèse

$$F(u_2) > F(u_1) \qquad \text{quand} \qquad u_2 > u_1,$$

on voit que le premier membre de l'égalité précédente sera *négatif*, tandis que le second est *positif;* cette contradiction démontre le théorème.

Ceci posé, cherchons à obtenir la solution prenant une succession continue donnée de valeurs sur C en ajoutant maintenant l'hypothèse, inutile dans les lignes précédentes, que F est toujours positif. Nous pouvons toujours commencer par résoudre le problème pour l'équation de Laplace $\Delta u = 0$, soit h la solution. Si l'on remplace u par $u + h$ dans l'équation (1), elle gardera la même forme, la fonction F ayant seulement changé, et la nouvelle fonction u s'annulant sur le contour. Nous pouvons donc partir de l'équation

$$\Delta u = F(u, x, y),$$

en nous proposant de trouver l'intégrale qui s'annule sur le contour C.

Je considère alors les équations

$$(2) \qquad \begin{cases} \Delta S_1 = F(0, x, y), \\ \Delta S_2 = F(S_1, x, y), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \Delta S_n = F(S_{n-1}, x, y). \end{cases}$$

On forme, comme il a été rappelé plus haut, la solution de la première qui s'annule le long de C; S_1 obtenu, on intègre la seconde équation dans les mêmes conditions, et ainsi de suite.

Il est d'abord manifeste que toutes les quantités S seront négatives à l'intérieur de C; de plus on aura

$$\begin{gathered} 0 > S_2 > S_1, \\ S_1 < S_3 < S_2, \\ S_2 > S_4 > S_3, \end{gathered}$$

et ainsi de suite, le sens des inégalités entre trois S consécutifs variant d'une ligne à la suivante. Ces inégalités se déduisent de la formule

$$S_n = -\frac{1}{2\pi}\int\int F(S_{n-1}, \xi, \eta)\, G(\xi, \eta, x, y)\, d\xi\, d\eta.$$

Il en résulte que les S à indices impairs forment une suite croissante, les S à indices pairs forment une suite décroissante; d'autre part, tout terme de la première suite est inférieur à un terme quelconque de la seconde. Les S à indices impairs auront donc une limite u, et les S à indices pairs une limite v. Ces deux limites sont des fonctions de x et y, nécessairement continues; elles s'annulent toutes deux sur C et pour tout point de l'intérieur du contour, on a

$$u \leqq v;$$

u peut être considéré comme la limite de la série

$$S_1 + (S_3 - S_1) + (S_5 - S_3) + \ldots.$$

On a d'ailleurs

$$u = -\frac{1}{2\pi}\int\int F(v, \xi, \eta)\, G(\xi, \eta, x, y)\, d\xi\, d\eta,$$

v, sous le signe d'intégration, étant fonction de ξ et η, et aussi

$$v = -\frac{1}{2\pi}\int\int F(u, \xi, \eta)\, G(\xi, \eta, x, y)\, d\xi\, d\eta.$$

On en conclut que u et v ont, à l'intérieur du contour, des dérivées partielles du premier ordre, et ensuite des dérivées partielles de tout ordre jusqu'au rang n si F a des dérivées partielles jusqu'au rang $n - 1$, par rapport aux trois lettres dont elle dépend.

Comme, d'autre part, on a

$$\Delta S_n = F(S_{n-1}, x, y), \qquad \Delta S_{n+1} = F(S_n, x, y),$$

nous en concluons que *u et v sont deux fonctions de x et y s'annulant sur le contour, et satisfaisant aux deux équations*

$$(3) \qquad \begin{cases} \Delta u = F(v, x, y), \\ \Delta v = F(u, x, y). \end{cases}$$

2. On voit que *l'emploi des approximations successives ne nous conduit pas à la solution du problème proposé*, c'est-à-dire à la recherche de l'intégrale de l'équation (1) s'annulant sur le contour; car, au lieu d'une seule équation, nous avons le système des équations (3).

Cependant la question serait résolue si l'on avait $u = v$. Or je dis qu'il en sera ainsi, non pas nécessairement en général, mais *si le contour* C *est suffisamment petit*. Reprenons à cet effet les équations (2); elles donnent

$$\Delta(S_n - S_{n-1}) = F(S_{n-1}, x, y) - F(S_{n-2}, x, y);$$

or on peut écrire

$$F(S_{n-1}, x, y) - F(S_{n-2}, x, y) = (S_{n-1} - S_{n-2}) F'_S(\Sigma, x, y),$$

Σ étant compris entre S_{n-1} et S_{n-2}; d'ailleurs, d'après l'hypothèse faite sur F, la dérivée F'_S est toujours positive. Lorsque S varie entre o et S_1, F'_S a un certain maximum, et ce maximum dépendant de x et y a lui-même un maximum M, quand (x, y) se déplace dans l'aire C. Ceci posé, considérons les équations

$$\begin{aligned} \Delta u_0 &= F(0, x, y), \\ \Delta u_1 &= M u_0, \\ \Delta u_2 &= M u_1, \\ &\dots\dots\dots\dots, \\ \Delta u_n &= M u_{n-1}, \end{aligned}$$

chaque équation étant intégrée avec la condition que tous les u sont nuls sur le bord du contour. On aura évidemment

$$|S_n - S_{n-1}| < |u_n|.$$

Or, si le contour C est suffisamment petit, nous avons vu (n° 5, Chap. Ier) que la série des u était convergente. Par conséquent

$$\lim(S_n - S_{n-1}) = 0,$$

c'est-à-dire que $u = v$.

Nous avons alors l'intégrale de l'équation

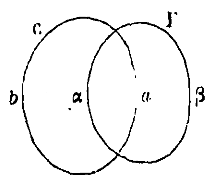
$$\Delta u = F(u, x, y)$$

s'annulant sur le bord du contour.

3. Le problème proposé n'est résolu par ce qui précède que pour un contour suffisamment petit; nous allons passer maintenant à un contour quelconque. Nous nous proposons, à cet effet, de montrer que *le problème, étant traité pour deux contours ayant une partie commune, pourra être résolu pour le contour limitant extérieurement l'ensemble des deux aires.*

Soient C et Γ (*fig.* 2) les deux contours. Désignons par a la partie de C

Fig. 2.



comprise dans Γ, et par b la partie extérieure; de même appelons α la partie de Γ comprise dans C, et β la partie extérieure.

Nous allons commencer par démontrer deux lemmes :

1° Soient deux fonctions u et v pour lesquelles on a

$$\Delta u = F(u, x, y), \quad \Delta v = F(v, x, y).$$

Si sur le bord d'un contour fermé C on a $u \geqq v$, je dis qu'il en sera de même à l'intérieur. Si, en effet, $u - v$ devient négatif, le changement de signe se fera le long d'une courbe fermée (qui pourra avoir des points communs avec le bord). A l'intérieur de cette courbe on devra avoir $u = v$, puisque nous avons vu qu'il ne pouvait y avoir plus d'une intégrale prenant des valeurs données sur un contour; par conséquent on a toujours : soit $u = v$, soit $u > v$. C. Q. F. D.

2° Considérons encore l'équation $\Delta u = \mathrm{F}$: l'intégrale de cette équation s'annulant sur le contour C sera évidemment négative à l'intérieur; on envisage de plus l'intégrale v de l'équation

$$\Delta v = \mathrm{F}(0, x, y)$$

s'annulant sur C, on aura

$$|u| < |v|,$$

puisque $\mathrm{F}(u_1, x, y) < \mathrm{F}(0, x, y)$ quand u est négatif. Si donc M désigne la valeur absolue maxima de v, on aura

$$|u| < \mathrm{M}.$$

Ceci posé, prenons une intégrale de l'équation

$$\Delta u = \mathrm{F}(u, x, y),$$

qui s'annule sur b et prenne sur a des valeurs négatives dont la valeur absolue ne dépasse pas M, nous voulons trouver *une limite de la valeur absolue de u sur une courbe* α, joignant les deux extrémités de a, et qui ne soit pas tangente en ces extrémités à la courbe C.

A cet effet, je désigne par h l'intégrale de l'équation

$$\Delta h = 0$$

qui prend sur a et b les valeurs indiquées. D'après une remarque fondamentale faite par M. Schwarz dans ses beaux travaux *Sur l'équation de Laplace,* on a, *sur* α,

$$|h| < \mathrm{M}q,$$

q désignant un nombre plus petit que l'unité.

Posons alors $u = U + h$, nous aurons l'équation

$$\Delta U = F(U + h, x, y)$$

et nous devons considérer l'intégrale de cette équation en U qui s'annule sur C. U sera négatif, et, comme h est négatif, on aura, *a fortiori*

$$|U| < M.$$

Nous en concluons, et c'est là notre second lemme

$$|u| < Mq + M,$$

inégalité qui va jouer le rôle essentiel.

J'arrive maintenant à la solution du problème proposé; il s'agit de montrer que l'on saura trouver la solution de l'équation

$$\Delta u = F(u, x, y)$$

s'annulant sur b et β, si l'on sait intégrer l'équation précédente avec des conditions données aux limites pour les courbes C et Γ.

Soit u_1 la fonction déterminée dans C et s'annulant sur cette courbe; nous formons alors la fonction v_1 déterminée dans Γ, s'annulant sur β, et prenant sur α les mêmes valeurs que u_1. Revenant maintenant au premier contour, formons la fonction u_2 déterminée dans C, s'annulant sur b, et prenant sur a les mêmes valeurs que v_1, et continuons ainsi indéfiniment en passant successivement d'un contour à l'autre. Nous obtiendrons de cette manière deux suites

$$\begin{array}{ccccc} u_1, & u_2, & \ldots, & u_n, & \ldots, \\ v_1, & v_2, & \ldots, & v_n, & \ldots, \end{array}$$

sur lesquelles on peut faire les remarques suivantes :

u_1 est négatif dans C, donc v_1 est négatif sur α et par suite sur a; donc, si nous revenons à u_2, on aura (premier lemme)

$$u_1 > u_2$$

et, en continuant ainsi, il vient évidemment

$$0 > u_1 > u_2 > \ldots > u_n > \ldots,$$
$$0 > v_1 > v_2 > \ldots > v_n > \ldots.$$

Il faut montrer que u_n et v_n tendent vers une limite; il suffira de faire voir que $|u_n|$ et $|v_n|$ restent inférieurs à un nombre fixe. C'est ce que va nous donner facilement le second lemme.

Nous avons

$$\begin{array}{ll} \text{Sur } \alpha \ldots\ldots & |u_1| < M; \\ \text{Sur } a \ldots\ldots & |v_1| < Mq + M; \\ \text{Sur } \alpha \ldots\ldots & |u_2| < q(Mq + M) + M = M(q^2 + q + 1); \\ \text{Sur } a \ldots\ldots & |v_2| < qM(q^2 + q + 1) + M = M(q^3 + q^2 + q + 1) \end{array}$$

et, d'une manière générale :

$$\begin{array}{ll} \text{Sur } \alpha \ldots\ldots & |u_n| < M(q^{2n-2} + q^{2n-3} + \ldots + 1); \\ \text{Sur } a \ldots\ldots & |v_n| < M(q^{2n-1} + q^{2n-2} + \ldots + 1), \end{array}$$

en désignant par M la valeur absolue maxima des intégrales de l'équation

$$\Delta u = F(0, x, y)$$

s'annulant respectivement sur C et Γ; q, qui est moindre que l'unité, désigne le plus grand des deux nombres de même nom correspondant respectivement à C et à la courbe α, à Γ et à la courbe a.

Les inégalités précédentes montrent que u_n et v_n tendent vers deux limites u et v. Ces limites u et v sont des fonctions continues de x et y, ayant respectivement dans C et Γ des dérivées partielles de tout ordre; c'est ce qu'on voit de suite en recourant aux expressions de u et v comme limite d'une série d'intégrales définies. Les fonctions u et v satisfont à l'équation proposée. Je dis que u et v prennent les mêmes valeurs sur a et α; en effet v_n prend les mêmes valeurs que u_n sur α, et u_{n+1} prend les mêmes valeurs que v_n sur a. Donc, à la limite, v prend les mêmes valeurs que u sur a et α. Il en résulte que, dans l'aire commune aux deux contours, on a

$$u = v.$$

Nous avons donc l'intégrale de l'équation proposée s'annulant sur b et β; elle est représentée par u à l'intérieur de C, et par v à l'intérieur de Γ.

La recherche de l'intégrale de l'équation

$$\Delta u = F(u, x, y),$$

prenant des valeurs données sur un contour quelconque peut être considérée comme complètement effectuée par l'analyse qui précède.

On ne doit pas oublier seulement les hypothèses faites sur la fonction $F(u, x, y)$; je les rappelle. La fonction $F(u, x, y)$ est positive pour toute valeur de u, et pour toute valeur de x et y dans la région considérée du plan; de plus la fonction F est constamment croissante avec u.

Un cas particulier, très simple et fort intéressant, sur lequel nous revenons plus loin, est celui de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = A(x, y)\, e^u,$$

$A(x, y)$ étant positif dans la région du plan où restera le point (x, y). Mais, avant de considérer cette équation, montrons que la méthode employée dans les précédents paragraphes peut réussir quand les conditions indiquées pour F sont un peu différentes.

4. Nous supposons toujours que F croisse avec u; mais nous allons supposer que $F(u, x, y)$ s'annule pour $u = 0$, de telle sorte que cette fonction sera négative quand u sera négatif. Dans ces conditions, l'intégrale de l'équation

$$\Delta u = F(u, x, y)$$

s'annulant le long d'un contour sera évidemment $u = 0$.

Si l'on a deux intégrales u_1 et u_2, telles que sur un contour C on ait

$$u_1 > u_2,$$

il en sera de même à l'intérieur. Le raisonnement est toujours le même;

car, dans le cas contraire, on aurait nécessairement une région à l'intérieur de laquelle u_1 serait moindre que u_2, ces deux quantités étant égales sur le bord; or ceci est impossible, d'après l'équation

$$\Delta(u_1 - u_2) = F(u_1, x, y) - F(u_2, x, y).$$

En particulier, si une intégrale u est positive en tous les points d'un contour, elle sera positive à l'intérieur de ce contour, puisqu'elle doit être supérieure à l'intégrale $u = 0$. Si, de plus, g est le maximum des valeurs sur le contour, u sera moindre que g à l'intérieur.

Ceci posé, nous allons montrer que l'on peut employer le procédé alterné, si les valeurs données le long du contour sont *positives*. Reprenons les deux contours C et Γ considérés dans le précédent paragraphe; les fonctions

$$\begin{matrix} u_1, & u_2, & \ldots, & u_n, & \ldots, \\ v_1, & v_2, & \ldots, & v_n, & \ldots, \end{matrix}$$

auxquelles conduit l'application de la méthode sont ici toutes positives. Pour un point quelconque à l'intérieur, on a

$$\begin{gathered} u_1 < u_2 < u_3 < \ldots < u_n < \ldots, \\ v_1 < v_2 < v_3 < \ldots < v_n < \ldots. \end{gathered}$$

Si g est le maximum des valeurs positives données sur le contour, les u_n et les v_n sont moindres que g; on a, par suite, deux limites u et v pour u_n et v_n. De plus, u_n et v_n sont égaux sur α (voir *fig.* 2), et u_{n-1} prend les mêmes valeurs que v_n sur a; donc u et v prennent les mêmes valeurs sur α et a. Ils coïncident donc dans la partie intermédiaire.

Il est évident qu'on peut faire les mêmes raisonnements en supposant que les valeurs données sur le bord sont négatives.

L'équation suivante

$$\Delta u = p \cdot u,$$

où p est une fonction positive de x et y, rentre dans le cas que nous venons d'examiner. Je l'ai traité directement dans le Mémoire déjà cité des *Acta mathematica* (t. XII).

5. Outre ces cas très généraux, les méthodes précédentes peuvent réussir, dans certains cas particuliers, pour d'autres équations. Prenons, par exemple, l'équation

$$\Delta u = A e^{u} - B e^{-u},$$

où l'on suppose que A et B sont des fonctions continues et positives de x et y dans une certaine région du plan, et que de plus $A > B$. On peut encore démontrer qu'il ne peut exister deux intégrales prenant les mêmes valeurs sur un contour C. On raisonnera pour cela comme précédemment, ce qui est possible, puisque la fonction

$$A e^{u} - B e^{-u},$$

croît toujours avec u. Cherchons alors l'intégrale de l'équation s'annulant sur C. Nous formons, comme plus haut, les équations

$$\begin{aligned} \Delta S_1 &= A - B, \\ \Delta S_2 &= A e^{S_1} - B e^{-S_1}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \Delta S_n &= A e^{S_{n-1}} - B e^{-S_{n-1}}. \end{aligned}$$

Si, pour tous les points de l'aire limitée par C, on a

$$A e^{S_1} - B e^{-S_1} > 0,$$

c'est-à-dire

$$e^{2S_1} > \frac{B}{A},$$

on pourra faire la même succession de raisonnements que précédemment. Les S à indices pairs et les S à indices impairs auront respectivement deux limites u et v. *On voit qu'il y a ici une condition complémentaire*, que nous n'avions pas tout à l'heure. D'ailleurs, si le contour C est suffisamment petit, S_1 sera très voisin de zéro, et par conséquent l'inégalité sera vérifiée. De plus, on aura encore, avec un contour assez petit, $u = v$.

Le problème proposé se trouvera alors résolu pour de tels contours, et l'on passera encore à un contour quelconque tracé dans la région du plan où

$$A - B > 0,$$

en employant des considérations identiques à celles dont nous avons plus haut fait usage.

Si le point (x, y) reste dans une région du plan où

$$A - B < 0,$$

on posera simplement dans l'équation $u = -v$, et elle deviendra alors

$$\Delta v = Be^{v} - Ae^{-v}$$

et nous nous retrouverons dans le cas précédent.

CHAPITRE IV.

DE L'ÉQUATION $\Delta u = Ae^{u}$.

1. Nous allons étudier particulièrement l'équation

$$(1) \qquad \Delta u = A(x, y)e^{u},$$

$A(x, y)$ étant positif. Les intégrales u, jusqu'ici considérées, étaient continues à l'intérieur du contour C. Je suppose maintenant qu'elles aient des infinis logarithmiques. J'entends qu'un point (a, b) est pour une intégrale u un infini logarithmique, si l'on a dans le voisinage de ce point

$$u = m \log[(x-a)^2 + (y-b)^2] + P(x, y),$$

$P(x, y)$ étant une fonction continue de x et y; m désigne une constante.

On voit qu'en posant

$$u = m \log[(x-a)^2 + (y-b)^2] + v,$$

l'équation devient

$$(2) \qquad \Delta v = [(x-a)^2 + (y-b)^2]^m A(x, y) e^v.$$

Si m est positif, le coefficient de e^v dans le second membre est une fonction continue de x et y dans C; on peut donc intégrer l'équation avec des conditions aux limites données, et par suite intégrer l'équation (1) sous la condition que u prenne une succession continue donnée de valeurs sur C, et admette le point (a, b) comme point singulier logarithmique avec le coefficient m.

Si l'on a $m < 0$, mais supérieur à -1, on pourra encore intégrer l'équation (2), c'est-à-dire trouver une fonction v continue dans C et prenant des valeurs données sur ce contour. Cherchons, par exemple, l'intégrale qui s'annule sur C; on forme, comme précédemment, la succession des équations

$$\Delta S_1 = [(x-a)^2 + (y-b)^2]^m A(x, y),$$
$$\Delta S_2 = [(x-a)^2 + (y-b)^2]^m A(x, y) e^{S_1},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$\Delta S_n = [(x-a)^2 + (y-b)^2]^m A(x, y) e^{S_{n-1}}.$$

On intègre toujours chaque équation avec la condition que l'intégrale soit nulle sur le contour. Prenons la première équation : on a

$$S_1 = -\frac{1}{2\pi} \iint [(\xi-a)^2 + (\eta-b)^2]^m A(\xi, \eta) G(\xi, \eta, x, y)\, d\xi\, d\eta,$$

mais il faut s'assurer que l'intégrale a un sens, puisqu'ici m est négatif et que le point (a, b) est à l'intérieur de C. Or, en supposant d'abord (x, y) différent de (a, b), on voit de suite, si m est supérieur à -1, que l'intégrale est déterminée. Il en est encore de même, si $x = a$, $y = b$; en effet, pour $\xi = a$, $\eta = b$, la fonction $G(\xi, \eta, a, b)$ devient infinie comme $-\frac{1}{2}\log[(\xi - a)^2 + (\eta - b)^2]$; donc, en employant les coordonnées polaires r et θ, relatives au point (a, b), nous avons, à un terme fini près, l'élément

$$r^{2m} A(\xi, \eta) \log r . r \, dr \, d\theta;$$

l'intégrale est déterminée évidemment si $m > 0$, et, quand m est négatif, nous avons à comparer à l'élément

$$\frac{\log r \, dr \, d\theta}{r^\lambda}, \qquad (0 > \lambda > 1),$$

dont l'intégrale reste finie pour $r = 0$.

Nous pouvons donc raisonner sur $S_1, S_2, \ldots, S_{n-1}, \ldots$, comme nous l'avons fait plus haut, et ici, comme précédemment, la recherche de la fonction v satisfaisant à l'équation (2) et prenant sur le contour C une valeur donnée se trouvera effectuée si le contour C est suffisamment petit. L'emploi du procédé alterné permettra alors de passer à un contour quelconque, de telle sorte que la question suivante peut être considérée comme résolue : *nous déterminons l'intégrale de l'équation*

$$\Delta u = A e^u,$$

passant des valeurs données sur un contour C, *et ayant à l'intérieur de ce contour un certain nombre de points singuliers logarithmiques donnés, avec des coefficients donnés supérieurs à* -1.

2. Envisageons maintenant le cas plus particulier encore où $A(x, y)$ se réduit à une constante positive k. Prenons donc l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = k e^u.$$

Dans ce qui précède, la région limitée par la courbe C était située tout entière à distance finie; nous allons considérer ici une région du plan comprenant le point à l'infini.

Soient $(a_1, b_1)\ldots(a_p, b_p)$ p points à distances finies, et $m_1, m_2, \ldots, m_p$ des constantes supérieures à -1; posons

$$u = \Sigma m_i \log[(x-a_i)^2 + y - b_i)] + v.$$

L'équation devient

$$(3) \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = k e^{\Sigma m_i \log[(x-a_i)^2 + (y-b_i)^2]} e^v.$$

Parmi les m_i les uns sont positifs, les autres négatifs; désignons par m un terme positif quelconque, et par $-m'$ un terme négatif quelconque. Nous allons supposer que

$$\Sigma m' - \Sigma m > 1$$

et, comme précédemment, les m' sont inférieurs à l'unité.

Dans ces conditions, le coefficient de e^v sera comparable, pour r très grand, à

$$\frac{1}{r^\mu}; \qquad (x^2 + y^2 = r^2),$$

μ étant supérieur à *deux*. Je dis que dans ces conditions on pourra, étant donnée une courbe fermée C enveloppant tous les points (a, b), obtenir une intégrale de l'équation (3) prenant des valeurs données sur C et continue à l'extérieur de C, même quand le point (x, y) s'éloigne indéfiniment. On le verra bien nettement, en faisant la transformation

$$x' + iy' = \frac{1}{x + iy}.$$

L'équation (3) devient alors

$$(3)' \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y'^2} = A(x', y') e^v,$$

le coefficient $A(x', y')$ devient infiniment grand, pour $x' = y' = 0$, comme

$$\frac{k}{r'^{4-\mu}}, \qquad (x'^2 + y'^2 = r'^2),$$

et ici $4 - \mu$ est inférieur à 2; par suite, d'après le paragraphe précédent, on pourra intégrer l'équation (3) en se donnant la valeur de v, le long de la courbe C' transformée de C, la fonction v étant continue à l'intérieur de C'. Si donc on revient à l'équation (3), celle-ci se trouvera bien intégrée dans les conditions indiquées; *l'intégrale prendra des valeurs données le long de C et sera continue à l'extérieur, même à l'infini.* Pour l'intégrale u, on pourra dire que le point à l'infini est un point singulier logarithmique et le coefficient correspondant sera $-\Sigma m_i$.

5. Nous pouvons maintenant considérer l'ensemble du plan. Soient encore donnés des points (a_i, b_i) à distance finie avec les coefficients correspondants m_i. Nous formons, comme au paragraphe précédent, l'équation (3), et nous supposons vérifiée l'inégalité écrite à la suite. *Cherchons à obtenir une intégrale de l'équation* (3), *continue dans tout le plan, même à l'infini.*

Nous allons, à cet effet, faire encore usage du procédé alterné. Soit C une première courbe fermée enveloppant tous les points (a, b) et C' une seconde courbe fermée extérieure à C. Toutes les fonctions que nous allons considérer satisferont à l'équation (3); nous partons d'une fonction v'_1, déterminée dans C', et prenant sur C' la valeur zéro. La fonction v'_1, ainsi obtenue, prend sur C certaines valeurs; formons alors la fonction v_1 continue à l'extérieur de C et prenant sur C les mêmes valeurs que v'_1. Nous passons ensuite à une fonction v'_2, continue dans C', et prenant sur C' les mêmes valeurs que v_1, et nous continuons indéfiniment cette succession d'opérations. Nous obtenons ainsi deux suites de fonctions

$$v'_1, \quad v'_2, \quad \ldots, \quad v'_n, \quad \ldots,$$
$$v_1, \quad v_2, \quad \ldots, \quad v_n, \quad \ldots.$$

Nous avons, au n° 3, rencontré deux suites présentant avec celles-ci une grande analogie. En appliquant absolument le même genre de considérations, on établit que les termes de la première ligne tendent vers une limite v' fonction continue de x et y dans C', et satisfaisant à l'équation (3); de même les termes de la seconde ligne tendent vers une limite v, fonction continue à l'extérieur de C, et vérifiant également l'équation (3). Enfin dans la partie comprise entre C et C', on a

$$v = v'.$$

L'ensemble des deux fonctions v et v' nous donne donc une intégrale de l'équation (3), continue dans tout le plan, même à l'infini.

Au lieu de partir d'une intégrale v'_1 prenant sur C' la valeur zéro, nous aurions pu partir d'une intégrale v'_1 prenant sur C' une valeur constante a, et la même méthode de démonstration eût été applicable; d'ailleurs ce cas se ramène à la précédente, en remplaçant v par $v + a$, ce qui revient à remplacer, dans l'équation (3), k par ke^a.

Il est intéressant de rechercher quel peut être le degré d'indétermination d'une intégrale de l'équation

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = ke^{\Sigma m_i \log[(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2]} e^v,$$

restant continue pour tout point (x, y) du plan, même le point à l'infini.

Nous allons montrer que, *si deux intégrales, jouissant de cette propriété, ont la même valeur en un point quelconque du plan, elles coïncideront nécessairement.*

4. Avant de démontrer cette proposition, il nous faut établir un théorème préliminaire.

Reprenons l'équation en u

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = ke^u,$$

dont l'équation en v n'était que la transformée, et soit (α, β) un point différent des points (a, b) et du point à l'infini. Désignons par u et U deux intégrales continues, ainsi que toutes leurs dérivées partielles dans le voisinage de (α, β).

Supposons que u et U soient égales au point (α, β). Je dis que ce point ne pourra être un point *isolé* pour la courbe

$$U(x, y) - u(x, y) = 0.$$

Si en effet, il en est ainsi, on aura, par exemple, dans le voisinage de (α, β),

$$U(x, y) > u(x, y),$$

cette inégalité devenant seulement une égalité pour $x = \alpha, y = \beta$. Traçons une courbe fermée C enveloppant (α, β); nous avons deux intégrales U et u, et, en tous les points du contour, la première est supérieure à la seconde. Nous avons déjà eu l'occasion de remarquer que, à l'intérieur du contour, U ne pouvait pas devenir inférieur à u (ce qui d'ailleurs ici est dans les hypothèses), mais j'ajoute maintenant que l'égalité même est impossible. Nous allons supposer que le contour C soit un cercle de centre O et de rayon R; nous voulons donc comparer deux intégrales U et u continues, ainsi que leurs dérivées partielles dans le cercle C, la première prenant des valeurs supérieures à la seconde sur ce cercle. Nous considérerons d'abord le cas où les valeurs de U et u sur C sont deux constantes A et a $(A > a)$; *il s'agit d'établir que* U, *qui, nous le savons, n'est jamais inférieur à* u, *ne lui devient jamais égal.* Par raison de symétrie, U et u ne dépendent que de la distance r du point (x, y) au centre O; si donc il y a, en dehors du point O, des points où u et U sont égales, ces points formeront des circonférences. Nous n'avons qu'à considérer la plus grande de ces circonférences : soit C′ de rayon R′; à l'intérieur de C′, u et U devront nécessairement coïncider. Prenons maintenant un point M quelconque de cette circonférence; en ce point on aura

$$u = U, \qquad \frac{du}{dr} = \frac{dU}{dr},$$

or u et U satisfont à la même équation différentielle ordinaire du second ordre, donc u et U devront encore avoir la même valeur depuis $r = R'$ jusqu'à $r = R$, puisqu'elles ne cessent d'être continues. Ce résultat est absurde, puisque pour $r = R$, u et U ont des valeurs différentes. La circonférence C′ ne peut donc exister, mais il nous reste à examiner le cas où cette circonférence se réduirait à un point, c'est-à-dire le cas où U et u seraient égales seulement au point O. Une difficulté se présente ici, car l'équation différentielle entre u et r admet $r = 0$ comme point critique, et le raisonnement précédent pourrait ne pas subsister. Cette équation différentielle peut s'écrire

$$r\frac{d^2u}{dr^2} = -\frac{du}{dr} + kr.e^u.$$

Soit pour $r = 0$, $u = u_0$; on aura nécessairement $\left(\frac{du}{dr}\right)_0 = 0$. Or, d'après un théorème que j'ai établi autrefois [*Sur les équations différentielles du second ordre dans le voisinage de certains points critiques* (*Comptes rendus*, 1878, second semestre)], il n'y a qu'une seule intégrale continue pour $r = 0$, prenant pour $r = 0$, la valeur u_0 et pour laquelle $\left(\frac{du}{dr}\right)_0$ soit nulle. Il en résulte que nos deux intégrales U et u qui ont la même valeur au point O doivent nécessairement coïncider, et la conclusion précédente subsiste.

Nous venons de supposer que les valeurs de U et u sur le cercle C étaient des constantes; considérons maintenant le cas où elles seraient des fonctions continues quelconques, mais de telle sorte que U soit toujours supérieur à u. Dans ces conditions U aura un certain minimum A sur le cercle C, et u un maximum a, et A sera supérieur à a; soit U_1 l'intégrale de l'équation proposée qui prend la valeur A sur le cercle C et u_1 l'intégrale qui prend la valeur a; d'après ce qui précède, pour tout point de l'intérieur du cercle

$$U_1 > u_1,$$

inégalité qui ne se transforme jamais, nous venons de l'établir, en une égalité. D'autre part, on a

$$U \geqq U_1 \qquad \text{et} \qquad u \leqq u_1;$$

donc, par suite,

$$U > u,$$

l'égalité étant exclue; c'est ce que nous voulions établir.

Il résulte de là que si en (α, β), U et u ont même valeur, ce point ne sera pas un point isolé pour la courbe

$$U(x, y) - u(x, y) = 0,$$

car autrement $U - u$ garderait un signe invariable dans le voisinage de (α, β); sur un cercle notamment, suffisamment petit, ayant (α, β) pour centre, on aurait toujours $U > u$, et ces deux fonctions ne pourraient avoir même valeur en un point de l'intérieur.

5. Nous pouvons maintenant démontrer le théorème énoncé à la fin du n° 3. Soient deux intégrales de l'équation en v, écrite plus haut, V et v, continues pour tout point (x, y) du plan, même le point à l'infini.

Leurs dérivées partielles sont aussi continues, *sauf aux points* (a, b) *et au point à l'infini*. Je suppose qu'en un point (α, β) [distinct des (a, b) et du point à l'infini], on ait

$$V = v.$$

D'après ce qui vient d'être établi, il y aura nécessairement une courbe réelle représentée par l'équation

$$V(x, y) - v(x, y) = 0,$$

et cette courbe (qui pourra passer par les points $[a, b]$ ou le point à l'infini, et même avoir ces points comme points asymptotiques) partagera le plan en deux régions, au moins. Il en résulte que les deux intégrales qui ont même valeur sur les bords de chacune de ces régions (que cette région reste tout entière à distance finie ou s'étende à l'infini) coïncideront. Les deux intégrales ne sont donc pas distinctes. Nous pouvons alors énoncer le théorème suivant, en revenant à l'équation initiale

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = k.e^u.$$

Une intégrale de cette équation, continue ainsi que ses dérivées partielles pour tout point du plan distinct de certains points donnés

(a, b) et du point à l'infini, admettant comme points singuliers logarithmiques les points (a, b), avec des coefficients m donnés satisfaisant aux inégalités indiquées, ayant de plus le point à l'infini comme point singulier logarithmique avec un coefficient égal à $-\Sigma m$, est déterminée quand on donne sa valeur en un point du plan différent des points critiques.

6. Après avoir étudié les intégrales de l'équation sur le plan simple, il sera facile d'étendre l'étude précédente au plan multiple, c'est-à-dire au plan recouvert d'un certain nombre de feuillets, et formant ce que l'on appelle une *surface de Riemann.* Nous pouvons supposer que cette surface de Riemann n'a pas de points de ramification à l'infini, comme on le fait habituellement dans la théorie des fonctions abéliennes. Soit n le nombre des feuillets. Désignons, pour abréger, par $P_1, P_2, \ldots, P_n$ le point à l'infini sur chacun de ces feuillets. Soit de plus sur la surface à distance finie un certain nombre de points (a_i, b_i), distincts des points de ramification, à chacun desquels nous associons un coefficient m_i. Associons de même à $P_1, P_2, \ldots, P_n$ les coefficients $M_1, M_2, \ldots, M_n$. On sait qu'on peut former une fonction uniforme sur la surface de Riemann, satisfaisant à l'équation de Laplace, et ayant les points singuliers logarithmiques (a_i, b_i) avec les coefficients correspondants m_i, et les points P avec les coefficients M. Un point (a, b) est, pour une fonction u, un point singulier logarithmique avec l'exposant m, si, dans le voisinage de ce point, u diffère seulement par une fonction continue de

$$m \log[(x-a)^2 + (y-b)^2].$$

Pour un point P de coordonnées (x, y) à l'infini sur un des feuillets, la fonction différera seulement par une fonction continue de

$$M \log(x^2 + y^2).$$

Il y a d'ailleurs entre les M et les m la relation bien connue

$$\Sigma M + \Sigma m = 0.$$

Désignons par Φ la fonction *harmonique* ainsi déterminée, et dans l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = k.e^u,$$

posons

$$u = \Phi + v;$$

nous aurons l'équation en v,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = k.e^\Phi e^v. \tag{4}$$

Nous allons raisonner sur cette équation en v, comme sur l'équation analogue (3) du n° **2**. Nous supposerons que les m sont supérieurs à -1; au contraire, tous les M sont inférieurs à -1.

Montrons comment on peut former une intégrale de l'équation (4) continue en *tous* les points de la surface de Riemann. Sur $n-1$ des feuillets, je détache le point à l'infini par des courbes fermées de très grande dimension $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$, et je considère la portion de la surface de Riemann limitée par $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$ et comprenant le point à l'infini sur le $n^{\text{ième}}$ feuillet. Sur cette portion de surface qui n'a qu'un point à l'infini, nous pouvons, en raisonnant comme dans le cas du plan simple, obtenir une intégrale continue et prenant sur $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$ des valeurs données. Ceci fait, en appliquant de nouveau la méthode alternée, pour deux contours autour du point P_{n-1}, nous obtenons une intégrale continue sur la portion de la surface limitée par $C_1, C_2, \ldots, C_{n-2}$ et prenant sur ces courbes des valeurs données. En continuant ainsi de proche en proche, nous arrivons à une intégrale continue sur toute la surface de Riemann, dont les dérivées partielles sont elles-mêmes continues, sauf aux points (a, b) et au point à l'infini sur chacun des feuillets.

Quant à la conclusion du n° **5**, elle subsiste entièrement, et rien n'est à changer dans la suite des raisonnements.

7. Je ne m'étendrai pas davantage en ce moment sur l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = k.e^u, \qquad (k > 0).$$

Elle se rattache, comme il est bien connu, à la théorie des surfaces à courbure constante négative. Cette théorie étant intimement liée à la Géométrie non euclidienne, qui y trouve une interprétation toute naturelle, on prévoit *a priori* que l'équation précédente peut être introduite dans la théorie des fonctions fuchsiennes. Pour le voir bien nettement, considérons le demi-plan de la variable complexe $z = x + iy$, décomposé en un réseau de polygones, et supposons que le polygone fondamental soit tout entier à distance finie et sans point commun avec la limite du demi-plan. Soit

$$(\mathrm{S}) \qquad f(\mathrm{Z}, \mathrm{U}) = 0$$

une courbe algébrique correspondant à ce groupe fuchsien; Z et U sont deux fonctions fuchsiennes de z. Considérons la forme quadratique que laissent invariable les substitutions du groupe fuchsien

$$\frac{dx^2 + dy^2}{y^2},$$

en posant $\mathrm{Z} = \mathrm{X} + i\mathrm{Y}$, elle se transforme en

$$\lambda(d\mathrm{X}^2 + d\mathrm{Y}^2),$$

λ étant une fonction de X et Y. Or, dans l'identité,

$$\frac{dx^2 + dy^2}{y^2} = \lambda(d\mathrm{X}^2 + d\mathrm{Y}^2).$$

Le premier membre peut représenter le carré de l'élément linéaire d'une surface dont la courbure est constante et égale à -1. Il en est donc de même du second membre; par conséquent, on aura

$$\frac{\partial^2 \log\lambda}{\partial \mathrm{X}^2} + \frac{\partial^2 \log\lambda}{\partial \mathrm{Y}^2} = 2\lambda,$$

et par suite, en posant $\lambda = e^u$,

$$(5) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial \mathrm{X}^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \mathrm{Y}^2} = 2e^u:$$

c'est l'équation écrite plus haut pour $k=2$. D'autre part, de l'identité

$$\frac{dx^2+dy^2}{y^2}=\lambda(dX^2+dY^2),$$

on déduit, en posant $Z=f(z)$ [$f(z)$ étant une fonction fuchsienne],

$$\lambda=\frac{1}{y^2 \operatorname{mod}^2 f'(z)}.$$

Cette expression ne change pas, quand on effectue sur z une substitution du groupe fuchsien; donc λ, considérée comme fonction de X et Y, sera une fonction uniforme sur la surface de Riemann définie par l'équation (S). Il en sera nécessairement de même de u; nous avons donc ainsi une intégrale de l'équation (5), uniforme sur la surface de Riemann, et n'ayant que des singularités logarithmiques. Je ne poursuis pas aujourd'hui les conséquences de cette remarque : cette étude spéciale, sur laquelle je compte revenir, nous éloignerait trop des considérations générales sur les approximations successives, qui font le principal objet de ce travail.

CHAPITRE V.

QUELQUES REMARQUES SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES.

1. Les méthodes d'approximation dont nous venons de faire usage peuvent évidemment être employées dans le cas des équations différentielles ordinaires; c'est un point sur lequel il ne me paraît pas inutile de s'arrêter, quoique nous n'ayons qu'à appliquer des méthodes étudiées plus haut.

Prenons tout d'abord une seule équation du premier ordre

$$\frac{dy}{dx} = f(y, x);$$

on peut établir ainsi le théorème fondamental relatif à l'existence de l'intégrale de cette équation, prenant pour $x = x_0$ la valeur $y = y_0$. On considérera, à cet effet, les équations

$$\frac{dy_1}{dx} = f(y_0, x),$$

$$\frac{dy_2}{dx} = f(y_1, x),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{dy_n}{dx} = f(y_{n-1}, x),$$

en effectuant chacune des quadratures, de façon que pour $x = x_0$ on ait $y_n = y_0$. Il s'agit d'établir que y_n tend, pour n infini, vers une limite y qui représentera l'intégrale cherchée, pourvu d'ailleurs que x reste dans le voisinage de x_0. Nous faisons sur la fonction $f(y, x)$, l'hypothèse qu'elle est continue et définie pour les valeurs de x et de y comprises respectivement entre $x_0 - a$ et $x_0 + a$ d'une part, puis $y_0 - b$ et $y_0 + b$ d'autre part; de plus, on peut déterminer une constante positive k, telle que

$$|f(y_2, x) - f(y_1, x)| < k|y_2 - y_1|$$

et nous supposons la fonction et les variables réelles.

Soit M le module maximum de $f(y, x)$ quand x et y restent entre les limites indiquées. On aura

$$y_1 = \int_{x_0}^{x} f(y_0, x)\, dx + y_0.$$

Soit ρ une quantité au plus égale à a; y_1 restera dans les limites voulues si

$$M\rho < b,$$

et il est évident qu'alors il en sera de même de $y_2, \ldots, y_n$. Désignant par δ une quantité au plus égale à ρ, nous allons supposer que x reste compris entre $x_0 - \delta$ et $x_0 + \delta$.

Nous avons alors, en posant $y_n - y_{n-1} = z_n$,

$$\frac{dz_1}{dx} = f(y_0, x),$$
$$\frac{dz_2}{dx} = f(y_1, x) - f(y_0, x),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{dz_n}{dx} = f(y_{n-1}, x) - f(y_{n-2}, x);$$

et tous les z s'annulent pour $x = x_0$. On a

$$|z_1| < M\delta,$$
$$|z_2| < kM\delta^2,$$

puis

$$|z_3| < k^2 M\delta^3$$

et, d'une manière générale,

$$|z_n| < M\delta(k\delta)^{n-1}.$$

On voit donc, en écrivant

$$y_n = y_0 + z_1 + z_2 + \ldots + z_n,$$

que y_n tendra vers une limite si $k\delta < 1$. La série

$$y = y_0 + z_1 + \ldots + z_n + \ldots$$

sera convergente, comme une progression géométrique décroissante. Ainsi y_n converge vers une limite y, quand x reste compris entre $x_0 - \delta$ et $x_0 + \delta$, *δ étant la plus petite des quantités*

$$a, \quad \frac{b}{M}, \quad \frac{1}{k}.$$

Dans cet intervalle, y représentera manifestement une fonction continue de x. On a, d'ailleurs,

$$y_n = \int_{x_0}^{x} f(y_{n-1}, x)\, dx + y_0,$$

et, comme y_n et y_{n-1} tendent vers y, il en résulte que

$$y = \int_{x_0}^{x} f(y, x)\, dx + y_0$$

et, par suite,

$$\frac{dy}{dx} = f(y, x),$$

c'est-à-dire que la limite y satisfait à l'équation différentielle. L'existence de l'intégrale est donc ainsi établie. On peut évidemment employer le même mode de démonstration si f est une fonction analytique des variables complexes x et y.

2. Passons à des cas moins simples, et cherchons ce que deviennent, dans le cas particulier d'une seule variable, les résultats que nous avons établis dans le cas de deux variables. Nous envisageons l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right).$$

Au point de vue où nous sommes placé, nous devons chercher à déterminer une intégrale par la valeur A qu'elle prend pour $x = a$, et la valeur B qu'elle prend pour $x = b$.

Partant d'une fonction arbitraire y_0, on formera la suite des équations

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = f\left(x, y_0, \frac{dy_0}{dx}\right),$$
$$\frac{d^2y_2}{dx^2} = f\left(x, y_1, \frac{dy_1}{dx}\right),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$\frac{d^2y_n}{dx^2} = f\left(x, y_{n+1}, \frac{dy_{n-1}}{dx}\right),$$

chaque équation étant intégrée par la condition que, pour $x = a$ et $x = b$, l'y correspondant prenne respectivement les valeurs A et B.

En faisant les mêmes hypothèses sur la fonction f qu'au Chapitre I, on démontrera que y_n tendra vers une limite y si l'intervalle (a, b) est suffisamment petit. On aura ainsi une intégrale de l'équation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right),$$

continue dans l'intervalle (a, b) et prenant aux deux extrémités les valeurs A et B. Cette intégrale n'est pas, d'ailleurs, nécessairement unique.

3. Rapprochons-nous maintenant des circonstances étudiées dans le Chapitre III, en partant de l'équation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f(x, y).$$

Si la fonction f croît toujours en même temps que y, il ne pourra y avoir deux intégrales de cette équation, continues dans l'intervalle (a, b), et prenant les valeurs A *et* B *aux deux extrémités.* On aurait, en effet, en désignant par y_1 et y_2 ces intégrales,

$$\text{(1)} \qquad \frac{d^2(y_1 - y_2)}{dx^2} = f(x, y_1) - f(x, y_2);$$

on peut supposer que, dans l'intervalle (a, b), la différence $y_1 - y_2$ qui s'annule aux limites, garde un signe constant dans l'intervalle; car, dans le cas contraire, on fractionnerait l'intervalle en plusieurs autres. Or, si l'on a

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \varphi(x),$$

l'intégrale z, s'annulant pour $x = 0$ et pour $x = x_0 > 0$ est donnée par la formule

$$z = \frac{x - x_0}{x_0} \int_0^x z\varphi(z)\,dz - x \int_x^{x_0} \varphi(z)\left(1 - \frac{z}{x_0}\right) dz.$$

Si donc $\varphi(x)$ est positif, z sera négatif dans l'intervalle de o à x_0. Soit maintenant, pour fixer les idées, $y_1 > y_2$ dans l'intervalle (a, b), l'équation (1) montre que $y_1 - y_2$ est négatif dans cet intervalle, contradiction qui démontre notre assertion.

La méthode d'approximations successives ne donne une suite convergente que si l'intervalle est suffisamment petit; mais nous pouvons encore ici, comme dans le cas de l'équation à deux variables, employer un procédé alterné. Il s'agit de montrer que, ayant quatre quantités a, α, b, β rangées par ordre croissant de grandeur, si l'on sait résoudre le problème pour l'intervalle (a, b) et l'intervalle (α, β), on pourra le résoudre pour l'intervalle (a, β). On supposera, comme il est permis, que les valeurs extrêmes sont nulles; de plus, il est supposé que $f(x, y)$ reste toujours positive.

On considère d'abord l'intégrale u_1 de l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y) \tag{2}$$

définie dans l'intervalle (a, b) et s'annulant aux extrémités. Elle prend en α une certaine valeur, et l'on forme alors l'intégrale de l'équation prenant en α cette valeur et s'annulant en β; en continuant ainsi, l'on forme deux suites

$$\begin{array}{cccccc} u_1, & u_2, & u_3, & \ldots, & u_n, & \ldots, \\ v_1, & v_2, & v_3, & \ldots, & v_n, & \ldots, \end{array}$$

comme dans le cas des deux contours qui empiètent l'un sur l'autre. Nous allons montrer que u_n et v_n tendent chacun vers une limite. Il nous faut faire, avant tout, deux remarques : soit une intégrale de l'équation $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, s'annulant en a et prenant en b une valeur négative $-$ B; on vérifie immédiatement que cette intégrale prend en α une valeur $-$ Bq, q étant un nombre positif plus petit que l'unité. D'autre part, si l'on considère deux intégrales y_1 et y_2 de l'équation (2), et telles que $y_1 \geqq y_2$ en a et en b, il en sera de même dans tout l'intervalle.

Ceci posé, il n'y a plus rien à changer aux raisonnements que nous avons faits au Chapitre III, et nous arrivons à la même conclusion.

Dans ce qui précède, il est supposé que $f(x, y)$ est toujours positif; on pourrait encore se placer dans la même hypothèse qu'au n° 4 du Chapitre III, c'est-à-dire examiner le cas où $f(x, y)$, toujours croissant avec y, s'annule pour $y = 0$. Si les valeurs extrêmes que l'on se donne pour l'intégrale sont de même signe, on pourra encore employer le procédé alterné.

4. Nous venons, dans le numéro précédent, de nous placer entièrement au même point de vue que dans le cas de l'équation aux dérivées partielles. Nous pouvons continuer encore à développer cette analogie. Revenons à l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right). \tag{3}$$

Il y a un cas où l'on peut être assuré qu'il n'y a qu'une seule intégrale, continue dans un intervalle (a, b) et prenant aux deux extrémités des valeurs données. Prenons d'abord l'équation linéaire : soit

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2A\frac{dy}{dx} + By,$$

A et B ne dépendant que de x. Supposons qu'il y ait une intégrale y, s'annulant pour $x = a$ et pour $y = b$. On a évidemment

$$\int_a^b y\left(\frac{d^2y}{dx^2} - 2A\frac{dy}{dx} - By\right)dx = 0,$$

qui se transforme de suite, en intégrant par partie, et devient

$$\int_a^b \left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2Ay\frac{dy}{dx} + By^2\right]dx = 0; \tag{α}$$

si donc on a, pour toute valeur de x entre a et b,

$$B > A^2,$$

on est assuré que l'intégrale considérée y ne peut qu'être identiquement nulle. On pourrait, d'ailleurs, aller plus loin, en employant un artifice dont nous nous sommes servi déjà au commencement même de ce Mémoire. Si λ désigne une fonction continue quelconque de x, entre a et b, on aura

$$(\beta) \qquad \int_a^b \frac{d(\lambda y^2)}{dx}\,dx = 0;$$

en additionnant (α) et (β), il vient

$$\int_a^b \left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2(\lambda + A)y\frac{dy}{dx} + \left(B + \frac{d\lambda}{dx}\right)y^2\right] = 0;$$

si donc λ est tel que

$$\frac{d\lambda}{dx} - (\lambda + A)^2 + B > 0,$$

y devra être identiquement nul. Nous sommes donc ramené à rechercher si l'on peut déterminer une fonction continue λ de x, entre a et b, telle que cette inégalité soit vérifiée. Mais je n'insiste pas sur ce point, et nous nous contenterons de la condition suffisante

$$B > A^2.$$

Reprenons maintenant l'équation non linéaire (3). On va trouver très facilement un cas étendu où cette équation ne pourra avoir deux intégrales continues, prenant les mêmes valeurs en a et b. Soient, en effet, y_1 et y_2 deux telles intégrales; on a

$$\frac{d^2(y_2 - y_1)}{dx^2} = f\left(x, y_2, \frac{dy_2}{dx}\right) - f\left(x, y_1, \frac{dy_1}{dx}\right).$$

Si nous supposons maintenant que f ait des dérivées partielles du second ordre, elles-mêmes continues, nous pourrons écrire, en posant $y_2 - y_1 = u$,

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = A\frac{du}{dx} + Bu;$$

en posant

$$A = f'_z\left(x, y_1 + \theta u, \frac{dy_1}{dx} + \theta' \frac{du}{dx}\right),$$

$$B = f'_y\left(x, y_1 + \theta u, \frac{dy_1}{dx} + \theta' \frac{du}{dx}\right),$$

je désigne, pour marquer les dérivations, la fonction f par $f(x, y, z)$. A et B peuvent être considérées comme des fonctions de x. Or, si l'on a, quels que soient y et z, pour x compris entre a et b,

$$4f'_y(x, y, z) > [f'_z(x, y, z)]^2,$$

il est manifeste que l'équation (3) n'aura qu'une seule intégrale prenant des valeurs données pour $x = a$ et pour $y = b$, résultat qui comprend nécessairement comme cas particulier celui où la fonction f ne contient que x et y, et croît avec y.

5. Nous n'avons jusqu'ici considéré qu'une seule équation. Il est très intéressant de considérer un système d'équations de la forme

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_m),$$

$$\frac{d^2 y_2}{dx^2} = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_m),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{d^m y_m}{dx^2} = f_m(x, y_1, y_2, \ldots, y_m).$$

Nous n'avons pas, pour les équations aux dérivées partielles, considéré des *systèmes d'équations*.

Les résultats précédents ne s'étendent pas d'eux-mêmes à un tel système. Il sera suffisant de se borner à $m = 2$; nous écrivons donc les deux équations

$$(4) \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} = f(x, y, z), \qquad \frac{d^2 z}{dx^2} = \varphi(x, y, z).$$

Nous considérons de suite le cas où f et φ sont positifs et *croissent* avec y et z. On ne doit pas chercher à établir qu'il n'y a dans ce cas qu'un seul système d'intégrales continues prenant pour $x = a$ et $x = b$ des valeurs données; le fait n'est pas exact. Pour en donner un exemple, il suffit de considérer l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y),$$

f étant positif et croissant avec y. Il y a une intégrale Y de cette équation s'annulant aux deux limites de l'intervalle (a, b), D'autre part, les approximations successives donnent, en général, deux limites y_1 et z_1 différentes, s'annulant en a et b et satisfaisant aux équations

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, z),$$
$$\frac{d^2z}{dx^2} = f(x, y).$$

Si donc on envisage ce système, il admet, avec les mêmes conditions aux limites, les deux systèmes de solutions

$$\left.\begin{array}{l} y = \mathrm{Y} \\ z = \mathrm{Y} \end{array}\right\} \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} y = y_1, \\ z = z_1. \end{array}\right.$$

Ils ne coïncident que si l'intervalle est assez petit.

Cette remarque faite, revenons au système (4). Nous n'allons avoir à donner à y et z que des valeurs négatives, et nous supposerons que pour deux tels systèmes quelconques de valeurs (y_1, z_1) et (y_2, z_2), on a

$$|f(x, y_2, z_2) - f(x, y_1, z_1)| < \mathrm{A}.|y_2 - y_1| + \mathrm{B}.|z_2 - z_1|,$$
$$|\varphi(x, y_2, z_2) - \varphi(x, y_1, z_1)| < \mathrm{C}.|y_2 - y_1| + \mathrm{D}.|z_2 - z_1|,$$

A, B, C et D désignant quatre constantes positives.

Quelle que soit la longueur de l'intervalle (a, b), l'emploi des approximations successives conduit, en partant de $y = 0$, $z = 0$, à deux limites déterminées : (u, v) d'une part, (U, V) de l'autre. C'est seulement quand l'intervalle est assez petit que l'on a

$$U = u, \qquad V = v.$$

Désignons par λ la limite supérieure au-dessous de laquelle ces identités seront vérifiées. Cette limite pourra s'exprimer à l'aide de A, B, C et D. Si maintenaut on veut avoir un système d'intégrales y, z prenant des valeurs autres que zéro, aux deux extrémités, on pose

$$y = \alpha x + \beta + y', \qquad z = \alpha_1 x + \beta_1 + z',$$

les α et β étant choisis de façon que y' et z' s'annulent aux deux limites, et l'on a deux équations de même forme. On appliquera alors à ces équations transformées la méthode d'approximations successives; la limite λ (qui ne dépend que de A, B, C, D), au-dessous de laquelle les approximations donnent une limite unique, sera la même que plus haut. Nous pouvons donc attacher un sens précis à l'intégrale, calculée comme il vient d'être dit, prenant des valeurs données (négatives), aux deux extrémités d'un intervalle moindre que λ. On peut, d'ailleurs, en réduisant encore λ, s'il est nécessaire, démontrer que cette intégrale est unique.

Considérons, en effet, deux systèmes (y_1, z_1) et (y_2, z_2) d'intégrales s'annulant aux extrémités α et β d'un intervalle. Les quatre fonctions y_1, y_2, z_1 et z_2 seront évidemment négatives, et, en posant $y_2 - y_1 = u$, $z_2 - z_1 = v$, on pourra écrire

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = A_1 u + B_1 v,$$

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = A_2 u + B_2 v,$$

A_1, A_2, B_1, B_2 étant des fonctions de x, respectivement moindres que les constantes positives A, B, C, D considérées plus haut. On suppose ici que f et φ ont des dérivées partielles par rapport à y et z. Or nous allons voir que, dans ce dernier système d'équations, il n'y a pas d'intégrales continues s'annulant pour α et β, si l'intervalle (α, β) est assez petit, sauf $u = 0$, $v = 0$. Le point *très important* consiste à montrer que la limite supérieure de cet intervalle peut s'exprimer en fonction de A, B, C, D. A cet effet, nous considérons les relations

$$\int_\alpha^\beta u\left(\frac{d^2u}{dx^2} - A_1 u - B_1 v\right) dx = 0,$$
$$\int_\alpha^\beta v\left(\frac{d^2v}{dx^2} - A_2 u - B_2 v\right) dx = 0,$$

évidemment vérifiées, puisque l'élément est identiquement nul, qui se transforment de suite en

$$(\mu)\qquad \left\{\begin{aligned} &\int_\alpha^\beta \left[\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + A_1 u^2 + B_1 uv\right] dx = 0,\\ &\int_\alpha^\beta \left[\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + A_2 uv + B_2 v^2\right] dx = 0.\end{aligned}\right.$$

A ces deux relations, joignons les trois suivantes

$$(\nu)\quad \int_\alpha^\beta \frac{d(Pu^2)}{dx}\,dx = 0, \qquad \int_\alpha^\beta \frac{d(Quv)}{dx}\,dx = 0, \qquad \int_\alpha^\beta \frac{d(Rv^2)}{dx}\,dx = 0,$$

où P, Q, R sont des fonctions continues quelconques de x. En faisant la somme des premiers membres des relations (μ) et (ν), nous obtiendrons une intégrale unique, dont l'élément sera une forme quadratique en u, v, $\frac{du}{dx}$, $\frac{dv}{dx}$. Les conditions pour que cette forme soit définie s'expriment par trois inégalités entre P, Q, R et leurs dérivées premières et les fonctions A_1, A_2, B_1, B_2; il est inutile de les écrire, quoique ce soit bien simple : soit

$$\varphi_1 < 0, \qquad \varphi_2 < 0, \qquad \varphi_3 < 0;$$

or considérons les équations

$$\varphi_1 = -a^2, \qquad \varphi_2 = -a^2, \qquad \varphi_3 = -a^2,$$

a étant un nombre fixe, d'ailleurs arbitraire. Nous pouvons considérer ces trois équations comme définissant P, Q, R, dont on se donnera arbitrairement les valeurs pour une valeur particulière de x. La limite de la région, dans laquelle P, Q, R seront certainement continues, pourra s'exprimer en fonction des constantes A, B, C, D; car les fonctions A_1, A_2, B_1, B_2 et non leur dérivée figurent dans les φ. Le théorème est donc établi. *Pour un intervalle (a, b), nous pouvons fixer un nombre λ, tel que pour tout intervalle (α, β) compris dans (a, b) et moindre que λ, les approximations successives convergent, et que de plus il n'y ait qu'un seul système (u, v) prenant des valeurs négatives données en α et β.*

Ce résultat obtenu, nous allons pouvoir trouver une intégrale (y, z) du système (4) prenant aux deux extrémités de l'intervalle (a, b) des valeurs données, que nous pouvons supposer être zéro. On peut, en effet, faire usage du procédé alterné, pourvu que la longueur d'un des deux intervalles, qui ont une partie commune, ne dépasse pas λ. Désignons comme plus haut (n° 3) par (a, b) et (α, β) les deux intervalles, on aura pour l'ensemble (y, z) deux suites qui convergent chacune vers une limite; l'une de ces suites est définie dans l'intervalle (a, b), l'autre dans l'intervalle (α, β). Dans ces deux suites, y et z ont la même valeur en α et en b; si l'intervalle (α, b) est supérieur à λ, nous ne sommes pas assuré que y et z coïncideront dans les deux suites, de α à b, et alors la méthode alternée ne nous donne rien. Il en est tout autrement si un des intervalles, et par suite (α, b) est moindre que λ. On peut toujours s'arranger de manière qu'il en soit ainsi, et finalement on arrivera à l'intervalle (a, b). *Nous obtenons donc en résumé un système d'intégrales (y, z) de l'équation*

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f(x, y, z), \quad \frac{d^2 z}{dx^2} = \varphi(x, y, z),$$

y et z s'annulant pour $x = a$, et pour $x = b$. Nous ne pouvons d'ailleurs pas affirmer, cela n'est même pas exact, en général, qu'il n'y ait que cette solution satisfaisant à ces conditions; *mais il nous paraît intéressant d'avoir établi l'existence d'au moins une solution.* Ces considérations s'étendent à un nombre quelconque d'équations de même forme.

Pour les équations aux dérivées partielles, on pourrait de même envisager certains systèmes, ce que nous n'avons pas fait dans les Chapitres précédents. L'extension des considérations qui viennent d'être développées en dernier lieu ne présenterait pas de difficultés. On considérerait le système

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}=f_1(x, y, u_1, u_2, \ldots, u_m), \\
\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}=f_2(x, y, u_1, u_2, \ldots, u_m), \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\frac{\partial^2 u_m}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_m}{\partial y^2}=f_m(x, y, u_1, u_2, \ldots, u_m).
\end{gathered}$$

En supposant les f positifs et croissant avec les u, on pourra former *un système* d'intégrales $u_1, u_2, \ldots, u_m$ prenant des valeurs données sur un contour, système qui d'ailleurs ne sera pas unique en général.