

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ÉMILE PICARD

**Sur l'application des méthodes d'approximations successives à
l'étude de certaines équations différentielles ordinaires**

Journal de mathématiques pures et appliquées 4^e série, tome 9 (1893), p. 217-271.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1893_4_9_217_0

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

*Sur l'application des méthodes d'approximations successives
à l'étude de certaines équations différentielles ordinaires ;*

PAR M. ÉMILE PICARD.

Dans le cinquième Chapitre d'un Mémoire sur les équations aux dérivées partielles ⁽¹⁾, j'ai rapidement indiqué comment certaines méthodes d'approximations successives pouvaient être employées dans l'étude de quelques équations différentielles ordinaires. Il m'a paru intéressant d'appliquer les mêmes principes à l'étude de quelques autres classes d'équations différentielles ; c'est ce que je me propose de faire dans ce Mémoire. Les méthodes d'approximation dont nous faisons usage sont théoriquement susceptibles de s'appliquer à toute équation, mais elles ne deviennent vraiment intéressantes *pour l'étude des propriétés des fonctions définies par les équations différentielles* que si l'on ne reste pas dans les généralités et si l'on envisage certaines classes d'équations. Le champ où l'approximation converge est alors susceptible d'être agrandi ; on verra même des exemples où les approximations seront convergentes pour toute valeur réelle de la variable indépendante. Bien des précautions d'ailleurs sont à prendre dans ces questions délicates ; par cela même que les approximations convergent, on n'est pas assuré qu'elles convergent vers le système cherché d'intégrales dont on fait l'étude.

(1) *Mémoire sur la théorie des équations aux dérivées partielles et la méthode des approximations successives* (*Journal de Mathématiques*, 1890).

La plus grande partie de ce travail est consacrée à une méthode d'approximations permettant d'obtenir les intégrales d'un système de n équations du second ordre, ces intégrales ayant des valeurs données pour deux valeurs de la variable. Pour des classes assez étendues d'équations, le champ d'application de la méthode est beaucoup plus étendu qu'on pourrait le croire tout d'abord; il est même des équations pour lesquelles on peut ainsi faire l'étude complète des intégrales. Parmi les applications, je citerai la démonstration, pour certaines équations, de solutions périodiques. On pourrait étendre ces applications; je n'ai voulu indiquer, dans ce travail, que quelques exemples, afin de ne pas rester uniquement dans les généralités. Je compte revenir plus tard sur quelques problèmes de Mécanique qui me paraissent pouvoir être traités par cette voie (1).

CHAPITRE I.

GÉNÉRALITÉS.

I. — PREMIÈRE MÉTHODE D'APPROXIMATIONS.

1. Je ne ferai que rappeler la première méthode d'approximations que j'ai développée ailleurs en détail (*voir*, en particulier, le second Volume de mon *Traité d'Analyse*, p. 301). Considérons le système d'équations

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_m),$$

$$\frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_m),$$

.....

$$\frac{dy_m}{dx} = f_m(x, y_1, y_2, \dots, y_m).$$

(1) J'ai donné un résumé de ce Mémoire (*Comptes rendus*, t. CXV, p. 543).

On suppose que les fonctions f soient définies, x restant dans l'intervalle $(x^0 - a, x^0 + a)$ et y_i restant dans l'intervalle $(y_i^0 - b, y_i^0 + b)$ pour $i = 1, 2, \dots, m$, et soit M la valeur absolue maxima des fonctions dans ces intervalles.

De plus, les fonctions f sont telles que

$$|f_i(x, y'_1, y'_2, \dots, y'_m) - f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_m)| < \alpha |y'_1 - y_1| + \beta |y'_2 - y_2| + \dots + \lambda |y'_m - y_m|,$$

α, \dots, λ étant des constantes positives.

Dans ces conditions, nous obtenons un système d'intégrales prenant pour x^0 les valeurs $y_1^0, y_2^0, \dots, y_m^0$ et déterminées dans l'intervalle $(x_0 - h, x_0 + h)$, en désignant par h la plus petite des trois quantités

$$(\alpha) \quad a, \quad \frac{b}{M}, \quad \frac{1}{\alpha + \beta + \dots + \lambda}.$$

2. On peut, du résultat précédent, déduire une conséquence applicable à une classe très étendue d'équations. Reprenant le système précédent, nous admettons maintenant que les fonctions f soient finies et bien déterminées quand x reste dans un certain domaine I , et quand y_1, y_2, \dots, y_m varient entre $-\infty$ et $+\infty$. De plus, les dérivées partielles du premier ordre

$$\frac{\partial f_i}{\partial y_k} \quad (i, k = 1, 2, \dots, m)$$

restent, je le suppose, toujours moindres en valeur absolue qu'un nombre fixe N , quand x reste dans I et que les y varient entre $-\infty$ et $+\infty$.

On pourra prendre ici pour valeur de α, \dots, λ le nombre N . D'autre part, dans la détermination du nombre h du paragraphe précédent, nous n'avons pas ici à considérer les deux premiers termes de la suite (α) , car nous les avons seulement introduits pour que les y_i calculés dans les diverses approximations restent entre $y_i^0 - b$ et $y_i^0 + b$, ce qui est inutile ici puisque le champ des y est illimité. Nous

pouvons donc prendre

$$h = \frac{1}{mN};$$

h est donc un nombre fixe. Ce résultat important montre que nous pourrons toujours étendre notre système d'intégrales de proche en proche dans tout le domaine de I.

Ainsi, tout système d'intégrales prenant pour x^0 les valeurs finies $y_1^0, y_2^0, \dots, y_m^0$ *reste certainement fini et bien déterminé dans tout l'intervalle I.*

Ce résultat, quoique très simple, présente peut-être quelque intérêt, car il est en général impossible de savoir ce que deviennent les intégrales en dehors d'un champ très limité. En particulier, si l'intervalle I contient tout l'intervalle $(-\infty, +\infty)$, les intégrales resteront *toujours finies.*

Pour citer un exemple, prenons l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = P(x)y + Q(x) \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}.$$

Si l'on suppose que $P(x)$ et $Q(x)$ restent, x allant de $-\infty$ à $+\infty$, toujours moindres qu'un nombre fixe, on peut affirmer que *toutes* les intégrales de cette équation seront déterminées et resteront finies pour l'ensemble des valeurs réelles de x . L'équation précédente est, en effet, équivalente au système

$$\frac{dy}{dx} = y',$$

$$\frac{dy'}{dx} = P(x)y + Q(x) \frac{y}{\sqrt{1+y^2}},$$

et les dérivées partielles des seconds membres de ces équations par rapport à y et à y' restent moindres qu'un nombre fixe.

3. Le champ de convergence de la série obtenue au moyen de la méthode générale rappelée au n° 1 est, en général, assez limité. Il y a cependant des cas de quelque étendue où le champ de convergence sera beaucoup plus étendu. Nous allons citer quelques exemples.

Prenons les équations (je me borne à deux équations uniquement pour simplifier)

$$(E) \quad \begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y, z), \\ \frac{dz}{dx} = \varphi(x, y, z). \end{cases}$$

Nous n'allons considérer les fonctions f et φ que pour des valeurs positives de y et z .

Supposons qu'elles soient positives, quel que soit x , et croissent avec y et z . De plus les dérivées partielles du premier ordre de f par rapport à y et z , nécessairement positives, vont en décroissant quand y ou z augmente.

Il est clair d'abord que, dans ces conditions, les dérivées partielles du premier ordre de f resteront toujours moindres qu'un nombre fixe et, par suite, le système (E) appartiendra au type étudié dans le paragraphe précédent.

En supposant que

$$f(x, 0, 0) \quad \text{et} \quad \varphi(x, 0, 0)$$

ne soient pas tous deux nuls identiquement, nous avons un système d'intégrales y et z des équations (E), s'annulant pour une certaine valeur de x , soit $x = 0$. Nous pourrions suivre ces intégrales de proche en proche; elles seront toujours positives et bien définies pour toute valeur positive de x , d'après ce qui a été dit (n° 2).

Nous allons montrer qu'un même développement représentera ces intégrales pour toute valeur positive de x .

Les approximations successives, faites en partant de $y_0 = z_0 = 0$, nous donnent une suite de fonctions positives

$$\begin{array}{ll} y_0 = 0, & z_0 = 0, \\ y_1, & z_1, \\ y_2, & z_2, \\ \dots & \dots \\ y_n, & z_n, \end{array}$$

et l'on aura évidemment

$$y_1 < y_2 < \dots < y_n < \dots,$$

$$z_1 < z_2 < \dots < z_n < \dots$$

Établissons que les approximations successives convergeront pour toute valeur positive de x . Reprenons, à cet effet, les deux intégrales y et z du système (E) s'annulant pour $x = 0$. Des équations (E) et des équations

$$\frac{dy_1}{dx} = f(x, 0, 0),$$

$$\frac{dz_1}{dx} = \varphi(x, 0, 0),$$

on conclut

$$y > y_1, \quad z > z_1,$$

et, de même, d'une manière générale, quel que soit n ,

$$y > y_n, \quad z > z_n.$$

Il est donc manifeste que y_n et z_n auront des limites : il faut montrer que ces limites sont respectivement y et z .

Considérons, à cet effet, un intervalle fini, d'ailleurs quelconque $(0, a)$, et les quotients

$$\frac{y - y_1}{y}, \quad \frac{z - z_1}{z}.$$

Ces quotients sont des fonctions de x , plus petites que l'unité, et, quand x varie entre 0 et a , il y a pour elles un maximum q plus petit que l'unité. Il ne pourrait y avoir de difficulté à ce sujet que pour $x = 0$. Or, pour $x = 0$, l'expression

$$1 - \frac{y_1}{y}$$

tend vers zéro, puisque

$$\lim \frac{y_1}{y} = \lim \frac{\frac{dy_1}{dx}}{\frac{dy}{dx}} = \lim_{x=0} \frac{f(x, 0, 0)}{f(x, y, z)} = 1,$$

en supposant que $f(0, 0, 0)$ et $\varphi(0, 0, 0)$ ne soient pas nuls. Nous avons donc entre 0 et a

$$\frac{y - y_1}{y} < q, \quad \frac{z - z_1}{z} < q \quad (q < 1).$$

Prenons maintenant les quotients

$$\frac{y - y_2}{y - y_1} \quad \text{et} \quad \frac{z - z_2}{z - z_1};$$

nous allons voir qu'ils sont aussi tous deux moindres que q . En effet,

$$\frac{d(y - y_1)}{dx} = f(x, y, z) - f(x, 0, 0),$$

$$\frac{d(y - y_2)}{dx} = f(x, y, z) - f(x, y_1, z_1).$$

Or, en n'écrivant plus x pour abrégér, nous avons

$$\frac{f(y, z) - f(y_1, z_1)}{f(y, z) - f(0, 0)} = \frac{(y - y_1)f'_y(\eta_1, \zeta_1) + (z - z_1)f'_z(\eta_1, \zeta_1)}{yf'_y(\eta_0, \zeta_0) + zf'_z(\eta_0, \zeta_0)};$$

η_1 et ζ_1 sont respectivement compris entre y et y_1 , puis z et z_1 ; de même, η_0 et ζ_0 sont respectivement compris entre 0 et y , puis entre 0 et z . De plus,

$$\eta_1 > \eta_0, \quad \zeta_1 > \zeta_0.$$

Par suite

$$\frac{f'_y(\eta_1, \zeta_1)}{f'_y(\eta_0, \zeta_0)} < 1, \quad \frac{f'_z(\eta_1, \zeta_1)}{f'_z(\eta_0, \zeta_0)} < 1.$$

On en conclut de suite

$$\frac{f(y, z) - f(y_1, z_1)}{f(y, z) - f(0, 0)} < q,$$

et enfin, en revenant aux équations qui donnent les différences $y - y_1$, et $y - y_2$ et aux équations analogues en z

$$\frac{y - y_2}{y - y_1} < q, \quad \frac{z - z_2}{z - z_1} < q.$$

En continuant ainsi de proche en proche, on a, d'une manière générale,

$$\frac{y - y_n}{y - y_{n-1}} < q, \quad \frac{z - z_n}{z - z_{n-1}} < q.$$

Il en résulte

$$y - y_n < q^n \cdot y, \quad z - z_n < q^n \cdot z$$

et, par suite,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z.$$

Comme a est quelconque, on voit que *les approximations successives convergeront nécessairement pour toute valeur positive de x* . Les fonctions y et z seront donc représentées par les développements toujours convergents pour x positif

$$\begin{aligned} y &= y_1 + (y_2 - y_1) + \dots + (y_n - y_{n-1}) + \dots, \\ z &= z_1 + (z_2 - z_1) + \dots + (z_n - z_{n-1}) + \dots \end{aligned}$$

Citons comme exemple, en prenant une seule équation,

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y + B(x) \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} + C(x),$$

en désignant par $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ les fonctions de x positives pour $x > 0$, les deux premières restant inférieures à un nombre fixe.

4. Reprenons maintenant les équations (E), en ne faisant aucune hypothèse sur les dérivées du premier ordre des f et des φ , si ce n'est qu'elles restent comprises entre deux limites fixes. Les équations appartiennent toujours au type du n° 2, et nous sommes assuré qu'il existe un système d'intégrales y et z parfaitement déterminées pour toute valeur positive de x , et s'annulant pour $x = 0$. Il est évident que y et z iront constamment en croissant.

Que pouvons-nous dire des approximations successives? On verra, comme plus haut,

$$\begin{aligned} y_1 &< y_2 < \dots < y_n < \dots < y, \\ z_1 &< z_2 < \dots < z_n < \dots < z. \end{aligned}$$

Il en résulte que y_n et z_n auront nécessairement des limites Y et Z et nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} Y &= y_1 + (y_2 - y_1) + \dots + (y_n - y_{n-1}) + \dots, \\ Z &= z_1 + (z_2 - z_1) + \dots + (z_n - z_{n-1}) + \dots \end{aligned}$$

Pour chaque valeur de x , ces séries sont convergentes, mais nous ne pouvons pas démontrer ici que $Y = y$, $Z = z$.

Cette égalité a lieu quand x est assez petit : c'est le théorème général. Si l'on admet que les deux séries qui représentent Y et Z sont uniformément convergentes dans un certain intervalle $(0, a)$, on peut établir que Y et Z coïncident respectivement avec y et z . Prenons, en effet, la série des dérivées

$$(\Sigma) \quad \frac{dy_1}{dx} + \frac{d(y_2 - y_1)}{dx} + \dots + \frac{d(y_n - y_{n-1})}{dx} + \dots$$

Elle peut s'écrire

$$\begin{aligned} f(x, y_0, z_0) + [f(x, y_1, z_1) - f(x, y_0, z_0)] + \dots \\ + [f(x, y_{n-1}, z_{n-1}) - f(x, y_{n-2}, z_{n-2})] + \dots \end{aligned}$$

La somme des $n + 1$ premiers termes de cette série est égale à

$$f(x, y_n, z_n).$$

Elle est donc convergente et a pour somme $f(x, Y, Z)$; elle est uniformément convergente si y_n et z_n tendent uniformément, comme nous l'admettons, vers leur limite, quand x est compris dans l'intervalle $(0, a)$. La série (Σ) peut donc être intégrée, ou, en d'autres termes,

$$\frac{dY}{dx} = f(x, Y, Z)$$

et, de la même manière,

$$\frac{dZ}{dx} = \varphi(x, Y, Z).$$

Les deux fonctions Y et Z satisfont donc aux équations différen-

tielles et, comme elles s'annulent pour $x = 0$, on a nécessairement

$$Y = y, \quad Z = z.$$

§. Des circonstances plus curieuses encore vont se présenter dans le cas où les fonctions f et φ , toujours positives, sont décroissantes avec y et z . Les approximations successives, faites en partant de $y_0 = z_0 = 0$, donnent une suite de fonctions positives de x

$$\begin{array}{ll} y_0 = 0, & z_0 = 0, \\ y_1, & z_1, \\ y_2, & z_2, \\ \dots, & \dots \\ y_n, & z_n. \end{array}$$

On a d'abord

$$y_1 = \int_0^x f(x, 0, 0) dx, \quad z_1 = \int_0^x \varphi(x, 0, 0) dx$$

et ensuite

$$y_2 = \int_0^x f(x_1, y_1, z_1) dx, \quad z_2 = \int_0^x \varphi(x_1, y_1, z_1) dx.$$

Il en résulte

$$y_2 < y_1, \quad z_2 < z_1.$$

Si nous prenons alors la valeur de y_3 et z_3 , on aura, d'après les hypothèses faites,

$$y_1 > y_3 > y_2, \quad z_1 > z_3 > z_2.$$

Il en résulte que les y à indices pairs forment une suite croissante, et les y à indices impairs forment une suite décroissante; tout terme de la seconde suite est plus grand que tout terme de la première. Nous sommes donc assuré que les termes d'indice impair

$$y_1, y_3, y_5, \dots$$

ont une limite que nous désignerons par Y , et de même les termes d'indice pair

$$y_2, y_4, y_6, \dots$$

ont une limite que nous appellerons y .

Il est certain, d'après le théorème fondamental, que y et Y sont identiques quand x est suffisamment petit.

Si les deux suites précédentes convergent uniformément vers leurs limites quand x est dans un intervalle $(0, a)$, il est facile d'établir que les deux limites sont égales. Prenons, en effet,

$$\begin{aligned} Y &= y_1 + (y_3 - y_1) + \dots + (y_{2n+1} - y_{2n-1}) + \dots, \\ y &= y_2 + (y_4 - y_2) + \dots + (y_{2n} - y_{2n-2}) + \dots \end{aligned}$$

D'après notre hypothèse, ces deux séries sont uniformément convergentes dans l'intervalle $(0, a)$. Nous allons en conclure que les deux fonctions de x , ainsi représentées, ont des dérivées. Prenons, en effet, la série des dérivées

$$\frac{dy_2}{dx} + \frac{d(y_4 - y_2)}{dx} + \dots + \frac{d(y_{2n} - y_{2n-2})}{dx} + \dots,$$

qui se réduit à

$$\begin{aligned} f(x, y_1, z_1) + [f(x, y_3, z_3) - f(x, y_1, z_1)] + \dots \\ + [f(x, y_{2n-1}, z_{2n-1}) - f(x, y_{2n-3}, z_{2n-3})] + \dots \end{aligned}$$

La somme des n premiers termes de cette série est

$$f(x, y_{2n-1}, z_{2n-1}).$$

Elle a pour limite

$$f(x, Y, Z),$$

et elle sera uniformément convergente dans l'intervalle $(0, a)$, puisque y_{2n-1} et z_{2n-1} tendent uniformément vers leur limite. On en conclut

que y a une dérivée et que

$$\frac{dy}{dx} = f(x, Y, Z),$$

et, pareillement,

$$\frac{dz}{dx} = \varphi(x, Y, Z).$$

De la même manière, on aura

$$\frac{dY}{dx} = f(x, y, z),$$

$$\frac{dZ}{dx} = \varphi(x, y, z).$$

Par conséquent, nous avons quatre équations auxquelles satisfont les fonctions

$$y, \quad z, \quad Y, \quad Z.$$

Or, pour $x = 0$,

$$y = z = Y = Z = 0,$$

et l'on en conclut de suite, à cause de la symétrie,

$$y = Y, \quad z = Z.$$

Il est bien probable qu'en général les limites (y, z) et (Y, Z) seront distinctes quand l'intervalle sera suffisamment grand, ce qui tiendra, d'après ce qui précède, à la convergence *non uniforme* des deux suites vers leur limite; il serait désirable d'avoir un exemple explicite où les limites seraient différentes.

II. — SECONDE MÉTHODE D'APPROXIMATIONS.

6. Prenons d'abord l'unique équation

$$(1) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right).$$

on aura l'intégrale s'annulant pour $x = 0$,

$$\int_0^x \varphi(z)(x-z) dz + Px.$$

Choisissons la constante P de telle sorte que cette expression prenne la valeur B pour $x = b$; on a ainsi

$$y = \int_0^x \varphi(z)(x-z) dz + \frac{Bx}{b} - \frac{x}{b} \int_0^b \varphi(z)(b-z) dz,$$

qui représente l'intégrale de (3) s'annulant pour $x = 0$ et prenant la valeur B pour $x = b$. On peut trouver une limite supérieure de $|y|$ et $\left| \frac{dy}{dx} \right|$ quand x varie entre 0 et b . Écrivons y sous la forme

$$\int_0^x z \varphi(z) \left(\frac{x}{b} - 1 \right) dz - \frac{x}{b} \int_x^b \varphi(z)(b-z) dz + \frac{Bx}{b}.$$

La valeur absolue de la première intégrale, en désignant par M la valeur absolue maxima de $\varphi(x)$, est moindre que

$$\left(1 - \frac{x}{b} \right) \frac{M b^2}{2}.$$

La valeur absolue de la seconde est moindre que

$$\frac{x}{b} \frac{M(b-x)^2}{2}.$$

On a donc, par conséquent,

$$|y| < \left(1 - \frac{x}{b} \right) \frac{M b^2}{2} + \frac{x}{b} \frac{M(b-x)^2}{2} + |B|,$$

d'où, enfin,

$$|y| < \frac{M b^2}{2} + |B|.$$

Passons maintenant à $\frac{dy}{dx}$; on a

$$\frac{dy}{dx} = \int_0^x \varphi(z) dz + \frac{B}{b} - \frac{1}{b} \int_0^b \varphi(z)(x-z) dz,$$

égalité qu'on peut écrire sous la forme

$$\frac{dy}{dx} = \int_0^x \varphi(z) \left(1 - \frac{x-z}{b}\right) dz - \frac{1}{b} \int_x^b \varphi(z)(x-z) dz + \frac{B}{b};$$

on aura, par suite,

$$\left| \frac{dy}{dx} \right| < Mx + \frac{M}{b} \frac{(b-x)^2}{2} + \left| \frac{B}{b} \right|,$$

et, par suite,

$$\left| \frac{dy}{dx} \right| < Mb + \left| \frac{B}{b} \right|.$$

8. Revenons maintenant au système (2). Nous devons évidemment supposer

$$|B| < L.$$

Nous admettrons de plus que

$$(4) \quad \frac{Mb^2}{2} + |B| < L,$$

ce qui a lieu si b est assez petit. De plus, pour que $\frac{dy}{dx}$ soit certainement compris entre $-L'$ et $+L'$, nous faisons l'hypothèse que

$$(5) \quad Mb + \left| \frac{B}{b} \right| < L'.$$

Moyennant les inégalités (4) et (5), nous sommes assuré que les fonctions y_1, y_2, \dots, y_n sont toutes comprises entre $-L$ et $+L$. On doit remarquer que ces inégalités seront certainement vérifiées si b , B et $\frac{B}{b}$ sont suffisamment petits.

Il nous faut maintenant montrer que y_n tend vers une limite quand n augmente indéfiniment. On a

$$\frac{d^2(y_2 - y_1)}{dx^2} = f\left(x, y_1, \frac{dy_1}{dx}\right) - f\left(x, y_0, \frac{dy_0}{dx}\right).$$

Or, soit M le maximum de

$$\alpha |y_1 - y_0| + \beta \left| \frac{dy_1}{dx} - \frac{dy_0}{dx} \right|,$$

nous aurons, d'après le numéro précédent,

$$|y_2 - y_1| < \frac{Mb^2}{2},$$

$$\left| \frac{dy_2}{dx} - \frac{dy_1}{dx} \right| < Mb.$$

La relation

$$\frac{d^2(y_3 - y_2)}{dx^2} = f\left(x, y_2, \frac{dy_2}{dx}\right) - f\left(x, y_1, \frac{dy_1}{dx}\right)$$

nous montre que

$$|y_3 - y_2| < M \left(\alpha \frac{b^2}{2} + \beta b \right) \frac{b^2}{2},$$

$$\left| \frac{dy_3}{dx} - \frac{dy_2}{dx} \right| < M \left(\alpha \frac{b^2}{2} + \beta b \right) b,$$

et, de proche en proche, on arrive aux inégalités

$$|y_n - y_{n-1}| < M \left(\alpha \frac{b^2}{2} + \beta b \right)^{n-2} \frac{b^2}{2},$$

$$\left| \frac{dy_n}{dx} - \frac{dy_{n-1}}{dx} \right| < M \left(\alpha \frac{b^2}{2} + \beta b \right)^{n-2} b.$$

Si donc on a

$$(6) \quad \alpha \frac{b^2}{2} + \beta b < 1,$$

la série

$$y_1 + (y_2 - y_1) + \dots + (y_n - y_{n-1}) + \dots$$

sera manifestement convergente, et, par suite, y_n aura une limite y pour $n = \infty$. Cette fonction y de x aura certainement une dérivée première représentée par la série

$$\frac{dy_1}{dx} + \left(\frac{dy_2}{dx} - \frac{dy_1}{dx} \right) + \dots + \left(\frac{dy_n}{dx} - \frac{dy_{n-1}}{dx} \right) + \dots.$$

Il est aisé de vérifier que y satisfait à l'équation (1); on a, en effet,

$$y_n = \int_0^x f\left(z, y_{n-1}, \frac{dy_{n-1}}{dz}\right)(x - z) dz + \frac{Bx}{b} - \frac{x}{b} \int_0^b f\left(z, y_{n-1}, \frac{dy_{n-1}}{dz}\right)(b - z) dz,$$

en remplaçant, sous les signes d'intégration, dans y_{n-1} , la lettre x par la lettre z . Puisque y_n et $\frac{dy_n}{dz}$ convergent *uniformément* vers leurs limites respectives y et $\frac{dy}{dx}$, on aura

$$y = \int_0^x f\left(z, y, \frac{dy}{dz}\right)(x - z) dz + \frac{Bx}{b} - \frac{x}{b} \int_0^b f\left(z, y, \frac{dy}{dz}\right)(b - z) dz$$

et, par suite, en différentiant deux fois

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right).$$

Il est évident, d'ailleurs, que $y = 0$ pour $x = 0$, et $y = B$ pour $x = b$.

La recherche de l'intégrale est donc complètement effectuée; on ne doit pas oublier que les inégalités (4), (5) et (6) sont supposées vérifiées.

9. L'analyse précédente peut s'étendre à un nombre quelconque d'équations de la forme

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y_1}{dx^2} &= f_1\left(x, y_1, y_2, \dots, y_m, \frac{dy_1}{dx}, \dots, \frac{dy_m}{dx}\right), \\ \frac{d^2 y_2}{dx^2} &= f_2\left(x, y_1, y_2, \dots, y_m, \frac{dy_1}{dx}, \dots, \frac{dy_m}{dx}\right), \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{d^2 y_m}{dx^2} &= f_m\left(x, y_1, y_2, \dots, y_m, \frac{dy_1}{dx}, \dots, \frac{dy_m}{dx}\right). \end{aligned}$$

Notre méthode d'approximations successives permettra de déterminer les intégrales y_1, y_2, \dots, y_m de ce système, telles qu'on ait

$$y_1 = y_2 = \dots = y_m = 0 \quad (\text{pour } x = 0),$$

$$y_1 = B_1, \quad y_2 = B_2, \quad \dots \quad y_m = B_m \quad (\text{pour } x = b).$$

Certaines inégalités analogues aux inégalités (4), (5) et (6) devront être vérifiées. On suppose, d'ailleurs, que

$$|f_i(x, y_1, \dots, y_m, y'_1, \dots, y'_m) - f_i(x, z_1, \dots, z_m, z'_1, \dots, z'_m)|$$

$$< \alpha_i |y_1 - z_1| + \dots + \alpha_m |y_m - z_m| + \beta_i |y'_1 - z'_1| + \dots + \beta_m |y'_m - z'_m|.$$

En gardant pour le reste les mêmes notations que plus haut, on devra avoir

$$\frac{Mb^2}{2} + |B_i| < L,$$

$$Mb + \left| \frac{B_i}{b} \right| < L',$$

et enfin

$$(\alpha_1 + \dots + \alpha_m) \frac{b^2}{2} + (\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_m) b < 1.$$

10. Je dis maintenant que l'intégrale déterminée par la méthode précédente est unique, c'est-à-dire qu'il n'existe qu'un seul système d'intégrales y_1, y_2, \dots, y_m prenant les valeurs données au commencement et à la fin de l'intervalle $(0, b)$. Bien entendu, nous ne pouvons considérer que des systèmes d'intégrales telles que

$$|y_i| < L, \quad |y'_i| < L',$$

puisque c'est seulement dans un tel intervalle que nous supposons les f définies.

D'ailleurs, pour abréger, je supposerai que les fonctions f ont des dérivées partielles du premier ordre par rapport aux y , de telle sorte que α_k sera le maximum de

$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial y_k} \right| \quad (i = 1, 2, \dots, m);$$

pareillement β_k sera le maximum de

$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial y'_k} \right| \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

quand x varie entre 0 et b , les y entre $-L$ et $+L$ et les y' entre $-L'$ et $+L'$.

Supposons maintenant que nous ayons deux systèmes d'intégrales satisfaisant aux mêmes conditions aux limites

$$y_1, y_2, \dots, y_m \quad \text{et} \quad Y_1, Y_2, \dots, Y_m.$$

On aura, en retranchant les équations différentielles, posant

$$y_i - Y_i = u_i$$

et appliquant le théorème des accroissements finis

$$(E) \quad \begin{cases} \frac{d^2 u_1}{dx^2} = a_{1,1} u_1 + a_{1,2} u_2 + \dots + a_{1,m} u_m + b_{1,1} \frac{du_1}{dx} + \dots + b_{1,m} \frac{du_m}{dx}, \\ \dots \dots \dots \\ \frac{d^2 u_m}{dx^2} = a_{m,1} u_1 + a_{m,2} u_2 + \dots + a_{m,m} u_m + b_{m,1} \frac{du_1}{dx} + \dots + b_{m,m} \frac{du_m}{dx}. \end{cases}$$

Nous pouvons considérer les a et b comme des fonctions de x , et nous avons alors un système d'équations linéaires et homogènes, pour lesquelles un système d'intégrales

$$u_1, u_2, \dots, u_m$$

s'annulent pour $x = 0$ et pour $x = b$.

Nous allons voir que les u doivent être identiquement nulles. De ce que

$$|a_{i,k}| < \alpha_k \quad \text{et} \quad |b_{i,k}| < \beta_k \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

on conclut que, pour le système (E) d'équations linéaires, la méthode des approximations successives est applicable. Il en résulte que l'on peut trouver $2m$ systèmes d'intégrales prenant pour $x = 0$ et $x = b$

des valeurs arbitrairement données. Avec ces $2m$ systèmes d'intégrales, nous pouvons former l'intégrale générale de (E) et déterminer les constantes de façon à avoir les intégrales s'annulant toutes pour $x = 0$ et pour $x = b$. Or ces constantes seront toutes nulles, puisqu'elles sont données par des équations homogènes du premier degré, dont le déterminant n'est pas nul, toutes les lettres qui forment ce déterminant ayant des valeurs arbitraires. Les u sont donc identiquement nulles, et l'on a bien

$$Y_1 = y_1, \quad \dots, \quad Y_m = y_m,$$

comme nous voulions l'établir.



CHAPITRE II.



III. — EXAMEN D'UNE FORME PARTICULIÈRE D'ÉQUATIONS.

11. Examinons quelques cas particuliers, où la forme spéciale des équations nous permettra diverses remarques sur la solution dont nous nous sommes occupé au n° 6.

Prenons d'abord l'équation très simple

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f(x, y).$$

Nous avons montré (1) que, si la fonction f croît toujours en même temps que y , *il ne pourra y avoir deux intégrales de cette équation, continues dans l'intervalle (a, b) et prenant les valeurs A et B aux deux extrémités.*

(1) Chapitre V, n° 3, du Mémoire cité.

Nous avons ensuite fait voir comment la méthode alternée pouvait être appliquée à l'équation précédente. Je ne veux pas revenir sur ces questions, et c'est d'une équation de même forme, mais avec des hypothèses différentes, que je veux m'occuper maintenant.

Écrivons l'équation sous la forme

$$(7) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + f(x, y) = 0,$$

et supposons que, x étant dans un certain intervalle, la fonction $f(x, y)$, définie pour toute valeur de y , croisse constamment avec y et que l'on ait identiquement

$$f(x, 0) = 0.$$

Il est clair que, dans ces conditions, $f(x, y)$ sera positif quand y sera lui-même positif. Nous allons supposer de plus que la dérivée toujours positive

$$f'_y(x, y)$$

décroit quand y augmente.

Ces hypothèses faites, admettons qu'il existe une intégrale y de l'équation (7), restant toujours positive (et non nulle) lorsque x varie entre 0 et b , et ne s'annulant pas pour les valeurs extrêmes. Nous allons montrer que cette intégrale peut certainement être obtenue par la méthode des approximations successives.

Partons à cet effet de la fonction y_0 satisfaisant à l'équation

$$\frac{d^2 y_0}{dx^2} = 0$$

et prenant aux limites les mêmes valeurs que y . Les équations successives

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} + f(x, y_0) = 0,$$

$$\frac{d^2 y_2}{dx^2} + f(x, y_1) = 0,$$

.....

$$\frac{d^2 y_n}{dx^2} + f(x, y_{n-1}) = 0$$

(y_n prenant les mêmes valeurs que y aux deux limites) montrent que

$$y_0 < y_1 < \dots < y_n.$$

Il faut montrer que y_n a y pour limite. Or considérons le quotient

$$\frac{y - y_0}{y}.$$

D'après l'équation

$$\frac{d^2(y - y_0)}{dx^2} + f(x, y) = 0,$$

y est plus grand que y_0 , et, par suite, le rapport précédent est plus petit que l'unité et n'atteint pas ce nombre : soit q son maximum ; on a

$$q < 1.$$

Ceci posé, l'équation

$$\frac{d^2(y - y_1)}{dx^2} + f(x, y) - f(x, y_0) = 0$$

donne, d'après le n° 7,

$$(8) \quad \begin{cases} y - y_1 = \int_0^x z [f(z, y) - f(z, y_0)] \left[1 - \frac{z}{b}\right] dz \\ \quad + \frac{x}{b} \int_x^b [f(z, y) - f(z, y_0)] (b - z) dz, \end{cases}$$

en remplaçant, sous les signes d'intégration, dans y et y_0 , x par z .

Mais nous pouvons écrire l'inégalité

$$\frac{f(z, y) - f(z, y_1)}{f(z, y) - f(z, y_0)} = \frac{f'_y(z, \xi_1)(y - y_1)}{f'_y(z, \xi_0)(y - y_0)} < \frac{y - y_1}{y - y_0},$$

car $\xi_1 > \xi_0$. Or de l'égalité

$$y - y_0 = \int_0^x z f(z, y) \left(1 - \frac{z}{b}\right) dz + \frac{x}{b} \int_x^b f(z, y) (b - z) dz$$

rapprochée de l'égalité (8) et de l'inégalité

$$\frac{f(z, y) - f(z, y_0)}{f(z, y)} = \frac{f'_y(z, \xi_1)(y - y_0)}{f'_y(z, \xi_2)y} < \frac{y - y_0}{y} < q,$$

on conclut

$$\frac{y - y_1}{y - y_0} < q.$$

On aura de la même manière

$$\frac{y - y_2}{y - y_1} < q,$$

et ainsi indéfiniment

$$\frac{y - y_n}{y - y_{n-1}} < q.$$

De ces inégalités, on déduit

$$y - y_n < y q^{n+1}.$$

Cette inégalité établit bien que y_n converge uniformément vers y . C'est ce que nous voulions établir.

12. Nous avons maintenant à rechercher les intervalles dans lesquels on peut être assuré d'avoir une intégrale toujours positive, et chercher en particulier s'il est possible d'avoir une intégrale s'annulant aux extrémités d'un intervalle sans être identiquement nulle. Nous avons dit que la dérivée toujours positive

$$f'_y(x, y)$$

allait constamment en décroissant quand y augmente, lorsque x a une valeur fixe quelconque dans un certain intervalle. Pour $y = \infty$, cette fonction aura une valeur déterminée; posons

$$f'_y(x, 0) = P(x),$$

$$f'_y(x, \infty) = Q(x),$$

on aura

$$P(x) > Q(x),$$

$Q(x)$ pourrait être identiquement nulle.

13. Avant d'aller plus loin, rappelons un théorème bien connu sur les équations différentielles linéaires.

Étant donnée l'équation linéaire

$$(9) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + P(x)y = 0,$$

où la fonction $P(x)$ est positive et définie pour un champ suffisamment grand de valeurs de x , il existe une quantité α , telle que dans tout intervalle $(0, \alpha')$ où $\alpha' < \alpha$, une intégrale nulle aux deux extrémités est identiquement nulle. Pour l'intervalle $(0, \alpha)$ au contraire, il existe une intégrale s'annulant aux deux extrémités et qui n'est pas nulle identiquement. Dans l'intervalle $(0, \alpha')$ la méthode des approximations successives conduit à une série convergente.

Si l'on considère une seconde équation de même forme

$$(10) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + Q(x)y = 0,$$

à cette équation correspondra un intervalle $(0, \beta)$. Si l'on a

$$P(x) > Q(x),$$

on aura nécessairement

$$\alpha < \beta.$$

14. Ceci posé, revenons à l'équation

$$(E) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + f(x, y) = 0.$$

Proposons-nous de montrer qu'il existe une intégrale (ne s'annulant pas identiquement) s'annulant

$$\text{pour } x = 0 \quad \text{et} \quad \text{pour } x = a,$$

a étant compris entre α et β .

Cette intégrale va nous être fournie par la méthode des approximations successives. Nous partons d'une fonction arbitraire, toujours positive, s'annulant pour 0 et pour a ; nous allons montrer d'abord que la série des approximations successives est convergente. Considérons à cet effet une quantité positive ε assez grande pour qu'en posant

$$f'_y(x, \varepsilon) = R(x),$$

la quantité, analogue à la lettre α du numéro précédent et relative à l'équation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + R(x)y = 0$$

soit supérieure à a ; ceci est possible puisque pour $\varepsilon = \infty$ la fonction $R(x)$ se réduit à $Q(x)$.

Ceci posé, cherchons l'intégrale de l'équation (E) prenant pour $x = 0$ et pour $x = a$ la valeur ε . La méthode des approximations successives nous fournira une suite de fonctions croissantes

$$y_0 = \varepsilon, \quad y_1, \quad y_2, \quad \dots, \quad y_n, \quad \dots$$

Il est aisé de voir que cette suite a une limite. On a en effet

$$\frac{d^2(y_n - y_{n-1})}{dx^2} + f(x, y_{n-1}) - f(x, y_{n-2}) = 0.$$

Or

$$f(x, y_{n-1}) - f(x, y_{n-2}) < R(x)(y_{n-1} - y_{n-2}),$$

puisque y_{n-1} et y_{n-2} sont supérieurs à ε . Or la série des approximations successives converge pour l'équation linéaire

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + R(x)y = 0.$$

Il en est donc *a fortiori* de même pour l'équation (E).

Nous venons de trouver l'intégrale de l'équation (E) prenant pour $x = 0$ et $x = a$ la valeur ε , ε étant une constante suffisamment grande. Nous voulons avoir l'intégrale de l'équation prenant la valeur zéro

aux deux extrémités. Or partons d'une fonction s'annulant aux deux extrémités et inférieure à ε ; puisque les approximations convergent dans le cas qui vient d'être examiné ci-dessus, elles convergent nécessairement encore dans le cas actuel.

Nous obtenons donc, par la méthode des approximations successives, une intégrale s'annulant pour $x = 0$ et pour $x = a$. Une objection importante se présente toutefois immédiatement : l'intégrale que nous venons de trouver n'est-elle pas identiquement nulle ?

Nous allons établir qu'il n'en est pas ainsi.

Montrons d'abord qu'on peut trouver une fonction continue y_0 de x , s'annulant pour $x = 0$ et pour $x = a$, et telle que dans l'intervalle $(0, a)$

$$\frac{d^2 y_0}{dx^2} + f(x, y_0) > 0.$$

Soit η une quantité positive, et posons

$$f'_y(x, \eta) = R_1(x).$$

Nous pouvons prendre η de telle sorte que la quantité α_1 , correspondant à l'équation linéaire

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + R_1(x)y = 0,$$

soit égale à a . Désignons alors par y_0 la fonction continue satisfaisant à cette dernière équation entre 0 et a et s'annulant pour ces deux valeurs; de plus, comme elle n'est déterminée qu'à un facteur près, nous la prenons telle qu'elle ne dépasse pas η . Nous avons ainsi une fonction continue parfaitement définie, telle que

$$\frac{d^2 y_0}{dx^2} + f(x, y_0) > 0;$$

nous allons la prendre pour commencer les approximations successives. La seconde fonction y_1 est déterminée par l'équation

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} + f(x, y_0) = 0$$

et par la condition de s'annuler pour $x = 0$ et pour $x = a$. Il est facile de voir que

$$y_1 > y_0.$$

Si nous écrivons, en effet, $y_1 = y_0 + \lambda$, nous aurons

$$\frac{d^2\lambda}{dx^2} + \frac{d^2y_0}{dx^2} + f(x, y_0) = 0.$$

La somme des deux derniers termes est positive; λ s'annulant aux deux extrémités de l'intervalle $(0, a)$ sera donc positif dans cet intervalle. Nous aurons donc bien l'inégalité annoncée. Du moment que $y_1 > y_0$, on aura

$$y_2 > y_1$$

et ainsi de suite. L'intégrale cherchée y sera donc supérieure à y_0 : elle ne sera pas identiquement nulle.

En définitive, nous avons démontré dans ce paragraphe qu'il existait une intégrale de l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + f(x, y) = 0,$$

s'annulant pour $x = 0$ et pour $x = a$, et toujours positive dans cet intervalle.

15. *L'intégrale dont il vient d'être question est unique.* — Ceci est une conséquence de l'analyse du n° 11. A la vérité, l'intégrale toujours positive y , que nous avons considérée dans ce numéro, ne s'annulait pas aux deux extrémités; le raisonnement subsiste sans modification si l'intégrale s'annule seulement à une des extrémités, soit pour $x = 0$ et si l'on suppose, de plus, que $\frac{dy}{dx}$ ne soit pas infinie pour $x = 0$. Il est évident d'ailleurs que $\frac{dy}{dx}$ ne sera pas nulle pour $x = 0$, car autrement y serait identiquement nulle. Si nous prenons alors le rapport

$$\frac{y - y_0}{y} = 1 - \frac{y_0}{y}$$

du n° 8, ce rapport sera plus petit que l'unité même pour $x = 0$, car

$$\lim_{x=0} \left(\frac{y_0}{y} \right) = \frac{\text{tang} \theta'}{\text{tang} \theta},$$

θ et θ' désignant deux angles aigus différents de zéro et de $\frac{\pi}{2}$ et l'on a

$$\theta' < \theta.$$

Si l'intégrale toujours positive y s'annule aux deux extrémités de l'intervalle, le raisonnement doit être modifié, car on ne peut faire les approximations successives en partant de la fonction y_0 satisfaisant à l'équation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 0.$$

On suppose que l'on parte de la fonction y_0 considérée à la fin du numéro précédent, pour laquelle

$$\frac{d^2 y_0}{dx^2} + f(x, y_0) > 0.$$

On peut de plus supposer que $y_0 < y$ (y_0 n'étant déterminé qu'à un facteur près).

Nous pouvons affirmer alors que l'expression

$$1 - \frac{y_0}{y}$$

reste moindre qu'un nombre q plus petit que l'unité, puisque pour $x = 0$ et $x = a$ la limite de $\frac{y_0}{y}$ ne peut être nulle. Il n'y a plus alors qu'à raisonner comme au n° 11 pour voir que y_n a nécessairement une limite, et cette limite est y . *Cette intégrale y est donc unique.*

16. Nous avons supposé, dans tout ce qui précède, que a était distinct des valeurs extrêmes α et β . Montrons que l'intégrale tend vers zéro quand a tend vers α . Nous allons raisonner comme au n° 14, quoique dans des circonstances un peu différentes. Nous pouvons

prendre la constante ε assez petite, pour que, ayant posé

$$f'_y(x, \varepsilon) = R(x),$$

l'intervalle α' dans lequel s'applique, pour l'équation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + R(x)y = 0,$$

la méthode des approximations successives, soit aussi peu supérieur que l'on voudra à α . Choisissons alors a entre α et α' . D'après le n° 14, l'intégrale y de notre équation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + f(x, y) = 0$$

est moindre que l'intégrale, prenant pour $x = 0$ et $x = a$ la valeur ε , et obtenue comme limite des approximations convergentes

$$\frac{d^2 y_2}{dx^2} + f(x, \varepsilon) = 0,$$

$$\frac{d^2 y^2}{dx^2} + f(x, y_1) = 0,$$

et ainsi de suite. Or on voit que chacun de ces y est de l'ordre de ε , c'est-à-dire peut se mettre sous la forme du produit de ε par une fonction restant finie; notre intégrale y est donc elle-même de l'ordre de ε ; comme on peut faire tendre ε vers zéro à mesure que a se rapproche de plus en plus de α , il en résulte que l'intégrale y tend vers zéro, comme nous l'avons annoncé.

Supposons maintenant que a tende vers β . Nous aurons recours alors à la seconde partie du raisonnement du n° 14. Puisque a est très voisin de β , nous pouvons prendre la quantité η extrêmement grande. Supposons de plus que le maximum de la fonction y_0 soit précisément η , ce que nous pouvons toujours réaliser, puisque y_0 n'est déterminé qu'à un facteur près. Dans ces conditions, notre intégrale atteindra certainement une valeur supérieure à η . Comme η est aussi grand que l'on veut, si a est suffisamment rapproché de β , on voit qu'il n'y a pas d'intégrale continue (outre $y = 0$) s'annulant pour $x = 0$ et pour $x = \beta$. Pour une valeur fixe quelconque de x (distincte de 0 et a) la

valeur de l'intégrale y de l'équation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + f(x, y) = 0,$$

s'annulant pour 0 et pour a , augmente indéfiniment quand a tend vers β . Il résulte encore de ces considérations que, pour l'intégrale y correspondant à a , la valeur de la dérivée $\frac{dy}{dx}$ pour $x = 0$ varie d'une manière continue de zéro à l'infini quand a varie de α à β .

17. Dans tout ce qui précède, nous n'avons étudié que les intégrales restant toujours positives (ou nulles). Pour étudier d'autres intégrales, il est évidemment nécessaire de faire des hypothèses sur la nature de la fonction $f(x, y)$ et de ses dérivées pour y négatif. Supposons encore que cette fonction, qui s'annule pour $y = 0$, croisse toujours en même temps que y , et que la dérivée

$$f'_y(x, y),$$

toujours positive, ait un maximum pour $y = 0$, et n'ait ni minimum, ni autre maximum. On pourra alors étudier toutes les intégrales de l'équation. Faisons seulement, pour le moment, la remarque que l'intégrale étudiée aux n^{os} 14 et 15, et qui s'annule pour $x = 0$ et pour $x = a$, ne sera pas nécessairement unique si l'on ne la suppose pas toujours positive dans l'intervalle $(0, a)$. D'une manière plus générale, *une intégrale n'est pas nécessairement déterminée d'une manière unique dans l'intervalle $(0, a)$ par ses valeurs initiale et finale*; nous allons toutefois montrer qu'il en sera nécessairement ainsi dans le cas où

$$a < \alpha.$$

Soient, en effet, y et z deux intégrales supposées distinctes satisfaisant aux mêmes conditions. On aura

$$\frac{d^2(y - z)}{dx^2} + f(x, y) - f(x, z) = 0$$

ou

$$\frac{d^2(y - z)}{dx^2} + (y - z)f'_y(x, \lambda) = 0,$$

λ étant compris entre y et z . Or on a

$$f'_y(x, \lambda) < f'_y(x, 0) = P(x).$$

Il en résulte que l'intervalle, partant de zéro, dans lequel une intégrale s'annulant aux deux extrémités est identiquement nulle, est plus grand pour l'équation

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + f'_y(x, \lambda) u = 0$$

que pour l'équation

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + P(x) u = 0.$$

Il est dès lors évident que les deux intégrales coïncident.

IV. — EXTENSION AUX CAS DE m ÉQUATIONS.

18. Les résultats précédents s'étendent facilement à m équations

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} + f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_m) = 0,$$

$$\frac{d^2 y_2}{dx^2} + f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_m) = 0,$$

.....

$$\frac{d^2 y_m}{dx^2} + f_m(x, y_1, y_2, \dots, y_m) = 0.$$

Comme le cas où x n'entre pas dans les équations est à la fois le plus intéressant et le plus simple, nous nous bornerons à ce cas, et considérerons les n équations

(II) $\left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} + f_1(y, z, \dots, u) &= 0, \\ \frac{d^2 z}{dx^2} + f_2(y, z, \dots, u) &= 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{d^2 u}{dx^2} + f_m(y, z, \dots, u) &= 0, \end{aligned} \right.$

où les lettres y, z, \dots, u sont en nombre m .

Nous supposons que les fonctions f s'annulent pour

$$y = z = \dots = u = 0.$$

Elles croissent quand les variables y, z, \dots, u augmentent. De plus, les dérivées nécessairement positives

$$\frac{\partial f_i}{\partial z}$$

(z étant une quelconque des lettres) décroissent quand les valeurs absolues des variables augmentent.

Nous aurons à faire tout à l'heure une hypothèse supplémentaire sur les dérivées du premier ordre, mais il nous faut examiner d'abord un cas particulier.

19. Arrêtons-nous sur le cas bien simple où les équations sont linéaires. Soit

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a_1 y + a_2 z + \dots + a_m u = 0,$$

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + b_1 y + b_2 z + \dots + b_m u = 0,$$

.....

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + l_1 y + l_2 z + \dots + l_m u = 0,$$

les a, b, \dots, l sont alors positifs. L'équation en S ,

$$\begin{vmatrix} a_1 - S^2 & a_2 & \dots & a_m \\ b_1 & b_1 - S^2 & \dots & b_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_1 & l_2 & \dots & l_m - S^2 \end{vmatrix} = 0,$$

s'offre quand on cherche les intégrales de l'équation précédente de la forme

$$A \sin(Sx), \quad B \sin(Sx), \quad \dots, \quad L \sin(Sx).$$

Cette équation admet au moins une racine positive S ; considérons

la plus grande de ces racines que nous désignons par S_0 . Les équations différentielles admettent le système d'intégrales

$$(12) \quad A_0 \sin(S_0 x), \quad B_0 \sin(S_0 x), \quad \dots, \quad L_0 \sin(S_0 x),$$

et l'on peut démontrer que les constantes A_0, B_0, \dots, L_0 sont toutes de même signe.

Montrons que dans un intervalle de longueur moindre que $\frac{\pi}{S_0}$, la méthode des approximations successives donne certainement un résultat convergent. Nous allons d'abord établir que dans un tel intervalle tout système d'intégrales

$$y, \quad z, \quad \dots, \quad u$$

restant positives (et non nulles) peut être obtenu par la méthode des approximations successives. On considère les équations successives

$$\frac{d^2 y_0}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^2 z_0}{dx^2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{d^2 u_0}{dx^2} = 0,$$

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} + a_1 y_0 + a_2 z_0 + \dots + a_m u_0 = 0,$$

.....

$$\frac{d^2 u_1}{dx^2} + l_1 y_0 + l_2 z_0 + \dots + l_m u_0 = 0,$$

et ainsi de suite, les valeurs initiale et finale aux extrémités de l'intervalle étant toujours les mêmes pour chacune des fonctions. On a évidemment

$$y_0 < y_1 < \dots,$$

$$z_0 < z_1 < \dots,$$

.....

$$u_0 < u_1 < \dots$$

y, z, \dots, u sont d'ailleurs nécessairement aussi supérieures respectivement à y_0, z_0, \dots, u_0 . Les quotients

$$\frac{y - y_0}{y}, \quad \frac{z - z_0}{z}, \quad \dots, \quad \frac{u - u_0}{u}$$

20. Revenons maintenant au système général (11). J'envisage l'équation en S

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y} - S^2 & \frac{\partial f_1}{\partial z} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} - S^2 & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial u} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y} & \frac{\partial f_m}{\partial z} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial u} - S^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation a au moins une racine positive, et c'est sur la plus grande que nous portons notre attention. Cette racine peut être considérée comme une fonction de y, z, \dots, u .

Nous supposons qu'elle atteigne sa valeur maxima pour

$$y = z = \dots = u = 0,$$

et qu'elle aille toujours en décroissant quand les valeurs absolues des variables augmentent.

Nous allons pouvoir, sous ces conditions, étendre au système (11) la plupart des résultats obtenus dans le cas d'une seule équation. Deux systèmes d'équations linéaires vont jouer un rôle essentiel comme équations de comparaison. Posons

$$(T) \quad \begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial y} = a_1, & \frac{\partial f_2}{\partial z} = a_2, & \dots, & \frac{\partial f_1}{\partial u} = a_m, \\ \frac{\partial f_2}{\partial y} = b_1, & \dots, & \dots, & \frac{\partial f_2}{\partial u} = b_m, \\ \dots, & \dots, & \dots, & \dots, \\ \frac{\partial f_m}{\partial y} = l_1, & \dots, & \dots, & \frac{\partial f_m}{\partial u} = l_m, \end{cases}$$

quand on fait dans les premiers membres $y = z = \dots = u = 0$. Désignons de même par les grandes lettres A_1, A_2, \dots, L_m les valeurs de ces dérivées pour

$$y = z = \dots = u = + \infty.$$

Les deux systèmes d'équations linéaires seront les systèmes à coefficients constants formés avec ces coefficients et de même forme que ceux qui ont été considérés au n° 19. Au premier système formé avec les petites lettres correspond un intervalle α ($\alpha = \frac{\pi}{S_0}$), et au second système formé avec les grandes lettres correspond un intervalle β ; d'après les hypothèses faites, on aura

$$\alpha < \beta.$$

21. Ceci posé, revenons au système (11). Nous voulons montrer qu'il existe une intégrale de cette équation, non nulle identiquement, et s'annulant pour $x = 0$ et pour $x = a$, a étant compris entre α et β .

Nous allons nous placer au même point de vue que précédemment. Nous partons de m fonctions toujours positives, s'annulant pour $x = 0$ et pour $x = a$; on va montrer d'abord que la série des approximations successives est convergente. Considérons à cet effet une quantité positive ε et désignons par

$$\begin{array}{cccc} \alpha_1, & \alpha_2, & \dots, & \alpha_m, \\ \beta_1, & \beta_2, & \dots, & \beta_m, \\ \dots, & \dots, & \dots, & \dots, \\ \lambda_1, & \lambda_2, & \dots, & \lambda_m \end{array}$$

les valeurs du Tableau (T) des dérivées pour

$$y = z = \dots = u = \varepsilon.$$

On peut choisir ε assez grand pour que, S désignant la plus grande racine positive de l'équation

$$(13) \quad \begin{vmatrix} \alpha_1 - S^2 & \alpha_2 & \alpha_m \\ \beta_1 & \beta_2 - S^2 & \beta_m \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_m - S^2 \end{vmatrix} = 0,$$

le quotient $\frac{\pi}{\delta}$ soit supérieur à α ; ceci résulte de ce que, pour ε très grand, cette quantité $\frac{\pi}{\delta}$ se réduit à β .

Ceci posé, cherchons les intégrales du système (11), prenant pour $x = 0$ et pour $x = \alpha$ la valeur ε . La méthode des approximations successives nous fournira une suite de fonctions

$$\begin{array}{cccc}
 y_0 = \varepsilon, & z_0 = \varepsilon, & \dots, & u_0 = \varepsilon, \\
 y_1, & z_1, & \dots, & u_1, \\
 \dots, & \dots, & \dots, & \dots, \\
 y_n, & z_n, & \dots, & u_n,
 \end{array}$$

et toutes ces fonctions sont supérieures à ε .

Montrons que cette suite a une limite. Prenons, en effet, les équations dont nous écrivons seulement la première,

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2(y_n - y_{n-1})}{dx^2} + f_1(y_{n-1}, z_{n-1}, \dots, u_{n-1}) \\ - f_1(y_{n-2}, z_{n-2}, \dots, u_{n-2}) = 0, \end{array} \right.$$

et désignons par

$$k_{1,1}, \quad k_{1,2}, \quad \dots, \quad k_{1,m}$$

les valeurs des dérivées partielles

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial z}, \quad \dots, \quad \frac{\partial f_1}{\partial u}$$

pour $y = z = \dots = u = \varepsilon$.

Considérons alors le système d'équations linéaires

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 U}{dx^2} + k_{1,1} U + k_{1,2} V + \dots + k_{1,m} W = 0, \\ \frac{d^2 V}{dx^2} + k_{2,1} U + k_{2,2} V + \dots + k_{2,m} W = 0, \\ \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \\ \frac{d^2 W}{dx^2} + k_{m,1} U + k_{m,2} V + \dots + k_{m,m} W = 0. \end{array} \right.$$

Soit, à cet effet, η une quantité positive et désignons par

$$\begin{array}{cccc} h_{11}, & h_{12}, & \dots, & h_{1m}, \\ h_{21}, & h_{22}, & \dots, & h_{2m}, \\ \dots, & \dots, & \dots, & \dots, \\ h_{m1}, & h_{m2}, & \dots, & h_{mm}, \end{array}$$

le Tableau des dérivées partielles du premier ordre des f pour

$$y = z = \dots = u = \eta.$$

On peut choisir η de telle sorte que la quantité α_1 , relative au système analogue à (15) où les k ont été remplacés par les h , soit précisément égale à α . Ceci est évident, puisque, pour $\eta = 0$, $\alpha_1 = \alpha$ et que, pour $\eta = \infty$, $\alpha_1 = \beta$. On prendra alors pour y_0, z_0, \dots, u_0 les intégrales du système (λ) (voir *loc. cit.*) s'annulant pour $x = 0$ et pour $x = a$. Comme ces intégrales ne sont déterminées qu'à un facteur constant près, nous les prenons telles qu'elles ne dépassent pas η .

Il est clair que pour ces fonctions les inégalités (16) sont vérifiées, puisque

$$f_i(y_0, z_0, \dots, u_0) > h_{i,1}y_0 + h_{i,2}z_0 + \dots + h_{i,m}u_0.$$

Nous prendrons alors, pour commencer les approximations, les fonctions y_0, z_0, \dots, u_0 , et comme les y_n, z_n, \dots, u_n iront certainement en croissant avec n , nous sommes assuré d'avoir des limites qui ne seront pas nulles.

22. On étudierait facilement les cas de

$$a = \alpha \quad \text{et} \quad a = \beta.$$

Quand a tend vers α , les intégrales tendent vers zéro, et quand a tend vers β les intégrales augmentent indéfiniment : je veux dire que pour une valeur quelconque x (distincte de 0 et β) les valeurs de y, z, \dots, u augmentent indéfiniment quand a tend vers β .

23. Indiquons un exemple d'équations différentielles auxquelles

s'appliquent les principes que nous venons d'indiquer. Prenons les deux équations

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \alpha y + \beta(1 - e^{-y}) + \alpha' z + \beta'(1 - e^{-z}) = 0,$$

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + \gamma y + \delta(1 - e^{-y}) + \gamma' z + \delta'(1 - e^{-z}) = 0,$$

les α , β , γ et δ étant des constantes positives.

Les seconds membres sont des fonctions croissantes de y et z (on se borne à y et z positifs); de plus leurs dérivées partielles du premier ordre décroissent quand les valeurs de y et z augmentent. Nous devons encore considérer l'équation en S

$$\begin{vmatrix} \alpha + \beta e^{-y} - S^2 & \alpha' + \beta' e^{-z} \\ \gamma + \delta e^{-y} & \gamma' + \delta' e^{-z} - S^2 \end{vmatrix} = 0.$$

La plus grande racine positive S de cette équation est une fonction de y et z . Il faut, pour appliquer la théorie, qu'elle aille en décroissant quand les valeurs de y et z augmentent. Il serait aisé de rechercher les conditions auxquelles doivent satisfaire les constantes pour qu'il en soit ainsi. Nous nous bornerons à remarquer que l'hypothèse nécessaire sera certainement réalisée, si

$$\alpha\gamma' - \gamma\alpha' < 0,$$

$$\beta\gamma' - \alpha'\delta < 0,$$

$$\alpha\delta' - \beta'\gamma < 0,$$

$$\beta\delta' - \beta'\delta < 0.$$

24. Pour le cas d'une seule équation, indiquons un exemple où l'on pourra faire aussi, d'après les mêmes principes, l'étude des intégrales correspondant à y négatif, et qui est algébrique,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \alpha y + \frac{\beta y}{\sqrt{1+y^2}} = 0,$$

α et β étant des fonctions positives de x .

La fonction positive

$$f(x, y) = \alpha y + \frac{\beta y}{\sqrt{1 + y^2}}$$

augmente avec y , et sa dérivée

$$\frac{df}{dy} = \alpha + \frac{\beta}{(1 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

va bien en décroissant en même temps que y augmente.

V. — SUPPRESSION DE QUELQUES HYPOTHÈSES RESTRICTIVES.

25. Les conditions imposées aux fonctions entrant dans les équations différentielles sont susceptibles d'être un peu élargies. On peut prendre, en quelque sorte, ces fonctions comme fonctions de comparaison auxquelles on cherchera à en comparer d'autres.

Prenons les équations (en nous bornant, pour abréger, au cas de deux équations)

$$(17) \quad \begin{cases} \frac{d^2 y}{dx^2} + f(y, z) = 0, \\ \frac{d^2 z}{dx^2} + \varphi(y, z) = 0. \end{cases}$$

Supposons que les fonctions positives f et φ s'annulent pour $y = z = 0$ et soient, comme précédemment, croissantes avec y et z (nous ne considérons pour le moment que y et z positifs). De plus, quand y et $z < l$, les dérivées du premier ordre sont supposées décroissantes dans les mêmes conditions.

On voit que nous faisons seulement dans l'intervalle $(0, l)$ pour les dérivées du premier ordre les hypothèses que nous faisons tout à l'heure de zéro à l'infini; l pourra être très petit.

En outre, nous supposons maintenant qu'on peut trouver deux fonctions positives $F(y, z)$ et $\Phi(y, z)$ s'annulant pour $y = 0, z = 0$ définies pour

$$y < L, \quad z < L,$$

et telles que dans cet intervalle

$$f(y, z) \leq F(y, z), \quad \varphi(y, z) \leq \Phi(y, z).$$

les fonctions F et Φ satisfaisant dans l'intervalle $(0, L)$ aux conditions que remplissaient les fonctions f de la Section précédente; de plus, les dérivées partielles du premier ordre des fonctions F et Φ ont respectivement les mêmes valeurs pour $y = z = 0$ que les dérivées de f et φ .

Si nous considérons les deux équations

$$(18) \quad \begin{cases} \frac{d^2 Y}{dx^2} + F(Y, Z) = 0, \\ \frac{d^2 Z}{dx^2} + \Phi(Y, Z) = 0, \end{cases}$$

nous pouvons leur appliquer la théorie de la Section précédente, en nous bornant toutefois à l'intervalle que j'appelle (α, γ) tel que l'intégrale s'annule pour $x = 0$ et $x = \alpha$,

$$\alpha < a < \gamma.$$

reste inférieure à L .

Nous voulons démontrer que les équations (17) admettront des intégrales non nulles identiquement s'annulant pour $x = 0$ et pour $x = \alpha$, la quantité α satisfaisant aux inégalités précédentes.

Tout d'abord, si α est très voisin de α , nous avons, d'après la théorie de la Section précédente une intégrale toujours positive s'annulant pour $x = 0$ et $x = \alpha$ et restant très voisine de zéro.

Quand α est quelconque entre α et γ , la méthode des approximations successives nous donne certainement une limite; c'est ce qui résulte de la comparaison des systèmes d'équations (17) et (18). Puisqu'il y a une limite pour ces dernières équations, il y en aura une aussi pour les premières.

On pourrait craindre que les valeurs trouvées pour y et z ne fussent identiquement nulles. On peut démontrer de la manière suivante qu'il n'en est rien. Soit α , une quantité très voisine de α ; on pourra (voir n° 21) déterminer deux fonctions y_0 et z_0 s'annulant pour $x = 0$

et $x = \alpha_1$, telles que

$$\frac{d^2 y_0}{dx^2} + f(y_0, z_0) > 0,$$

$$\frac{d^2 z_0}{dx^2} + \varphi(y_0, z_0) > 0.$$

Pour déterminer les intégrales y et z s'annulant pour $x = 0$ et $x = \alpha$, on prendra pour commencer les approximations les fonctions y_0 et z_0 précédentes de 0 à α_1 et de α_1 à α , on prendra $y_0 = 0$, $z_0 = 0$. A la vérité, les fonctions y_0 et z_0 ainsi constituées n'ont pas leurs dérivées continues de 0 à α , mais il est facile de se rendre compte que cela n'a pas d'importance pour l'emploi de la méthode. On déterminera la suite de fonctions approchées, et dans cette suite les y_n et les z_n iront en augmentant constamment avec l'indice n : la limite ne pourra donc être nulle.

26. Indiquons une équation où l'on pourra appliquer ce qui précède. Nous avons considéré plus haut l'équation

$$(19) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + \alpha y + \frac{\beta y}{\sqrt{1+y^2}} = 0,$$

α et β étant des fonctions positives de x .

Considérons maintenant l'équation

$$(20) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + \alpha y + \frac{\beta y}{\sqrt{1+y^2}} - \gamma \sin^2 y = 0,$$

γ étant une fonction positive de x et telle que, pour toute valeur de x que nous allons considérer,

$$\alpha \geq \gamma.$$

La fonction

$$\varphi(y) = \alpha y + \frac{\beta y}{\sqrt{1+y^2}} - \gamma \sin^2 y;$$

où nous mettons seulement y en évidence, a pour dérivée

$$\varphi'(y) = \alpha + \frac{\beta}{(1+y^2)^{\frac{3}{2}}} - \gamma \sin^2 y,$$

cette dérivée sera toujours positive et par conséquent $\varphi(y)$ ira en croissant avec y . $\varphi'(y)$ n'ira pas toujours en décroissant quand y variera de 0 à ∞ , mais il en sera ainsi dans le voisinage de $y = 0$, puisque

$$\varphi''(0) = -2\gamma.$$

D'autre part, en posant

$$\Phi(y) = \alpha y + \frac{\beta y}{\sqrt{1+y^2}},$$

on aura

$$\varphi(y) < \Phi(y).$$

Enfin on a

$$\varphi'(0) = \Phi'(0).$$

Nous pouvons donc appliquer les remarques précédentes, et l'on aura certainement une intégrale s'annulant pour $x = 0$ et $x = a$, en prenant a dans l'intervalle défini pour l'équation (19).



CHAPITRE III.

APPLICATIONS DES RÉSULTATS PRÉCÉDENTS.



VI. — CAS D'UNE SEULE ÉQUATION.

27. Reprenons l'équation

$$(E) \quad \frac{d^2y}{dx^2} + f(x, y) = 0,$$

en faisant les mêmes hypothèses qu'au Chapitre précédent. Ces hypothèses étaient relatives à y positif. Si nous voulons étudier des intégrales devenant négatives, il est indispensable de compléter ces hypothèses. Supposons donc que l'équation obtenue en changeant y en

— y , c'est-à-dire l'équation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - f(x, -y) = 0$$

rentre dans le même type que l'équation (E), pour y positif.

Toutes ces conditions étant remplies, nous sommes assuré de pouvoir suivre une intégrale quelconque pour toute valeur de x , si, bien entendu, nous supposons $f(x, y)$ définie et continue pour toute valeur réelle de x . L'équation (E) appartient en effet au type d'équations au sujet desquelles nous avons démontré (n° 2) un théorème général.

Toute intégrale de l'équation (E) devra nécessairement s'annuler. — Supposons en effet qu'une intégrale ne s'annule pas à partir de $x = 0$. Désignons encore par α et β (n° 14) les deux nombres relatifs à $x = 0$, qui ont joué un rôle fondamental dans toute la théorie du Chapitre précédent. Si l'intégrale considérée ne s'annule pas à partir de $x = 0$, nous aurons une intégrale restant toujours positive et différente de zéro dans un intervalle $(0, h)$,

h étant supérieur à β .

On pourra alors obtenir une intégrale, non identiquement nulle, s'annulant pour $x = 0$ et pour $x = h$, et restant toujours positive dans cet intervalle, ce qui est en contradiction avec les résultats précédemment obtenus, puisque c'est seulement dans l'intervalle $(0, \alpha)$, où

$$\alpha < a < \beta,$$

que l'on peut déterminer une intégrale s'annulant aux deux extrémités et toujours positive dans l'intervalle.

On peut encore démontrer de la manière suivante le théorème précédent, en remarquant que, si α est inférieur à β , mais en est très voisin, l'intégrale qui s'annule pour $x = 0$ et pour $x = \alpha$ devient très grande (n° 16); la courbe intégrale que nous étudions et cette seconde courbe intégrale auront donc au moins deux points communs, et, par suite, nous aurions deux intégrales positives prenant les mêmes valeurs pour deux valeurs de x , ce qui est impossible.

L'intégrale s'annulant une fois devra s'annuler une infinité de fois, et, comme nous l'avons dit d'une manière générale, on pourra suivre sa valeur de proche en proche.

La courbe représentée par toute intégrale aura donc la forme d'une sinusoïde, et l'on peut dire que le problème de l'intégration pour l'équation (E) est résolu, si l'on entend par là qu'on peut suivre avec précision les valeurs de la fonction quand x augmente indéfiniment.

28. Soient deux valeurs x_0 et x_1 de x ($x_0 < x_1$). A un intervalle commençant en x_0 correspondent pour l'équation (E) une longueur β et une longueur α , en gardant toujours la même notation générale.

Considérons ensuite l'équation transformée de E

$$(E') \quad \frac{d^2 y}{dx'^2} - f(x_1 - x', -y) = 0.$$

Pour cette équation en x' , nous aurons, pour un intervalle commençant à $x' = 0$, une longueur β' et une longueur α' . Supposons maintenant que les quantités

$$x_0, \quad x_1 - \beta', \quad x_0 + \beta, \quad x_1$$

soient rangées par ordre croissant de grandeur et que de plus

$$x_1 - \alpha' > x_0 + \alpha.$$

Nous allons montrer qu'il existe au moins une intégrale de l'équation s'annulant pour $x = x_0$ et pour $x = x_1$.

Désignons par λ une arbitraire comprise entre

$$x_1 - \beta' \quad \text{et} \quad x_0 + \beta.$$

Il y aura une intégrale toujours positive de l'équation (E) s'annulant pour x_0 et λ ; de même l'équation (E') admettra une intégrale toujours positive s'annulant pour $x' = 0$ et $x' = x_1 - \lambda$ et, par suite, l'équation (E) admettra une intégrale toujours négative s'annulant

pour $x = x_1$ et $x = \lambda$. Les deux intégrales que nous venons de trouver peuvent-elles être la continuation l'une de l'autre. Il faut et il suffit que leur dérivée première ait la même valeur pour $x = \lambda$. Désignons par θ et θ' les angles compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ que font les tangentes aux deux courbes au point $x = \lambda$, $y = 0$ avec l'axe des x . L'équation

$$(21) \quad \theta - \theta' = 0$$

est une équation en λ , puisque θ et θ' dépendent de λ . Il faut montrer que cette équation a une racine entre $x_1 - \beta'$ et $x_0 + \beta$. Or, quand x est très voisin de $x_1 - \beta'$, θ' est voisin de $\frac{\pi}{2}$, tandis que θ a une valeur différente de $\frac{\pi}{2}$, donc $\theta - \theta'$ est négatif pour cette valeur de x ; au contraire, pour x voisin de $x_0 + \beta$, θ est voisin de $\frac{\pi}{2}$ tandis que θ' a une valeur différente de $\frac{\pi}{2}$; la différence $\theta - \theta'$ sera alors positive. L'équation (21) aura donc au moins une racine correspondant à une valeur λ_1 telle que

$$x_1 - \beta' < \lambda_1 < x_0 + \beta.$$

Est-on assuré que l'intégrale correspondante ne sera pas nulle identiquement? Oui, puisque autrement il faudrait que l'on eût à la fois

$$\lambda_1 < x_0 + \alpha, \quad \lambda_1 > x_1 - \alpha',$$

ce qui est incompatible avec nos hypothèses. Nous avons donc bien une intégrale non nulle identiquement et s'annulant pour $x = x_0$ et $x = x_1$; cette intégrale ne garde pas un signe invariable entre les deux valeurs extrêmes.

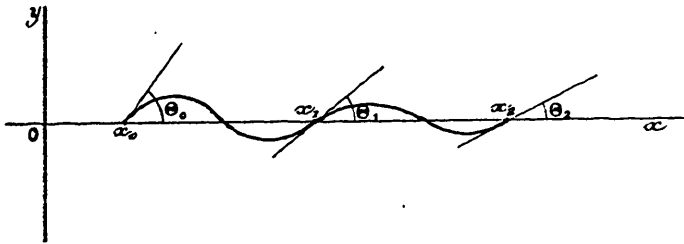
29. Occupons-nous maintenant d'un cas particulièrement intéressant : celui où la fonction $f(x, y)$ serait périodique par rapport à x et de période ω . Considérons un intervalle $(x_0, x_0 + \omega)$. En supposant remplies les hypothèses du n° 28, nous avons une intégrale s'annulant pour x_0 et $x_0 + \omega$. Cette intégrale ne sera pas en général périodique, car pour x_0 et $x_0 + \omega$ les dérivées n'auront pas la même valeur.

En écrivant cette condition, on aura une équation en x_0

$$F(x_0) = 0.$$

A chaque racine réelle de cette équation correspondra une solution périodique. Nous indiquerons tout à l'heure des cas assez étendus où il y a une solution périodique.

Je veux pour le moment rester dans le cas général. Soit x_0 une valeur arbitraire. On peut considérer l'intégrale.



Si l'on se donne l'angle Θ_0 ($0 < \Theta_0 < \frac{\pi}{2}$) de la tangente avec Ox pour l'intégrale s'annulant en x_0 , cette intégrale sera complètement déterminée. Elle sera d'abord positive, deviendra négative et s'annulera pour la seconde fois en x_1 ; soit Θ_1 , l'angle, compté comme l'indique la figure, de la tangente avec Ox ($0 < \Theta_1 < \frac{\pi}{2}$). L'angle Θ_1 est une fonction de Θ_0 et nous formons l'équation en Θ_0

$$\Theta_1 - \Theta_0 = 0.$$

Elle admettra la racine $\Theta_0 = 0$, puisque Θ_1 s'annule en même temps que Θ_0 . Elle peut admettre d'autres racines ou n'en pas admettre, en laissant de côté le cas limite $\Theta_0 = \Theta_1 = \frac{\pi}{2}$, qui ne correspond pas, à proprement parler, à une intégrale. Soit Θ_0^0 la plus petite racine, si il y a des racines (en dehors de zéro) : la différence

$$\Theta_1 - \Theta_0$$

aura un signe invariable quand Θ_0 variera de zéro à Θ_0^0 . Supposons

qu'elle soit négative et que par suite

$$\Theta_0 > \Theta_1,$$

lorsque l'on a

$$\Theta_0 < \Theta_0''.$$

Quand x_0 variera d'une manière continue dans un intervalle égal à ω , la racine minima Θ_0'' variera aussi d'une manière continue et nous allons supposer qu'elle n'atteigne jamais zéro : soit h son minimum.

Dans ces conditions, il est facile de chercher ce que devient pour x positif et très grand l'intégrale s'annulant pour une valeur arbitraire x_0 et dont la tangente en ce point fait avec l'axe des x un angle Θ_0 inférieur à h . D'après ce que nous venons de dire, au second point de rencontre x_1 de la courbe avec Ox , on a

$$\Theta_1 < \Theta_0.$$

Continuons à suivre la courbe; Θ_1 étant inférieur à Θ_0 est certainement inférieur à h , et, par suite, pour le troisième point de rencontre x_2 (à partir de x_0), on aura

$$\Theta_2 < \Theta_1.$$

On peut continuer ainsi indéfiniment; tous les angles positifs Θ vont aller en diminuant et ils auront par suite une limite. Cette limite ne pourra être que zéro. Plaçons-nous en effet dans l'hypothèse contraire, et soit k cette limite différente de zéro; pour n suffisamment grand Θ_n , diffère de k d'aussi peu que l'on veut. Or entre o et ω il existe un point x' homologue de x_n . L'intégrale s'annulant en x' et faisant avec Ox l'angle Θ_n conduira à un point suivant avec un angle Θ_n' plus petit que Θ_n , mais en différant d'une quantité finie; or cette branche de courbe devrait être identique à celle qui commence en x_n , et par suite Θ_n' devrait être égal à Θ_{n+1} , ce qui est, comme on le voit, impossible.

Il résulte de là que l'intégrale considérée tend vers zéro quand x augmente indéfiniment en étant positif.

On voit que l'équation considérée admet une infinité d'intégrales asymptotiques à $y = 0$, c'est-à-dire d'intégrales qui, à partir d'une valeur positive de x suffisamment grande différent de zéro d'aussi peu qu'on veut. Ces solutions sont différentes des solutions asymptotiques de M. Poincaré, et ne sont pas susceptibles, en général, de la représentation analytique en série d'exponentielles qui est, pour l'éminent auteur, la définition des solutions asymptotiques.

30. Nous avons dit que la recherche des solutions périodiques revient à la résolution d'une équation que nous avons appelée

$$F(x_0) = 0.$$

L'étude des racines de cette équation sera, en général, extrêmement difficile. Je veux indiquer cependant un cas intéressant où l'on pourra établir l'existence d'une solution périodique. Reprenons l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + f(x, y) = 0$$

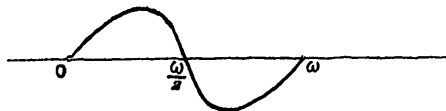
satisfaisant aux conditions des paragraphes précédents. La fonction $f(x, y)$ est périodique par rapport à x et de période ω . Supposons que

$$f(x, y) = f(\omega - x, y)$$

et que, de plus,

$$f(x, y) = -f(x, -y).$$

Partons de $x_0 = 0$. Si, comme nous l'admettons, les nombres α et β relatifs à l'origine comprennent entre eux $\frac{\omega}{2}$, il y aura une intégrale de l'équation s'annulant pour $x = 0$ et $x = \frac{\omega}{2}$ et qui ne sera pas iden-



tiquement nulle. Je dis que cette solution sera une solution périodique.

Prenons, en effet, la courbe symétrique par rapport à $x = \frac{\omega}{2}$, $y = 0$, de la branche de courbe dont nous venons de parler. Il est aisé de voir qu'elle satisfera à l'équation différentielle.

En désignant par $y = \varphi(x)$ l'équation de la première branche, on aura pour équation de la symétrique

$$y = -\varphi(\omega - x).$$

Donc

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\varphi''(\omega - x),$$

et nous devons montrer que l'équation

$$-\varphi''(\omega - x) + f[x, -\varphi(\omega - x)] = 0$$

est vérifiée. Or elle pourra s'écrire

$$\varphi''(\omega - x) + f[x, \varphi(\omega - x)] = 0,$$

et enfin, puisque $f(x, y) = f(\omega - x, y)$,

$$\varphi''(\omega - x) + f[\omega - x, \varphi(\omega - x)] = 0,$$

qui est manifestement vérifiée.

51. Indiquons un exemple. Soit l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{2}y \sin^2 x + (1 + \frac{1}{2} \cos^2 x) \frac{y}{\sqrt{1 + y^2}} = 0.$$

Nous regardons la fonction $f(x, y)$ correspondante comme admettant la période 2π , c'est-à-dire que $\omega = 2\pi$; on a bien en plus

$$f(x, y) = f(2\pi - x, y).$$

L'équation rentre d'ailleurs dans la classe qui nous occupe actuellement. Il nous faut chercher les deux nombres α et β pour recon-

naître si l'on a

$$(21) \quad \alpha < \pi < \beta.$$

Or α est le nombre relatif à l'équation linéaire

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y f'_y(x, 0) = 0,$$

et β correspond à l'équation linéaire

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y f'_y(x, \infty) = 0.$$

Nous aurons donc ici, pour la première équation,

$$(22) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + 2y = 0,$$

et, pour la seconde,

$$(23) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{2} y \sin^2 x = 0.$$

Pour l'équation (22) nous avons de suite $\alpha = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$; dans un intervalle moindre que $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ une intégrale s'annulant aux deux extrémités est identiquement nulle. Pour l'équation (23) nous ne pouvons trouver la valeur exacte de β (si ce n'est sous forme de série), mais nous pouvons avoir une limite inférieure de β et cela nous suffira. Si, en effet, au lieu de l'équation (23), on envisage l'équation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{2} y = 0,$$

le nombre β correspondant à l'équation (23) sera plus grand que celui qui correspond à cette dernière équation. Par suite

$$\beta > \pi\sqrt{2}.$$

Puisque $\alpha = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ et $\beta > \pi\sqrt{2}$, nous sommes assuré que les inégalités (21) sont vérifiées.

Il existe donc une intégrale de période 2π pour l'équation proposée, et nous pouvons l'obtenir sous forme de série convergente, par notre méthode d'approximations successives.

VII. — CAS DE PLUSIEURS ÉQUATIONS.

32. Ce que nous venons de dire relativement à une équation peut s'étendre à plusieurs équations pour ce qui concerne les solutions périodiques. Nous supposerons, comme nous l'avons fait plus haut, quoique ce ne soit nullement nécessaire, que la variable indépendante n'entre pas explicitement dans les équations. Prenons donc, en nous bornant à deux équations,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + f(y, z) = 0,$$

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + \varphi(y, z) = 0,$$

les fonctions f et φ satisfaisant aux conditions du Chapitre précédent. Nous aurons, comme il a été expliqué au n° 20, deux nombres α et β correspondant à ce système d'équations. Si l'on a

$$\alpha < \frac{\omega}{2} < \beta,$$

il existera une intégrale s'annulant pour une valeur arbitraire de x_0 , et pour $x_0 + \frac{\omega}{2}$. Nous pouvons supposer $x_0 = 0$.

Si maintenant nous faisons l'hypothèse que

$$f(-y, -z) = -f(y, z),$$

$$\varphi(-y, -z) = -\varphi(y, z),$$

nous allons établir que les équations admettront une solution périodique de période ω . On le voit de suite, puisqu'il suffit de prendre la courbe symétrique par rapport au point $(x = 0, y = \frac{\omega}{2})$ de la solution que nous avons définie plus haut pour avoir le prolongement de l'intégrale, et l'on obtient bien ainsi une solution périodique.

Ainsi notre système admet une infinité d'intégrales périodiques avec une période arbitraire ω . Ces solutions périodiques dépendent, par conséquent, de deux constantes arbitraires (la seconde constante étant x_0).

55. Donnons un exemple. Soient les deux équations

$$(24) \quad \begin{cases} \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{Ay}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{Bz}{\sqrt{1+z^2}} = 0, \\ \frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{Cy}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{Dz}{\sqrt{1+z^2}} = 0 \end{cases}$$

A, B, C, D étant des constantes positives. Conformément à la théorie générale, nous devons considérer l'équation

$$\begin{vmatrix} \frac{A}{(1+y^2)^{\frac{3}{2}}} - S^2 & \frac{B}{(1+z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{C}{(1+y^2)^{\frac{3}{2}}} & \frac{D}{(1+z^2)^{\frac{3}{2}}} - S^2 \end{vmatrix} = 0.$$

La plus grande racine positive S de cette équation est une fonction de y et z. Il faut pour appliquer la théorie qu'elle aille en décroissant quand les valeurs de y et z (positives) augmentent. En posant

$$\frac{1}{(1+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \lambda, \quad \frac{1}{(1+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \mu,$$

nous avons l'équation

$$\begin{vmatrix} A\lambda - S^2 & B\mu \\ C\lambda & D\mu - S^2 \end{vmatrix} = 0.$$

La plus grande racine positive S doit diminuer quand λ et μ vont en diminuant de *un* à *zéro*. On vérifie de suite qu'il en est certainement ainsi si

$$AD - BC < 0.$$

Les quantités désignées d'une manière générale par α et β sont ici

$$\beta = x,$$

$$\alpha = \frac{\pi}{S_0},$$

S_0 étant la racine de l'équation précédente correspondant à $\lambda = \mu = 1$, c'est-à-dire que l'on a

$$S_0^2 = A + D + \sqrt{(A + D)^2 + 4(BC - AD)}.$$

Nous pouvons donc affirmer que *les équations (24) admettent une intégrale de période ω , ω étant arbitraire, mais supérieur à $\frac{2\pi}{S_0}$.*

54. Dans ce qui précède, les fonctions f et φ étaient définies pour toutes valeurs de y et z , mais on peut, dans bien des cas, appliquer la théorie quand les fonctions sont définies seulement dans le voisinage de $y = z = 0$, ou quand elles jouissent seulement dans ce voisinage des propriétés nécessaires pour nos raisonnements; c'est une remarque que nous avons déjà faite (Section V) et qui est susceptible d'accroître beaucoup les cas où l'on pourra se servir de la méthode.

