JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

PAUL APPELL

Sur l'équation $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ et la Théorie de la chaleur

Journal de mathématiques pures et appliquées 4^e série, tome 8 (1892), p. 187-216.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1892_4_8__187_0>

Sur l'équation $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ *et la Théorie de la chaleur;*

PAR M. PAUL APPELL.

L'équation $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$, qui se présente dans la Théorie de la chaleur, a été l'objet d'un grand nombre de travaux. Intégrée par Fourier, Poisson, Ampère (¹), elle a été étudiée en détail par Riemann dans son Ouvrage sur les équations aux dérivées partielles de la Physique mathématique (²), et par Schlaefli, dans un Mémoire inséré au Tome 72 du *Journal de Crelle*. M. Jordan l'a traitée comme exemple dans le Tome III de son *Cours d'Analyse* (p. 387). M. Boussinesq a résumé les méthodes générales d'intégration propres à cette équation et aux autres équations de la Physique mathématique dans le Tome II de son *Cours d'Analyse infinitésimale* (*Calcul intégral, Compléments*). Citons encore M^me^ Kowalevski (³), qui a appliqué à cette équation spéciale les méthodes de Cauchy, M. Bourlet, qui l'a prise comme exemple dans sa Thèse de doctorat, en regardant l'équation comme résultant de l'élimination de v entre les deux équations

$$\frac{\partial z}{\partial x} = v, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y},$$

(¹) *Journal de l'École Polytechnique*, t. X, p. 587.

(²) *Partielle Differentialgleichungen und deren Anwendung auf physikalische Fragen*, p. 107, 122; 1869.

(³) *Journal de Crelle*, t. 80, p. 22.

qui forment un système canonique et complètement intégrable. Ces équations admettent comme système d'intégrales le plus général des fonctions z et v qui, pour $x = x_0$, se réduisent respectivement à des fonctions données à l'avance de la variable y (¹). On ne peut pas affirmer qu'il existe une intégrale z qui, pour $y = 0$, se réduise à une fonction donnée de x. Mme Kowalevski a montré, par exemple (*loc. cit.*), que cette équation n'a pas d'intégrale qui se réduise à $\frac{1}{1-x}$ pour $y = 0$. M. Darboux (²) a rappelé cet exemple de Mme Kowalevski à propos d'une Note de M. Méray (³) sur un fait de même nature.

L'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

constitue le type le plus important auquel on peut réduire les équations linéaires à coefficients constants.

$$A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + C\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2D\frac{\partial z}{\partial x} + 2E\frac{\partial z}{\partial y} + Fz = 0$$

dans le cas *parabolique* $B^2 - AC = 0$, comme on le verra dans un Mémoire récent de M. du Bois-Reymond (*Journal de Crelle*, t. 104). Le cas elliptique $B^2 - AC < 0$ a été étudié par de nombreux auteurs, Lejeune-Dirichlet, Riemann, Schwarz, Weber (⁴). Plus récemment, M. Picard a consacré d'importants Mémoires à l'étude de ce cas, même dans l'hypothèse des coefficients variables (⁵); il a montré que, si $B^2 - AC > 0$, l'intégrale n'est pas nécessairement analytique. M. du Bois-Reymond s'est occupé, dans le Mémoire cité (*Crelle*, t. 104), du

(¹) BOURLET, *Sur les équations aux dérivées partielles simultanées*, Thèse de doctorat, p. 53.

(²) *Comptes rendus*, t. CVI, p. 651.

(³) *Ibid.*, p. 648.

(⁴) *Mathematische Annalen*, t. I.

(⁵) *Acta mathematica*, t. XII; *Journal de Mathématiques*, 1890; *Journal de l'École Polytechnique*, LXe Cahier, 1890; *Comptes rendus*, 1891, premier semestre.

cas hyperbolique $B^2 - AC > 0$, en employant principalement la considération de l'équation adjointe et une méthode analogue à celle de Riemann ([1]).

Dans ce travail, nous ne reprenons pas les résultats que donnent les méthodes de Cauchy; nous nous plaçons surtout au point de vue de la Physique mathématique, en supposant x, y et z réels, et nous nous inspirons des méthodes de Riemann. Nous nous attachons principalement (nos **10** et suivants) à répondre à une question qui nous a été posée par M. Boussinesq sur la Théorie de la chaleur et que nous avons résolue en partie dans une Note présentée à l'Académie des Sciences dans la séance du 27 mai 1890. Cette question peut s'énoncer comme il suit. On considère un conducteur indéfini dans lequel la température u est supposée dépendre uniquement de l'abscisse x. Cette température u étant donnée arbitrairement en fonction de x, $u = f(x)$, à l'instant initial $t = 0$, les formules de Fourier déterminent la température à un instant postérieur t quelconque, $t > 0$. Mais on demande : 1° si l'état initial donné pour u, $u = f(x)$, provient lui-même d'un état antérieur ($t < 0$); 2° lorsque cet état antérieur existe, s'il est unique, et comment on peut le trouver. Nous pensons avoir répondu d'une manière satisfaisante à ces deux questions : l'état antérieur n'existe pas toujours; quand il existe, il est unique et peut être déterminé dans des cas très généraux. Pour que l'état antérieur existe, il est nécessaire (mais non suffisant) que la fonction donnée $f(x)$ soit une fonction transcendante entière de x, c'est-à-dire une fonction développable en une série procédant suivant les puissances entières positives de x, convergente quel que soit x.

1. Résolvons d'abord la question suivante :

Chercher toutes les transformations de la forme

$$z = \lambda(x, y) z', \qquad x' = \varphi(x, y), \qquad y' = \psi(x, y),$$

([1]) *Voir* DARBOUX, *Leçons sur la théorie des surfaces*, t. II, Chap. IV.

qui ramènent l'équation

$$\delta z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

à la même forme

$$\delta z' = \frac{\partial^2 z'}{\partial x'^2} - \frac{\partial z'}{\partial y'} = 0.$$

Un calcul facile, mais un peu long, conduit au résultat suivant, qu'on peut aussi déduire des propositions données par M. Lie, dans son Mémoire *Ueber die Integration durch bestimmte Integrale von einer Classe linearen partiellen Differentialgleichungen*, p. 356. La substitution la plus générale, conservant à l'équation sa forme, est

$$z = \frac{C}{\sqrt{y-\alpha}} e^{-\frac{(x-\beta)^2}{4(y-\alpha)}} z',$$

$$x' = \frac{k(x-\beta)}{y-\alpha} + \beta', \qquad y' = -\frac{k^2}{y-\alpha} + \alpha',$$

où C, k, α, β, α', β' désignent des constantes arbitraires dont les deux premières sont différentes de zéro.

Cette substitution générale est composée avec les substitutions simples

(1) $$z = Cz', \qquad x' = kx + \alpha, \qquad y' = k^2 y + \beta,$$

(2) $$z = \frac{z'}{\sqrt{\pm y}} e^{-\frac{x^2}{4y}}, \qquad x' = \frac{x}{y}, \qquad y' = -\frac{1}{y},$$

dont la première est évidente. On voit en particulier que, si $z = F(x, y)$ est une solution de l'équation $\delta z = 0$,

$$z = \frac{1}{\sqrt{\pm y}} e^{-\frac{x^2}{4y}} F\left(\frac{x}{y}, -\frac{1}{y}\right)$$

en est une autre. La transformation

$$x' = \frac{x}{y}, \qquad y' = -\frac{1}{y}$$

est une transformation homographique du plan des xy, qui remplace ici l'inversion de Thomson pour le potentiel.

Par exemple, la solution

$$z = e^{ax+a^2y},$$

où a désigne une constante arbitraire, donne, par la transformation ci-dessus, la solution

$$z = \frac{1}{\sqrt{\pm y}} e^{-\frac{(x-2a)^2}{4y}},$$

qui est bien connue.

2. La solution de l'équation $\delta z = 0$,

$$z = e^{ax+a^2y},$$

est finie et continue en tous les points à distance finie, et admet des dérivées de tous les ordres. Il existe des solutions plus simples possédant cette propriété, ce sont les solutions qui sont des polynômes en x et y.

Si l'on développe e^{ax+a^2y} en série ordonnée suivant les puissances de a,

$$(3) \qquad e^{ax+a^2y} = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{a^\nu}{1.2\ldots\nu} V_\nu(x,y),$$

les coefficients $V_\nu(x,y)$ sont des polynômes en x et y homogènes et du degré ν par rapport à x et $\sqrt{y}$; ces polynômes vérifient évidemment l'équation différentielle, puisque la fonction (3) la vérifie quelle que soit la constante a. La méthode des coefficients indéterminés montre, en outre, que ce sont les seuls polynômes vérifiant l'équation.

Il est à remarquer que ces polynômes s'expriment simplement à l'aide des polynômes à une variable que M. Hermite [1] a déduits de la différentiation de l'exponentielle e^{-z^2}. Les polynômes de M. Hermite sont, en effet, définis par la série

$$e^{-2hz-h^2} = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{h^\nu}{1.2\ldots\nu} P_\nu(z).$$

---

[1] *Comptes rendus*, t. LVIII, p. 93, 266.

Faisons

$$h = a\sqrt{-y}, \qquad z = -\frac{x}{2\sqrt{-y}},$$

nous aurons

$$e^{ax+a^2y} = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{a^\nu}{1.2\ldots\nu}(-y)^{\frac{\nu}{2}} \mathrm{P}_\nu\left(-\frac{x}{2\sqrt{-y}}\right),$$

d'où, en comparant au développement (3),

$$\mathrm{V}_\nu(x,y) = (-y)^{\frac{\nu}{2}} \mathrm{P}_\nu\left(-\frac{x}{2\sqrt{-y}}\right).$$

Les polynômes $\mathrm{P}_\nu(z)$ de M. Hermite ayant toutes leurs racines réelles et deux à deux égales et de signes contraires, l'équation

$$\mathrm{V}_\nu(x,y) = 0$$

représentera, si ν est pair, $\frac{\nu}{2}$ paraboles de la forme

$$-\frac{x^2}{4y} = p^2,$$

et si ν est impair, l'axe $x = 0$, avec $\frac{\nu-1}{2}$ paraboles de la même forme.

Ces fonctions $\mathrm{V}_\nu(x,y)$ jouent un rôle analogue aux fonctions de Laplace, c'est-à-dire aux fonctions harmoniques de Tait et Thomson, dans la théorie du potentiel.

Si nous posons

$$\mathrm{V}_{-(\nu+1)}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{y}} e^{-\frac{x^2}{4y}} \mathrm{V}_\nu\left(\frac{x}{y}, -\frac{1}{y}\right) = y^{-\frac{\nu+1}{2}} e^{-\frac{x^2}{4y}} \mathrm{P}_\nu\left(-\frac{x}{2\sqrt{y}}\right),$$

cette fonction est homogène et du degré $-(\nu+1)$ en x et $\sqrt{y}$ et vérifie aussi l'équation différentielle; elle s'annule en tous les points des paraboles symétriques des précédentes par rapport à l'axe Ox, l'origine exceptée.

On a ainsi des solutions $\mathrm{V}_\mu(x,y)$ définies pour toutes les valeurs positives et négatives de l'indice μ. Les fonctions correspondant aux valeurs positives de μ sont des polynômes; celles qui correspondent aux valeurs négatives de μ, des fonctions transcendantes ayant l'axe $y = 0$ comme ligne singulière.

On peut d'ailleurs former directement une fonction génératrice des fonctions V_μ à indices négatifs, en appliquant la transformation (2), page 190, aux deux membres du développement (3).

On a ainsi

$$(4) \qquad \frac{1}{\sqrt{\pm y}} e^{-\frac{(x-2a)^2}{4y}} = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{a^\nu}{1.2\ldots\nu} V_{-(\nu+1)}(x, y).$$

On serait conduit également à ces fonctions $V_\mu(x, y)$ en cherchant des solutions de l'équation $\delta z = 0$ de la forme

$$z = y^{\frac{\mu}{2}} \varphi\left(\frac{x}{2\sqrt{y}}\right).$$

Pour cela, on transformera l'équation en posant

$$\frac{x}{2\sqrt{y}} = p,$$

et prenant comme nouvelles variables y et p. L'équation devient

$$\frac{\partial^2 z}{\partial p^2} + 2p\frac{\partial z}{\partial p} - 4y\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Si l'on cherche des solutions de la forme

$$z = y^{\frac{\mu}{2}} \varphi(p),$$

on trouve, pour déterminer φ, l'équation

$$(5) \qquad \frac{d^2\varphi}{dp^2} + 2p\frac{d\varphi}{dp} - 2\mu\varphi = 0,$$

qui, pour μ entier et positif, est bien identique à celle que vérifient les polynômes $P_\mu(z)$ de M. Hermite, dans lesquels on remplace z par $p\sqrt{-1}$.

Cette équation (5) a pour solutions les fonctions $V_\mu(2p, 1)$, pour toutes les valeurs entières de μ; elle admet, pour chaque valeur entière de μ, une deuxième solution qu'il est facile d'exprimer par des quadratures et qui se présente ici comme les *Kugelfunctionen zweiter Art* de Heine.

Enfin cette équation pourrait servir à définir les $V_\mu(x,y)$ à indices fractionnaires.

Contentons-nous ici de détailler le cas $\mu = 0$. Nous avons alors la solution $\varphi =$ const., puis

$$\varphi_0(p) = \int_0^p e^{-p^2}dp = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{1.2\ldots n}\,\frac{p^{2n+1}}{2n+1}.$$

Comme $\mu = 0$, la fonction

$$z = \varphi_0(p) = \varphi_0\left(\frac{x}{2\sqrt{y}}\right)$$

vérifie l'équation $\delta z = 0$; elle a pour coupure l'axe Ox et devient imaginaire quand on traverse cette coupure. Si on lui applique la transformation homographique (2), on en déduit la solution

$$z' = \frac{1}{\sqrt{\pm y}}\,e^{-\frac{x^2}{4y}}\varphi_0\left(\frac{x}{2\sqrt{-y}}\right),$$

qui donnerait une intégrale de l'équation (5) pour $\mu = -1$. Cette solution z' présente encore l'axe Ox comme ligne singulière, mais elle reste réelle quand on franchit cet axe; elle est en effet donnée par la série

$$z' = \frac{x}{2y}\,e^{-\frac{x^2}{4y}}\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{1}{1.2\ldots n}\,\frac{x^{2n}(4y)^{-n}}{2n+1},$$

qui ne contient y qu'à des puissances entières *négatives*. Toutes les dérivées partielles de z' sont des solutions présentant la même propriété.

Nous ne nous arrêterons pas aux formules qui expriment les dérivées partielles des fonctions V_μ à l'aide de ces fonctions, formules qui résultent immédiatement du développement (3) différentié successivement par rapport à x, y et a, ou encore des formules relatives aux polynômes de M. Hermite.

3. *Formule analogue à la formule de Green.* — La notion d'équation adjointe due à Riemann conduit immédiatement à l'extension du théorème de Green; c'est ce qui se trouve particulièrement mis en évidence dans les *Leçons sur la théorie générale des surfaces* de M. Darboux (t. II, Chapitre IV) et dans le Mémoire de M. du Bois-Reymond [1] (*Journal de Crelle*, t. 104).

Soit une équation linéaire quelconque d'ordre n

$$\mathcal{F}(z) = \sum\sum A_{ik} \frac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i \partial y^k} = 0,$$

l'équation

$$\mathcal{G}(u) = \sum\sum (-1)^{i+k} \frac{\partial^{i+k}}{\partial x^i \partial y^k}(A_{ik} u) = 0$$

est l'*adjointe* de la première, qui, inversement, est l'adjointe de $\mathcal{G}(u) = 0$. On a l'identité

$$u\mathcal{F}(z) - z\mathcal{G}(u) = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y},$$

où M et N dépendent de z, de u et de leurs dérivées jusqu'à l'ordre $n - 1$. D'après cela, si l'on considère une aire plane (A) simplement connexe et limitée par un contour (S), on a

$$\int\int_{(A)} [u\mathcal{F}(z) - z\mathcal{G}(u)]\, dx\, dy = \int_{(S)} (M\, dy - N\, dx),$$

l'intégrale double étant étendue à l'aire (A) et l'intégrale simple au contour (S) de l'aire dans le sens positif. On connaît l'usage que Riemann et du Bois-Reymond ont fait de cette formule. Nous nous en

---

(1) Voyez aussi du même auteur : *Beiträge zur Interpretation der partiellen Differentialgleichungen*. Leipzig, 1864.

servirons dans ce qui suit, en l'appliquant à l'équation

$$\delta z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

dont l'équation adjointe est

$$\delta' u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Il est à remarquer que si une expression $f(x - x_0, y - y_0)$ considérée comme fonction de x et y vérifie $\delta z = 0$, considérée comme fonction de x_0 et y_0, elle vérifie l'équation adjointe $\delta' z = 0$.

La formule générale devient ici

$$(6) \qquad \iint_{(A)} (u\,\delta z - z\,\delta' u)\,dx\,dy = \int_{(S)} \left(u\frac{\partial z}{\partial x} - z\frac{\partial u}{\partial x}\right)dy + u z\,dx,$$

ce qu'il est facile de vérifier.

Supposons que l'on prenne pour u et z des fonctions qui, dans l'aire A, sont finies, continues, admettent les dérivées qui figurent dans les formules et vérifient les équations

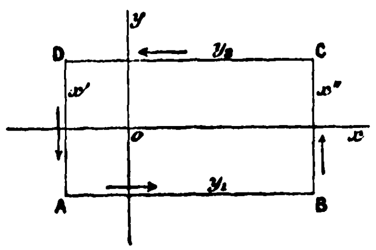
$$\delta z = 0, \qquad \delta' u = 0;$$

la formule deviendra

$$(7) \qquad \int_{(S)} \left(u\frac{\partial z}{\partial x} - z\frac{\partial u}{\partial x}\right)dy + u z\,dx = 0.$$

4. Appliquons cette dernière formule au cas où le contour S est un rectangle ABCD (*fig.* 1) dont les côtés AB et CD sont des parallèles

Fig. 1.



à l'axe ox ayant pour ordonnées y_1 et y_2, et dont les côtés AD, BC sont des parallèles à oy ayant pour abscisses x' et x''.

Comme sur AB et CD, on a $dy = 0$, et sur BC et DA, $dx = 0$, on obtient la formule

$$(8) \quad \int_{x'}^{x''} (z_1 u_1 - z_2 u_2)\, dx = \int_{y_1}^{y_2} \left[\left(u\frac{\partial z}{\partial x} - z\frac{\partial u}{\partial x} \right)' - \left(u\frac{\partial z}{\partial x} - z\frac{\partial u}{\partial x} \right)'' \right] dy,$$

où $z_1 u_1$ et $z_2 u_2$ sont les valeurs de zu sur les côtés y_1 et y_2, $\left(u\frac{\partial z}{\partial x} - z\frac{\partial u}{\partial x} \right)'$ et $\left(u\frac{\partial z}{\partial x} - z\frac{\partial u}{\partial x} \right)''$ les valeurs de $\left(u\frac{\partial z}{\partial x} - z\frac{\partial u}{\partial x} \right)$ sur les côtés x', x''.

Comme première conséquence de cette formule, nous allons établir une propriété fondamentale des polynômes $V_\nu(x, y)$, propriété qui se déduirait d'ailleurs facilement des propriétés connues des polynômes de M. Hermite.

Supposons que y_1 et y_2 soient des quantités *négatives* quelconques, prenons pour z le polynôme en x et y

$$z = V_\nu(x, y) = (-y)^{\frac{\nu}{2}} P_\nu\left(-\frac{x}{2\sqrt{-y}} \right),$$

homogène et de degré ν en x et $\sqrt{y}$. Puis remarquons que, d'après la transformation homographique du n° **1**, la fonction

$$\frac{1}{\sqrt{y}} e^{-\frac{x^2}{4y}} V_\mu\left(\frac{x}{y}, -\frac{1}{y} \right) = y^{-\frac{\mu+1}{2}} e^{-\frac{x^2}{4y}} P_\mu\left(-\frac{x}{2\sqrt{y}} \right),$$

où μ désigne un entier positif, vérifie, comme z, l'équation $\delta z = 0$. Nous en concluons que la fonction, obtenue en changeant y de signe,

$$u = \frac{1}{\sqrt{-y}} e^{\frac{x^2}{4y}} V_\mu\left(-\frac{x}{y}, \frac{1}{y} \right) = (-y)^{-\frac{\mu+1}{2}} e^{\frac{x^2}{4y}} P_\mu\left(-\frac{x}{2\sqrt{-y}} \right),$$

vérifie l'équation adjointe $\delta' u = 0$, qui se déduit précisément de la proposée $\delta u = 0$ par le changement de y en $-y$.

Ces deux fonctions z et u sont finies, continues et admettent les dérivées figurant dans les équations, dans l'intérieur du rectangle ABCD, y_1 et y_2 étant négatifs, x' et x'' étant arbitraires. Nous pourrons donc appliquer, dans ces conditions, la formule (8). Supposons que, dans cette formule, on fasse croître x' jusqu'à $+\infty$ et décroître x'' jusqu'à $-\infty$. Les quantités

$$\left(u\frac{\partial z}{\partial x} - z\frac{\partial u}{\partial x}\right)', \quad \left(u\frac{\partial z}{\partial x} - z\frac{\partial u}{\partial x}\right)''$$

tendront vers zéro ; en effet, à cause du facteur exponentiel $e^{\frac{x^2}{4y}}$, $(y<0)$, qui se trouve multiplié par des expressions algébriques en x, chacun des termes des produits

$$u\frac{\partial z}{\partial x} - z\frac{\partial u}{\partial x}$$

tend vers zéro quand x devient $\pm\infty$.

Le second membre de la formule (8) tend donc vers zéro, et l'on a

$$(9) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty}(z_1u_1 - z_2u_2)\,dx = 0,$$

formule dans laquelle

$$\int_{-\infty}^{+\infty} z_1u_1\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty}(-y_1)^{\frac{\nu-\mu-1}{2}} e^{\frac{x^2}{4y_1}} P_\nu\left(-\frac{x}{2\sqrt{-y_1}}\right) P_\mu\left(-\frac{x}{2\sqrt{-y_1}}\right)dx,$$

l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} z_2u_2\,dx$ ayant une expression analogue où l'indice 1 est remplacé par 2. La formule ainsi obtenue exprime la propriété fondamentale des polynômes de M. Hermite. Faisons, en effet, dans l'intégrale ci-dessus, le changement de variable

$$x = -2\sqrt{-y_1}\,t;$$

nous aurons

$$\int_{-\infty}^{+\infty} z_1u_1\,dx = 2(-y_1)^{\frac{\nu-\mu}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} P_\nu(t) P_\mu(t)\,dt;$$

nous aurons pour $\int_{-\infty}^{+\infty} z_2u_2\,dx$ une expression analogue, et la formule

(9) nous donnera

$$\left[(-y_1)^{\frac{\nu-\mu}{2}} - (-y_2)^{\frac{\nu-\mu}{2}}\right] \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} P_\nu(t) P_\mu(t)\, dt = 0;$$

d'où il résulte immédiatement que, si ν est différent de μ, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} P_\nu(t) P_\mu(t) = 0.$$

5. Voici une deuxième application de la formule (8), obtenue, comme nous l'avons vu, en prenant l'intégrale (7) le long du contour du rectangle ABCD (*fig.* 1).

Soit

$$z = f(x, y)$$

une intégrale de l'équation $\delta z = 0$, finie et continue, et admettant les dérivées qui figurent dans les formules pour toutes les valeurs de y comprises entre deux limites a et b ou égales à ces limites,

$$a \leqq y \leqq b,$$

c'est-à-dire pour tous les points du plan situés dans la bande comprise entre les parallèles $y = a$ et $y = b$ à l'axe Ox, et sur ces parallèles; supposons de plus que z et $\frac{\partial z}{\partial x}$ restent finis quand x croît indéfiniment ou, si ces fonctions deviennent infinies, que leurs produits par une exponentielle de la forme $e^{-k^2x^2}$, k étant une constante arbitraire non nulle, tendent vers zéro, pour x infini. Nous prendrons pour u la fonction

$$u = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{\eta - y}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(\eta - y)}},$$

où η et ξ désignent deux constantes, η étant supposé supérieur à la plus grande valeur de y que nous allons considérer,

$$\eta > y_2;$$

cette fonction u vérifie l'équation $\delta' u = 0$; comme fonction de η et ξ, elle vérifie l'équation $\delta u = 0$. Nous pouvons alors appliquer la formule (8), en y supposant y_1 et y_2 compris entre a et b; nous aurons

$$\int_{x'}^{x''} (z_1 u_1 - z_2 u_2)\, dx = \int_{y_1}^{y_2} \left[\left(u \frac{\partial z}{\partial x} - z \frac{\partial u}{\partial x} \right)' - \left(u \frac{\partial z}{\partial x} - z \frac{\partial u}{\partial x} \right)'' \right] dy.$$

Faisons croître x' indéfiniment et décroître x'' indéfiniment; le second membre tend vers zéro, et nous avons, comme plus haut, la formule

$$\int_{-\infty}^{+\infty} z_1 u_1\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} z_2 u_2\, dx,$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{\eta - y_1}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y_1) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(\eta - y_1)}} dx$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{\eta - y_2}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y_2) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(\eta - y_2)}} dx.$$

Remplaçant η par y, ξ par x et la variable d'intégration x par λ, on peut dire que la fonction

$$(10) \qquad F(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{y - y_1}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda, y_1) e^{-\frac{(\lambda - x)^2}{4(y - y_1)}} d\lambda,$$

où $y > y_1$ est *indépendante* de y_1. On aura, en particulier, puisqu'on peut faire $y_1 = a$,

$$(10') \qquad F(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{y - a}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda, a) e^{-\frac{(x - \lambda)^2}{4(y - a)}} d\lambda.$$

Or, quand y tend vers y_1, on sait (¹) que la première intégrale (10)

(¹) Cette propriété se trouve démontrée en toute rigueur dans le Mémoire de M. Weierstrass, *Ueber Functionen einer reellen Veränderlichen* (*Sitzungsberichte*, p. 803; 1885). On trouvera une traduction française de ce Mémoire dans le *Journal de Mathématiques* de M. Jordan, t. II, p. 105.

qui donne $F(x, y)$ tend vers $f(x, y_1)$; on a donc la formule

$$(11) \qquad f(x, y_1) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{y_1 - a}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda, a) e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{4(y_1 - a)}} d\lambda,$$

qui détermine la valeur de la fonction $f(x, y)$ dans l'intérieur de la bande considérée, quand on connaît la valeur de cette fonction sur le bord $y = a$.

Donc, dans les hypothèses faites sur la fonction $z = f(x, y)$ et ses dérivées, cette fonction se trouve déterminée par ses valeurs sur le bord inférieur $y = a$ de la bande considérée. Comme la formule (11) conserve un sens quelque grand que soit y_1, on peut prolonger la fonction en dehors de la bande en traversant la limite $y = b$, jusqu'à l'infini positif pour y.

La fonction $F(x, y)$ définie par les formules (10) et (10') est, d'après (11), égale à $f(x, y)$ et l'on a la formule

$$(12) \qquad f(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{y - y_1}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda, y_1) e^{-\frac{(\lambda - x)^2}{4(y - y_1)}} dx,$$

où

$$y \geqq y_1,$$

formule indépendante de y_1, exprimant la valeur de la fonction pour $y > y_1$ à l'aide des valeurs qu'elle prend le long de la droite $y = y_1$. On emploie ces formules dans la Théorie de la chaleur, en laissant de côté la condition relative à $\frac{\partial z}{\partial x}$.

6. *Une fonction uniforme $z = f(x, y)$ vérifiant l'équation $\delta z = 0$, existant dans toute la partie du plan située* au-dessous *d'une certaine parallèle à l'axe Ox, $y \leqq b$, et restant* finie, *ainsi que sa dérivée par rapport à x, dans cette partie du plan, pour toutes les valeurs finies ou infinies de x et y, se réduit à une constante.* (La dérivée par rapport à x peut même devenir infinie avec x, pourvu qu'elle se comporte comme on l'a supposé dans le n° 5.)

Dans cette hypothèse, la bande considérée dans le numéro précédent s'étend jusqu'à $y = -\infty$ et l'on a, d'après la formule (12) dans laquelle on donne successivement à x deux valeurs distinctes x et x'

$$f(x,y)-f(x',y)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{y-y_1}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda,y_1)\left[e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{4(y-y_1)}}-e^{-\frac{(x'-\lambda)^2}{4(y-y_1)}}\right]d\lambda,$$

y_1 désignant une valeur quelconque inférieure à b, et y étant supérieur à y_1.

Nous allons conclure de cette formule, en donnant à y_1 des valeurs négatives de plus en plus grandes, que la différence $f(x,y)-f(x',y)$ est, en valeur absolue, plus petite que tout nombre positif, et, par suite, qu'elle est nulle.

Supposons $x>x'$, la fonction de λ

$$\varphi(\lambda)=e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{4(y-y_1)}}-e^{-\frac{(x'-\lambda)^2}{4(y-y_1)}},$$

où $y>y_1$ s'annule pour $\lambda=\frac{x+x'}{2}$. Elle est négative pour $\lambda<\frac{x+x'}{2}$, positive pour $\lambda>\frac{x+x'}{2}$. Appelons M un nombre positif plus grand que la plus grande valeur absolue que prend la fonction $f(x,y)$ quand on donne à x et y toutes les valeurs finies et infinies au-dessous de $y=b$; ce nombre M existe par hypothèse. Nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}&f(x,y)-f(x',y)\\&=\frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{y-y_1}}\left[\int_{-\infty}^{\frac{x+x'}{2}} f(\lambda,y_1)\varphi(\lambda)\,d\lambda+\int_{\frac{x+x'}{2}}^{+\infty} f(\lambda,y_1)\varphi(\lambda)\,d\lambda\right].\end{aligned}$$

Dans la première intégrale du second membre $\varphi(\lambda)$ est négatif; cette intégrale est en valeur absolue moindre que

$$-\mathrm{M}\int_{-\infty}^{\frac{x+x'}{2}}\varphi(\lambda)\,d\lambda;$$

la deuxième est moindre, en valeur absolue, que

$$\mathrm{M}\int_{\frac{x+x'}{2}}^{\infty}\varphi(\lambda)\,d\lambda.$$

On a donc

$$|f(x,y) - f(x',y)| < \frac{M}{2\sqrt{\pi}\sqrt{y-y_1}} \left[-\int_{-\infty}^{\frac{x+x'}{2}} \varphi(\lambda)\,d\lambda + \int_{\frac{x+x'}{2}}^{\infty} \varphi(\lambda)\,d\lambda \right].$$

Dans la première des intégrales du second membre, faisons

$$\lambda = \frac{x+x'}{2} - \mu, \qquad \frac{x-x'}{2} = t$$

et, dans la seconde,

$$\lambda = \frac{x+x'}{2} + \mu,$$

nous aurons, pour ces deux intégrales, la même valeur

$$-\int_{-\infty}^{\frac{x+x'}{2}} \varphi(\lambda)\,d\lambda = \int_{\frac{x+x'}{2}}^{\infty} \varphi(\lambda)\,d\lambda = \int_0^{\infty} \left[e^{-\frac{(\mu-t)^2}{4(y-y_1)}} - e^{-\frac{(\mu+t)^2}{4(y-y_1)}} \right] d\mu,$$

d'où

$$|f(x,y) - f(x',y)| < \frac{M}{\sqrt{\pi}\sqrt{y-y_1}} \int_0^{\infty} \left[e^{-\frac{(\mu-t)^2}{4(y-y_1)}} - e^{-\frac{(\mu+t)^2}{4(y-y_1)}} \right] d\mu;$$

mais on a, en faisant successivement $\mu = t + \rho$ et $\mu = -t + \rho$,

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{(\mu-t)^2}{4(y-y_1)}} d\mu = \int_{-t}^{\infty} e^{-\frac{\rho^2}{4(y-y_1)}} d\rho,$$

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{(\mu+t)^2}{4(y-y_1)}} d\mu = \int_t^{\infty} e^{-\frac{\rho^2}{4(y-y_1)}} d\rho;$$

d'où, en retranchant,

$$\int_0^{\infty} \left[e^{-\frac{(\mu-t)^2}{4(y-y_1)}} - e^{-\frac{(\mu+t)^2}{4(y-y_1)}} \right] d\mu = \int_{-t}^{+t} e^{-\frac{\rho^2}{4(y-y_1)}} d\rho.$$

Cette dernière intégrale est moindre que $2t$, car l'élément différentiel est moindre que 1; on a donc enfin

$$|f(x,y) - f(x',y)| < \frac{2Mt}{\sqrt{\pi(y-y_1)}}.$$

Or, en faisant croître y_1 indéfiniment par valeurs négatives, on rendra le second membre plus petit que tout nombre positif donné, si petit qu'il soit.

On a donc

$$f(x,y)-f(x',y)=0,$$

quels que soient x, x' et y; la fonction $z=f(x,y)$ est donc indépendante de x; l'équation $\delta z=0$ montre alors qu'elle est indépendante de y : elle est donc *constante*.

7. Considérons une fonction $z=f(x,y)$ vérifiant l'équation $\delta z=0$ et uniforme dans une certaine région du plan. Convenons d'appeler *point singulier de la fonction* un point où cette fonction ou sa dérivée $\frac{dz}{dx}$ cesse d'être finie et déterminée. D'après ce qui précède, une fonction uniforme pour toutes les valeurs de y *inférieures* à une certaine limite a nécessairement pour ces valeurs des singularités à distance finie ou infinie : il peut arriver, au contraire, qu'une fonction uniforme pour toutes les valeurs de y *supérieures* à une certaine limite n'ait aucune singularité pour ces valeurs.

Par exemple, la fonction

$$z=\frac{1}{\sqrt{-y}}e^{-\frac{x^2}{4y}}$$

est uniforme pour toutes les valeurs de y inférieures à un nombre négatif donné; elle devient infinie avec x, y étant négatif.

Au contraire,

$$z=\frac{1}{\sqrt{y}}e^{-\frac{x^2}{4y}}$$

est uniforme pour les valeurs de y supérieures à un nombre positif donné; pour ces valeurs, elle n'a aucun point singulier à distance finie ou infinie. Les deux fonctions prises comme exemples n'existent pas dans tout le plan; elles admettent comme ligne de points singuliers l'axe $y=0$.

Soient a, b et c des constantes réelles : la partie réelle de

$$\frac{a+bi}{\sqrt{y-ci}}e^{-\frac{x^2}{4(y-ci)}}$$

est une fonction de x et y, existant dans tout le plan, uniforme dans tout le plan et vérifiant l'équation $\delta z = 0$: elle devient infinie à l'infini pour des valeurs *négatives* de y.

On peut faire une remarque analogue sur la fonction formée par la partie réelle de

$$(a+bi)e^{kx+k^2y},$$

k étant une constante *imaginaire* ou *réelle*.

8. Il est intéressant de remarquer que l'équation $\delta z = 0$ ne peut pas admettre de solution uniforme dans tout le plan, n'ayant aucun point singulier à l'infini, et ayant un seul point singulier $x = a$, $y = b$ à distance finie; en effet, une telle fonction serait constante pour toutes les valeurs de y *inférieures* à b.

Il y a donc là une différence remarquable avec les équations linéaires dans le cas elliptique qui admettent des intégrales avec un seul point singulier; par exemple,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

admet l'intégrale

$$z = \frac{x}{x^2+y^2},$$

qui a comme seul point singulier l'origine.

9. La plupart des solutions simples de l'équation $\delta z = 0$ admettent des lignes de discontinuité parallèles à Ox. La transformation homographique (2) fait aussi apparaître des lignes de cette nature. On les retrouve encore en cherchant des solutions de l'une des deux formes suivantes :

1° Cherchons l'expression la plus générale d'une solution qui soit une série entière en x

$$z = \mathrm{A}_0 + \frac{\mathrm{A}_1}{1} x + \frac{\mathrm{A}_2}{1.2} x^2 + \ldots + \frac{\mathrm{A}_n}{1.2\ldots n} x^n + \ldots,$$

les coefficients A_n étant des fonctions de y. Substituant dans l'équation $\delta z = 0$, on trouve immédiatement

$$\mathrm{A}_n = \frac{d\mathrm{A}_{n-2}}{dy}.$$

Donc en posant

$$\mathrm{A}_0 = \varphi(y), \qquad \mathrm{A}_1 = \psi(y),$$

$$\mathrm{A}_{2n} = \frac{d^n\varphi(y)}{dy^n}, \qquad \mathrm{A}_{2n+1} = \frac{d^n\psi(y)}{dy^n};$$

ce qui donne la solution

$$z = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{x^{2n}}{1.2\ldots 2n} \frac{d^n\varphi(y)}{dy^n} + \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{x^{2n+1}}{1.2\ldots(2n+1)} \frac{d^n\psi(y)}{dy^n}.$$

En remplaçant $\varphi(y)$ et $\psi(y)$ par des polynômes en y, on retrouve des solutions composées avec les polynômes $\mathrm{V}_\nu(x, y)$; en remplaçant $\varphi(y)$ et $\psi(y)$ par des fractions rationnelles en y, on obtient des solutions qui admettent pour *coupures* ou lignes de points *singuliers* les droites parallèles à l'axe $\mathrm{O}x$ sur lesquelles les fractions rationnelles deviennent *infinies*.

La solution la plus générale, développable en série entière de y, est de même

$$z = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{y^n}{1.2\ldots n} \frac{d^{2n}\varphi(x)}{dx^{2n}};$$

mais, si l'on voulait faire apparaître des coupures parallèles à $\mathrm{O}y$ en remplaçant $\varphi(x)$ par une fonction rationnelle en x, la série serait *divergente* dès que $\varphi(x)$ ne serait plus un simple polynôme (¹).

(¹) Par exemple, en remplaçant $\varphi(x)$ par $\frac{1}{1-x}$, on retrouverait la série di-

2° Soient α et β deux constantes positives, $g(x, y)$ et $h(x, y)$ deux fonctions de x et y finies continues et admettant les dérivées premières et secondes qui figurent dans les équations, dans une certaine région du plan; ces fonctions g et h pourront être, par exemple, des séries entières en x et y. Voyons s'il est possible de vérifier l'équation

$$\delta z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

en prenant

$$z = \frac{[g(x, y)]^\alpha}{[h(x, y)]^\beta} = g^\alpha h^{-\beta}.$$

L'équation devient, après simplification,

$$\begin{aligned} gh(\alpha h\, \delta g - \beta g\, \delta h) + \alpha(\alpha - 1) h^2 \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 \\ - 2\alpha\beta gh \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + \beta(\beta + 1) g^2 \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 = 0. \end{aligned}$$

Si la fonction $h(x, y)$ s'annule dans la portion du plan considérée, la fonction z admet comme ligne singulière la courbe

$$h(x, y) = 0.$$

Or, d'après l'équation ci-dessus, pour un point de cette courbe on a nécessairement

$$g^2 \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 = 0;$$

d'où, en supposant g différent de zéro,

$$\frac{\partial h}{\partial x} = 0.$$

Donc, en tout point simple de la courbe $h = 0$ qui n'annule pas g,

---

vergente qui se présente dans l'exemple de M[me] Kovalewski (*Journal de Crelle*, t. 80, p. 22).

la tangente est parallèle à l'axe Ox. Cette courbe est donc formée de points isolés et de *parallèles à l'axe* Ox : on retrouve donc ainsi les lignes singulières formées de parallèles à l'axe Ox.

10. *Application à la Théorie de la chaleur.* — Un grand nombre de problèmes relatifs à la propagation de la chaleur se ramènent à l'intégration de l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

dans laquelle k désigne une constante positive, t le temps, x une coordonnée et u la température, fonction de x et de t ; cette équation se ramène à la forme $\delta u = 0$ par la substitution $kt = y$.

Si l'on suppose la température u donnée par une fonction $f(x)$ à un certain instant initial t_0, les formules de Fourier permettent de calculer u à tous les instants t qui suivent t_0, $t > t_0$. M. Boussinesq m'ayant engagé à examiner si l'état initial donné peut être considéré comme provenant d'un état calorifique *antérieur*, $t < t_0$, je me suis d'abord occupé du cas simple de la propagation de la chaleur dans une armille (Fourier, *Théorie de la chaleur*, Chap. IV) et les résultats ont confirmé les indications que m'avait données M. Boussinesq sur la nature probable de la solution. Nous reprendrons d'abord ce cas particulier en y ajoutant quelques remarques, puis nous traiterons le cas général.

11. *Armille.* — Prenons pour unité le rayon de l'armille et appelons x l'arc de circonférence compté à partir d'un point fixe : la température u est évidemment une fonction de x admettant pour période la longueur 2π de la circonférence.

Supposons que, pour $t = t_0$, u ait une valeur donnée exprimée par une fonction $f(x)$ finie continue admettant la période 2π; d'après Fourier, cette fonction sera développable en une série de la forme

$$(13)\quad f(x) = b_0 + a_1 \sin x + b_1 \cos x + \ldots + a_n \sin nx + b_n \cos nx + \ldots$$

et la température u à l'instant $t > t_0$ sera

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} u = b_0 &+ e^{-k(t-t_0)}(a_1 \sin x + b_1 \cos x) + \ldots \\ &+ e^{-n^2k(t-t_0)}(a_n \sin nx + b_n \cos nx + \ldots, \end{aligned}\right.$$

série évidemment convergente pour $t > t_0$.

Nous ferons sur cette solution les deux remarques suivantes :

1° Comme le montre M. Weierstrass dans ses articles *Ueber Functionen einer reellen Veränderlichen* (1) (traduits dans le tome II du Journal de M. Jordan), la fonction u représentée par la série (14) où $t > t_0$ est une fonction entière de x développable, pour toutes les valeurs de x, en série procédant suivant les puissances entières positives de x.

2° Si l'on donne à t une valeur déterminée t_1, supérieure à t_0, u devient une fonction $f_1(x)$ représenté par la série

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} f_1(x) = b_0 &+ e^{-k(t_1-t_0)}(a_1 \sin x + b_1 \cos x) + \ldots \\ &+ e^{-n^2k(t_1-t_0)}(a_n \sin nx + b_n \cos nx) + \ldots. \end{aligned}\right.$$

L'état initial $u = f(x)$, donné pour l'armille, est le *seul* qui, de l'instant t_0 à l'instant t_1 conduise à la température $f_1(x)$; en effet, une fonction étant développable d'une seule manière en série trigonométrique, du développement de $f_1(x)$ en série trigonométrique identifié avec (15), on déduit un seul système de valeurs pour les coefficients a_n et b_n.

Ces deux remarques donnent les résultats suivants :

1° Une certaine distribution de température de l'armille, $u_1 = f_1(x)$, donnée en fonction de x à un instant t_1, ne provient pas nécessairement d'un état antérieur; pour qu'il existe un état antérieur il *faut* que la température donnée, $f_1(x)$, soit une *fonction transcendante entière* de x; condition qui n'est, d'ailleurs, pas suffisante.

---

(1) *Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 1885, p. 803. Ces recherches de M. Weierstrass ont été étendues par M. Sommerfeld au cas où la fonction réelle $f(x)$ est discontinue ou même infinie (*Inaugural Dissertation*, Königsberg, 1891).

2° Si l'état antérieur existe, il est *unique*, et se trouve déterminé par la série même de Fourier. Pour reconnaître si l'état antérieur existe, il suffira donc de voir si la série de Fourier converge pour des valeurs de t inférieures à la valeur initiale du temps.

Par exemple, si l'état initial est

$$u_0 = \sum_{n=0}^{n=\infty} e^{-n^4} \cos nx,$$

transcendante entière en x analogue à une fonction Θ, l'état antérieur existe, car la série

$$u = \sum_{n=0}^{n=\infty} e^{-n^4 - n^2 k(t - t_0)} \cos nx$$

converge pour $t < t_0$, et cela quel que soit t; on peut donc remonter indéfiniment dans le *passé*. Il faut cependant remarquer que, quand t devient infiniment grand négatif, les termes de u augmentent indéfiniment, ce qu'on pouvait prévoir, car nous avons vu qu'il ne peut pas exister de solution de l'équation $\delta z = 0$ finie pour toutes les valeurs de y inférieures à une certaine limite.

Si l'état initial est

$$u_0 = \sum_{n=0}^{n=\infty} e^{-n^{\frac{3}{2}}} \cos nx,$$

ce qui est encore une transcendante entière en x, l'état antérieur n'existe pas, car la série

$$u = \sum_{n=0}^{n=\infty} e^{-n^{\frac{3}{2}} - n^2 k(t - t_0)} \cos nx$$

diverge pour $t < t_0$ [1].

---

(1) La Théorie de la chaleur fournit ainsi des exemples de fonctions possédant des propriétés analogues à celles que M. Fredholm a signalées (*Acta mathematica*, t. XV, p. 279).

12. *Cas général.* — Remplaçons kt par y, de façon à ramener l'équation de la chaleur à la forme

$$\delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Supposons que l'on se donne la valeur

$$u_0 = f(x)$$

de u pour $y = y_0$, la fonction $f(x)$ étant finie continue, et restant, pour toutes les valeurs finies ou infinies de x, inférieure en valeur absolue à un nombre positif déterminé. D'après les formules connues (¹), la température u devient, pour $t > t_0$, $y > y_0$.

$$(16) \qquad u = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{y - y_0}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{4(y-y_0)}} d\lambda.$$

En particulier, à un instant déterminé $t_1 > t_0$, $y_1 > y_0$, on a

$$(17) \qquad u_1 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{y_1 - y_0}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{4(y_1-y_0)}} d\lambda.$$

M. Weierstrass montre (²) que u_1 est encore une fonction transcendante entière de x. Nous retrouvons donc, dans le cas général, la condition déjà trouvée dans le cas de l'armille. Pour qu'un état donné $u_1 = f_1(x)$, $f_1(x)$ étant finie et continue, provienne d'un état antérieur, il faut que $f_1(x)$ soit une fonction *transcendante entière de* x; cette condition n'est d'ailleurs pas suffisante, comme nous l'avons vu par un exemple dans le cas de l'armille.

13. Si l'état antérieur existe, on peut se demander s'il est *unique*. Cela est en quelque sorte évident, si l'on fait intervenir des considérations de Physique mathématique. En effet, pour remonter d'un état

---

(¹) *Voir*, par exemple, RIEMANN, *loc. cit.*, p. 109.

(²) *Loc. cit.*

actuel à un état antérieur, il suffit de faire passer la chaleur des parties plus froides aux parties plus chaudes, suivant les lois inverses des lois du mouvement de la chaleur : on obtient ainsi un état antérieur unique, si cet état est possible. Nous pouvons démontrer ce fait analytiquement de la façon suivante. Supposons qu'il existe deux fonctions vérifiant l'équation $\delta u = 0$, $u_1(x, y)$, $u_2(x, y)$, finies continues pour toutes les valeurs de y supérieures à un nombre donné négatif $-a$ et devenant identiques pour $y = 0$ et, par suite, pour $y > 0$; il s'agit de prouver que ces fonctions sont aussi identiques pour y compris entre 0 et $-a$.

La fonction

$$u(x, y) = u_1(x, y) - u_2(x, y)$$

vérifie l'équation $\delta u = 0$, et est nulle pour toutes les valeurs de y supérieures ou égales à zéro ; il s'agit de montrer qu'elle est nulle pour y compris entre 0 et $-a$. Nous avons démontré que la fonction

$$u(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{y - y_1}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(\lambda, y_1) e^{-\frac{(\lambda - x)^2}{4(y - y_1)}} d\lambda$$

est indépendante de y_1, y étant $> y_1$ et $y_1 > -a$. Faisons $y_1 = y - c$, c positif, la fonction

$$(18) \qquad u(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{c}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(\lambda, y - c) e^{-\frac{(\lambda - x)^2}{4c}} d\lambda$$

est indépendante de c. Partant de cette formule, nous allons montrer que $u(x, y)$ est identiquement nulle pour $y = -\frac{a}{6}$ et, par suite, pour toutes les valeurs de y supérieures à $-\frac{a}{6}$.

En effet, dans la formule ci-dessus (18), supposons $y > 0$, $0 < c < a$, nous aurons, par hypothèse,

$$0 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{c}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(\lambda, y - c) e^{-\frac{(\lambda - x)^2}{4c}} d\lambda,$$

quels que soient x, y, c. Multiplions les deux membres par

$$u(x, \eta - c)\,dx,$$

η étant tel que $\eta - c > -a$, puis intégrons par rapport à x de $-\infty$ à $+\infty$.

Comme l'intégrale

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{c}}\int_{-\infty}^{+\infty} u(x, \eta - c)\,e^{-\frac{(\lambda-x)^2}{4c}}\,dx$$

est, d'après la formule (18), où l'on changerait x en λ et λ en x, égale à

$$u(\lambda, \eta),$$

on aura

$$0 = \int_{-}^{+\infty} u(\lambda, y - c)\,u(\lambda, \eta)\,d\lambda.$$

Faisons, pour avoir un résultat précis,

$$c = \frac{a}{3}, \qquad y = \frac{a}{6}, \qquad \eta = -\frac{a}{6}, \qquad y - c = -\frac{a}{6};$$

toutes les conditions supposées seront remplies,

$$c > 0, \qquad y > 0, \qquad \eta - c > -a,$$

et l'on aura

$$0 = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[u\left(\lambda, -\frac{a}{6}\right)\right]^2 d\lambda,$$

ce qui exige évidemment $u\left(\lambda, -\frac{a}{6}\right) = 0$.

Nous avons donc réduit de $\frac{1}{6}$ l'intervalle dans lequel la fonction u n'est pas identiquement nulle; on réduira de même le nouvel intervalle de $\frac{1}{6}$, etc., et l'on arrivera à montrer que la fonction $u(x, y)$ est nulle jusqu'à une distance aussi petite qu'on le veut de la droite $y = -a$.

14. Il reste, dans cet ordre d'idées, une question à résoudre. En supposant qu'on donne pour $y = 0$ une fonction transcendante entière

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$

dont la valeur absolue reste finie pour $x = \pm \infty$, reconnaître s'il existe une solution $u(x, y)$ de l'équation $\delta u = 0$, *finie pour des valeurs négatives* de y et se réduisant à $f(x)$ pour $y = 0$, et former cette fonction si elle existe. Voici la méthode qui paraît la plus simple pour résoudre cette question.

Supposons que la fonction $u(x, y)$ existe pour les valeurs négatives de y depuis $y = 0$ jusqu'à la valeur négative $y = -a$ *inclusivement*. $a > 0$.

D'après les formules connues de la théorie de la chaleur, précédemment rappelées, cette fonction $u(x, y)$ est donnée pour toutes les valeurs de y supérieures à $-a$ par la formule

$$(19) \qquad u(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{y + a}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(\lambda, -a)\, e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{4(y+a)}}\, d\lambda,$$

expression qui doit, en particulier, se réduire à la valeur donnée $f(x)$, pour $y = 0$. La fonction $u(x, y)$ définie par la formule (19), dans laquelle $y > -a$, est une fonction transcendante entière de x développable en une série de puissances entières et positives de x, convergente quel que soit x; cette même fonction $u(x, y)$ est une fonction de y qui, pour les valeurs de y dont la valeur absolue est moindre que a,

$$-a < y < a,$$

est développable en une série procédant suivant les puissances entières et positives de y. Donc, pour ces valeurs de y, la température $u(x, y)$ est développable en une série entière en x, dont les coefficients sont des séries entières en y; elle est donc, comme nous l'avons vu, n° **9**, de la forme

$$(20) \qquad u = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{x^{2n}}{1.2\ldots 2n} \frac{d^n \varphi(y)}{dx^n} + \frac{x^{2n+1}}{1.2\ldots(2n+1)} \frac{d^n \psi(y)}{dx^n},$$

où $\varphi(y)$ et $\psi(y)$ sont des séries entières en y.

En identifiant la forme de ce développement pour $y = 0$ avec le développement de $f(x)$, on a

$$a_{2n} = \frac{\varphi^{(n)}(0)}{1.2\ldots 2n}, \qquad a_{2n+1} = \frac{\psi^{(n)}(0)}{1.2\ldots(2n+1)}.$$

Alors, d'après la formule de Maclaurin qui est applicable, puisque $\varphi(y)$ et $\psi(y)$ sont des séries entières convergentes pour $-a < y < a$, on a

$$\varphi(y) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1.2\ldots 2n}{1.2\ldots n} a_{2n} y^n,$$

$$\psi(y) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1.2\ldots(2n+1)}{1.2\ldots n} a_{2n+1} y^n.$$

Les fonctions $\varphi(y)$ et $\psi(y)$ étant ainsi déterminées, pour que l'état antérieur existe, jusqu'à la valeur $y = -a$, il faudra que la série (20) soit convergente pour y compris entre $-a$ et $+a$ (¹).

Prenons par exemple

$$f(x) = e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{1.2\ldots n}.$$

Alors

$$\psi(y) = 0, \qquad \varphi(y) = \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n \frac{1.2\ldots 2n}{(1.2\ldots n)^2} y^n$$

ou

$$\varphi(y) = \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)\ldots(\frac{1}{2}+n-1)}{1.2\ldots n} (4y)^n,$$

$$\varphi(y) = (1+4y)^{-\frac{1}{2}};$$

(¹) Mme Kowalevski a examiné les conditions de convergence dans son Mémoire du *Journal de Crelle*, t. 80.

la série (20) donne ensuite

$$u(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1+4y}} e^{-\frac{x^2}{1+4y}},$$

fonction qui existe depuis $y = 0$ jusqu'à $y = -\frac{1}{4}$ exclusivement.

15. Lorsque l'état antérieur existe, il est impossible que la température

$$u(x, y), \qquad (y = kt)$$

soit finie pour toute valeur finie et infinie de x et t, t étant négatif, à moins que la température ne soit constante. En d'autres termes, si la température u n'est pas constante, *on ne peut pas remonter indéfiniment dans le passé*, sans que la fonction u qui représente la température devienne infinie ou cesse d'exister, *au moins pour $t = -\infty$*.

En effet, soit $u(x, y_1)$ la température à un instant t_1, $y_1 = kt_1$, on a, d'après Fourier, pour $t > t_1$, $y > y_1$,

$$u(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{y - y_1}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(\lambda, y_1) e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{4(y-y_1)}} d\lambda,$$

expression indépendante de y_1. En supposant que, pour toutes les valeurs de λ et les valeurs négatives de y_1, quelque grandes qu'elles soient, la température $u(\lambda, y_1)$ reste inférieure en valeur absolue à une limite fixe, on démontrera, à l'aide de cette formule, comme on l'a fait dans le n° **6**, que la fonction $u(x, y)$ est *constante*. Donc, en exceptant ce dernier cas, on ne peut pas remonter à un état antérieur indéfiniment reculé dans le passé, *la fonction u restant finie pour $t = -\infty$*.