JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

P. RIVEREAU

Sur les invariants de quelques équations différentielles

Journal de mathématiques pures et appliquées 4e série, tome 8 (1892), p. 233-268.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1892_4_8__233_0>

Sur les invariants de quelques équations différentielles;

PAR P. RIVEREAU,

Professeur à l'Institut catholique d'Angers.

1. Nous nous proposons d'étudier les invariants des équations différentielles définies par une équation algébrique et entière par rapport à la fonction y de x et à ses dérivées. Ces équations conservent la même forme lorsqu'on choisit une nouvelle fonction η et une nouvelle variable ξ liées à y et à x par les relations

$$y = \eta u(x) + v(x), \qquad \frac{d\xi}{dx} = \mu(x).$$

De telles équations, de la forme

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_0 + a_1 y + \ldots + a_n y^n}{b_0 + b_1 y + \ldots + b_p y^p},$$

ont déjà été étudiées par M. Appell (¹) et M. Elliot (²).

La méthode employée, due à M. Appell, consiste à déterminer les fonctions u, v, μ de façon à réduire l'équation différentielle à une forme plus simple en annulant ou en égalant plusieurs coefficients de l'équation transformée. La fonction v est alors complètement détermi-

(¹) *Journal de Mathématiques*, 4ᵉ série, t. V, fasc. IV, p. 361.
(²) *Annales de l'École Normale supérieure*, t. VII, p. 101; année 1890.

née, mais les fonctions u et μ ne sont déterminées qu'à un facteur constant près. L'introduction de ces facteurs constants fournit des équations canoniques se déduisant immédiatement l'une de l'autre par un nouveau changement de fonction et de variable (*voir* les Mémoires de M. Appell, p. 370, et de M. Elliot, p. 104). Les coefficients de l'équation canonique sont des invariants absolus. Ces invariants ne sont pas des fonctions algébriques des coefficients de l'équation différentielle et de leurs dérivées. Il est facile d'obtenir des équations canoniques dont les coefficients, invariants absolus, sont des fonctions algébriques des coefficients de l'équation différentielle et de leurs dérivées. Il suffit d'appliquer une méthode analogue à celle employée par Halphen pour les équations différentielles linéaires, c'est-à-dire de déterminer les fonctions u, μ, de façon que certains invariants relatifs se réduisent à l'unité. De telles relations fournissent, en général, des équations algébriques binômes pour déterminer les fonctions caractérisant le changement de fonction et de variable précédent.

Prenons comme exemple le cas traité par M. Appell dans le Mémoire cité (p. 366 et suiv.).

L'équation considérée est

$$\frac{dy}{dx} = c_0 + 3c_1 y + 3c_2 y^2 + c_3 y^3.$$

Posons

$$y = \eta u(x) + v(x), \qquad \frac{d\xi}{dx} = \mu(x),$$

l'équation prendra la forme

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \gamma_0 + 3\gamma_1\eta + 3\gamma_2\eta^2 + \gamma_3\eta^3,$$

où

$$\gamma_0 = \frac{c_0 + 3c_1 v + 3c_2 v^2 + c_3 v^3 - v'}{\mu u},$$

$$\gamma_1 = \frac{c_1 + 2c_2 v + c_3 v^2}{\mu} - \frac{u'}{3\mu u},$$

$$\gamma_2 = \frac{u(c_2 + c_3 v)}{\mu},$$

$$\gamma_3 = \frac{u^2 c_3}{\mu}.$$

M. Appell détermine les fonctions v, u et μ, de manière à avoir

$$\gamma_2 = 0, \qquad \gamma_1 = 0, \qquad \gamma_3 = 1.$$

Il appelle V, U, M les fonctions ainsi obtenues, Y et X, la fonction et la variable correspondant à ces valeurs particulières. D'où l'équation canonique

$$\frac{dY}{dX} = J + Y^3.$$

En posant

$$s_3 = c_0 c_3^2 - 3c_1 c_2 c_3 + 2c_2^3 + c_3 \frac{dc_2}{dx} - c_2 \frac{dc_3}{dx},$$

la valeur de l'invariant absolu J est

$$J = \frac{1}{U^3} \frac{s_3}{c_3^3}.$$

L'expression $\frac{s_3}{c_3^3}$ est un invariant relatif. Si l'on appelle σ_3 l'expression formée avec les fonctions γ de ξ, comme s_3 est formée avec les fonctions c de x, on aura

$$\frac{\sigma_3}{\gamma_3^3} = \frac{1}{u^3} \frac{s_3}{c_3^3}.$$

Si donc on détermine les fonctions v, u et μ de façon que l'on ait

$$\gamma_2 = 0, \qquad \gamma_3 = 1, \qquad \frac{\sigma_3}{\gamma_3^3} = 1,$$

et si l'on appelle $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{M}$ les fonctions particulières ainsi obtenues, Y_1 et X_1 la fonction et la variable correspondantes, on aura l'équation canonique

$$\frac{dY_1}{dX_1} = 1 + IY_1 + Y_1^3,$$

où I est un invariant absolu, fonction algébrique des coefficients c et de leurs dérivées par rapport à x.

Il est à remarquer que, dans ce cas particulier, on aurait pu poser de suite $\gamma_0 = 1$, $\gamma_2 = 0$, $\gamma_3 = 1$, au lieu de considérer l'invariant relatif $\frac{e_2}{c_3}$. Les fonctions v, u, μ sont déterminées sans quadrature, comme on le voit à la simple inspection des expressions de γ_0, γ_2, γ_3. Cela tient au cas particulier choisi comme exemple.

2. Avant d'aborder l'étude des invariants des équations différentielles de la forme indiquée au commencement de ce Mémoire, nous allons faire une remarque sur ceux des équations différentielles qui conservent la même forme quand on fait le changement de fonction et de variable,

$$y = \eta_1 u(x), \qquad \frac{d\xi}{dx} = \mu(x).$$

De telles équations différentielles, en dehors des équations linéaires, ont été considérées par M. Appell (¹) et par nous-même (²).

Les équations canoniques ont été obtenues en donnant aux fonctions u et μ des valeurs particulières U et M annulant certains coefficients de l'équation transformée ou rendant égaux deux de ces coefficients. Si l'équation différentielle est homogène par rapport à la fonction y et à ses dérivées, on peut toujours trouver une forme canonique. La fonction U est déterminée par une équation différentielle linéaire, homogène et du premier ordre

$$\frac{U'}{U} = \varphi(x),$$

où $\varphi(x)$ est une fonction rationnelle des coefficients de l'équation différentielle. La fonction M, dans certains cas, est déterminée par une équation algébrique binôme

$$M^p = \psi(x),$$

où $\psi(x)$ est une fonction rationnelle des coefficients. Nous avons dé-

---

(¹) *Journal de Mathématiques*, 4ᵉ série, t. V, fasc. IV, p. 388.

(²) *Sur les invariants de certaines classes d'équations différentielles homogènes par rapport à la fonction inconnue et à ses dérivées.* (Thèse présentée à la Faculté des Sciences de Paris. Gauthier-Villars et fils, 1890.)

montré que les coefficients de l'équation canonique sont alors des invariants absolus, algébriques par rapport aux coefficients de l'équation différentielle et à leurs dérivées.

La fonction M, dans d'autres cas, est déterminée, comme U, par une équation différentielle linéaire, homogène et du premier ordre. Alors les coefficients de l'équation canonique sont de la forme

$$\frac{A_i}{M^i}.$$

Ces coefficients $\frac{A_i}{M^i}$ sont des invariants absolus qui ne sont pas algébriques par rapport aux coefficients de l'équation différentielle. Les expressions A_i sont des fonctions rationnelles de ces coefficients et de leurs dérivées, et, de plus, ce sont des invariants relatifs. On montre facilement, en effet, que par le changement de fonction et de variable (¹),

$$y = \eta_1 u(x), \qquad \frac{d\xi}{dx} = \mu(x),$$

l'expression $(A_i)_1$, formée avec les coefficients de l'équation transformée comme A_i est formée avec les coefficients de l'équation proposée, vérifie la relation

$$(A_i)_1 = \frac{A_i}{\mu^i}.$$

On pourra donc donner à la fonction μ une valeur particulière $\mathfrak{M}$, de façon à réduire à l'unité l'invariant relatif le plus simple. La fonction U pourra être déterminée par une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre. Alors l'équation canonique correspondante aura comme coefficients des invariants absolus, fonctions algébriques des coefficients de l'équation et de leurs dérivées.

Si l'équation n'était pas homogène par rapport à y et à ses dérivées, mais si elle était composée de plusieurs parties homogènes de degrés différents, une méthode analogue permettrait de trouver les invariants absolus algébriques.

(¹) *Sur les invariants des équations différentielles linéaires* (*Annales de la Faculté de Toulouse*). *Voir* aussi le n° 5 du présent Mémoire.

Prenons comme exemple l'équation

$$a_0 y''^2 + a_2 y'^2 + a_4 y^2 + 2 b_1 y'' y' + 2 b_2 y'' y + 2 b_3 y' y = 0.$$

Le changement de fonction et de variable

$$y = \eta u(x), \qquad \frac{d\xi}{dx} = \mu(x)$$

lui fait prendre la forme

$$\alpha_0 \eta''^2 + \alpha_2 \eta'^2 + \alpha_4 \eta^2 + 2\beta_1 \eta'' \eta' + 2\beta_2 \eta'' \eta + 2\beta_3 \eta' \eta = 0.$$

M. Appell (*Journal de Mathématiques, loc. cit.*, p. 401) détermine l'équation canonique en donnant aux fonctions u et μ les valeurs particulières U et M qui annulent β_1 et β_3, en supposant l'invariant relatif $a_0 a_2 - b_1^2$ différent de zéro. Ces fonctions U et M sont alors fournies par les équations

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{M'}{M} + 2\frac{U'}{U} = -\frac{b_1}{a_0},\\ &\frac{U'}{U}(a_0 a_2 - b_1^2) - (b_1 b_2 - a_0 b_3) = 0. \end{aligned}\right.$$

L'équation canonique ainsi obtenue est de la forme

$$Y''^2 + I Y'^2 + J Y^2 + 2 K Y'' Y = 0,$$

où Y et X sont la fonction et la variable définies par

$$y = Y U(x), \qquad \frac{dX}{dx} = M(x).$$

L'invariant absolu I est égal à

$$I = \frac{a_0 a_2 - b_1^2}{a_0^2 M^2}.$$

On en conclut que l'invariant relatif $\frac{\alpha_0 \alpha_2 - \beta_1^2}{\alpha_0^2}$ vérifie la relation

$$\frac{\alpha_0 \alpha_2 - \beta_1^2}{\alpha_0^2} = \frac{a_0 a_2 - b_1^2}{a_0^2 \mu^2}.$$

Au lieu de la valeur particulière M considérée précédemment, prenons celle qui rend cet invariant égal à l'unité et soit $\mathfrak{M}$ cette valeur. Déterminons encore u de façon à annuler β_1, soit $\mathfrak{v}$ cette valeur; nous aurons

$$\frac{\mathfrak{M}'}{\mathfrak{M}} + 2\frac{\mathfrak{v}'}{\mathfrak{v}} = -\frac{b_1}{a_0},$$

$$\mathfrak{M}^2 = \frac{a_0 a_2 - b_1^2}{a_0^2}.$$

Si Y_1 et X_1 sont la fonction et la variable correspondant à ces valeurs particulières $\mathfrak{v}$ et $\mathfrak{M}$, nous obtiendrons une équation canonique de la forme

$$Y_1''^2 + Y_1'^2 + HY_1^2 + 2KY_1''Y_1 + 2LY_1'Y_1 = 0.$$

Les invariants absolus H, K, L^2 sont rationnels par rapport aux coefficients de l'équation différentielle et à leurs dérivées.

3. Pour simplifier, nous étudierons les équations du second ordre définies par une équation algébrique, entière et du second degré par rapport à y, y', y''. L'équation générale est

$$(1)\quad \begin{cases} a_0 y''^2 + a_2 y'^2 + a_4 y^2 + 2b_1 y''y' + 2b_2 y''y + 2b_3 y'y \\ \qquad + 2c_0 y'' + 2c_1 y' + 2c_2 y + d_0 = 0, \end{cases}$$

les coefficients $a_0, a_1, \ldots, d_0$ étant des fonctions de la variable indépendante x. Faisons le changement de fonction et de variable

$$(2)\qquad y = \eta u(x) + v(x), \qquad \frac{d\xi}{dx} = \mu(x).$$

Les dérivées de u, μ, v par rapport à x seront désignées par $u', u'', \mu', \mu'', v', v''$, et celles de η par rapport à ξ seront représentées par η', η''.

Les formules de transformation sont donc

$$(3)\qquad \begin{cases} y = \eta u + v, \\ y' = \eta' \mu u + \eta u' + v', \\ y'' = \eta'' \mu^2 u + \eta'(u\mu' + 2\mu u') + \eta u'' + v''. \end{cases}$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (1), on aura une équation

$$(4)\quad \begin{cases} \alpha_0\eta''^2 + \alpha_2\eta'^2 + \alpha_4\eta^2 + 2\beta_1\eta''\eta' + 2\beta_2\eta''\eta \\ \qquad + 2\beta_3\eta'\eta + 2\gamma_0\eta'' + 2\gamma_1\eta' + 2\gamma_2\eta + \delta_0 = 0, \end{cases}$$

où

$$(5)\quad \begin{cases} \alpha_0 = a_0\mu^4 u^2, \\ \alpha_2 = (u\mu' + 2\mu u')[a_0(u\mu' + 2\mu u') + b_1\mu u] \\ \qquad + [b_1(u\mu' + 2\mu u') + a_2\mu u]\mu u, \\ \alpha_4 = a_0 u''^2 + a_2 u'^2 + a_4 u^2 + 2b_1 u'' u' + 2b_2 u'' u + 2b_3 u' u, \\ \beta_1 = [a_0(u\mu' + 2\mu u') + b_1\mu u]\mu^2 u, \\ \beta_2 = (a_0 u'' + b_1 u' + b_2 u)\mu^2 u, \\ \beta_3 = [a_0(u\mu' + 2\mu u') + b_1\mu u]u'' \\ \qquad + [b_1(u\mu' + 2\mu u') + a_2\mu u]u' \\ \qquad + [b_2(u\mu' + 2\mu u') + b_3\mu u]u, \\ \gamma_0 = (a_0 v'' + b_1 v' + b_2 v + c_0)\mu^2 u, \\ \gamma_1 = [a_0(u\mu' + 2\mu u') + b_1\mu u]v'' \\ \qquad + [b_1(u\mu' + 2\mu u') + a_2\mu u]v' \\ \qquad + [b_2(u\mu' + 2\mu u') + b_3\mu u]v \\ \qquad + c_0(u\mu' + 2\mu u') + c_1\mu u, \\ \gamma_0 = (a_0 u'' + b_1 u' + b_2 u)v'' + (b_1 u'' + a_2 u' + b_3 u)v' \\ \qquad + (b_2 u'' + b_3 u' + a_4 u)v + c_0 u'' + c_1 u' + c_2 u, \\ \delta_0 = a_0 v''^2 + a_2 v'^2 + a_4 v^2 + 2b_1 v'' v' + 2b_2 v'' v \\ \qquad + 2b_3 v' v + 2c_0 v'' + 2c_1 v' + 2c_2 v + d_0. \end{cases}$$

La partie homogène du second degré de l'équation (4) est la transformée de la partie homogène du second degré de l'équation (1) à l'aide du changement de fonction et de variable

$$y = \eta u, \qquad \frac{d\xi}{dx} = \mu.$$

Les invariants de cette partie homogène sont donc aussi des invariants de l'équation (1), même pour la transformation (2). On pourra, par conséquent, donner à u et μ des valeurs particulières U et M pour lesquelles la partie homogène du second degré prend une forme canonique. Il restera à déterminer la fonction v. Nous donnerons d'abord à cette fonction v une valeur particulière V, de façon à faire prendre à (4) la forme la plus simple possible. Nous étudierons les propriétés des coefficients de cette forme réduite relatives à la transformation (2) et nous en déduirons un moyen de former des équations canoniques dont les coefficients sont des invariants absolus qui seront ou transcendants ou algébriques par rapport aux coefficients de l'équation (1) et à leurs dérivées.

Remarquons auparavant que les formules (3) constituent une substitution linéaire sur les quantités y, y', y''. Le discriminant de l'équation (1), considérée comme une quadrique, est donc un invariant de l'équation différentielle. Le module de la transformation est $\mu^3 u^3$. Pour les équations de degré supérieur au second, on pourra faire les mêmes remarques que pour les équations homogènes. Ainsi, par exemple, l'équation différentielle étant

$$f(y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

les dérivées partielles par rapport à $y^{(n)}$, $\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}, \cdots$ sont des covariants et leurs invariants seront des invariants de l'équation différentielle (*voir* Thèse, p. 14).

Enfin les équations considérées peuvent se diviser en trois classes, suivant la façon dont la partie du second degré contient la dérivée y'' (Appell, *loc. cit.*, p. 392). Dans la première classe a_0 et b_1 sont nuls; dans la seconde a_0 est nul et b_1 est différent de zéro; dans la troisième a_0 est différent de zéro. Cette classification repose sur ce que la transformation (3) ne change pas la classe d'une équation.

Nous commencerons par la troisième classe. L'équation générale se prête mieux à notre but qui est de montrer comment on peut obtenir les invariants de l'équation différentielle.

4. Comme nous l'avons indiqué, nous allons réduire l'équation différentielle à la forme la plus simple possible. Pour conserver les nota-

tions de M. Appell, nous désignerons par $A_0, A_2, A_4, B_1, B_2, B_3$ les mineurs du discriminant D,

$$D = \begin{vmatrix} a_0 & b_1 & b_2 \\ b_1 & a_2 & b_3 \\ b_2 & b_3 & a_4 \end{vmatrix},$$

relatifs aux éléments $a_0, \ldots, b_3$. Ainsi

$$A_4 = a_0 a_2 - b_1^2, \qquad B_3 = b_1 b_2 - a_0 b_3, \qquad \ldots.$$

Si A_4 est différent de zéro, on pourra donner à u et μ les valeurs particulières qui annulent β_1 et β_2, puis à v celle qui annule γ_1. En appelant U, M, V ces valeurs particulières, U′, M′, V′, ... leurs dérivées par rapport à x, on aura

$$(6) \qquad \begin{cases} \dfrac{M'}{M} + 2\dfrac{U'}{U} = -\dfrac{b_1}{a_0}, & \dfrac{U'}{U} = \dfrac{B_3}{A_4}, \\ V' = \dfrac{B_3}{A_4} V + \dfrac{C_1}{A_4}, \end{cases}$$

où l'on a posé

$$C_1 = c_0 b_1 - a_0 c_1.$$

Y et X étant la fonction et la variable correspondant à ces valeurs particulières U, M, V, on aura

$$y = YU(x) + V(x), \qquad \frac{dX}{dx} = M(x).$$

Si l'on divise tous les termes de l'équation ainsi transformée par le coefficient de Y''^2, on aura une équation réduite à la forme

$$(7) \qquad Y''^2 + IY'^2 + JY^2 + 2KY''Y + 2PY'' + 2QY + R = 0.$$

Les coefficients I, J, K sont des invariants absolus, déterminés à un facteur constant près et indépendants de V. Ils ont été calculés par M. Appell (*loc. cit.*, p. 402). Leurs valeurs sont

$$I = \frac{A_4}{a_0^2 M^2}, \qquad J = \frac{S_{12}}{a_0 A_4^2 M^4}, \qquad K = \frac{S_6}{A_4^2 M^2},$$

où l'on a posé

$$S_6 = B_3^2 - A_4 B_2 + A_4 \frac{dB_3}{dx} - B_3 \frac{dA_4}{dx},$$
$$S_{12} = a_0 S_6^2 + A_4^3 D.$$

On a ensuite

$$P = \frac{1}{U}\left(KV + \frac{\mathfrak{P}}{M^2}\right),$$
$$Q = \frac{1}{U}\left(JV + \frac{\mathfrak{Q}}{M^4}\right),$$
$$R = \frac{1}{U^2}\left(JV^2 + \frac{2\mathfrak{Q}}{M^4}V + \frac{\mathfrak{R}}{M^4}\right),$$

où l'on a posé

$$\mathfrak{P} = \frac{C_1 B_3 + (c_0 a_2 - b_1 c_1) A_4 + A_4 \frac{dC_1}{dx} - C_1 \frac{dA_4}{dx}}{A_4^2},$$

$$\mathfrak{Q} = \frac{S_6 \mathfrak{P}}{A_4^2} + \frac{\delta}{a_0 A_4}, \qquad \delta = \begin{vmatrix} a_0 & b_1 & c_0 \\ b_1 & a_2 & c_1 \\ b_2 & b_3 & c_2 \end{vmatrix},$$

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{P}^2 + \frac{\delta^2}{a_0 A_4 D} + \frac{\Delta}{a_0 D}.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_0 & b_1 & b_2 & c_0 \\ b_1 & a_2 & b_3 & c_1 \\ b_2 & b_3 & a_4 & c_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 & d_0 \end{vmatrix}.$$

Les valeurs de P et Q se calculent facilement, car les formules

$$V' = \frac{B_3}{A_4} V + \frac{C_1}{A_4},$$
$$V'' = \left[\frac{B_3^2}{A_4^2} + \frac{d}{dx}\left(\frac{B_3}{A_4}\right)\right] V + \frac{C_1 B_3}{A_4^2} + \frac{d}{dx}\left(\frac{C_1}{A_4}\right)$$

montrent que les coefficients de V s'obtiennent en remplaçant V' par $\frac{U'}{U}V$ et V'' par $\frac{U''}{U}V$ dans $\frac{\gamma_0}{\alpha_0}$ et $\frac{\gamma_2}{\alpha_0}$. Les parties indépendantes de V se trouvent aussi aisément. En effet, en supposant

$$V = 0, \qquad V' = \frac{C_1}{A_4}, \qquad V'' = \frac{C_1 B_2}{A_4^2} + \frac{d}{dx}\left(\frac{C_1}{A_4}\right),$$

on trouve

$$\begin{aligned} a_0 V'' + b_1 V' + b_2 V + c_0 &= a_0 \mathfrak{P}, \\ b_1 V'' + a_2 V' + b_3 V + c_1 &= b_1 \mathfrak{P}, \\ b_2 V'' + b_3 V' + a_4 V + c_2 &= b_2 \mathfrak{P} + \frac{\delta}{A_4}. \end{aligned}$$

Le reste du calcul s'achève de suite. La valeur de R a été obtenue à l'aide des discriminants des deux équations différentielles. On a, en effet, les relations

$$R(J - K^2) - JP^2 - Q^2 + 2KPQ = \frac{\Delta}{a_0^2 A_4 M^8 U^2}$$

et

$$J - K^2 = \frac{D}{a_0 A_4 M^4}.$$

5. Les fonctions des coefficients appelées $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ et $\mathfrak{R}$ jouissent d'une propriété remarquable. Pour la mettre en évidence nous ferons un raisonnement déjà employé ailleurs. L'équation (1) prend la forme réduite (7) au moyen des formules

$$y = YU(x) + V(x), \qquad \frac{dX}{dx} = M(x).$$

Posons maintenant

$$y = \eta u(x) + v(x), \qquad \frac{d\xi}{dx} = \mu(x),$$

l'équation (1) prendra la forme (4) que nous réduirons de la même manière, en posant

$$\eta = Y_1 U_1(\xi) + V_1(\xi), \qquad \frac{dX_1}{d\xi} = M_1(\xi).$$

L'équation réduite ainsi obtenue est

$$(7)' \quad Y_1''^2 + I_1 Y_1'^2 + J_1 Y_1^2 + 2K_1 Y_1'' Y_1 + 2P_1 Y_1'' + 2Q_1 Y_1 + R_1 = 0:$$

on sait déjà que

$$I_1 = I, \qquad J_1 = J, \qquad K_1 = K,$$

car on peut supposer que les constantes d'intégration dont dépendent U, M, U_1, M_1 aient été choisies de façon à obtenir ce résultat, ce qui ne nuit en rien à la généralité pour ce que nous voulons obtenir. Désignons par (U_1), (M_1), (V_1) ce que deviennent les fonctions U_1, M_1, V_1 de ξ quand on y remplace ξ par sa valeur en x; les formules précédentes donnent

$$y = Y_1 u(U_1) + u(V_1) + v, \qquad \frac{dX_1}{dx} = \mu(M_1).$$

On en conclut que les coefficients de l'équation $(7)'$ se déduisent de ceux de l'équation (7) en changeant dans ceux-ci U en uU_1, M en μM_1 et V en $uV_1 + v$. On aura donc

$$P_1 = \frac{1}{U_1}\left(K_1 V_1 + \frac{\mathfrak{P}_1}{M_1^2}\right) = \frac{1}{uU_1}\left[K(uV_1 + v) + \frac{\mathfrak{P}}{\mu^2 M_1^2}\right].$$

Pour simplifier cette expression, il faut remarquer que l'on a

$$K_1 = K = \frac{S_6}{A_4^2 \mu^2 M_1^2}.$$

On aura donc

$$\mathfrak{P}_1 = \frac{1}{\mu^2 u}\left(\mathfrak{P} + \frac{S_6}{A_4^2} v\right).$$

On trouverait de même

$$\mathfrak{Q}_1 = \frac{1}{\mu^4 u}\left(\mathfrak{Q} + \frac{S_{12}}{a_0 A_4^3} v\right),$$

$$\mathfrak{R}_1 = \frac{1}{\mu^4 u^2}\left(\mathfrak{R} + 2\mathfrak{Q} v + \frac{S_{12}}{a_0 A_4^4} v^2\right).$$

De ces expressions on déduit facilement

$$\delta_1 = \mu^6 u^3 (\delta + Dv).$$

6. Les expressions trouvées pour P, Q, R permettent de former plusieurs invariants. Ainsi l'on a

$$\mathrm{JP} - \mathrm{KQ} = \frac{1}{\mathrm{M}^6\mathrm{U}}\left(\frac{\mathrm{S}_{12}\mathfrak{P} - a_0\mathrm{A}_4^2\mathrm{S}_6\mathfrak{Q}}{a_0\mathrm{A}_4^1}\right) = \frac{1}{\mathrm{M}^6\mathrm{U}}\left(\frac{\mathrm{A}_4^2\mathrm{D}\mathfrak{P} - \mathrm{S}_6\delta}{a_0\mathrm{A}_4^3}\right).$$

$$\mathrm{Q}^2 - \mathrm{JR} = \frac{1}{\mathrm{M}^6\mathrm{U}^2}\left(\mathfrak{Q}^2 - \frac{\mathrm{S}_{12}\mathfrak{R}}{a_0\mathrm{A}_4^4}\right);$$

on obtient ainsi deux invariants absolus. Les quantités placées entre parenthèses dans les seconds membres sont des invariants relatifs. On peut avoir d'autres invariants en calculant les dérivées de P, Q, R, par rapport à X,

$$\frac{d\mathrm{P}}{d\mathrm{X}} = \frac{1}{\mathrm{U}}\left(\frac{d\mathrm{K}}{d\mathrm{X}}\mathrm{V} + \frac{\Pi}{\mathrm{M}^3}\right),$$

où

$$\Pi = \frac{\mathrm{S}_6\mathrm{C}_1}{\mathrm{A}_4^3} + \frac{d\mathfrak{P}}{dx} + \mathfrak{P}\left(\frac{3\mathrm{B}_3}{\mathrm{A}_4} + \frac{2b_1}{a_0}\right).$$

L'expression

$$\mathrm{K}\frac{d\mathrm{P}}{d\mathrm{X}} - \mathrm{P}\frac{d\mathrm{K}}{d\mathrm{X}} = \frac{\Psi}{\mathrm{M}^5\mathrm{U}}$$

est un invariant absolu. La valeur de Ψ est

$$\Psi = \frac{\mathrm{S}_6}{\mathrm{A}_4^2}\left(\frac{\mathrm{S}_6\mathrm{C}_1}{\mathrm{A}_4^4} + \frac{d\mathfrak{P}}{dx} - \frac{\mathfrak{P}\mathrm{B}_3}{\mathrm{A}_4}\right) - \mathfrak{P}\frac{d}{dx}\left(\frac{\mathrm{S}_6}{\mathrm{A}_4^2}\right).$$

Si l'on cherche les relations que doivent vérifier les coefficients de l'équation réduite pour que l'équation différentielle possède une propriété indépendante du changement de fonction et de variable, les équations obtenues s'exprimeront à l'aide d'invariants absolus. Cherchons, comme exemple, les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'intégrale de l'équation (7) soit de la forme

$$\mathrm{Y} = h_1\mathrm{Y}_1 + h_2\mathrm{Y}_2 + h_3\mathrm{Y}_3 + \mathrm{Y}_4,$$

où Y_1, Y_2, Y_3 sont des fonctions de X linéairement indépendantes et où les constantes h_1, h_2, h_3 sont liées par une relation algébrique et entière du second degré (*voir* Appell, *loco citato*, p. 412). En désignant par F le premier membre de l'équation (7) et par $\lambda(\mathrm{X})$ une fonction de X, on doit avoir identiquement, comme l'a démontré

M. Appell (*Comptes rendus*, novembre 1888),

$$\frac{dF}{dX} - \lambda F = (2Y''' + \alpha Y'' + \beta Y' + \gamma Y + \delta)(Y'' + KY + P).$$

L'identification donne après quelques réductions

$$\frac{dK}{dX} = 0, \qquad \frac{dP}{dX} = 0, \qquad J = K(I + K),$$

$$JP - KQ = 0, \qquad \frac{d}{dX}\left(\frac{P^2}{I}\right) = \frac{d}{dX}\left(\frac{R}{I}\right);$$

on a ensuite

$$\lambda = -\alpha = \frac{1}{I}\frac{dI}{dX}, \qquad \beta = \frac{2J}{K}, \qquad \gamma = K\alpha, \qquad \delta = P\alpha.$$

Les deux seules relations $\frac{dP}{dX} = 0$, $\frac{d}{dX}\left(\frac{P^2}{I}\right) = \frac{d}{dX}\left(\frac{R}{I}\right)$ ne sont pas exprimées à l'aide d'invariants absolus. Mais on voit de suite que l'on peut remplacer $\frac{dP}{dX} = 0$ par

$$K\frac{dP}{dX} - P\frac{dK}{dX} = 0.$$

Pour transformer l'autre équation, considérons l'invariant absolu $Q^2 - JR$. On a, en tenant compte des relations précédentes,

$$\frac{Q^2 - JR}{JI} = \frac{Q^2}{JI} - \frac{R}{I} = \frac{J}{K^2} \times \frac{P^2}{I} - \frac{R}{I} = \frac{P^2}{I} - \frac{R}{I} + \frac{P^2}{K}.$$

P et K étant des constantes, on en déduit que la dernière équation de condition peut s'écrire

$$\frac{Q^2 - JR}{JI} = C,$$

C étant une constante.

On a supposé $I \gtrless 0$; car, dans l'hypothèse $I = 0$, l'équation différentielle n'eût pas été irréductible, en tenant compte des autres équations de condition fournies par l'identification.

L'intégration s'achève en résolvant l'équation

$$2Y''' - \frac{I'}{I}Y'' + 2(I + K)Y' - K\frac{I'}{I}Y - P\frac{I'}{I} = 0,$$

où $I' = \frac{dI}{dX}$; K et P sont des constantes. L'équation du second ordre

$$Y'' + KY + P = 0$$

donne des intégrales singulières.

Remarquons que le changement de fonction

$$Y = z - \frac{P}{K} \qquad \left(\text{où } \frac{P}{K} \text{ est constant}\right)$$

transformera, dans ce cas, l'équation (7) en une équation de la forme

$$z''^2 + I z'^2 + J z^2 + 2K z' z + \mu I = 0,$$

où μ est une constante. Si l'on considère l'équation obtenue en annulant la partie homogène, son intégrale générale ne différera de celle de l'équation complète que par la relation qui lie les constantes arbitraires.

7. Les formules obtenues aux nos **5** et **6** montrent comment on pourra former une équation canonique. Supposons que S_6 soit différent de zéro. On pourra donner à v la valeur particulière V qui annule $\mathfrak{P}_1$. En gardant pour u et μ les valeurs U et M qui font prendre la forme canonique à la partie homogène du second degré, on obtiendra une équation canonique dont les coefficients sont des invariants absolus, mais transcendants par rapport aux coefficients de l'équation primitive. Si S_6 était nul on pourrait donner à v la valeur qui annule $\mathfrak{Q}_1$, si S_{12} est différent de zéro ou bien celle qui annule δ_1 en supposant que D soit différent de zéro. Pour obtenir une équation canonique dont les coefficients soient des fonctions rationnelles ou algébriques des coefficients de l'équation primitive et de leurs dérivées, on déterminera v comme on vient de le dire. Puis on considérera deux invariants absolus différents de zéro de la forme

$$\frac{A}{M^p}, \quad \frac{B}{M^q U^r}.$$

A et B sont des invariants relatifs tels que

$$A_1 = \frac{A}{\mu^p}, \qquad B_1 = \frac{B}{\mu^q u^r};$$

on donnera à μ et à u les valeurs particulières qui rendent A_1 et B_1 égaux à l'unité. L'équation ainsi transformée aura comme coefficients des invariants absolus algébriques. Dans le cas précédent, I est différent de zéro. Si l'un des trois invariants

$$JP - KQ, \quad Q^2 - JR, \quad K\frac{dP}{dX} - P\frac{dK}{dX}$$

est différent de zéro, par exemple, le premier, on donnera à u et μ les valeurs particulières suivantes $\mathfrak{v}$ et $\mathfrak{M}$ définies par

$$\mathfrak{M}^2 = \frac{A_4}{a_0^2},$$

$$\mathfrak{M}^6 \mathfrak{v} = \frac{A_4^2 D\varphi - S_6 \delta}{a_0 A_4^2},$$

c'est-à-dire

$$\mathfrak{v} = \frac{a_0^3}{A_4^3}\left(\frac{D\varphi}{A_4^2} - S_6 \delta\right).$$

En supposant S_6 différent de zéro, on pourra poser

$$\varphi = -\frac{A_4^2 \varphi}{S_6}.$$

L'équation canonique correspondante sera de la forme

$$\begin{aligned} Y_1''^2 + AY_1'^2 + BY_1^2 + 2CY_1''Y_1' + 2DY_1''Y_1 \\ + 2EY_1'Y_1 + 2FY_1'' + 2GY_1' + 2HY_1 + L = 0, \end{aligned}$$

où Y_1 et X_1 sont définies par

$$y = Y_1 \mathfrak{v} + \varphi, \qquad \frac{dX_1}{dx} = \mathfrak{M}.$$

Les invariants ainsi obtenus sont liés par les trois relations

$$A = C^2 + 1,$$
$$(CF - G)(CD - E) + F(C^2 + 1) - CG + \frac{d}{dX_1}(CF - G) = 0,$$
$$0 = 1 + \begin{vmatrix} 1 & C & F \\ C & A & G \\ D & E & H \end{vmatrix} \times \left[(CD - E)^2 - (CE - AD) + \frac{d}{dX_1}(CD - E)\right].$$

Ces trois équations détermineront A, B, D en fonction des six autres invariants que l'on pourra considérer comme fondamentaux. Les quantités D et H ne désignent pas la même chose ici que précédemment.

8. Nous avons supposé que A_1 était différent de zéro. Si A_1 était nul, on ferait un changement de fonction et de variable annulant β_1 et rendant β_3 égal à l'unité. Les fonctions U et M vérifient alors les équations

$$\frac{M'}{M} + 2\frac{U'}{U} = -\frac{b_1}{a_0}, \qquad M^3 = -\frac{B_3}{a_0^2}.$$

On suppose que B_3 n'est pas nul. Le coefficient γ_1 devient alors égal à

$$-\frac{M^2U}{a_0}(B_3 v + C_1), \qquad \text{où} \qquad C_1 = c_0 b_1 - a_0 c_1.$$

On donnera à v la valeur particulière V, qui annule ce coefficient,

$$V = -\frac{C_1}{B_3}.$$

En divisant tous les termes par $\alpha_0 = a_0 M^4 U^2$, on obtiendra l'équation canonique

$$Y'''^2 + LY^2 + 2NY''Y + 2Y'Y + 2SY'' + 2TY + O = 0,$$

L^3 et N^3 sont des invariants absolus rationnels par rapport aux coefficients de l'équation primitive. S et T sont de la forme

$$S = \frac{\Sigma}{M^2 U}, \qquad T = \frac{\Theta}{M^4 U^2},$$

Σ et Θ sont des invariants relatifs rationnels. En continuant d'affecter de l'indice 1 les expressions formées avec les coefficients de l'équation transformée (4), on aura

$$\Sigma_1 = \frac{\Sigma}{\mu^2 u}, \qquad \Theta_1 = \frac{\Theta}{\mu^4 u^2}.$$

Si l'on suppose Σ différent de zéro, on pourra obtenir une équation canonique dont les coefficients sont des invariants absolus algébriques à l'aide du changement de fonction et de variable

$$y = Y_1 \mathfrak{V} + \varphi, \qquad \frac{dX_1}{dx} = \mathfrak{M},$$

où les fonctions $\mathfrak{V}$, φ, $\mathfrak{M}$ sont déterminées par

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}^2 &= -\frac{B_3}{C_1}, \\ \mathfrak{V} &= \frac{\Sigma}{\mathfrak{M}^2}, \\ \varphi &= -\frac{C_1}{B_3}. \end{aligned}$$

La légitimité du procédé est mise en évidence par les relations suivantes

$$\begin{aligned} \frac{\beta_1\beta_2 - \alpha_0\beta_3}{\alpha_0^2} &= \frac{1}{\mu^2}\,\frac{b_1 b_2 - a_0 b_3}{a_0^2}, \\ \frac{\gamma_0\beta_1 - \alpha_0\gamma_1}{\alpha_0^2} &= \frac{1}{a_0^2\mu^3 u}(B_3 v + C_1), \end{aligned}$$

calculées à l'aide des formules générales (5) en tenant compte seulement de $A_4 = 0$.

9. En supposant $A_4 = B_3 = 0$, le discriminant D s'annule d'après l'équation

$$A_2 A_4 - B_3^2 = a_0 D.$$

Il est facile de voir qu'on a aussi $B_2 = 0$. Si A_2 est différent de zéro, ce sera un invariant relatif. Si enfin $A_2 = 0$, tous les mineurs de D sont nuls et la partie homogène du second degré est le carré d'une expression linéaire et homogène en y, y', y''. Les mineurs du déterminant δ jouissent d'une propriété assez remarquable. Nous avons déjà vu que δ vérifie la relation

$$\delta_1 = \mu^6 u^3(\delta + D v),$$

où, suivant la notation adoptée, δ_1 désigne l'expression

$$\delta_1 = \begin{vmatrix} \alpha_0 & \beta_1 & \gamma_0 \\ \beta_1 & \alpha_2 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \beta_3 & \gamma_2 \end{vmatrix}.$$

Nous venons de vérifier que A_1 étant nul, mais B_3 étant différent de zéro, le mineur de δ_1 correspondant à l'élément β_2, c'est-à-dire $(\gamma_0\beta_1 - \alpha_0\gamma_1)$, jouit de la même propriété que δ_1, à savoir

$$\gamma_0\beta_1 - \alpha_0\gamma_1 = \mu^5 u^3[(c_0 b_1 - a_0 c_1) + B_3 v].$$

Si l'on suppose $A_1 = B_3 = B_2 = 0$, δ est nul aussi. La quantité $\gamma_0\beta_1 - \alpha_0\gamma_1$ devient un invariant relatif. Soit alors A_2 différent de zéro. Le mineur de α_2 dans δ_1 vérifie l'égalité

$$\alpha_0\gamma_2 - \gamma_0\beta_2 = \mu^4 u^3\left[(a_0 c_2 - c_0 b_2) + A_2 v - (c_0 b_1 - a_0 c_1)\frac{u'}{u}\right].$$

Lorsque $c_0 b_1 - a_0 c_1$ n'est pas nul, on peut donner à u et μ les valeurs particulières qui rendent égaux à l'unité les invariants

$$\left(\frac{A_2}{a_0^2}\right)_1, \quad \frac{\gamma_0\beta_1 - \alpha_0\gamma_1}{\alpha_0^2},$$

et à v celle qui annule $\alpha_0\gamma_2 - \gamma_0\beta_2$. L'équation canonique ainsi obtenue a pour coefficients des invariants absolus algébriques.

Dans ce cas, on peut encore déterminer u, μ, v, de telle sorte que l'on ait

$$\beta_1 = 0, \qquad \gamma_1 = \alpha_0, \qquad \alpha_0\gamma_2 - \gamma_0\beta_2 = 0;$$

on aura en même temps

$$\alpha_2 = \beta_3 = 0.$$

L'équation canonique correspondante a pour coefficients des invariants transcendants, mais elle est plus simple que la première.

Si $c_0 b_1 - a_0 c_1 = 0$, on déterminera u, μ et v, de façon que l'on ait

$$\beta_1 = 0, \qquad \left(\frac{A_2}{a_0^2}\right)_1 = 1, \qquad \alpha_0 \gamma_2 - \gamma_0 \beta_2 = 0.$$

En même temps on aura

$$\alpha_2 = \beta_3 = \gamma_1 = 0.$$

10. Supposons enfin $A_2 = 0$. Nous obtiendrons une équation réduite en donnant à u et μ les valeurs qui annulent β_1 et qui rendent égaux α_0 et γ_1. Puis, nous déterminerons v de façon à annuler γ_0. Soient U, M, V ces valeurs, nous aurons

$$\frac{M'}{M} + 2\frac{U'}{U} = -\frac{b_1}{a_0},$$

$$M^3 U = -\frac{C_1}{a_0}, \qquad \text{où} \qquad C_1 = c_0 b_1 - a_0 c_1,$$

$$a_0 V'' + b_1 V' + b_2 V + c_0 = 0.$$

Alors on a aussi

$$\alpha_2 = \beta_3 = 0.$$

En posant

$$y = YU + V, \qquad \frac{dX}{dx} = M,$$

et en divisant tous les termes par $\alpha_0 = a_0 M^4 U^2$, on aura

$$Y''^2 + A^2 Y^2 + 2AY''Y + 2Y' + 2BY + D = 0.$$

Il est facile de vérifier qu'on a

$$B = -\frac{1}{a_0^2 M^4 U}\left[C_1 \frac{U'}{U} + (c_0 b_2 - a_0 c_2)\right],$$

$$D = \frac{1}{a_0^2 M^4 U^2}\left[-2C_1 V' - 2(c_0 b_2 - a_0 c_2) V + a_0 d_0 - c_0^2\right].$$

On a vu au n° 5 que, si l'on fait d'abord le changement de fonction et de variable

$$y = \eta u(x) + v(x), \qquad \frac{d\xi}{dx} = \mu(x),$$

et si l'on ramène l'équation transformée en η à la forme réduite, les deux équations réduites se déduisent l'une de l'autre par le changement de U en $u\mathrm{U}_1$, de M en $\mu\mathrm{M}_1$ et de V en $u\mathrm{V}_1 + v$, où U_1, M_1, V_1 désignent les fonctions de ξ qui servent à obtenir la seconde forme réduite. Dans le cas présent, on sait déjà que C_1 est un invariant vérifiant la relation

$$\gamma_0\beta_1 - \alpha_0\gamma_1 = \mu^5 u^3(c_0 b_1 - a_0 c_1).$$

Si l'on calcule de cette façon les deux expressions

$$\mathrm{B}_1 = -\frac{1}{\alpha_0^2 \mathrm{M}_1^5 \mathrm{U}_1}\left[(\gamma_0\beta_1 - \alpha_0\gamma_1)\frac{\mathrm{U}'_1}{\mathrm{U}_1} + (\gamma_0\beta_2 - \alpha_0\gamma_2)\right],$$

$$\mathrm{D}_1 = \frac{1}{\alpha_0^2 \mathrm{M}_1^4 \mathrm{U}_1^2}[-2(\gamma_0\beta_1 - \alpha_0\gamma_1)\mathrm{V}'_1 - 2(\gamma_0\beta_2 - \alpha_0\gamma_2)\mathrm{V}_1 + \alpha_0\delta_0 - \gamma_0^2],$$

où U'_1 et V'_1 désignent des dérivées par rapport à ξ, on trouve facilement

$$\gamma_0\beta_2 - \alpha_0\gamma_2 = \mu^4 u^3\left[(c_0 b_2 - a_0 c_2) + (c_0 b_1 - a_0 c_1)\frac{u'}{u}\right],$$

$$\begin{aligned}\alpha_0\delta_0 - \gamma_0^2 = \mu^4 u^2[&-2(c_0 b_1 - a_0 c_1)v' \\ &- 2(c_0 b_2 - a_0 c_2)v + a_0 d_0 - c_0^2].\end{aligned}$$

La première de ces expressions avait déjà été calculée directement.

La seconde nous montre que nous aurions pu établir une forme réduite en conservant à u et μ les valeurs particulières U et M précédentes et en donnant à v la valeur V qui annule $\alpha_0\delta_0 - \gamma_0^2$. On pourrait encore déterminer u et μ de façon à rendre nulles les quantités β_1 et $\gamma_0\beta_2 - \alpha_0\gamma_2$. Dans l'un et l'autre cas, γ_0 sera égal à

$$\gamma_0 = \mathrm{M}^2\mathrm{U}(\mathcal{A}\mathrm{V} + \mathcal{B}),$$

où, en posant, pour abréger,

$$\mathrm{C}_1 = c_0 b_1 - a_0 c_1, \qquad \mathrm{C}_2 = c_0 b_2 - a_0 c_2,$$

on a

$$\mathcal{A} = a_0\left(\frac{C_2}{C_1}\right)^2 - b_1\left(\frac{C_2}{C_1}\right) + b_2 - a_0\frac{d}{dx}\left(\frac{C_2}{C_1}\right),$$
$$\mathcal{B} = \frac{1}{2}\left[a_0\frac{d}{dx}\left(\frac{a_0 d_0 - c_0^2}{C_1}\right) - \frac{(a_0 C_2 - b_1 C_1)(a_0 d_0 - c_0^2)}{C_1^2} + 2b_2\right].$$

L'expression $\mathcal{A}$ est un invariant. On peut facilement en faire la vérification directe. On peut le voir aussi en remarquant que la seconde méthode d'obtenir la forme réduite eût fourni pour β_2 l'expression

$$\beta_2 = \mathcal{A}.$$

Or, on sait, d'une manière générale, qu'en déterminant les fonctions L et M par des équations différentielles linéaires homogènes et du premier ordre, les coefficients de la partie homogène du second degré de l'équation réduite sont des invariants absolus. On aura donc, l'indice 1 ayant la signification adoptée,

$$\frac{\mathcal{A}_1}{\alpha_0} = \frac{1}{\mu^2}\frac{\mathcal{A}}{a_0},$$

d'où

$$\mathcal{A}_1 = \mu^2 u^2 \mathcal{A}.$$

En raisonnant comme précédemment, on conclura que

$$\mathcal{B}_1 = \mu^2 u(\mathcal{A} v + \mathcal{B}).$$

On obtiendra une équation canonique en déterminant encore u et μ comme pour les équations réduites précédentes, mais en donnant à v la valeur qui annule $\mathcal{B}_1$.

Il est presque inutile d'ajouter qu'on peut même obtenir une équation canonique dont les coefficients seront des invariants algébriques. Les calculs précédents montrent assez clairement comment il faut déterminer pour cela les fonctions u, μ, v.

Si C_1 était nul, C_2 serait alors un invariant. En annulant $\alpha_0\delta_0 - \gamma_0^2$ on obtiendrait une valeur de v pouvant servir à obtenir une équation canonique. Enfin, lorsque C_1 et C_2 sont nuls à la fois, l'équation différentielle est décomposable en un produit de facteurs linéaires et n'est plus irréductible.

11. On traitera de la même manière les équations de la seconde classe pour lesquelles a_0 est nul, mais b_1 est différent de zéro. Ces équations sont de la forme

$$\begin{aligned} &a_2 y'^2 + a_4 y^2 + 2b_1 y'' y' + 2b_2 y'' y \\ &\quad + 2b_3 y' y + 2c_0 y'' + 2c_1 y' + 2c_2 y + d_0 = 0. \end{aligned}$$

Par le changement de fonctions et de variable

$$y = \eta u(x) + v(x), \qquad \frac{d\xi}{dx} = \mu(x),$$

cette équation devient

$$\begin{aligned} &\alpha_2 \eta'^2 + \alpha_4 \eta^2 + 2\beta_1 \eta'' \eta' + 2\beta_2 \eta'' \eta \\ &\quad + 2\beta_3 \eta' \eta + 2\gamma_0 \eta'' + 2\gamma_1 \eta' + 2\gamma_2 \eta + \delta_0 = 0, \end{aligned}$$

où, d'après les formules (5),

$$(9)\quad \left\{ \begin{aligned} \alpha_2 &= 2b_1 \mu u(u\mu' + 2\mu u') + a_2 \mu^2 u^2, \\ \alpha_4 &= a_2 u'^2 + a_4 u^2 + 2b_1 u'' u' + 2b_2 u'' u + 2b_3 u' u, \\ \beta_1 &= b_1 \mu^2 u^2, \\ \beta_2 &= (b_1 u' + b_2 u) \mu^2 u, \\ \beta_3 &= (u\mu' + 2\mu u')(b_1 u' + b_2 u) \\ &\quad + (b_1 u'' + a_2 u' + b_3 u) \mu u, \\ \gamma_0 &= (b_1 v' + b_2 v + c_0) \mu^2 u, \\ \gamma_1 &= (u\mu' + 2\mu u')(b_1 v' + b_2 v + c_0) \\ &\quad + (b_1 v'' + a_2 v' + b_3 v + c_1) \mu u, \\ \gamma_2 &= (b_1 u' + b_2 u) v'' + (b_1 u'' + a_2 u' + b_3 u) v' \\ &\quad + (b_2 u'' + b_3 u' + a_4 u) v + c_0 u'' + c_1 u' + c_2 u, \\ \delta_0 &= a_2 v'^2 + a_4 v^2 + 2b_1 v'' v' + 2b_2 v'' v \\ &\quad + 2b_3 v' v + 2c_0 v'' + 2c_1 v' + 2c_2 v + d_0. \end{aligned} \right.$$

Donnons aux fonctions u, μ, v les valeurs particulières U, M, V qui annulent les coefficients α_2, β_2 et γ_0, nous aurons

$$\frac{M'}{M}+\frac{2U'}{U}=-\frac{a_2}{2b_1},$$
$$\frac{U'}{U}=-\frac{b_2}{b_1},$$
$$V'=-\frac{b_2}{b_1}V-\frac{c_0}{b_1};$$

Y et X désignant la fonction et la variable correspondantes, on aura

$$y=YU+V,\qquad \frac{dX}{dx}=M.$$

Divisons tous les termes par la valeur du coefficient β_1, nous obtiendrons l'équation réduite

$$(8)\qquad HY^2+2Y''Y'+2LY'Y+2AY'+2BY+C=0.$$

Les invariants absolus H et L ont les valeurs

$$H=-\frac{D}{M^3b_1^3},\qquad L=\frac{E_4}{M^2b_1^2},$$

où

$$D=\begin{vmatrix} 0 & b_1 & b_2 \\ b_1 & a_2 & b_3 \\ b_2 & b_3 & a_4 \end{vmatrix},$$
$$E_4=b_2^2+b_2b_1'-b_1b_2'+b_1b_3-a_2b_2$$

(Appell, *loc. cit.*, p. 395).

On a ensuite

$$A=\frac{1}{U}\left(LV+\frac{\mathcal{A}}{M^2}\right),$$
$$B=\frac{1}{U}\left(HV+\frac{\mathcal{B}}{M^3}\right),$$
$$C=\frac{1}{U^2}\left(HV^2+\frac{2\mathcal{B}}{M^3}V+\frac{\mathcal{C}}{M^3}\right).$$

où

$$\mathcal{A} = \frac{c_0 b_2 - c_0 a_2 + b_1 c_1 + c_0 b'_1 - b_1 c'_0}{b_1^3},$$

$$\mathcal{B} = -\frac{\delta}{b_1^3}, \qquad \delta = \begin{vmatrix} 0 & b_1 & c_0 \\ b_1 & a_2 & c_1 \\ b_2 & b_3 & c_2 \end{vmatrix},$$

$$\mathcal{C} = \frac{\Delta}{b_1 D} - \frac{\delta^2}{b_1^3 D}, \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 0 & b_1 & b_2 & c_0 \\ b_1 & a_2 & b_3 & c_1 \\ b_2 & b_3 & a_1 & c_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 & d_0 \end{vmatrix}.$$

On prouverait, comme au n° 5, que l'on a

$$\mathcal{A}_1 = \frac{1}{\mu^2 u}\left(\mathcal{A} + \frac{E_4}{b_1^3}v\right),$$

$$\delta_1 = \mu^6 u^5 (\delta + Dv),$$

$$\mathcal{C}_1 = \frac{1}{\mu^3 u^2}\left(\mathcal{C} + 2\mathcal{B}v - \frac{D}{b_1^3}v^2\right).$$

De même l'expression

$$HA - LB = -\frac{1}{M^3 U}\left(\frac{D\mathcal{A} + b_1 E_4 \mathcal{B}}{b_1^3}\right)$$

est un invariant absolu.

L'expression $B^2 - HC$ donne l'égalité déjà connue

$$B^2 - HC = \frac{1}{M^6 U^2}\frac{\Delta}{b_1^3}.$$

En calculant les dérivées de A, B, C par rapport à X, on formera de nouvelles expressions invariantes telles que

$$L\frac{dA}{dX} - A\frac{dL}{dX}.$$

Les formules précédentes permettent donc d'obtenir une équation canonique.

Pour montrer les avantages que peut présenter l'équation réduite (8), nous allons chercher quelles relations doivent vérifier les coefficients pour que cette équation admette un facteur intégrant λ, fonction de la seule variable X. Appelons Φ le premier membre de (7). L'expression $\lambda\Phi$ doit être la dérivée exacte d'une fonction de la forme

$$G_2 Y'^2 + 2 G_3 Y' Y + G_4 Y^2 + 2 H_0 Y' + 2 H_1 Y + H_2.$$

En identifiant la dérivée de cette expression par rapport à X avec le produit $\lambda\Phi$, on trouve (Appell, *loc. cit.*, p. 397)

$$G_3 = 0, \qquad \frac{dG_2}{dX} = 0, \qquad G_2 = \lambda, \qquad H_0 = 0:$$

G_2 est donc constant ainsi que λ. On obtient aussi

$$H = \frac{dL}{dX}, \qquad B = \frac{dA}{dX}.$$

En supposant $\lambda = 1$, on trouve enfin

$$G_4 = L, \qquad H_1 = A, \qquad \frac{dH_2}{dX} = C.$$

La relation $B = \frac{dA}{dX}$, en tenant compte de $H = \frac{dL}{dX}$, exprime que les deux invariants absolus

$$HA - LB, \qquad A\frac{dL}{dX} - L\frac{dA}{dX}$$

sont égaux. La forme canonique devient

$$\frac{dL}{dX} Y^2 + 2 Y'' Y' + 2 L Y' Y + 2 A Y' + 2\frac{dA}{dX} Y + C = 0,$$

équation dont le premier membre est la dérivée de

$$Y'^2 + L Y^2 + 2 A Y + \int C\, dX.$$

12. Les équations de la première classe sont représentées par

$$
(10) \qquad \left\{ \begin{aligned} & a_2 y'^2 + a_4 y^2 + 2 b_2 y'' y + 2 b_3 y' y \\ & \qquad + 2 c_0 y'' + 2 c_1 y' + 2 c_2 y + d_0 = 0. \end{aligned} \right.
$$

Par le changement de fonction et de variable

$$
y = \eta u(x) + v(x), \qquad \frac{d\xi}{dx} = \mu(x),
$$

cette équation devient

$$
\alpha_2 \eta'^2 + \alpha_4 \eta^2 + 2\beta_2 \eta'' \eta + 2\beta_3 \eta' \eta + 2\gamma_0 \eta'' + 2\gamma_1 \eta' + 2\gamma_2 \eta + \delta_0 = 0,
$$

où

$$
\begin{aligned}
\alpha_2 &= a_2 \mu^2 u^2, \\
\beta_2 &= b_2 \mu^2 u^2, \\
\beta_3 &= (u\mu' + 2\mu u') b_2 u + (a_2 u' + b_3 u) \mu u, \\
\gamma_0 &= (b_2 v + c_0) \mu^2 u, \\
\gamma_1 &= (u\mu' + 2\mu u')(b_2 v + c_0) + (a_2 v' + b_3 v + c_1) \mu u. \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

On obtiendra une équation canonique en donnant à u, μ, v les valeurs particulières U, M, V qui annulent β_3 et γ_0 et qui rendent égaux les coefficients γ_1 et β_2. On a ainsi

$$
b_2 \left(\frac{M'}{M} + \frac{2U'}{U} \right) + a_2 \frac{U'}{U} + b_3 = 0,
$$

$$
V = -\frac{c_0}{b_2},
$$

$$
MU = \frac{a_2(c_0 b_2' - b_2 c_0') + b_2(c_1 b_2 - c_0 b_3)}{b_2^3}.
$$

En posant

$$
y = YU + V, \qquad \frac{dX}{dx} = M
$$

et en divisant tous les termes par la valeur du coefficient β_2, on a l'équation canonique

$$(11) \qquad AY'^2 + BY^2 + 2Y''Y + 2Y' + 2CY + D = 0.$$

A est l'invariant absolu suivant

$$A = \frac{a_2}{b_2}.$$

Quand cet invariant A est égal à -4, c'est-à-dire quand $a_2 + 4b_2 = 0$, l'intégrale générale peut être de la forme

$$Y = \frac{C_1 u_1 + C_2 u_2}{D_1 v_1 + D_2 v_2} + w_1,$$

où les fonctions u_1, u_2 sont linéairement indépendantes ainsi que v_1, v_2. Les constantes C_1, C_2, D_1, D_2 sont liées par une relation linéaire et homogène. Nous avons déjà résolu cette équation dans un cas particulier, celui où l'équation différentielle n'a pas de terme indépendant de Y. La fonction w_1 était alors nulle. Nous avons effectué cette résolution sans nous servir de forme canonique, en remarquant seulement que les deux équations

$$\varphi = -4b_2 y'^2 + a_4 y^2 + 2b_2 y'' y + 2b_3 y' y = 0,$$
$$\psi = 2(c_0 y'' + c_1 y' + c_2 y) = 0$$

doivent admettre une intégrale commune et que de plus l'expression

$$\psi \frac{d\varphi}{dx} - \varphi \frac{d\psi}{dx}$$

doit se décomposer en deux facteurs dont l'un, du troisième ordre, homogène et du second degré en y, y', y'', y''', doit fournir, en l'égalant à zéro, une équation différentielle dont l'intégrale générale est

$$(12) \qquad y = \frac{C_1 u_1 + C_2 u_2}{D_1 v_1 + D_2 v_2}$$

(Thèse, Chap. IV, p. 119).

Nous avons également trouvé (*ibid.*, p. 45) quelle relation devaient vérifier les invariants de cette équation homogène pour qu'il en soit ainsi. Remarquons, en passant, qu'on peut utiliser ici un procédé indiqué par M. Appell pour rendre une équation homogène par rapport à la fonction et à ses dérivées (*loc. cit.*, p. 388).

Soit λ un facteur constant et posons

$$y = \lambda z.$$

En éliminant λ entre l'équation transformée et sa dérivée par rapport à x, nous obtiendrons une équation homogène. Si l'on opère ainsi sur l'équation

$$\varphi + \psi = 0,$$

on aura à éliminer λ entre les deux équations

$$\varphi + \lambda\psi = 0,$$
$$\frac{d\varphi}{dx} + \lambda \frac{d\psi}{dx} = 0,$$

on obtient

$$\psi \frac{d\varphi}{dx} - \varphi \frac{d\psi}{dx} = 0. \tag{13}$$

Si l'équation du second ordre $\varphi + \psi = 0$ admet comme intégrale générale l'expression (12), où les constantes sont liées par une équation linéaire et homogène, l'équation (13) aura comme intégrale générale cette même expression où les constantes sont arbitraires. Or, de (12), par dérivation et par élimination des constantes, on tire une équation différentielle homogène du troisième ordre et du second degré; l'expression (13) étant du troisième degré doit se décomposer en un produit de deux facteurs. C'est ce que nous avions démontré d'une autre manière.

Dans le cas où d_0 n'est pas nul, si l'intégrale générale de l'équation est

$$y = \frac{C_1 u_1 + C_2 u_2}{D_1 v_1 + D_2 v_2} + w_1,$$

où les constantes C_1, C_2, D_1, D_2 sont liées par une relation linéaire et homogène, on sera ramené au cas précédent de la façon suivante. Si l'on effectue le changement de fonction et de variable

$$y = \eta u(x) + v(x), \qquad \frac{d\xi}{dx} = \mu(x),$$

on doit pouvoir déterminer u et v de façon à annuler α_1, γ_2 et δ_0. En déterminant μ de telle sorte que γ_1 soit aussi nul, on obtiendra une équation de la forme

$$2\beta_2(\eta''\eta - 2\eta'^2) + 2\beta_3\eta'\eta + 2\gamma_0\eta'' = 0.$$

On sait ensuite reconnaître si une telle équation a une intégrale générale de la forme (12) et la trouver quand elle existe (Thèse, p. 125).

Un autre type d'équations pour lesquelles l'invariant A est égal à -4, est celui dont l'intégrale générale est

$$(14) \qquad y = \frac{C_1 u_1 + C_2 u_2 + C_3 u_3}{C_1 v_1 + C_2 v_2}.$$

Cette expression ne renferme que deux constantes arbitraires $\frac{C_2}{C_1}$, $\frac{C_3}{C_1}$. De plus, on peut, sans nuire à la généralité, supposer $u_3 = 1$. Nous allons chercher quelles relations doivent vérifier les invariants de l'équation canonique dans ce cas. L'équation différentielle dont l'intégrale est (14) s'obtient en éliminant C_1, C_2, C_3 entre les trois équations suivantes :

$$C_1(v_1 y - u_1) + C_2(v_2 y - u_2) = C_3,$$
$$C_1[(v_1 y)' - u_1'] + C_2[(v_2 y)' - u_2'] = 0,$$
$$C_1[(v_1 y)'' - u_1''] + C_2[(v_2 y)'' - u_2''] = 0;$$

d'où

$$[(v_1 y)' - u_1'][(v_2 y)'' - u_2''] - [(v_2 y)' - u_2'][(v_1 y)'' - u_1''] = 0.$$

En développant, on trouve

$$\begin{aligned}2y'^2(v_1 v_2' - v_2 v_1') &+ y^2(v_1' v_2'' - v_2' v_1'') + y'' y(v_2 v_1' - v_1 v_2') \\ &+ y' y(v_1 v_2'' - v_2 v_1'') + y''(v_1 u_2' - v_2 u_1') \\ &+ y'[v_2 u_1'' - v_1 u_2'' + 2(v_1' u_2' - v_2' u_1')] \\ &+ y(v_2' u_1'' - v_1' u_2'' + u_2' v_1'' - u_1' v_2'') + u_1' u_2'' - u_2' u_1'' = 0.\end{aligned}$$

Identifions avec l'équation canonique (11), nous avons d'abord

$$A = -4;$$

puis

$$v_1 v_2'' - v_2 v_1'' = 0, \qquad v_1 u_2' - v_2 u_1' = 0,$$
$$v_2 v_1' - v_1 v_2' = v_2 u_1'' - v_1 u_2'' + 2(v_1' u_2' - v_2' u_1').$$

Cette dernière relation, en tenant compte de

$$v_1' u_2' - v_2' u_1' = v_2 u_1'' - v_1 u_2'',$$

se transforme en

$$v_2 v_1' - v_1 v_2' = 3 v_1' u_2' - v_2' u_1';$$

d'où, en résolvant les deux équations suivantes,

$$v_1 u_2' - v_2 u_1' = 0,$$
$$v_1' u_2' - v_2' u_1' = \frac{v_2 v_1' - v_1 v_2'}{3},$$

on tire

$$u_1' = \frac{v_1}{3}, \qquad u_2' = \frac{v_2}{3}.$$

Le reste de l'identification s'achève facilement et l'on trouve

$$C = 0, \qquad D = -\frac{2}{9}.$$

De plus, on peut considérer v_1 et v_2 comme solutions de l'équation

$$v'' = \alpha v,$$

en vertu de la relation $v_1 v_2'' - v_2 v_1'' = 0$. Alors on a

$$B = 2\alpha.$$

L'équation considérée sera donc intégrable quand on saura résoudre l'équation différentielle linéaire

$$2v'' - Bv = 0.$$

Car, si v_1 et v_2 sont deux intégrales particulières de cette équation linéairement indépendantes, on posera

$$u_1 = \frac{1}{3}\int v_1\,dX, \qquad u_2 = \frac{1}{3}\int v_2\,dX.$$

L'équation

$$-4Y'^2 + BY^2 + 2Y''Y + 2Y' - \frac{2}{9} = 0$$

a pour intégrale

$$Y = \frac{1}{3}\,\frac{C_1\int v_1\,dX + C_2\int v_2\,dX + C_3}{C_1 v_1 + C_2 v_2}.$$

En donnant à B la valeur 2, on obtient pour l'équation

$$-2Y'^2 + Y^2 + Y''Y + Y' - \frac{1}{9} = 0$$

l'intégrale

$$Y = \frac{1}{3}\,\frac{C_1 e^{X} + C_2 e^{-X} + C_3}{C_1 e^{X} - C_2 e^{-X}},$$

ce qui est facile à vérifier.

On obtient donc ce résultat remarquable. En posant

$$\frac{1}{Y} = 3\frac{u'}{u} \qquad \text{ou} \qquad u' = \frac{du}{dX},$$

l'équation transformée en u a pour intégrale générale

$$u = C_1\int v_1\,dX + C_2\int v_2\,dX + C_3.$$

Cette équation n'est donc autre que

$$2u''' - Bu' = 0.$$

Les équations considérées ont donc une certaine analogie avec l'équation de Riccati.

13. On pourrait ranger dans une dernière classe les équations du second ordre et du second degré de la forme

$$a_2 y'^2 + a_1 y^2 + 2b_3 y' y + 2c_0 y'' + 2c_1 y' + 2c_2 y + d_0 = 0.$$

On suppose alors c_0 différent de zéro, ce qui n'était pas nécessaire dans les cas précédents. En posant

$$y = \eta u(x) + v(x), \qquad \frac{d\xi}{dx} = \mu(x),$$

cette équation devient

$$\alpha_2 \eta'^2 + \alpha_1 \eta^2 + 2\beta_3 \eta' \eta + 2\gamma_0 \eta'' + 2\gamma_1 \eta' + 2\gamma_2 \eta + \delta_0 = 0,$$

où

$$\begin{aligned}
&\alpha_2 = a_2 \mu^2 u^2,\\
&\alpha_1 = a_2 u'^2 + a_1 u^2 + 2 b_3 u' u,\\
&\beta_3 = (a_2 u' + b_3 u)\mu u,\\
&\gamma_0 = c_0 \mu^2 u,\\
&\gamma_1 = c_0(u\mu' + 2\mu u') + (a_2 v' + b_3 v + c_1)\mu u,\\
&\gamma_2 = (a_2 u' + b_3 u)v' + (b_3 u' + a_1 u)v + c_0 u'' + c_1 u' + c_2 u.\\
&\delta_0 = a_2 v'^2 + a_1 v^2 + 2 b_3 v' v + 2 c_0 v'' + 2 c_1 v' + 2 c v + d_0.
\end{aligned}$$

Contentons-nous d'indiquer rapidement comment on pourra obtenir une équation canonique :

1° Si a_2 est différent de zéro, on annulera β_3, γ_1 et γ_2. Cela suppose encore $a_2 a_1 - b_3^2 \neq 0$. Si cette quantité était nulle, on obtiendrait une première équation réduite en annulant β_3 et γ_1, α_1 serait aussi nul. Puis on égalerait α_2 et γ_0^2. La valeur de δ_0 montrerait alors comment on pourrait former une équation canonique.

2° Soit $a_2 = 0$, mais b_3 différent de zéro. On annulera α_1 et γ_1, puis on égalera β_3 et γ_0.

3° Si b_3 était nul, on annulerait γ_1 et γ_2 et l'on égalerait α_1 et γ_0.

14. En résumé, pour obtenir une équation canonique, nous établissons certaines relations entre les coefficients de l'équation transformée par le changement de fonction et de variable,

$$y = \eta u(x) + v(x), \qquad \frac{d\xi}{dx} = \mu(x).$$

Ces relations fournissent, pour déterminer v, une équation du premier degré en v. Les fonctions u et μ ont été déterminées, soit par des équations différentielles linéaires, homogènes et du premier ordre, soit par des équations algébriques binômes. Dans le premier cas, les invariants absolus, coefficients de l'équation canonique, contiennent des exponentielles; dans le second, ce sont des fonctions algébriques des coefficients de l'équation différentielle et de leurs dérivées, telles que certaines de leurs puissances sont des fonctions rationnelles de ces coefficients.

Pour obtenir l'équation du premier degré fournissant la valeur de v, nous avons réduit l'équation proposée à la forme la plus simple possible. Nous avons considéré le plus simple des coefficients de cette équation réduite qui fût de la forme

$$M^p U^q (AV + B).$$

A était un invariant tel que l'on eût, suivant la notation adoptée,

$$A_1 = \mu^p u^{q+1} A.$$

Alors l'expression B_1 vérifie la relation

$$B_1 = \mu^p u^{q+1} (Av + B).$$

Nous avons déterminé v de façon à annuler B_1.

Dans d'autres cas, l'équation réduite ne nous a fourni, comme coefficient le plus simple, qu'une expression de la forme

$$M^p U^q (\mathcal{A} V' + \mathcal{B} V + \mathcal{C}),$$

$\mathcal{A}$ était encore un invariant tel que

$$\mathcal{A}_1 = \mu^p u^{q+1} \mathcal{A},$$

$\mathcal{B}_1$ vérifiait la relation

$$\mathcal{B}_1 = \mu^p u^{q+1} (\mathcal{A} u' + \mathcal{B} u).$$

Alors l'expression $\mathcal{C}_1$ jouissait de la propriété exprimée par

$$\mathcal{C}_1 = (\mathcal{A}v' + \mathcal{B}v + \mathcal{C}).$$

En donnant à v la valeur qui annule $\mathcal{C}_1$, on était ramené au cas précédent, c'est-à-dire au cas d'une équation réduite fournissant un coefficient de la forme

$$M^p U^q (AV + B).$$

Il y a tout lieu de croire que ces remarques constituent une loi générale applicable aux équations d'ordres et de degrés supérieurs. On pourrait donc, dans tous les cas, à l'aide d'équations réduites successives, déterminer une équation canonique dont les coefficients seraient des invariants absolus, soient transcendants, soient algébriques par rapport aux coefficients de l'équation différentielle considérée et à leurs dérivées.