JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

C.-J. DE LA VALLÉE-POUSSIN

Recherches sur la convergence des intégrales définies

Journal de mathématiques pures et appliquées 4e série, tome 8 (1892), p. 421-467.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1892_4_8__421_0>

Recherches sur la convergence des intégrales définies;

PAR M. C.-J. DE LA VALLÉE-POUSSIN,
Chargé de Cours à l'Université de Louvain.

PRÉLIMINAIRE.

Le présent Mémoire fait suite à celui que nous venons de publier dans les *Annales de la Société scientifique de Bruxelles : Sur les intégrales à limites infinies.*

Cette Société avait mis au concours la question suivante :

Donner une théorie rigoureuse de la différentiation sous le signe dans les intégrales définies, en assignant les conditions précises qui limitent la règle de Leibnitz, principalement dans le cas de limites infinies ou de fonctions passant par l'infini. Faire l'application de ces principes à quelques intégrales définies célèbres.

Nous avons montré que cette question se ramène à l'inversion des signes d'intégration dans les intégrales doubles, et nous avons donné, à ce sujet, des règles précises dans le cas où la fonction sous le signe est continue et la limite supérieure de l'intégrale infinie.

Les méthodes que nous avons appliquées dans cette hypothèse particulièrement simple, peuvent être généralisées et servir à résoudre le cas plus difficile où la fonction est discontinue. Néanmoins, cette généralisation n'est pas immédiate, une première tentative que nous avions faite pour y arriver ne nous avait pas conduit à des résultats définitifs. Qu'il nous soit donc permis d'exprimer notre vive gratitude à M. C. Jordan, membre de l'Institut de France, pour l'intérêt qu'il a pris à nos recherches et les conseils éclairés qu'il nous a donnés. En énonçant, sous des conditions précises, le théorème du n° **63**, cet éminent géomètre nous a ouvert la voie, et c'est par des généralisations successives, dans cette direction qui nous était donnée, que nous sommes arrivé à la conception du Mémoire actuel.

INTRODUCTION.

I. — Notions sur les ensembles.

1. Une collection de nombres, compris entre certaines limites, ou de points situés sur une droite, constitue ce que nous appelons un *ensemble*.

2. Supposons que l'ensemble E renferme un nombre infini d'éléments; on dira que le point x est un *point limite* de l'ensemble, si, quelque petit que soit α, il existe une infinité de points de l'ensemble dans l'intervalle $(x - \alpha, x + \alpha)$.

Les points limites de E forment eux-mêmes un ensemble E_1, que l'on appelle *ensemble dérivé* de E. Cet ensemble, à son tour, peut avoir un ensemble dérivé E^2, et ainsi de suite.

Si E n'a qu'un nombre limité d'ensembles dérivés successifs, il est de *première espèce*, et il est de *seconde espèce* dans le cas contraire.

3. Un ensemble de première espèce est de *l'ordre* n, s'il a n ensembles dérivés successifs; et un point limite est de l'ordre p, s'il appartient à l'ensemble E^p, sans appartenir aux ensembles dérivés suivants.

Soit E un ensemble de l'ordre m et E′ un ensemble de l'ordre

$n(n < m)$. L'ensemble des points qui appartiennent à la fois à E ou à E' est un nouvel ensemble $(E + E')$. On voit aisément que, si x est un point limite de l'ordre p pour E et de l'ordre q pour E', l'ordre de x dans l'ensemble $(E + E')$ est égal au plus grand des deux nombres p ou q. Donc, si $m > n$, l'ordre de l'ensemble $(E + E')$ sera m.

4. Les ensembles se partagent encore en deux classes à un autre point de vue et cette distinction est très importante.

Supposons que tous les points de l'ensemble soient compris dans l'intervalle (a, b), et divisons cet intervalle en un nombre indéfiniment croissant d'éléments qui tendent vers zéro. Si la somme de ceux qui renferment des points de l'ensemble tend vers zéro, nous dirons que l'ensemble est *résoluble* ou de longueur nulle; il sera *linéaire* ou *étendu* dans le cas contraire.

On reconnaît facilement que tout ensemble de première espèce est résoluble, mais la réciproque n'est pas vraie.

5. Au lieu de considérer des points sur une droite, on peut considérer un ensemble de points dans une aire donnée T. Il y a lieu d'étendre à ces nouveaux ensembles la distinction qui précède. Divisons l'aire T en un nombre indéfiniment croissant d'éléments qui tendent vers zéro dans tous les sens; si la somme de ceux qui renferment des points de l'ensemble tend vers zéro, l'ensemble sera dit *résoluble* ou d'aire nulle; il sera *étendu* dans le cas contraire.

II. — Rappel de quelques principes de la théorie des fonctions.

6. Lorsqu'une fonction y de x reste comprise entre deux nombres donnés, quand x varie dans un intervalle ab, on dit qu'elle est *limitée* dans cet intervalle. Elle est *illimitée*, dans le cas contraire.

Une fonction limitée dans un intervalle a, dans cet intervalle, une *limite supérieure* L et une *limite inférieure* l; la différence $L - l$ est l'*oscillation* de la fonction dans l'intervalle.

Si l'oscillation dans l'intervalle $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ tend vers zéro avec ε, la fonction est *continue* pour cette valeur de x. Dans le cas opposé, elle est discontinue, et la limite (nécessairement déterminée) de l'oscillation dans l'intervalle infiniment petit $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ s'appelle la *discontinuité* au point x. Si la fonction est illimitée dans l'intervalle $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ quel que soit ε, la discontinuité au point x est infinie.

7. Ces définitions s'étendent aisément à des fonctions de plusieurs variables. En particulier, pour une fonction de deux variables, on appellera *discontinuité* au point (x, y) la limite de l'oscillation de la fonction dans une aire infiniment petite décrite autour de ce point.

8. *Intégrales simples.* — Soit $f(x)$ une fonction limitée dans un intervalle ab; divisons cet intervalle en un nombre indéfiniment croissant de parties δ_i; désignons par L_i et l_i les limites supérieures et inférieures de $f(x)$ dans l'intervalle δ_i; on sait que les deux sommes

$$\Sigma L_i \delta_i, \quad \Sigma l_i \delta_i$$

tendront vers des limites déterminées et invariables quand tous les δ_i tendront vers zéro.

Si ces deux limites sont égales, leur valeur commune est aussi, par définition, celle de l'intégrale définie

$$\int_a^b f(x)\,dx;$$

on dit alors que $f(x)$ est *intégrable*.

Si ces deux limites de sommes sont différentes, la fonction $f(x)$ n'est pas intégrable, et l'expression

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

a une valeur indéterminée entre les deux limites précédentes.

La condition nécessaire et suffisante pour que $f(x)$ soit intégrable est que la somme des intervalles δ_i où l'oscillation de $f(x)$ est supérieure à un nombre donné tende vers zéro quand tous les intervalles tendent vers zéro.

Cette proposition équivaut à celle-ci :

Il faut et il suffit que l'ensemble des points où la discontinuité de $f(x)$ surpasse un nombre donné soit résoluble (4).

L'équivalence des deux énoncés est une conséquence évidente du théorème suivant :

Si, dans l'intervalle δ, $f(x)$ n'a que des discontinuités inférieures à η, on peut subdiviser δ en parties assez petites pour que, dans chacune d'elles, l'oscillation de f soit moindre que $\eta+\varepsilon$, ε étant aussi petit que l'on veut.

Intercalons, en effet, indéfiniment de nouveaux points de subdivision entre a et b; s'il restait toujours un ou plusieurs intervalles où l'oscillation de f surpassât $\eta+\varepsilon$, les limites du *premier vers la gauche* de ces intervalles convergeraient vers un point fixe (car la limite gauche serait nécessairement constante ou croissante), et en ce point la discontinuité serait supérieure à $\eta+\varepsilon$, ce qui est contre l'hypothèse.

9. *Intégrales doubles.* — Soit $f(x, y)$ une fonction de deux variables x et y dans une aire déterminée T; divisons cette aire en un nombre indéfiniment croissant d'éléments ω_i qui tendent vers zéro dans tous les sens, et soient L_i et l_i les limites supérieures ou inférieures de f dans l'élément ω_i; les deux sommes

$$\Sigma L_i\omega_i, \quad \Sigma l_i\omega_i$$

tendront vers des limites déterminées et invariables quand tous les ω_i tendront vers zéro. Si ces limites sont égales, leur valeur commune est celle de l'intégrale double

$$\mathbf{S}_{\mathrm{T}} f(x,y)\,d\mathrm{T} = \mathbf{S}_{\mathrm{T}} f(x,y)\,dx\,dy;$$

on dit alors que f est intégrable dans l'aire T.

La condition nécessaire et suffisante pour que f soit intégrable *dans l'aire* T *est que la somme de tous les éléments* ω_i, *où l'oscillation de f surpasse un nombre donné, tende vers zéro.*

Cette proposition équivaut encore à celle-ci :

Il faut et il suffit que l'ensemble des points de l'aire T *où la discontinuité de f surpasse un nombre donné soit résoluble* (5).

10. Soit T une aire limitée par un contour C. Pour plus de simplicité, admettons qu'une parallèle à l'axe des x ne puisse rencontrer le contour qu'en deux points, et que les abscisses x_1 et x_2 de ces deux points soient des fonctions continues de y dans l'intervalle cd (correspondant aux valeurs extrêmes de y dans l'aire T).

On peut démontrer que, si $f(x, y)$ est intégrable dans l'aire T, *l'intégrale*

$$\int_{x_1}^{x_2} f\,dx$$

sera une fonction intégrable de y et que l'on aura

$$\mathbf{S}_{\mathrm{T}} f(x,y)\,d\mathrm{T} = \int_c^d dy \int_{x_1}^{x_2} f\,dx.$$

[*Voir*, par exemple, P. du Bois-Reymond, *Math. Ann.*, t. XI; — Harnack, *Die Elemente der differential und Integral-Rechnung;* et tout récemment, C. Jordan, *Remarques sur les intégrales définies* (*Journal de Liouville*, 1892.)]

CHAPITRE I.

CONVERGENCE ABSOLUE.

I. — Convergence absolue des intégrales simples.

11. Jusqu'à présent, une intégrale définie n'a de signification que si la fonction sous le signe est limitée. Nous allons généraliser cette notion et l'étendre aux fonctions illimitées; mais il y a lieu de distinguer deux cas très différents suivant que l'intégrale est *absolument* ou n'est que *relativement* convergente : nous nous occuperons d'abord du premier.

12. Considérons un intervalle ab des valeurs de x et une fonction $f(x)$ intégrable dans toute portion de l'intervalle ab où elle est limitée. Appelons, pour abréger, *infini* tout point où la discontinuité (**6**) de f est infinie, et supposons que l'ensemble des infinis soit *résoluble* (**4**) dans l'intervalle ab.

13. Soient N_1 et N_2 deux nombres positifs quelconques; substituons à la fonction $f(x)$ la fonction *limitée* $f_n(x)$ définie par les relations

$$\begin{array}{lll} f_n = -N_1, & \text{pour} & f \leqq -N_1; \\ f_n = f, & \text{pour} & -N_1 < f < N_2; \\ f_n = N_2 & \text{pour} & f \geqq N_2. \end{array}$$

La fonction $f_n(x)$ n'aura de discontinuité supérieure à un nombre donné qu'en des points formant un ensemble résoluble, et comme elle est limitée, elle sera intégrable; si l'intégrale

$$\int_a^b f_n(x)\,dx$$

tend vers une limite déterminée, quand N_1 et N_2 tendent vers l'infini d'une manière quelconque, nous dirons que l'intégrale

$$\int_a^b f\,dx$$

est *absolument convergente* et a cette limite pour valeur.

Une intégrale absolument convergente jouit des propriétés que nous allons signaler.

14. I. *Si l'intégrale* $\int_a^b f\,dx$ *est absolument convergente, l'intégrale* $\int_a^b \operatorname{mod} f\,dx$ *l'est aussi.*

C'est ce qui résulte de ce que N_1 et N_2 (**13**) peuvent tendre successivement vers l'infini.

15. II. *Si l'on divise ab en intervalles indéfiniment décroissants par les points* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i, \ldots$, *une somme d'intégrales*

$$\sum \operatorname{mod} \int_{\alpha_i}^{\alpha_i+1} f\,dx,$$

prises dans un nombre quelconque (même indéfiniment croissant) d'intervalles arbitrairement choisis, tendra vers zéro, pourvu que la somme des intervalles tende vers zéro.

Prenons N_1 et N_2 assez grands pour qu'on ait

$$\int_a^b \operatorname{mod} f\,dx < \int_a^b \operatorname{mod} f_n\,dx + \varepsilon,$$

ce qui est possible d'après le numéro précédent; on aura *a fortiori*

$$\sum \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \operatorname{mod} f\,dx < \sum \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \operatorname{mod} f_n\,dx + \varepsilon;$$

et, comme la somme du second membre tend vers zéro,

$$\lim \sum \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \operatorname{mod} f\,dx < \varepsilon,$$

d'où l'on conclut

$$\lim \sum \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \operatorname{mod} f\, dx = 0.$$

III. *L'intégrale* $\int_a^x f\, dx$ *est une fonction continue de* x. (Cas particulier du théorème II.)

IV. *L'intégrale* $\int_a^x f\, dx$ *est une fonction à variation limitée dans l'intervalle ab.*

En effet, sa variation totale est égale à $\int_a^b \operatorname{mod} f\, dx$.

16. V. *Si l'on divise ab en intervalles indéfiniment décroissants par les points* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i, \ldots$, *la somme d'intégrales*

$$\sum \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} f\, dx$$

tendra vers l'intégrale prise entre a et b, pourvu que la somme des intervalles $(\alpha_{i+1} - \alpha_i)$ *tende vers* $(b - a)$.

Conséquence du théorème II.

En particulier, la somme des intégrales prises dans tous les intervalles où la fonction est limitée tendra vers l'intégrale prise entre a et b.

17. VI. *Réciproquement, si la somme*

$$\sum \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \operatorname{mod} f\, dx$$

n'augmente pas indéfiniment, quand la somme $\Sigma(\alpha_{i+1} - \alpha_i)$ *des intervalles correspondants tend vers* $(b - a)$, *l'intégrale sera absolument convergente.*

Soit en effet f_n (**13**) la fonction correspondant aux nombres N_1

et N_2; considérons un mode de subdivision de ab en intervalles assez petits, pour que la somme de ceux qui sont exclus de la somme Σ soit inférieure à $\frac{\varepsilon}{N_1+N_2}$; on aura

$$\int_a^b \operatorname{mod} f_n\,dx = \sum \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \operatorname{mod} f_n\,dx + \sum' \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} \operatorname{mod} f_n\,dx,$$

la somme Σ' s'étendant aux intervalles exclus de la somme Σ.

Mais on a

$$\sum \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \operatorname{mod} f_n\,dx \overline{\overline{<}} \sum \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \operatorname{mod} f\,dx,$$

$$\sum' \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} \operatorname{mod} f_n\,dx < (N_1+N_2)\frac{\varepsilon}{N_1+N_2} < \varepsilon$$

et, par conséquent,

$$\int_a^b \operatorname{mod} f_n\,dx < \sum \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \operatorname{mod} f\,dx + \varepsilon.$$

Le premier membre est constamment croissant avec N_1 et N_2, et, comme il ne peut croître indéfiniment, l'intégrale $\int_a^b f\,dx$ est absolument convergente.

18. VII. *Si l'ensemble des infinis est de première espèce* (**2**), *et si* $F(x)$ *est une fonction continue qui a* $f(x)$ *pour dérivée, pour toute valeur de* x *les infinis exceptés, dans l'intervalle* ab, *on aura la relation*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{1}$$

S'il n'y a qu'un nombre limité d'infinis $a_1, a_2, \ldots, a_n$, on a sans difficulté

$$\int_a^{a_1-\varepsilon} + \int_{a_1+\varepsilon}^{a_2-\varepsilon} + \ldots + \int_{a_n+\varepsilon}^{b} f\,dx$$
$$= F(b) - F(a) + \Sigma[F(a_i+\varepsilon) - F(a_i-\varepsilon)],$$

et F étant continue, la somme Σ tend vers zéro avec ε, ce qui entraîne le théorème.

S'il n'y a dans l'ensemble des infinis qu'un nombre déterminé de points limites du premier ordre $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i, \ldots$, nous venons de justifier l'équation

$$\int_a^{\alpha_1-\varepsilon} + \int_{\alpha_1+\varepsilon}^{\alpha_2-\varepsilon} + \ldots + \int_{\alpha_n+\varepsilon}^{b} f\,dx$$
$$= F(b) - F(a) + \Sigma[F(\alpha_i+\varepsilon) - F(\alpha_i-\varepsilon)].$$

La somme Σ tendant vers zéro avec ε, la démonstration s'étend à ce second cas, et ainsi de suite jusqu'aux points limites de l'ordre le plus élevé.

Mais si l'ensemble des infinis de f est de *deuxième espèce*, la continuité de F ne paraît plus suffisante pour justifier l'équation (1), et il faut, en outre, pouvoir démontrer que la somme des oscillations de F, dans autant d'intervalles que l'on veut, tend vers zéro, avec la somme de ces intervalles.

19. *Convergence dans le cas où la limite supérieure de l'intégrale est infinie.* — Dans ce cas, il faut encore définir l'intégrale. Si l'intégrale

$$\int_a^N \operatorname{mod} f\,dx$$

n'augmente pas indéfiniment avec N, elle tendra vers une limite déterminée quand N tendra vers l'infini, et il en sera de même pour l'intégrale

$$\int_a^N f\,dx.$$

La limite de cette expression est alors, par définition, la valeur de l'intégrale

$$\int_a^\infty f\,dx,$$

et celle-ci est *absolument convergente*.

II. — Convergence des intégrales doubles.

20. Soit $f(x, y)$ une fonction que nous supposerons *intégrable* dans toute portion de l'aire T où elle est limitée. Appelons encore, pour abréger, *infini* tout point où la discontinuité (7) de $f(x, y)$ est infinie, et supposons que l'ensemble de ces infinis soit *résoluble* (ou d'aire nulle) (5).

Soient N_1 et N_2 deux nombres positifs quelconques; posons

$$\begin{aligned} f_n &= -N_1, && \text{pour} \quad f < -N_1; \\ f_n &= \ \ f, && \text{pour} \quad -N_1 \leqq f \leqq N_2; \\ f_n &= \ \ N_2, && \text{pour} \quad f > N_2. \end{aligned}$$

Substituons à f la fonction *limitée* f_n; celle-ci sera intégrable dans l'aire T, car l'ensemble des points où la discontinuité surpasse un nombre donné sera résoluble; si l'intégrale

$$\mathbf{S}_{\mathrm{T}} f_n \, d\mathrm{T}$$

tend vers une limite déterminée quand N_1 et N_2 tendent vers l'infini d'une manière quelconque, nous dirons que l'intégrale double

$$\mathbf{S}_{\mathrm{T}} f \, d\mathrm{T}$$

existe et a cette limite pour valeur. Dans le cas contraire, nous n'accorderons, dans cette étude, aucun sens à l'intégrale double.

L'intégrale double, quand elle existe, jouit de propriétés importantes, analogues à celles que nous avons signalées pour les intégrales simples et qui se démontrent par la même voie : nous nous contenterons de les énoncer.

21. I. *Si l'intégrale* $\mathbf{S}_{\mathrm{T}} f\, d\mathrm{T}$ *existe, l'intégrale* $\mathbf{S}_{\mathrm{T}} \operatorname{mod} f\, d\mathrm{T}$ *existe aussi.*

22. II. *Si l'on divise l'aire* T *en un nombre indéfiniment croissant d'éléments* ω_i *qui décroissent indéfiniment dans tous les sens, une somme*

$$\sum \bmod \int_{\omega} f\, d\omega_i$$

d'intégrales prises dans un nombre quelconque (même indéfiniment croissant) d'éléments ω_i *tendra vers zéro, pourvu que la somme de ces éléments tende vers zéro.*

23. III. *Si l'on représente par* T′ *un domaine formé d'un nombre variable d'éléments* ω *de l'aire* T, *l'intégrale*

$$\int_{T'} f\, dT'$$

tendra vers l'intégrale prise dans l'aire T, *pourvu que* T′ *tende vers* T.

En particulier, si, pour un mode de subdivision donné, T′ comprend tous les éléments de T où f est limité, et si l'on fait tendre T′ vers T, l'intégrale prise dans le domaine T′ tendra vers l'intégrale prise dans l'aire T.

24. *Changement de variables.* — Effectuons sur x et y le changement de variables

$$x = \varphi(u, v), \qquad y = \psi(u, v),$$

et supposons que cette transformation établisse une correspondance uniforme entre les points d'une aire T dans le plan (x, y) et ceux d'une aire T′ dans le plan (u, v). Pour cela, le déterminant fonctionnel

$$J = \frac{d(x, y)}{d(u, v)}$$

sera fonction continue de u et de v et ne pourra s'annuler.

Cela posé, on sait que si $f(x, y)$ est fini et intégrable dans l'aire T, on a la formule de transformation

$$\mathsf{S}_{\mathrm{T}} f(x, y)\, dx\, dy = \mathsf{S}_{\mathrm{T}'} f(\varphi, \psi) \operatorname{mod} \mathrm{J}\, du\, dv.$$

Cette formule subsiste quand $f(x, y)$ est illimité, pourvu que l'intégrale double existe, car on a toujours sans difficulté

$$\mathsf{S}_{\mathrm{T}} f_n(x, y)\, dx\, dy = \mathsf{S}_{\mathrm{T}'} f_n(\varphi, \psi) \operatorname{mod} \mathrm{J}\, du\, dv,$$

et à la limite ces deux intégrales tendent par définition vers les deux intégrales dont nous voulons prouver l'égalité.

Cette méthode s'étend d'elle-même à des intégrales multiples quelconques et il est inutile de nous y arrêter.

25. *Convergence des intégrales doubles dans un champ qui s'étend à l'infini.* — Supposons que l'aire T s'étende à l'infini, et désignons par T′ un domaine limité mais variable qui embrasse successivement tous les points de l'aire T; si l'intégrale

$$\mathsf{S}_{\mathrm{T}'} f\, d\mathrm{T}'$$

tend encore vers une limite déterminée quand T′ tend vers T d'une manière quelconque, l'intégrale double

$$\mathsf{S}_{\mathrm{T}} f\, d\mathrm{T}$$

existera encore et aura, par définition, cette limite pour valeur.

D'après ce qui précède, on reconnaît aisément que la condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que l'intégrale

$$\mathsf{S}_{\mathrm{T}'} \operatorname{mod} f\, d\mathrm{T}'$$

n'augmente pas indéfiniment quand T′ tend vers T.

Si cela a lieu, les propriétés II et III qui précèdent subsisteront pour un champ infini; et il en sera de même des règles relatives aux changements de variables (**24**), pourvu que les conditions imposées à J soient vérifiées en tout point (x, y) de l'aire T (**24**).

III. — Convergence uniforme et convergence régulière. Réduction des intégrales doubles.

26. Considérons une aire T, limitée par un contour C. Supposons, pour simplifier, que ce contour ne soit rencontré qu'en deux points par une parallèle à l'axe des x ou à celui des y. Soient $x_1 = \varphi_1(y)$ et $x_2 = \varphi_2(y)$ les abscisses des points d'intersection du contour par une parallèle à l'axe des x, c et d les valeurs extrêmes de y dans l'aire T; de même, $y_1 = \psi_1(x)$, $y_2 = \psi_2(x)$ les ordonnées des points d'intersection du contour par une parallèle à l'axe des y, a et b les valeurs extrêmes de x dans l'aire T.

27. Soit $f(x,y)$ une fonction des variables x et y dans l'aire T; nous la supposons *intégrable* dans toute portion de l'aire où elle est limitée. Nous appelons encore *infini* de f tout point où la discontinuité de f est infinie (**7**), et nous supposons que l'ensemble des infinis est *résoluble* dans l'aire T (**5**).

28. Considérons l'intégrale

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f\,dx;$$

on peut l'envisager comme une fonction de y dans l'intervalle cd.

Soit ε un nombre donné; si, quelque petit que soit ε, on peut prendre N_1 et N_2 assez grands pour qu'on ait, f_n étant défini comme au n° **20**,

$$\int_{x_1}^{x} \operatorname{mod} f\,dx = \int_{x_1}^{x_2} \operatorname{mod} f_n\,dx + R,$$
$$R < \varepsilon,$$

quelle que soit la valeur de y dans l'intervalle cd, l'intégrale I sera *absolument* et *uniformément convergente* dans l'intervalle *cd*. Nous exprimerons ces deux choses, en disant simplement que l'intégrale

$$\int_{x_1}^{x_2} \operatorname{mod} f\, dx$$

est *équiconvergente* dans l'intervalle *cd* ou dans l'aire T.

29. Donnons-nous encore arbitrairement ε, si, quelque petit que soit ce nombre, on peut vérifier la condition

$$\int_{x_1}^{x_2} \operatorname{mod} f\, dx = \int_{x_1}^{x_2} \operatorname{mod} f_n\, dx + \mathrm{R},$$
$$\mathrm{R} < \varepsilon,$$

pour une valeur convenable de N_1 et de N_2 dans toute portion *déterminée* de l'intervalle *cd* qui ne renferme aucun point d'un ensemble *résoluble* E_ε (cet ensemble pouvant, en général, varier avec ε), l'intégrale

$$\mathrm{I} = \int_{x_1}^{x_2} \operatorname{mod} f\, dx$$

sera dite *régulièrement convergente* dans l'intervalle *cd* ou dans l'aire T.

En particulier, l'intégrale I sera régulièrement convergente, si elle est équiconvergente dans toute portion de l'intervalle *cd* qui ne renferme aucun point d'un ensemble déterminé et résoluble dans cet intervalle.

30. *Si, pour toute valeur de y, l'ensemble des infinis de f* (**27**) *est de première espèce dans l'intervalle $x_1 x_2$, la condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale*

$$\int_{x_1}^{x_2} \operatorname{mod} f\, dx$$

soit équiconvergente est que l'on puisse, ε étant donné, prendre δ

assez petit pour vérifier les inégalités

$$\int_{x-\delta}^{x} \operatorname{mod} f\, dx < \varepsilon, \qquad \int_{x}^{x+\delta} \operatorname{mod} f\, dx < \varepsilon,$$

pour tout point (x, y) *de l'aire* T. *En un point du contour, on ne tient compte que de l'intégrale qui est prise vers l'intérieur de l'aire.*

Cette condition est nécessaire, car si l'intégrale est équiconvergente, on peut prendre N_1 et N_2 assez grands pour avoir

$$\int_{x_1}^{x_2} \operatorname{mod} f\, dx < \int_{x_1}^{x_2} \operatorname{mod} f_n\, dx + \varepsilon,$$

et *a fortiori*

$$\int_{x-\delta}^{x} \operatorname{mod} f\, dx < \int_{x-\delta}^{x} \operatorname{mod} f_n\, dx + \varepsilon,$$

puis δ assez petit pour avoir

$$\int_{x-\delta}^{x} \operatorname{mod} f\, dx < 2\varepsilon.$$

On démontrerait de même que l'on peut vérifier la seconde inégalité

$$\int_{x}^{x+\delta} \operatorname{mod} f\, dx < 2\varepsilon.$$

Il reste à démontrer que cette condition est suffisante. Supposons d'abord que, pour chaque valeur de y, les infinis soient en nombre limité dans l'intervalle $x_1 x_2$. Tout point qui n'est pas un infini est nécessairement à distance finie d'un infini; par conséquent, on peut, dans notre hypothèse, assigner une limite supérieure au nombre d'infinis situés sur une même parallèle à l'axe des x, et l'on peut dès lors raisonner comme s'il ne pouvait y en avoir plus d'un. Faisons cette hypothèse; il est clair qu'en joignant successivement par une droite (s'ils sont séparés) tous les infinis consécutifs qui correspondent à des valeurs croissantes de y, on tracera une ligne continue qui contiendra tous les infinis et ne sera rencontrée qu'en un point par une parallèle à l'axe des x. Soit $x_0 = \varphi(y)$ l'équation de cette ligne; admettons pour simplifier que le point (x_0, y) soit toujours intérieur à T; on aura

$$\int_{x_1}^{x_2} \operatorname{mod} f\,dx = \int_{x_1}^{x_0-\delta} + \int_{x_0+\delta}^{x_2} \operatorname{mod} f\,dx + \mathrm{R},$$
$$\mathrm{R} < \varepsilon.$$

Mais, dans le second membre, f est une fonction limitée sous le signe d'intégration; on peut donc prendre N_1 et N_2 assez grands pour que l'on ait

$$\int_{x_1}^{x_0-\delta} + \int_{x_0+\delta}^{x_2} \operatorname{mod} f\,dx < \int_{x_1}^{x_0-\delta} + \int_{x_0+\delta}^{x_2} \operatorname{mod} f_n\,dx + \varepsilon,$$

et *a fortiori*

$$\int_{x_1}^{x_2} \operatorname{mod} f\,dx < \int_{x_1}^{x_2} \operatorname{mod} f_n\,dx + 2\varepsilon,$$

ce qu'il fallait établir.

S'il y a des valeurs de y auxquelles correspondent un nombre illimité d'infinis, on commencera par supposer que l'ensemble des infinis situés sur une même parallèle à l'axe des x ne puisse avoir qu'un nombre limité de points limites. On peut alors recommencer pour ceux-ci le raisonnement qui précède, et ainsi de suite.

31. Lemme. — *Si l'on peut prendre* N_1 *et* N_2 *assez grands pour vérifier, dans tout l'intervalle cd, les relations*

$$\int_{x_1}^{x_2} \operatorname{mod} f\,dx = \int_{x_1}^{x_2} \operatorname{mod} f_n\,dx + \mathrm{R},$$
$$\mathrm{R} < \alpha,$$

l'intégrale double $\mathbf{S}_{\mathrm{T}} f\,d\mathrm{T}$ *existera, et l'intégrale, déterminée ou non* (**8**),

$$\int_c^d dy \int_x^{x_2} f\,dx$$

sera comprise entre les limites

$$\mathbf{S}_{\mathrm{T}} f\,d\mathrm{T} \pm \alpha(d-c).$$

L'intégrale double existera, car on aura

$$\mathbf{S}_{\mathrm{T}} \operatorname{mod} f_n\,d\mathrm{T} = \int_c^d dy \int_{x_1}^{x_2} \operatorname{mod} f_n\,dx < (d-c)\max.\int_{x_1}^{x_2} \operatorname{mod} f\,dx,$$

et le premier membre, ne pouvant croître indéfiniment, tendra vers une limite déterminée quand N_1 et N_2 tendront vers l'infini. On a alors $(\operatorname{mod} \mathrm{R}' < \mathrm{R})$

$$\int_c^d dy \int_{x_1}^{x_2} f\,dx = \int_c^d dy \int_{x_1}^{x_2} f_n\,dx + \int_c^d \mathrm{R}'\,dy$$

et, en faisant tendre N_1 et N_2 vers l'infini,

$$\lim \int_c^d dy \int_{x_1}^{x_2} f_n\,dx = \mathbf{S}_{\mathrm{T}} f\,d\mathrm{T},$$

$$\lim \left[\operatorname{mod} \int_c^d \mathrm{R}'dy\right] < \lim \int_c^d \operatorname{mod} \mathrm{R}'dy < \alpha(d-c),$$

ce qu'il fallait prouver.

32. Théorème. — *Si l'intégrale*

$$\int_{x_1}^{x_2} \operatorname{mod} f(x,y)\,dx$$

est régulièrement convergente (**29**) *et représente une fonction limitée de y dans l'intervalle cd, l'intégrale double*

$$\mathbf{S}_{\mathrm{T}} f\,d\mathrm{T}$$

sera déterminée, en vertu du lemme précédent, et l'on aura

$$\mathbf{S}_{\mathrm{T}} f\,d\mathrm{T} = \int_c^d dy \int_{x_1}^{x_2} f\,dx.$$

Subdivisons l'intervalle cd en éléments indéfiniment décroissants et l'aire T en bandes correspondantes par des parallèles à l'axe des x d'ordonnées $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_i, \ldots$, et donnons-nous une valeur de ε; la somme

$$\sum \int_{\beta_i}^{\beta_{i+1}} dy \int_{x_1}^{x_2} f(x,y)\,dx$$

des intégrales prises dans tous les intervalles $\beta_i\beta_{i+1}$ qui ne contiennent aucun point de l'ensemble E_ε (**29**) est comprise, d'après le lemme précédent, entre les limites

$$\mathbf{S}_{T'} f\,dT' \pm \varepsilon(d-c),$$

le domaine T' étant formé de l'ensemble des bandes intérieures à T qui correspondent aux mêmes intervalles.

Mais, puisque l'intégrale $\int_{x_1}^{x_2} f\,dx$ est limitée, et que la somme des intervalles $\beta_i\beta_{i+1}$ tend vers $d-c$, les deux expressions

$$\lim \sum \int_{\beta_i}^{\beta_{i+1}} dy \int_{x_1}^{x_2} f\,dx, \qquad \int_c^d dy \int_{x_1}^{x_2} f\,dx$$

ont la même signification; d'autre part, puisque l'intégrale double existe,

$$\lim \mathbf{S}_{T'} f\,dT' = \mathbf{S}_T f\,dT;$$

donc l'intégrale

$$\int_c^d dy \int_{x_1}^{x_2} f\,dx$$

est comprise entre les limites

$$\mathbf{S}_T f\,dT \pm \varepsilon(d-c),$$

et comme ε est aussi petit que l'on veut, le théorème est démontré.

33. Théorème. — *Si l'intégrale*

$$\mathbf{S}_{\mathrm{T}} f\, d\mathrm{T}$$

a une valeur déterminée, et si l'intégrale

$$\int_{x_1}^{x_2} \operatorname{mod} f\, dx$$

est régulièrement convergente dans l'intervalle cd, l'intégrale simple

$$\int_c^d dy \int_{x_1}^{x_2} f\, dx$$

sera absolument convergente, et l'on aura

$$\int_c^d dy \int_{x_1}^{x_2} f\, dx = \mathbf{S}_{\mathrm{T}} f\, d\mathrm{T}.$$

Reprenons le mode de subdivision de l'intervalle cd et de l'aire T de la démonstration précédente; la somme

$$\sum \int_{\beta_i}^{\beta_{i+1}} dy \int_{x_1}^{x_2} f\, dx$$

des intégrales prises dans les intervalles où $\int_{x_1}^{x_2} \operatorname{mod} f\, dx$ est limitée est égale, comme nous venons de le voir, à l'intégrale double

$$\mathbf{S}_{\mathrm{T}'} f\, d\mathrm{T}',$$

le domaine T′ étant formé des bandes qui correspondent aux intervalles précédents dans l'intérieur de T.

Or on a aussi par le même théorème (32)

$$\sum \int_{\beta_i}^{\beta_{i+1}} dy \operatorname{mod} \int_{x_1}^{x_2} f\, dx \overline{\overline{<}} \sum \int_{\beta_i}^{\beta_{i+1}} dy \int_{x_1}^{x_2} \operatorname{mod} f\, dx = \mathbf{S}_{\mathrm{T}'} \operatorname{mod} f\, d\mathrm{T}'.$$

L'intégrale double existant par hypothèse, la somme du premier membre est limitée, et, par conséquent, l'intégrale

$$\int_c^d dy \int_{x_1}^{x_2} f\,dx$$

est absolument convergente (**17**).

Cette intégrale étant absolument convergente, et l'intégrale double existant, on aura (**16-23**)

$$\lim \sum \int_{\beta_i}^{\beta_{i+1}} dy \int_{x_1}^{x_2} f\,dx = \int_c^d dy \int_{x_1}^{x_2} f\,dx,$$

$$\lim \mathbf{S}_{T'} f\,dT' = \mathbf{S}_T f\,dT,$$

et, par conséquent,

$$\int_c^d dy \int_{x_1}^{x_2} f\,dx = \mathbf{S}_T f\,dT,$$

ce qu'il fallait prouver.

De là le théorème important :

34. Théorème. — *Les trois intégrales*

$$\int_c^d dy \int_{x_1}^{x_2} f\,dx, \quad \int_a^b dx \int_{y_1}^{y_2} f\,dy, \quad \mathbf{S}_T f\,dT$$

seront déterminées et égales, si les deux intégrales simples

$$\int_{x_1}^{x_2} \operatorname{mod} f\,dx, \quad \int_{y_1}^{y_2} \operatorname{mod} f\,dy$$

sont régulièrement convergentes et l'intégrale double déterminée dans l'aire T.

35. *Remarque.* — Les nos **24** et **34** contiennent tout ce qui est nécessaire pour le calcul et la transformation des intégrales doubles dans une aire déterminée.

VI. — Extension des théorèmes précédents au cas où l'aire s'étend a l'infini.

36. Deux cas principaux peuvent se présenter : l'aire T s'étend à l'infini dans le sens des x seulement, ou bien dans le sens des deux axes.

37. Traitons d'abord le premier cas et supposons pour simplifier que l'aire T, limitée par une parallèle à l'axe des $y : x = a$ et deux parallèles à l'axe des $x : y = c, y = d$, s'étende à l'infini dans le sens des x positifs.

Si le contour de l'aire était curviligne, on pourrait ramener le problème au précédent : on supposerait la fonction f nulle en dehors de l'aire T et l'on prendrait comme nouveau champ d'intégration une portion du plan contenant l'aire T et limitée par des parallèles aux axes.

38. L'intégrale $\int_a^\infty \operatorname{mod} f(x, y)\,dx$ sera dite *équiconvergente* dans l'intervalle cd, si l'intégrale

$$\int_a^N \operatorname{mod} f(x, y)\,dx$$

est équiconvergente pour toute valeur de N, et si, pour une valeur arbitrairement donnée de ε, on peut prendre N assez grand pour qu'on ait

$$\int_N^\infty \operatorname{mod} f\,dx < \varepsilon,$$

quelle que soit la valeur de y dans l'intervalle considéré.

39. Si l'intégrale

$$\int_a^N \operatorname{mod} f\,dx$$

est régulièrement convergente, quel que soit N ; et si, pour toute valeur arbitrairement donnée de ε, on peut vérifier la condition

$$\int_N^\infty \operatorname{mod} f\, dx < \varepsilon$$

pour une valeur convenable de N, dans toute portion déterminée de l'intervalle cd ne contenant aucun point d'un ensemble résoluble E_ε (dont la composition peut en général dépendre de ε), l'intégrale

$$\int_a^\infty \operatorname{mod} f\, dx$$

sera encore dite *régulièrement convergente* dans l'intervalle cd.

40. Théorème. — *Si l'intégrale*

$$\int_a^\infty \operatorname{mod} f\, dx$$

est régulièrement convergente dans l'intervalle cd *et représente une fonction limitée de* y *dans cet intervalle, l'intégrale double*

$$\mathbf{S}_T f\, dT$$

existe et l'on a

$$\mathbf{S}_T f\, dT = \int_c^d dy \int_a^\infty f\, dx.$$

La démonstration se fait comme aux n^{os} **31** et **32**.

41. Théorème. — *Si, en outre des conditions du théorème précédent, l'intégrale*

$$\int_c^d f\, dy$$

est régulièrement convergente dans un intervalle (a, N) *arbitraire, on aura*

$$\int_c^d dy \int_a^\infty f\, dx = \int_a^\infty dx \int_c^d f\, dy.$$

Soit T′ la portion de T limitée par la droite $x = \mathrm{N}$, on aura toujours (**33**)

$$\mathbf{S}_{\mathrm{T}'} f\, d\mathrm{T}' = \int_a^{\mathrm{N}} dx \int_c^d f\, dy,$$

et, en faisant tendre N vers l'infini,

$$\mathbf{S}_{\mathrm{T}} f\, d\mathrm{T} = \int_a^{\infty} dx \int_c^d f\, dy,$$

et c'est ce qu'il faut prouver si l'on se reporte au théorème précédent.

42. Théorème. — *Si l'intégrale double*

$$\mathbf{S}_{\mathrm{T}} f\, d\mathrm{T}$$

existe, et si l'intégrale simple

$$\int_a^{\infty} \operatorname{mod} f\, dx$$

est régulièrement convergente dans l'intervalle cd, l'intégrale

$$\int_c^d dy \int_a^{\infty} f\, dx$$

sera absolument convergente et l'on aura encore

$$\mathbf{S}_{\mathrm{T}} f\, d\mathrm{T} = \int_c^d dy \int_a^{\infty} f\, dx.$$

La démonstration se fait comme au n° **33**.

De là le théorème :

43. Théorème. — *Les trois intégrales*

$$\int_c^d dy \int_a^{\infty} f\, dx, \quad \int_a^{\infty} dx \int_c^d f\, dy, \quad \mathbf{S}_{\mathrm{T}} f\, d\mathrm{T}$$

seront déterminées et égales, si l'intégrale

$$\int_a^\infty \operatorname{mod} f\, dx$$

est régulièrement convergente dans l'intervalle cd, l'intégrale

$$\int_c^d \operatorname{mod} f\, dy$$

régulièrement convergente dans un intervalle arbitraire, et l'intégrale

$$\mathbf{S}_{\mathrm{T}} f\, d\mathrm{T}$$

déterminée.

44. Abordons maintenant le second cas, celui où l'aire T s'étend à l'infini dans le sens de chacun des axes. Nous pouvons nous borner à l'examen du cas où T est limité par des parallèles aux axes : $x = a$, $y = d$, et s'étend à l'infini dans l'angle des coordonnées positives.

45. Théorème. — *Si l'intégrale*

$$\int_a^\infty \operatorname{mod} f\, dx$$

est régulièrement convergente dans un intervalle arbitraire, et si l'intégrale

$$\mathbf{S}_{\mathrm{T}} f\, d\mathrm{T}$$

est déterminée, on aura

$$\int_c^\infty dy \int_a^\infty f\, dx = \mathbf{S}_{\mathrm{T}} f\, d\mathrm{T}.$$

Soit en effet T' une portion de T limitée par une parallèle à l'axe des x : $y = \mathrm{N}$, on aura toujours (**42**)

$$\int_c^{\mathrm{N}} dy \int_a^\infty f\, dx = \mathbf{S}_{\mathrm{T}'} f\, d\mathrm{T}',$$

et à la limite

$$\int_c^\infty dy \int_a^\infty f\,dx = \mathbf{S}_\mathrm{T} f\,d\mathrm{T}.$$

De là le théorème :

46. Théorème. — *Les trois intégrales*

$$\int_c^\infty dy \int_a^\infty f\,dx, \quad \int_a^\infty dx \int_c^\infty dy, \quad \mathbf{S}_\mathrm{T} f\,d\mathrm{T}$$

seront déterminées et égales, pourvu que l'intégrale double ait un sens et que les deux intégrales

$$\int_a^\infty \operatorname{mod} f\,dx, \quad \int_c^\infty \operatorname{mod} f\,dy$$

soient régulièrement convergentes dans des intervalles arbitraires.

47. Les théorèmes précédents, rapprochés de ce que nous avons dit au n° **25**, fournissent tout ce qui est nécessaire, en général, pour le calcul et la transformation des intégrales doubles dans une aire quelconque.

V. — Remarques au sujet de la théorie précédente.

48. Il résulte des théorèmes précédents, quand l'intégrale

$$\mathbf{S}_\mathrm{T} f(x, y)\,d\mathrm{T}$$

est déterminée, que si l'intégrale

$$\mathrm{I} = \int \operatorname{mod} f(x, y)\,dx$$

est *régulièrement convergente,* elle représente une fonction *intégrable* (vérifiant les conditions du n° **12**). Nous allons montrer que *réciproquement,* dans des cas très généraux, si la fonction I est intégrable (vérifie les conditions du n° **12**), l'intégrale

$$\int \operatorname{mod} f(x, y)\, dx$$

converge régulièrement.

Dans les énoncés des théorèmes précédents, on peut donc alors substituer le mot *intégrable* aux mots *régulièrement convergente*.

49. Considérons d'abord une aire limitée T. Supposons, pour simplifier l'écriture, que f soit positif et que la fonction f_n soit définie par les relations

$$f_n = f, \quad \text{pour } f < \mathrm{N};$$
$$f_n = \mathrm{N}, \quad \text{»} \quad f \geqq \mathrm{N}.$$

Nous supposerons que f vérifie une condition spéciale. Soit E_y l'ensemble (à une dimension) des points de T qui ont la même ordonnée y et pour lesquels la discontinuité de f surpasse un nombre donné α; soit, d'autre part, E″ l'ensemble des valeurs de y pour lesquelles E_y n'est pas résoluble; nous supposerons que E″ est résoluble quel que soit α.

50. Lemme. — *Étant donnée la fonction de y représentée par l'intégrale à limites finies*

$$\int_{x_1}^{x_2} f_n dy,$$

l'ensemble E′ des points où la discontinuité de cette fonction peut surpasser un nombre quelconque arbitrairement donné ε, quand N passe par toutes les valeurs possibles, est résoluble.

Soit L le maximum de $(x_2 - x_1)$; désignons par E_y l'ensemble des points dont l'ordonnée est y et pour lesquels la discontinuité de f surpasse $\frac{\varepsilon}{\mathrm{L}}$. L'ensemble E″ des valeurs de y, pour lesquelles E_y n'est pas résoluble, sera résoluble dans l'intervalle considéré (**49**). Le théorème sera donc démontré, si nous prouvons que E″ contient tous les points de E′.

Il suffit pour cela de démontrer que, dans tout intervalle des valeurs de y ne contenant aucun point de E'', on aura nécessairement

$$\operatorname{disc}\int_{x_1}^{x_2} f_n\,dx \overline{\overline{<}}\, \varepsilon.$$

Considérons donc un intervalle semblable. On peut écrire évidemment, quel que soit N,

$$\operatorname{disc}\int_{x_1}^{x_2} f_n\,dx \overline{\overline{<}} \int_{x_1}^{x_2} \operatorname{disc} f_n\,dx.$$

Or la discontinuité de f_n ne peut jamais surpasser celle de f, et, puisque par hypothèse l'ensemble E_y est résoluble dans l'intervalle $x_1 x_2$, on aura (sauf en des points d'un ensemble résoluble)

$$\operatorname{disc} f_n \overline{\overline{<}} \frac{\varepsilon}{L};$$

par conséquent, puisque la fonction $(\operatorname{disc} f_n)$ est limitée quel que soit N,

$$\int_{x_1}^{x_2} \operatorname{disc} f_n\,dx \overline{\overline{<}} L\,\frac{\varepsilon}{L} \overline{\overline{<}} \varepsilon,$$

et *a fortiori*

$$\operatorname{disc}\int_{x_1}^{x_2} f_n\,dx \overline{\overline{<}} \varepsilon,$$

ce qu'il fallait prouver.

51. Théorème. — *Si l'intégrale à limites finies* ($f > 0$)

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y)\,dx$$

n'est pas régulièrement convergente, I *n'est pas intégrable.*

Supposons que, pour une valeur donnée de t, l'ensemble E_t, défini au n° **29**, ne soit pas résoluble, nous allons en déduire que la fonction I de y n'est pas intégrable, c'est-à-dire que l'ensemble des points où la discontinuité de cette fonction est supérieure à un nombre donné n'est pas résoluble.

Soit E' l'ensemble des points où la discontinuité de la fonction

$$\int_{x_1}^{x_2} f_n(x, y)\, dx$$

peut surpasser le nombre $\frac{\varepsilon}{2}$ quand N passe par toutes les valeurs possibles; cet ensemble sera résoluble en vertu du lemme précédent. Supprimons de l'ensemble E_ε tous les points qui appartiennent à E', l'ensemble restant $(E_\varepsilon - E')$ ne sera pas résoluble. Pour établir le théorème, il suffit donc de montrer que, en un point quelconque β de ce dernier ensemble, la discontinuité de la fonction I est supérieure ou égale à $\frac{\varepsilon}{2}$.

Supposons, par impossible, qu'il n'en soit pas ainsi et qu'au point β la discontinuité de la fonction soit égale à

$$\frac{\varepsilon}{2} - \lambda;$$

on pourra prendre N assez grand pour qu'on ait au point déterminé β

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x, \beta)\, dx - \int_{x_1}^{x_2} f_n(x, \beta)\, dx < \frac{\lambda}{3};$$

ensuite (d'après la définition de la discontinuité), δ assez petit pour qu'on ait dans l'intervalle $(\beta - \delta, \beta + \delta)$

$$\text{mod}\left| \int_{x_1}^{x_2} f(x, y)\, dx - \int_{x_1}^{x_2} f(x, \beta)\, dx \right| < \left(\frac{\varepsilon}{2} - \lambda\right) + \frac{\lambda}{3},$$

$$\text{mod}\left| \int_{x_1}^{x_2} f_n(x, \beta)\, dx - \int_{x_1}^{x_2} f_n(x, y)\, dx \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\lambda}{3};$$

ajoutant les trois dernières inégalités, on aura dans tout l'intervalle $(\beta - \delta, \beta + \delta)$

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x, y)\, dx - \int_{x_1}^{x_2} f_n(x, y)\, dx < \varepsilon,$$

et, par conséquent, β ne serait pas un point de l'ensemble E_1, ce qui est contre l'hypothèse.

Pour étendre ce théorème au cas d'un champ infini, nous démontrerons encore le *lemme* suivant :

52. Soit l'intégrale en x

$$I = \int_a^\infty f(x,y)\,dx;$$

transformons-la dans une intégrale en z par la relation

$$x = \frac{ab}{b-z}, \qquad dx = \frac{ab}{(b-z)^2}\,dz,$$

on aura

$$I = ab\int_0^b \frac{f(x,y)}{(b-z)^2}\,dz.$$

Cela étant, *si l'intégrale en z est régulièrement convergente, l'intégrale en x l'est aussi.*

Posons, pour simplifier,

$$\frac{f(x,y)}{(b-z)^2} = \varphi(z,y),$$

et supposons que l'on puisse avoir dans un intervalle cd

$$\int_a^b \varphi(z,y)\,dz - \int_a^b \varphi_n(z,y)\,dz < \varepsilon :$$

1° On aura *a fortiori*, quel que soit δ,

$$\int_a^{b-\delta} \varphi(z,y)\,dz - \int_a^{b-\delta} \varphi_n(z,y)\,dz < \varepsilon;$$

donc, quel que soit P, on pourra avoir dans le même intervalle cd

$$(\alpha) \qquad \int_a^P f\,dx - \int_a^P f_n\,dx < \varepsilon;$$

2° D'autre part, on aura aussi

$$\int_{b-\delta}^{b} \varphi(z,y)\,dz < \int_{b-\delta}^{b} \varphi_n(z,y)\,dz + \varepsilon;$$

on peut prendre δ assez petit pour avoir

$$\int_{b-\delta}^{b} \varphi_n(z,y)\,dz < \varepsilon, \qquad \int_{b-\delta}^{b} \varphi\,dz < 2\varepsilon,$$

et, par conséquent, P assez grand pour avoir

$$(\beta) \qquad \int_{P}^{\infty} f\,dx < 2\varepsilon.$$

Si l'intégrale en z est régulièrement convergente, on pourra vérifier les conditions (α) et (β) dans tout intervalle ne renfermant aucun point d'un ensemble résoluble déterminé, et l'intégrale en x convergera régulièrement (**39**).

53. Théorème. — *Si l'intégrale*

$$\mathrm{I} = \int_{a}^{\infty} f\,dx$$

n'est pas régulièrement convergente, et si $\varphi(z,y)$ vérifie la condition imposée à f, I n'est pas intégrable dans l'intervalle correspondant.

Si I était intégrable, l'intégrale en z, du numéro précédent, serait régulièrement convergente (**51**) et, par conséquent, aussi l'intégrale en x.

L'analyse précédente conduit donc, dans les cas précisés, à la règle suivante :

54. *Quand $f(x,y)$ est toujours de même signe, pour pouvoir réduire une intégrale double à deux intégrales simples, il faut et il suffit que l'on soit conduit par là à un résultat déterminé.*

CHAPITRE II.

CONVERGENCE RELATIVE.

I. — Définition et propriétés des intégrales simples.

55. Soit encore $f(x)$ une fonction de x dans un intervalle ab; appelons *infini* tout point où la *discontinuité* de cette fonction est infinie; supposons l'ensemble des infinis *résoluble*, et la fonction $f(x)$ intégrable dans tout intervalle qui ne renferme aucun infini. Faisons abstraction des infinis aux environs desquels l'intégrale est absolument convergente; s'il y en a d'autres, ils seront en nombre limité ou illimité, et, dans ce dernier cas, nous devons supposer qu'ils forment un ensemble *de première espèce* (**2**).

56. Supposons d'abord que les infinis dont il vient d'être question soient en nombre limité, et soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ces infinis. Si les intégrales

$$\int_a^{a_1-\delta} f\,dx,\quad \int_{a_1+\varepsilon}^{a_2-\zeta} f\,dx,\quad \ldots,\quad \int_{a_n+\eta}^{b} f\,dx,$$

qui sont absolument convergentes, tendent vers des limites déterminées, quand $\delta, \varepsilon, \zeta, \ldots$ tendent vers zéro, ces limites sont par définition les valeurs des intégrales

$$\int_a^{a_1} f\,dx,\quad \int_{a_1}^{a_2} f\,dx,\quad \ldots,\quad \int_{a_n}^{b} f\,dx,$$

dont la somme est l'intégrale entre a et b. Nous dirons alors que ces intégrales sont relativement convergentes de l'ordre zéro.

La condition nécessaire et suffisante pour l'existence de ces limites s'exprime par les équations

$$\lim \int_{a_1-\delta}^{a_1-\delta'} f\,dx = 0,\qquad \lim \int_{a_1+\varepsilon'}^{a_1+\varepsilon} f\,dx = 0,\qquad \ldots,$$

où $\delta > \delta'$ et $\varepsilon > \varepsilon'$ tendent vers zéro d'une manière quelconque. Ces intégrales sont des intégrales singulières de l'ordre zéro.

Si l'ensemble des infinis où cesse la convergence absolue est du premier ordre, ses points limites $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ seront en nombre limité; si les intégrales

$$\int_a^{\alpha_1-\delta} f\,dx,\quad \int_{\alpha_1+\varepsilon}^{\alpha_2-\zeta} f\,dx,\quad \ldots,$$

qui sont relativement convergentes de l'ordre zéro, tendent vers des limites déterminées quand $\delta, \varepsilon, \zeta, \ldots$ tendent vers zéro, ces limites seront par définition les valeurs des intégrales

$$\int_a^{\alpha_1} f\,dx,\quad \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f\,dx,\quad \ldots,$$

dont la somme sera l'intégrale entre a et b, et ces intégrales seront relativement convergentes du premier ordre.

Les limites précédentes existeront si l'on a

$$\lim \int_{\alpha_1-\delta}^{\alpha_1-\delta'} f\,dx = 0,\qquad \lim \int_{\alpha_1+\varepsilon'}^{\alpha_1+\varepsilon} f\,dx = 0,\qquad \ldots,$$

$\delta > \delta'$ et $\varepsilon > \varepsilon'$ tendant vers zéro. Ces intégrales sont des intégrales singulières du premier ordre.

On raisonnerait de même s'il y avait un nombre limité de points limites du second ordre, et ainsi de suite, jusqu'aux points limites de l'ordre le plus élevé qui seront enfin en nombre limité.

Supposons donc, en général, que les infinis aux environs desquels cesse la convergence absolue forment un ensemble de l'ordre n. On voit, d'après ce qui précède, que la condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale de $f(x)\,dx$ soit relativement convergente de l'ordre n dans l'intervalle ab est celle-ci :

Les deux intégrales

$$\int_{x-\delta}^{x-\delta'} f\,dx,\quad \int_{x+\varepsilon'}^{x+\varepsilon} f\,dx$$

qui représentent successivement des intégrales singulières quelconques des ordres o, 1, 2, ..., n doivent avoir pour limite zéro, quand $\delta > \delta'$ et $\varepsilon > \varepsilon'$ tendent vers zéro.

De toutes les propriétés que nous avons reconnues aux intégrales absolument convergentes, seules les propriétés III et VII subsistent encore pour une intégrale relativement convergente d'un certain ordre.

57. I. *L'intégrale*

$$\int_a^x f(x)\,dx$$

est une fonction continue de x.

En effet, le théorème ne pourrait cesser d'être vrai que pour un infini aux environs duquel cesse la convergence absolue, mais alors l'intégrale

$$\int_{x-\delta}^{x+\varepsilon} f\,dx$$

est une intégrale singulière qui tend vers zéro avec ε et δ par hypothèse.

58. II. *Si l'ensemble de tous les infinis de $f(x)$ est de première espèce, et si la fonction continue $F(x)$ a $f(x)$ pour dérivée, pour toute valeur de x dans l'intervalle ab les infinis exceptés, on aura*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Même démonstration qu'au n° **18**.

II. — Convergence uniforme. Intégration sous le signe.

59. Reprenons les hypothèses du n° **26**. Le champ T est limité par les valeurs x_1 et x_2 de x dans l'intervalle cd de y ou pour les valeurs y_1 et y_2 de y dans l'intervalle ab de x. Nous appelons *infini* tout point de T où la discontinuité de $f(x, y)$ est infinie; nous supposons l'ensemble des infinis résoluble, et $f(x, y)$ intégrable dans toute aire qui ne renferme pas d'infinis.

Aux conditions générales qui précèdent nous devons joindre, dans le cas actuel, un certain nombre d'hypothèses plus particulières. En effet, lorsque les intégrales que l'on étudie ne sont convergentes que relativement, et, en général, quand on ne peut pas se fonder sur l'existence de l'intégrale double, la question de l'intégration sous le signe se complique sensiblement, et il paraît nécessaire pour arriver à une solution d'assigner des conditions restrictives à la répartition des infinis dans le champ que l'on considère.

60. Nous supposerons que les infinis sont distribués dans l'aire T de manière à vérifier l'une ou l'autre des conditions suivantes :

1° Les infinis (isolés ou non) sont répartis sur un nombre limité de lignes continues (lignes d'infinis) qui ne peuvent être rencontrées qu'en un nombre limité de points par une parallèle à l'axe des x ou à celui des y ou sont elles-mêmes parallèles aux axes. Les infinis peuvent être disséminés d'une manière quelconque sur ces lignes ou les remplir entièrement.

Si l'on peut vérifier les conditions ci-dessus dans une aire suffisamment petite autour d'un infini donné, nous dirons que cet infini est situé sur une *ligne du premier ordre*.

2° Tous les infinis qui ne sont pas situés sur des lignes du premier ordre sont répartis sur un nombre limité de lignes continues qui vérifient la même condition que les précédentes.

S'il en est ainsi dans une aire suffisamment petite autour d'un infini donné, nous dirons que cet infini est situé sur une *ligne du deuxième ordre*.

3° Les infinis qui ne sont pas situés sur des lignes du premier ou du deuxième ordre le sont sur des lignes du troisième, et ainsi de suite jusqu'à un ordre déterminé.

61. Cela posé, l'intégrale

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y)\,dx$$

sera dite *équiconvergente* dans l'intervalle cd ou dans l'aire T, si l'ensemble des infinis situés sur une parallèle à l'axe des x est toujours *de première espèce*, et si, quelque petit que soit ε, on peut prendre δ assez petit pour que l'on ait, pour cette valeur et toute valeur moindre de δ,

$$\operatorname{mod}\int_{x-\delta}^{x} f\,dx < \varepsilon, \qquad \operatorname{mod}\int_{x}^{x+\delta} f\,dx < \varepsilon,$$

quel que soit le point (x, y) dans l'aire T. Pour un point du contour, on ne doit tenir compte que de l'intégrale prise à l'intérieur de l'aire.

62. Si ces conditions peuvent se vérifier dans tout intervalle partiel des valeurs de y, ne renfermant pas des points $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_i, \ldots,$ dont l'ensemble est *de première espèce*, l'intégrale I sera *équiconvergente en général* dans l'intervalle *cd* ou l'aire T.

63. Théorème. — *Si les deux intégrales*

$$\int_{x_1}^{x_2} f\,dx, \qquad \int_{y_1}^{y_2} f\,dy$$

sont équiconvergentes dans l'aire T, *on aura*

$$\int_{c}^{d} dy\int_{x_1}^{x_2} f\,dx = \int_{a}^{b} dx\int_{y_1}^{y_2} f\,dy.$$

Supposons d'abord que tous les infinis soient répartis sur des lignes du premier ordre, qui ne soient pas parallèles aux axes.

Décomposons T en rectangles indéfiniment décroissants par deux systèmes de droites parallèles à chacun des axes et successivement intercalées; soit f_n une fonction égale à f dans tous les rectangles qui ne contiennent pas d'infinis ni de lignes d'infinis et à zéro dans les autres; on aura toujours

$$\int_{a}^{b} dx\int_{y_1}^{y_2} f_n\,dy = \int_{c}^{d} dy\int_{x_1}^{x_2} f_n\,dx.$$

D'après les hypothèses faites sur la distribution des infinis, le nombre d'intervalles où f_n diffère de f n'augmentera indéfiniment pour aucune valeur de x ou de y, et il viendra à la limite, ces intervalles tendant vers zéro,

$$\int_a^b dx \int_{y_1}^{y_2} f\,dy = \int_c^d dy \int_{x_1}^{x_2} f\,dx.$$

Supposons ensuite que tous les infinis non situés sur des lignes du premier ordre soient répartis sur des lignes du deuxième ordre non parallèles aux axes, et que l'ensemble des infinis situés sur une parallèle quelconque à l'un des axes soit au plus du premier ordre (3).

Décomposons encore T en rectangles indéfiniment décroissants, et soit f_n une fonction égale à zéro dans tous les rectangles où il y a une ligne du deuxième ordre ou bien un infini non isolé sur une parallèle à l'un des axes, et égale à f dans les autres; nous venons de prouver que l'on aura toujours

$$\int_a^b dx \int_{y_1}^{y_2} f_n\,dy = \int_c^d dy \int_{x_1}^{x_2} f_n\,dx.$$

D'après l'hypothèse faite sur la distribution des infinis, le nombre d'intervalles où f_n diffère de f n'augmentera indéfiniment pour aucune valeur de x ou de y, et il viendra à la limite

$$\int_a^b dx \int_{y_1}^{y_2} f\,dy = \int_c^d dy \int_{x_1}^{x_2} f\,dx,$$

et ainsi de suite.

64. Théorème. — *Si l'intégrale par rapport à x*

$$\int_{x_1}^{x_2} f\,dx$$

est équiconvergente en général, et l'intégrale par rapport à y

$$\int_{y_1}^{y_2} f\,dy$$

équiconvergente dans l'aire T, *on aura encore*

$$\int_a^b dx \int_{y_1}^{y_2} f\,dy = \int_c^d dy \int_{x_1}^{x_2} f\,dx.$$

Si l'équiconvergence ne cesse que pour un nombre limité de points, on peut raisonner comme s'il n'y en avait qu'un seul : $y=\beta$; on aura, en vertu du théorème précédent, ε et δ étant des constantes infiniment petites,

$$\int_a^b dx\left(\int_{y_1}^{\beta-\varepsilon}+\int_{\beta+\delta}^{y_2} f\,dy\right)=\int_c^{\beta-\varepsilon}+\int_{\beta+\delta}^{d} dy\int_{x_1}^{x_2} f\,dx.$$

L'intégrale par rapport à y étant équiconvergente, on aura

$$\lim_{\delta=0,\ \varepsilon=0}\int_a^b dx\left(\int_{y_1}^{\beta-\varepsilon}+\int_{\beta+\delta}^{y_2} f\,dy\right)=\int_a dx\int_{y_1}^{y_2} f\,dy.$$

D'autre part, on a par définition

$$\lim_{\varepsilon=0}\int_c^{\beta-\varepsilon}+\lim_{\delta=0}\int_{\beta+\delta}^{d} dy\int_{x_1}^{x_2} f\,dx=\int_c^d dy\int_{x_1}^{x_2} f\,dx;$$

donc, en définitive,

$$\int_a^b dx\int_{y_1}^{y_2} f\,dy=\int_c^d dy\int_{x_1}^{x_2} f\,dx.$$

La démonstration s'étend aisément de proche en proche aux autres cas.

65. Afin de généraliser encore cette méthode, supposons, pour plus de simplicité, que l'aire T soit rectangulaire et limitée par les abscisses a et b, les ordonnées c et d.

Théorème. — *Si les deux intégrales*

$$\int_a^b f\,dx,\qquad \int_c^d f\,dy$$

sont équiconvergentes en général, et l'une au moins des deux intégrales

$$\int_c^d dy\int_a^x f\,dx,\qquad \int_a^b dx\int_c^y f\,dy$$

équiconvergente dans l'aire T, *on aura encore*

$$\int_c^d dy\int_a^b f\,dx=\int_a^b dx\int_c^d f\,dy.$$

Supposons que l'intégrale

$$\int_a^b dx \int_c^y f\,dy$$

soit équiconvergente.

Tout subsiste dans la démonstration du théorème précédent si l'on peut encore justifier la relation

$$\lim_{\delta=0,\ \varepsilon=0} \int_a^b dx \left(\int_c^{\beta-\varepsilon} + \int_{\beta+\delta}^d f\,dy \right) = \int_a^b dx \int_c^d f\,dy.$$

C'est ce qui aura lieu, si l'intégrale

$$\int_a^b dx \int_c^y f\,dy$$

est fonction continue de y : elle le sera par hypothèse, comme le prouve le théorème suivant :

66. *Si l'intégrale*

$$\int_c^d f\,dy$$

est équiconvergente en général dans l'intervalle ab, et l'intégrale

$$\int_a^b dx \int_c^y f\,dy$$

équiconvergente dans l'intervalle cd, celle-ci sera fonction continue de y.

On peut raisonner comme si l'équiconvergence de la première intégrale ne cessait que pour un point unique : $x = \alpha$. On aura

$$\int_a^b dx \int_c^y f\,dy = \int_a^{\alpha-\varepsilon} + \int_{\alpha+\varepsilon}^b dx \int_c^y f\,dy + \mathrm{R};$$

R est aussi petit que l'on veut avec ε, par hypothèse ; les deux intégrales du second membre sont fonctions continues de y quel que soit ε, puisque $\int_c^y f\,dy$ est, par définition de l'équiconvergence, une fonction uniformément continue de y sous le signe d'intégration. Donc l'intégrale du premier membre est une fonction continue de y.

III. — Extension au cas ou l'aire T s'étend a l'infini dans un sens.

67. Il y a deux cas à distinguer; l'aire T ne s'étend à l'infini que dans le sens de l'axe des x; elle s'étend à l'infini dans le sens des deux axes.

68. Occupons-nous d'abord du premier cas. Supposons, pour simplifier, que l'aire T limitée par une parallèle à l'axe des y : $x = a$ et deux parallèles à l'axe des x : $y = c$, $y = d$ s'étende indéfiniment dans le sens des x positifs.

Le cas où le contour de T serait curviligne peut se ramener au précédent comme nous l'avons indiqué (**37**).

69. *Définitions.* — L'intégrale

$$I = \int_a^\infty f\,dx$$

sera *équiconvergente dans l'intervalle cd*, si l'intégrale

$$\int_a^N f\,dx$$

est équiconvergente pour toute valeur de N et si l'on peut prendre, ε étant donné, N assez grand, pour avoir dans tout l'intervalle *cd*

$$\operatorname{mod} \int_N^\infty f\,dx < \varepsilon$$

pour cette valeur et toute valeur supérieure de N.

Si, quelque grand que soit d, on peut vérifier ces conditions, l'intégrale est *équiconvergente dans un intervalle arbitraire.*

Elle le sera *dans un intervalle illimité* si l'on peut vérifier ces conditions pour toute valeur de y supérieure à c.

Si l'intégrale est équiconvergente dans toute portion de l'intervalle cd qui ne renferme aucun point d'un certain ensemble de première espèce, elle sera *équiconvergente en général* dans l'intervalle cd.

70. Théorème. — *Si les deux intégrales*

$$\int_c^d f\,dy, \qquad \int_a^\infty f\,dx$$

sont équiconvergentes, la première dans un intervalle arbitraire et la seconde dans l'intervalle cd, on aura

$$\int_c^d dy \int_a^\infty f\,dx = \int_a^\infty dx \int_c^d f\,dy.$$

En effet, on aura toujours (**63**)

$$\int_c^d dy \int_a^{\mathrm{X}} f\,dx = \int_a^{\mathrm{X}} dx \int_c^d f\,dy,$$

et à la limite

$$\int_c^d dy \int_a^\infty f\,dx = \int_a^\infty dx \int_c^d f\,dy.$$

71. Théorème. — *La conclusion précédente subsiste quand*

$$\int_a^\infty f\,dx$$

n'est équiconvergente qu'en général, pourvu que l'intégrale

$$\int_a^\infty dx \int_c^y f\,dy$$

soit équiconvergente dans l'intervalle cd.

D'après ce qui précède, on accorde aisément que l'on peut raisonner comme si l'équiconvergence de la première intégrale ne cessait qu'à la limite supérieure de l'intervalle. Le théorème précédent nous donne alors

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_c^{d-\varepsilon} dy \int_a^{\infty} f\,dx = \lim_{\varepsilon=0} \int_a^{\infty} dx \int_c^{d-\varepsilon} f\,dy;$$

le théorème sera démontré si l'intégrale

$$\int_a^{\infty} dx \int_c^{y} f\,dy$$

est fonction continue de y dans l'intervalle cd. C'est ce qu'établit la proposition suivante :

72. Théorème. — *Si l'intégrale*

$$\int^{d} f\,dy$$

est équiconvergente en général dans un intervalle arbitraire, et l'intégrale

$$\int_a^{x} dx \int_c^{y} f\,dy$$

équiconvergente dans l'intervalle cd, cette dernière sera fonction continue de y.

On peut écrire, en effet,

$$\int_a^{\infty} dx \int_c^{y} f\,dx = \int_a^{X} dx \int_c^{y} f\,dy + \mathrm{R},$$

R étant aussi petit que l'on veut et l'intégrale qui précède fonction continue de y (**66**); on en conclut le théorème.

IV. — Extension au cas où l'aire T s'étend a l'infini dans tous les sens.

73. Nous pouvons nous borner au cas où T est borné par des parallèles aux axes : $x = a$, $y = c$, et s'étend indéfiniment dans l'angle des coordonnées positives.

74. Nous nous appuierons sur un lemme que nous allons d'abord démontrer :

Lemme. — *Si l'intégrale*

$$I = \int_a^\infty f(x, y)\,dx$$

est équiconvergente dans un intervalle illimité, et si, y tendant vers l'infini, $f(x, y)$ converge uniformément vers une limite déterminée $f(x, \infty)$ dans un intervalle arbitraire, on aura

$$\lim_{y=\infty} \int_a^\infty f\,dx = \int_a^\infty f(x, \infty)\,dx.$$

On a, en effet, quel que soit y, pour une valeur suffisamment grande de N,

$$I = \int_a^N f(x, y)\,dx + R, \qquad \operatorname{mod} R < \varepsilon;$$

si l'on fait tendre y d'abord, et N ensuite, vers l'infini, on aura successivement

$$\lim I = \int_a^N f(x, \infty)\,dx + R', \qquad \operatorname{mod} R' < \varepsilon,$$

$$\lim I = \int_a^\infty f(x, \infty)\,dx.$$

75. *Remarque.* — En particulier, si $f(x, y)$ est une intégrale définie

$$\int_c^y F(x, y)\,dy,$$

on aura, sous les conditions précédentes,

$$\lim_{y=\infty} \int_a^\infty dx \int_c^y F\,dy = \int_a^\infty dx \int_c^\infty F\,dy.$$

76. Théorème. — *Si l'intégrale $\int_a^\infty f\,dx$ est équiconvergente* *dans un intervalle arbitraire,* $\int_c^{\infty} f\,dy$ *équiconvergente en général dans un intervalle arbitraire, et*

$$\int_a^{\infty} dx \int_c^{y} f\,dy$$

équiconvergente dans un intervalle illimité, on aura

$$\int_c^{\infty} dy \int_a^{\infty} f\,dx = \int_a^{\infty} dx \int_c^{\infty} f\,dy.$$

On a, en effet (**70**),

$$\int_c^{\infty} dy \int_a^{\infty} f\,dx = \lim_{N=\infty} \int_c^{N} dy \int_a^{\infty} f\,dx = \lim \int_a^{\infty} dx \int_c^{N} f\,dy,$$

et, par la remarque qui précède (**75**),

$$\int_c^{\infty} dy \int_a^{\infty} f\,dx = \int_a^{\infty} dx \int_c^{\infty} f\,dy.$$

77. Théorème. — *Si les intégrales*

$$\int_a^{\infty} f\,dx, \qquad \int_c^{\infty} f\,dy$$

sont équiconvergentes en général dans des intervalles arbitraires, les intégrales

$$\int_c^{\infty} dy \int_a^{x} f\,dx, \qquad \int_a^{\infty} dx \int_c^{y} f\,dy$$

équiconvergentes dans des intervalles illimités, et l'une des deux intégrales

$$\int_c^{\infty} dy \int_a^{\infty} f\,dx, \qquad \int_a^{\infty} dx \int_c^{\infty} f\,dy$$

déterminée, la seconde sera aussi déterminée et égale à la première.

Supposons que l'intégrale

$$\int_a^\infty dx \int_c^\infty f\,dy$$

soit déterminée, l'intégrale

$$\int_a^\infty dx \int_y^\infty f\,dy = \int_a^\infty dx \int_c^\infty f\,dy - \int_a^\infty dx \int_c^y f\,dy$$

sera par hypothèse équiconvergente dans un intervalle illimité; on aura donc pour N assez grand

$$\int_a^\infty dx \int_y^\infty f(x, y)\,dy = \int_a^N dx \int_y^\infty f(x, y)\,dy + \mathrm{R}, \qquad \mathrm{mod}\,\mathrm{R} < \varepsilon.$$

On a d'autre part (**71**)

$$\int_a^N dx \int_y^\infty f(x, y)\,dy = \int_y^\infty dy \int_a^N f(x, y)\,dx.$$

et l'on peut supposer y assez grand pour que l'on ait

$$\mathrm{mod} \int_y^\infty dy \int_a^N f(x, y)\,dx < \varepsilon,$$

ce qui entraîne

$$\mathrm{mod} \int_a^\infty dx \int_y^\infty f(x, y)\,dy < 2\varepsilon$$

et, par conséquent,

$$\lim_{y=\infty} \int_a^\infty dx \int_y^\infty f(x, y)\,dy = 0.$$

Mais on peut écrire

$$\begin{aligned}
&\int_c^\infty dy \int_a^\infty f(x,y)\,dx \\
&\quad = \lim_{y=\infty} \int_a^\infty dx \int_c^y f(x,y)\,dy \\
&\quad = \int_a^\infty dx \int_c^\infty f(x,y)\,dy - \lim_{y=\infty} \int_a^\infty dx \int_y^\infty f(x,y)\,dy \\
&\quad = \int_a^\infty dx \int_c^\infty f\,dy,
\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

Ces derniers théorèmes ne sont que la reproduction, avec un sens plus général, de ceux que nous avons démontrés dans le Mémoire présenté à la Société scientifique de Bruxelles. C'est pourquoi nous avons abrégé ici les démonstrations.