JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

GEORGES HUMBERT

Sur quelques points de la théorie des courbes et des surfaces algébriques. Premier mémoire. Des involutions sur les courbes algébriques

Journal de mathématiques pures et appliquées 4e série, tome 10 (1894), p. 169-201.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1894_4_10__169_0>

Sur quelques points de la théorie des courbes et des surfaces algébriques ;

Par M. Georges HUMBERT.

PREMIER MÉMOIRE.

DES INVOLUTIONS SUR LES COURBES ALGÉBRIQUES.

1. Soit, sur une courbe algébrique quelconque, une série de groupes de n points, tels que chaque groupe soit déterminé d'une manière unique et sans exception si l'on en donne k points; on dira que ces groupes forment une *involution*, *d'ordre n* et *d'espèce k*.

D'après cela, les n points d'un groupe G de l'involution jouent un rôle symétrique dans la détermination du groupe, c'est-à-dire que si l'on en prend k au hasard, ces k déterminent *sans ambiguïté* les $n-k$ autres, et cette définition exclut les séries de groupes, d'espèce au moins égale à deux, dont chacun est constitué par l'ensemble de r groupes d'une même involution ($r > 1$).

L'exemple le plus simple d'involution est donné par les groupes de points mobiles que découpent, sur une courbe algébrique fixe, des courbes appartenant à un même système linéaire; or il est très digne de remarque que, sur une courbe algébrique générale, il n'existe pas d'autres involutions que celles ainsi déterminées (¹), et, de plus, si

(¹) Il y a une exception évidente si $n = k$, c'est-à-dire si tous les points de chaque groupe de l'involution sont arbitraires (*voir* le n° **2**).

une courbe admet une involution échappant à cette définition, l'involution est nécessairement d'espèce un et jouit de propriétés tout à fait spéciales.

L'examen de ces questions va nous occuper tout d'abord.

2. Considérons sur une courbe algébrique C, de genre p, ayant pour équation $f(x, y) = 0$, une involution I, d'ordre n et d'espèce k; désignons par G un quelconque des groupes de l'involution.

Il est clair que le seul cas intéressant est celui où n surpasse k, car si n était égal à k, chaque groupe serait formé par n points quelconques de la courbe et aucune fonction ne serait liée à l'involution; nous supposerons donc l'inégalité $n > k$.

Cela posé, soit une différentielle abélienne de première espèce appartenant à C, $g(x, y)\,dx$, que nous écrirons pour simplifier $g(x)\,dx$; $x_1, x_2, \ldots, x_n$ étant les n points d'un groupe G quelconque, formons la somme

$$g(x_1)\,dx_1 + g(x_2)\,dx_2 + \ldots + g(x_n)\,dx_n;$$

cette somme peut s'exprimer en fonction des coordonnées et des différentielles de k des points du groupe G, des points $x_1, x_2, \ldots, x_k$ par exemple, puisque k points déterminent le groupe. On a donc

$$\begin{aligned} g(x_1)\,dx_1 + g(x_2)\,dx_2 + \ldots + g(x_n)\,dx_n \\ = A_1\,dx_1 + A_2\,dx_2 + \ldots + A_k\,dx_k, \end{aligned}$$

$A_1, \ldots, A_k$ étant des fonctions de x_1, y_1; x_2, y_2; $\ldots$; x_k, y_k; de plus, ce sont des fonctions rationnelles, puisque le premier membre de l'équation précédente, et, par suite, le second, n'a qu'une valeur quand on se donne les k points $x_1, x_2, \ldots, x_k$ et les accroissements dx_1, $dx_2, \ldots, dx_k$, en vertu de la définition même de l'involution.

Or la fonction

$$\int g(x_1)\,dx_1 + \ldots + \int g(x_n)\,dx_n$$

ne devient jamais infinie sur la courbe C, puisque $\int g(x)\,dx$ est une intégrale de première espèce; il en est donc de même de l'intégrale de différentielle totale

$$\int A_1\,dx_1 + A_2\,dx_2 + \ldots + A_k\,dx_k,$$

et, par conséquent, l'intégrale $\int A_h\,dx_h$, où l'on donne à toutes les quantités x, sauf x_h, des valeurs constantes, reste aussi finie sur toute la courbe. Donc $A_h\,dx_h$ est une somme de différentielles abéliennes de première espèce par rapport à la variable x_h, et l'on a

$$A_h\,dx_h = H_1 g_1(x_h)\,dx_h + \ldots + H_p g_p(x_h)\,dx_h,$$

où $g_1(x)\,dx_1, \ldots, g_p(x)\,dx$ sont p différentielles abéliennes de première espèce, linéairement distinctes, appartenant à la courbe C considérée, de genre p; $H_1, \ldots, H_p$ sont indépendants de x_h et sont dès lors fonctions de $x_1, \ldots, x_{h-1}, x_{h+1}, \ldots, x_k$. Ces fonctions H sont d'ailleurs, d'après ce qui a été dit sur les A, des fonctions rationnelles des coordonnées des points dont elles dépendent, et comme l'intégrale $\int A_h\,dx_h$ doit rester finie quelles que soient les valeurs de ces coordonnées, il est évidemment nécessaire que $H_1, H_2, \ldots, H_p$ ne puissent devenir infinis, c'est-à-dire se réduisent à des constantes.

Donc enfin l'expression

$$g(x_1)\,dx_1 + \ldots + g(x_n)\,dx_n$$

est égale à la somme de k différentielles abéliennes de première espèce portant respectivement sur les variables $x_1, x_2, \ldots, x_k$, et comme les points $x_1, x_2, \ldots, x_k$ jouent un rôle symétrique dans la définition du groupe (c'est-à-dire peuvent être permutés entre eux sans que les points $x_{k+1}, \ldots, x_n$ changent), les k différentielles abéliennes dont il s'agit se réduisent nécessairement à une même différentielle, où l'on remplace successivement la variable par $x_1, x_2, \ldots, x_k$. On obtient ainsi la relation fondamentale

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} & g(x_1)\,dx_1 + g(x_2)\,dx_2 + \ldots + g(x_n)\,dx_n \\ & \quad = \gamma(x_1)\,dx_1 + \ldots + \gamma(x_k)\,dx_k, \end{aligned}\right.$$

$\gamma(x)\,dx$ désignant une différentielle de première espèce, qui peut d'ailleurs se réduire identiquement à zéro.

Si elle ne se réduit pas à zéro, c'est-à-dire si le second membre de (1) ne s'annule pas, on déduit de cette relation une conséquence importante. Le groupe G, en effet, est défini de la même manière en fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k$ qu'en fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}$; on a donc, en permutant x_k et x_{k+1} dans (1),

$$g(x_1)\,dx_1 + \ldots + g(x_n)\,dx_n = \gamma(x_1)\,dx_1 + \ldots + \gamma(x_{k+1})\,dx_{k+1},$$

d'où l'on déduit, en comparant à (1) $\gamma(x_k)\,dx_k = \gamma(x_{k+1})\,dx_{k+1}$, et, en général,

$$\gamma(x_1)\,dx_1 = \gamma(x_2)\,dx_2 = \ldots = \gamma(x_n)\,dx_n. \tag{2}$$

Cette relation, si l'on se donne un groupe initial, G_0, détermine x_2, $x_3, \ldots, x_n$ en fonction de x_1; il n'y aura donc pas k points arbitraires dans un groupe, ce qui montre que, pour une involution d'espèce supérieure à l'unité, les fonctions $\gamma(x)$ sont nulles, quelle que soit la différentielle de première espèce, $g(x)\,dx$, dont on est parti.

3. Donc, pour une involution I d'espèce supérieure à l'unité, on aura les p relations

$$(3)\qquad \begin{cases} g_1(x_1)\,dx_1 + g_1(x_2)\,dx_2 + \ldots + g_1(x_n)\,dx_n = 0, \\ g_2(x_1)\,dx_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + g_2(x_n)\,dx_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ g_p(x_1)\,dx_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + g_p(x_n)\,dx_n = 0; \end{cases}$$

$g_1(x)\,dx_1, \ldots, g_p(x)\,dx$ désignent toujours p différentielles abéliennes de première espèce appartenant à la courbe C. Bien entendu, pour certaines involutions d'espèce un, de semblables équations pourront avoir lieu.

Les involutions I pour chaque groupe desquelles les équations (3) sont vérifiées sont, comme nous allons l'établir, des involutions *rationnelles*, c'est-à-dire que leurs groupes sont ceux que découpent, sur la courbe C, des courbes appartenant à un même système linéaire.

En effet, les relations (3), lorsqu'on suppose que les points x_1, $x_2, \ldots, x_n$ ne satisfont pas à d'autres conditions, expriment, en vertu d'un théorème fondamental bien connu, que le groupe variable formé par ces n points est découpé sur la courbe proposée par des courbes adjointes à celle-ci et ne la rencontrant, en outre, qu'en des points fixes. Ces courbes adjointes constituent, comme on sait, un système linéaire, ayant une équation de la forme

$$(4) \qquad \lambda_1 \varphi_1(x,y) + \ldots + \lambda_\rho \varphi_\rho(x,y) = 0,$$

où $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\rho$ sont des polynomes en x, y, de même degré et $\lambda_1, \ldots, \lambda_\rho$ des constantes arbitraires. Quant à ρ, c'est un entier supérieur à k, puisqu'une des courbes (4) doit pouvoir passer par k points arbitraires de C.

Observons de plus que les polynomes $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\rho$ sont linéairement distincts, et même, si leur degré atteint ou surpasse le degré de C, qu'il n'existe aucune relation identique de la forme

$$(5) \qquad \mu_1 \varphi_1(x,y) + \ldots + \mu_\rho \varphi_\rho(x,y) = P(x,y) f(x,y),$$

$P(x,y)$ étant un polynome entier et $f(x,y)$ désignant le premier membre de l'équation de C.

D'après cela, tous les groupes de l'involution considérée I sont découpés sur la courbe C par *des* courbes appartenant au système linéaire (4); mais la réciproque n'est pas vraie, puisque, en général, il y a, entre les points $x_1, \ldots, x_n$ d'un groupe, d'autres relations que les équations (3). Pour qu'une courbe du système (4) détermine sur C un groupe de l'involution, il faut que les coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\rho$, correspondant à cette courbe, vérifient des relations algébriques, en nombre égal à $\rho - k - 1$; de plus, comme par k points arbitraires de C doit passer une et une seule des courbes ainsi isolées dans le système linéaire (4), il faut nécessairement que les $\rho - k - 1$ relations qui lient les λ soient du premier ordre : ce dernier point demande toutefois quelques explications, que nous allons présenter, pour rendre le raisonnement rigoureux.

4. On peut établir simplement, et nous démontrons ce lemme connu en note [1], que tout système de courbes algébriques indécomposables, tel que par k points quelconques du plan ne passe qu'une courbe du système, est un système linéaire.

---

[1] LEMME. — *Tout système algébrique de courbes planes indécomposables, tel que par k points quelconques du plan passe une seule courbe du système, est un système linéaire.*

Montrons que le théorème est vrai pour une valeur de k s'il est vrai pour la valeur $k-1$. Considérons à cet effet le système primitif, Σ, et, dans ce système, les courbes qui passent par un point A, quelconque d'ailleurs, du plan.

Le système (α) formé par ces courbes est $k-1$ fois infini; il est donc linéaire par hypothèse, et son équation est de la forme

$$(\alpha) \qquad \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_k f_k = 0,$$

les λ étant des constantes. Soit $f_0(x, y) = 0$ une autre courbe du système Σ ne passant pas par A; désignons par B un point quelconque de cette courbe. Les courbes du système Σ passant par B forment un système (β), $k-1$ fois infini, linéaire par conséquent; or parmi les courbes de ce nouveau système figurent la courbe $f_0 = 0$ et les courbes de la série (α) qui passent par B. Donc le système (β) a pour équation générale

$$(\beta) \qquad \lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_k f_k = 0,$$

les λ étant des constantes liées seulement par la relation

$$\lambda_1 f_1(x_0, y_0) + \ldots + \lambda_k f_k(x_0, y_0) = 0,$$

où x_0, y_0 sont les coordonnées de B. Or x_0, y_0 satisfont seulement à la relation $f_0(x_0, y_0) = 0$; on peut donc toujours trouver un point B tel qu'on ait simultanément

$$\lambda_1 f_1(x_0, y_0) + \ldots + \lambda_k f_k(x_0, y_0) = 0,$$
$$f_0(x_0, y_0) = 0,$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ étant des constantes *données*, quelconques d'ailleurs. En d'autres termes, $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_k$ étant des constantes quelconques, on peut toujours trouver un système (β), contenu dans Σ, comprenant la courbe

$$\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_k f_k = 0;$$

cette courbe appartient donc à Σ, quelles que soient les valeurs des k paramètres dont elle dépend, et par suite le système k fois infini, Σ, est linéaire.

Le théorème est d'ailleurs vrai pour $k = 1$. En ce cas, en effet, deux courbes quelconques du système ne peuvent se couper qu'en des points fixes; soient

Or considérons la série formée, dans le système linéaire (4), par les courbes de ce système qui découpent sur C les groupes de l'involution I; soit S cette série. La courbe générale de la série S est indécomposable, sinon les groupes de I, qui sont découpés sur C par les courbes de la série, seraient formés de points jouant un rôle dissymétrique, ou bien chaque groupe de I se composerait de groupes d'une involution d'ordre inférieur, cas que nous écartons.

Par k points choisis au hasard sur C ne passe qu'une courbe de la série S : si en effet il en passait deux, comme ces courbes passeraient aussi par les $n-k$ points de C qui, avec les k points primitifs, forment un groupe de l'involution, et que d'ailleurs toutes les courbes de la série coupent C aux mêmes points fixes, on pourrait, en désignant par $S_1 = 0$ et $S_2 = 0$ les équations des deux courbes, trouver une constance θ telle que la courbe $S_1 + \theta S_2 = 0$ passât par un nouveau point de C, ce qui nécessite que le polynome $S_1 + \theta S_2$ soit identiquement divisible par $f(x, y)$. Il y aurait ainsi, pour certaines valeurs non nulles des constantes μ, une relation de la forme (5), ce qui est inexact.

Cela posé, distinguons deux cas : ou bien par k points *quelconques du plan* ne passe qu'une courbe de la série S, et celle-ci est linéaire, d'après le lemme; ou bien par ces k points passent r courbes de la série ($r > 1$). Ce dernier cas se subdivise lui-même : ou bien par $k-1$ points quelconques du plan et un point quelconque de C passent moins de r courbes distinctes de la série, ce qui exige que deux au moins des r courbes qui doivent passer par les k points ainsi choisis coïncident; ou bien, par ces k points passent r courbes distinctes de

---

$f_1 = 0$, $f_2 = 0$ deux d'entre elles, d'ordre N : elles ont N^2 points communs, par lesquels passe nécessairement toute courbe $\psi = 0$ du système. Il en résulte qu'on peut déterminer la constante θ de façon que la courbe

$$f_1 + \theta f_2 = 0$$

passe par un nouveau point choisi sur ψ, qu'elle coupe ainsi en $N^2 + 1$ points. Donc, si ψ est indécomposable, on a identiquement

$$\psi = f_1 + \theta f_2,$$

ce qui démontre la proposition.

la série S. Dans la première hypothèse on voit que C est l'*enveloppe* (ou une partie de l'enveloppe) des courbes de la série qui passent par $k-1$ points, quelconques d'ailleurs, du plan, c'est-à-dire que toutes les courbes de la série touchent C en un ou plusieurs points *mobiles :* ce résultat est absurde, puisque ces courbes découpent sur C les groupes de l'involution (chaque courbe ne coupant C qu'en n points mobiles qui forment un groupe) et que d'ailleurs les points d'un groupe général sont évidemment distincts deux à deux. Dans la deuxième hypothèse on distinguera de même deux cas, selon que par $k-2$ points du plan et deux points de C il passe r ou du moins de r courbes de S et, en continuant les mêmes raisonnements, on arrivera à une absurdité ou à l'hypothèse finale, également inadmissible, que par k points de C passent plusieurs courbes distinctes de la série S.

5. La conclusion de cette analyse est que la série S est une série linéaire; en d'autres termes, sur une courbe algébrique C, les involutions d'espèce supérieure à l'unité sont : 1° des involutions dont l'espèce est égale à l'ordre; 2° des involutions rationnelles, c'est-à-dire dont les groupes sont découpés sur la courbe par les courbes d'un même système linéaire.

Il existe, bien entendu, des involutions rationnelles d'espèce un.

6. Étudions maintenant les involutions spéciales pour lesquelles une au moins des différentielles désignées, au n° **2**, par $\gamma(x)\,dx$ n'est pas nulle. On a trouvé les relations

$$(1)\qquad \begin{cases} g(x_1)\,dx_1+g(x_2)\,dx_2+\ldots+g(x_n)\,dx_n \\ \quad =\gamma(x_1)\,dx_1+\gamma(x_2)\,dx_2+\ldots+\gamma(x_k)\,dx_k, \end{cases}$$

$$(2)\qquad \gamma(x_1)\,dx_1=\gamma(x_2)\,dx_2=\ldots=\gamma(x_n)\,dx_n;$$

$g(x)\,dx$ est une différentielle quelconque de première espèce; $\gamma(x)\,dx$ est également une différentielle de cette espèce, qui est déterminée lorsque la première est donnée.

Les équations (2) montrent, comme on l'a dit au n° **2**, que $x_2, \ldots, x_n$ sont des fonctions de x_1, c'est-à-dire que l'involution est d'espèce un;

on a donc $k = 1$, et les relations précédentes deviennent

$$g(x_1)\,dx_1 + \ldots + g(x_n)\,dx_n = \gamma(x_1)\,dx_1, \tag{6}$$

$$\gamma(x_1)\,dx_1 = \gamma(x_2)\,dx_2 = \ldots = \gamma(x_n)\,dx_n. \tag{7}$$

Si la différentielle $\gamma(x)\,dx$ est égale, à un facteur constant près, à la différentielle $g(x)\,dx$, ce facteur sera nécessairement, d'après (6) et (7), égal à n; en ce cas l'équation (6) sera une conséquence des équations (7), que l'on conservera seules. Si $\gamma(x)\,dx$ et $g(x)\,dx$ sont linéairement distincts, on posera

$$G(x)\,dx = g(x)\,dx - \frac{1}{n}\gamma(x)\,dx;$$

$G(x)\,dx$ sera une différentielle abélienne de première espèce, et les relations (6) et (7) s'écriront

$$G(x_1)\,dx_1 + G(x_2)\,dx_2 + \ldots + G(x_n)\,dx_n = 0,$$
$$\gamma(x_1)\,dx_1 = \gamma(x_2)\,dx_2 = \ldots = \gamma(x_n)\,dx_n.$$

En considérant successivement, à la place de $g(x)$, p différentielles de première espèce linéairement distinctes, on obtient ainsi deux séries de différentielles de cette espèce,

$$G_1(x)\,dx,\quad G_2(x)\,dx,\quad \ldots,\quad G_q(x)\,dx$$

et

$$\gamma_1(x_1),\quad \ldots,\quad \gamma_\varpi(x)\,dx,$$

linéairement distinctes entre elles et de nombre total p, vérifiant les relations

$$(8)\quad \begin{cases} G_1(x_1)\,dx_1 + G_1(x_2)\,dx_2 + \ldots + G_1(x_n)\,dx_n = 0, \\ G_2(x_1)\,dx_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + G_2(x_n)\,dx_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ G_q(x_1)\,dx_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + G_q(x_n)\,dx_n = 0, \end{cases}$$

$$(9)\quad \begin{cases} \gamma_1(x_1)\,dx_1 = \gamma_1(x_2)\,dx_2 = \ldots = \gamma_1(x_n)\,dx_n, \\ \gamma_2(x_1)\,dx_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \gamma_2(x_n)\,dx_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \gamma_\varpi(x_1)\,dx_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \gamma_\varpi(x_n)\,dx_n. \end{cases}$$

On a d'ailleurs

$$q + \varpi = p.$$

7. Ces relations importantes font connaître la propriété caractéristique des courbes C, qui admettent des involutions non rationnelles.

Considérons en effet deux fonctions symétriques quelconques des coordonnées des n points d'un groupe de l'involution, par exemple, pour fixer les idées, les fonctions $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ et $y_1 + y_2 + \ldots + y_n$. Le groupe étant déterminé quand on se donne un de ses points, x_h, y_h, les deux fonctions précédentes s'exprimeront rationnellement en x_h, y_h; soient $\mathcal{F}_1(x_h, y_h)$ et $\mathcal{F}_2(x_h, y_h)$ ces expressions : il est clair que les fonctions $\mathcal{F}_1(x, y)$ et $\mathcal{F}_2(x, y)$ ne changent pas si l'on donne successivement à x et y les valeurs des coordonnées des points d'un même groupe. Cela posé, à un point x, y de C faisons correspondre un point X, Y par la transformation

$$(10) \qquad \mathrm{X} = \mathcal{F}_1(x, y), \qquad \mathrm{Y} = \mathcal{F}_2(x, y),$$

le point X, Y décrira une courbe $\mathfrak{C}$; et, d'après ce qui précède, à un point de C correspondra un seul point de $\mathfrak{C}$, à un point de $\mathfrak{C}$ correspondront n points de C, formant un groupe de l'involution [1].

Le genre de la courbe $\mathfrak{C}$ se détermine aisément. Soit en effet $\mathcal{G}(\mathrm{X})\, d\mathrm{X}$ une différentielle abélienne de première espèce le long de cette courbe; on aura, en vertu des équations (10),

$$\mathcal{G}(\mathrm{X})\, d\mathrm{X} = g(x)\, dx,$$

$g(x)\, dx$ étant une différentielle abélienne, le long de C, différentielle qui sera évidemment de première espèce. D'ailleurs X et Y ne chan-

[1] Il peut toutefois arriver qu'à un point de $\mathfrak{C}$ correspondant, sur C, les points de deux (ou plusieurs) groupes de l'involution : il faut pour cela que les fonctions $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ aient les mêmes valeurs pour les points de deux (ou plusieurs) groupes, dont l'un est arbitraire, c'est-à-dire dans le cas considéré, il faut que les groupes G puissent être associés deux à deux de telle sorte que les deux groupes d'un même couple aient même centre des moyennes distances. Il est bien évident qu'on peut toujours éviter ces cas singuliers par un choix convenable des deux fonctions symétriques primitives.

gent pas si l'on remplace, dans leurs expressions (10), x et y par les coordonnées des points d'un même groupe de l'involution; il en est donc de même de $\mathcal{G}(\mathrm{X})\,d\mathrm{X}$ et, par suite, il vient

$$g(x_1)\,dx_1 = g(x_2)\,dx_2 = \ldots = g(x_n)\,dx_n,$$

ce qui montre que la différentielle $g(x)\,dx$ est une combinaison linéaire et homogène des différentielles $\gamma_1(x)\,dx, \ldots, \gamma_\varpi(x)\,dx$.

Inversement une différentielle $\gamma_h(x)\,dx$, où l'on remplace x et y par leurs valeurs en fonction de X et Y, déduites de (10), prend la forme $\mathcal{G}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})\,d\mathrm{X}$, où $\mathcal{G}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ est rationnel en X et Y; en effet, la fonction $\gamma_h(x)\dfrac{dx}{d\mathrm{X}}$ a, d'après (9), la même valeur pour tous les points d'un groupe de l'involution et n'a dès lors qu'une valeur en chaque point X, Y de la courbe $\mathcal{C}$.

Il résulte de cette analyse que la courbe $\mathcal{C}$ a autant de différentielles distinctes de première espèce qu'il y a de différentielles $\gamma(x)\,dx$ sur la courbe C, c'est-à-dire ϖ; la courbe $\mathcal{C}$ est donc de genre ϖ.

Ainsi, la courbe C est liée à une autre courbe algébrique $\mathcal{C}$, de telle sorte qu'à un point de C corresponde un seul point de $\mathcal{C}$, et qu'à un point de $\mathcal{C}$ correspondent n points de C : c'est ce qu'on appelle une *transformation* $(1, n)$.

8. Réciproquement si deux courbes C et $\mathcal{C}$ sont liées par une transformation $(1, n)$ la courbe C admet une involution, d'espèce un, dont les groupes sont formés par les n points qui correspondent à un point de $\mathcal{C}$; cette involution n'est pas rationnelle, du moins si la courbe $\mathcal{C}$ n'est pas unicursale. En effet, d'après les raisonnements du paragraphe précédent, aux ϖ différentielles de première espèce appartenant à $\mathcal{C}$ correspondent ϖ différentielles de première espèce, $\gamma(x)\,dx$, appartenant à C, et qui gardent la même valeur en tous les points d'un groupe.

9. Observons encore que la relation

$$\gamma(x)\,dx = \mathcal{G}(\mathrm{X})\,d\mathrm{X}$$

montre que les points de C où s'annule $\gamma(x, y)$ sont : 1° les points qui correspondent aux points de $\mathfrak{C}$ où s'annule $\mathfrak{F}(X, Y)$; 2° les points où $\frac{dx}{dX}$ devient infini, c'est-à-dire les points doubles de l'involution sur la courbe C. Or l'intégrale $\gamma(x)\,dx$ est de la forme $\frac{F(x,y)}{f'_y}\,dx$, $F(x, y)$ étant le premier membre de l'équation d'une courbe adjointe à C, d'ordre $n-3$; les points où $\gamma(x,y)$ s'annule sont, comme on sait, les points (non singuliers) où la courbe $F(x, y) = 0$ coupe C, et sont en nombre égal à $2(p-1)$. En désignant par d le nombre des points doubles de l'involution, on a donc la relation

$$2(p-1) = 2(\varpi - 1)n + d\,(^1),$$

qui montre que p est toujours supérieur à ϖ (²).

10. Les considérations précédentes établissent également qu'une courbe C, de genre p, lorsqu'elle admet une involution non rationnelle, a nécessairement ϖ intégrales de première espèce réductibles au genre $\varpi(\varpi < p)$; la réciproque n'est pas exacte en général, mais elle le devient si $\varpi = 1$.

En ce cas, en effet, par hypothèse, une intégrale abélienne $\int g(x,y)\,dx$, appartenant à C, se réduit à une intégrale elliptique de première espèce; si donc on pose

$$\int g(x,y)\,dx = u,$$

à chaque point (x, y) de C correspond, par cette équation, une seule valeur de u, à des périodes près, et, par suite, un seul point d'une courbe quelconque, $\mathfrak{C}$ de genre un, dont les coordonnées des points sont fonctions doublement périodiques de u. Inversement à un point

(¹) Cette formule est un cas particulier de la formule de M. Zeuthen, relative aux genres de deux courbes qui se correspondent algébriquement.

(²) Il y a exception toutefois si $p = \varpi = 1$ et $d = 0$. L'involution sur la courbe de genre un, C, est alors formée par les points dont les arguments elliptiques sont de la forme $u + \frac{k\mathfrak{P}}{n}$, $\mathfrak{P}$ étant une période et k un entier variable de 0 à $n-1$.

de $\mathfrak{C}$ correspondent n points de C, n étant un nombre entier bien déterminé, puisque la relation entre les deux courbes est évidemment algébrique.

11. En résumé :

Sur une courbe algébrique, les involutions d'espèce supérieure à l'unité sont :

1° *Ou des involutions dont l'espèce est égale à l'ordre, c'est-à-dire dont chaque groupe est formé par n points arbitraires de la courbe;*

2° *Ou des involutions rationnelles, c'est-à-dire dont les groupes sont ceux que découpent, sur la proposée, des courbes appartenant à un même système linéaire.*

Les involutions non rationnelles, en dehors de celles dont l'espèce égale l'ordre, sont toutes d'espèce un, et il n'en existe pas sur une courbe prise au hasard.

Si une courbe C, *de genre p, admet une involution non rationnelle d'espèce un, elle est liée à une courbe $\mathfrak{C}$, de genre ϖ $(\varpi < p)$, de telle sorte qu'à un point de* C *corresponde un point de $\mathfrak{C}$ et qu'à un point de $\mathfrak{C}$ correspondent n points de* C; *les groupes de n points ainsi définis sur $\mathfrak{C}$ forment l'involution.*

La réciproque de cette dernière proposition est vraie ([1]).

En désignant par d le nombre des points doubles de l'involution, on a

$$2(p-1) = 2n(\varpi - 1) + d.$$

Enfin, si l'on appelle *genre* de l'involution le nombre ϖ qui représente le genre de la courbe $\mathfrak{C}$, on peut dire que :

Toute courbe qui a une intégrale de première espèce réductible aux intégrales elliptiques admet une involution de genre un, et réciproquement.

12. *Remarque I.* — Une courbe C ne peut admettre une infinité

([1]) Si l'involution de première espèce est rationnelle, le théorème s'applique encore, seulement la courbe $\mathfrak{C}$ est unicursale.

continue d'involutions non rationnelles (d'espèce un). Supposons, en effet, qu'il y ait sur C une série d'involutions non rationnelles, d'ordre n, dépendant d'un paramètre; la dépendance sera évidemment algébrique.

Or on a trouvé, en désignant par $g(x)\,dx$ une différentielle de première espèce quelconque sur C, la relation (6),

$$(6)\qquad g(x_1)\,dx_1 + \ldots + g(x_n)\,dx_n = \gamma(x_1)\,dx_1;$$

s'il y a une série continue d'involutions d'ordre n, $\gamma(x)\,dx$ sera une différentielle abélienne de la forme

$$\gamma(x)\,dx = \lambda_1 g_1(x)\,dx + \lambda_2 g_2(x)\,dx + \ldots + \lambda_p g_p(x)\,dx,$$

$\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ étant des fonctions algébriques d'une variable, v. Une au moins de ces fonctions devenant infinie pour une valeur convenable de v, le second membre de (6), ou plutôt son intégrale (par rapport à x_1) serait infini pour cette valeur de v [1], tandis que l'intégrale au premier membre garde toujours une valeur finie. Il y a donc une contradiction, et, par suite :

Sur une courbe algébrique il ne peut exister une série continue d'involutions irrationnelles de même ordre.

13. *Remarque II.* — Le cas d'une involution irrationnelle du second ordre ($n = 2$) mérite une mention spéciale. Les relations (8)

---

[1] Le second membre de (6) devient bien infini si une ou plusieurs des quantités λ deviennent infinies, car pour des valeurs de v voisines de la valeur critique v_0, on peut le mettre sous la forme

$$\frac{1}{(v-v_0)^h}\,[\lambda'_1 g_1(x_1)\,dx_1 + \ldots + \lambda'_p g_p(x_1)\,dx_1] + \ldots,$$

$\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots$ étant des constantes, et les termes non écrits étant négligeables devant le premier. Or le coefficient de $(v-v_0)^{-h}$ ne peut être nul, puisque $g_1(x)\,dx, \ldots, g_p(x)\,dx$ sont linéairement distincts.

et (9) s'écrivent alors

$$\begin{gathered}
G_1(x_1)\,dx_1 + G_1(x_2)\,dx_2 = 0, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\
G_q(x_1)\,dx_1 + G_q(x_2)\,dx_2 = 0, \\
\gamma_1(x_1)\,dx_1 + \gamma_1(x_2)\,dx_2 = 0, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\
\gamma_\varpi(x_1)\,dx_1 + \gamma_\varpi(x_2)\,dx_2 = 0;
\end{gathered}$$

d'où l'on tire

$$\frac{G_1(x_1)}{G_1(x_2)} = \dots = \frac{G_q(x_1)}{G_q(x_2)} = -\frac{\gamma_1(x_1)}{\gamma_1(x_2)} = \dots = -\frac{\gamma_\varpi(x_1)}{\gamma_\varpi(x_2)}.$$

Il en résulte la proposition suivante :

Soit C *une courbe de degré n et de genre p, admettant une involution irrationnelle d'ordre deux et de genre* ϖ; *appelons* points associés *les deux points d'un même couple de l'involution. Le système linéaire des courbes d'ordre* $n-3$ *adjointes à* C *peut se décomposer en deux systèmes linéaires, l'un* $\varpi - 1$ *fois, l'autre* $p - \varpi - 1$ *fois infini, et n'ayant aucune courbe commune : chaque courbe de l'un quelconque des systèmes ne coupe la courbe* C, *en dehors de points fixes, qu'en des couples de points associés.*

On voit aussi sans difficulté que :

Toute courbe adjointe d'ordre $n-3$ *qui passe par* ϖ *couples de points associés choisis au hasard ne coupe en outre la courbe* C *qu'en d'autres couples de points associés.*

DEUXIÈME MÉMOIRE.

SUR UNE CLASSE DE SURFACES ALGÉBRIQUES A GÉNÉRATRICES UNICURSALES.

---

1. Soit $\mathfrak{S}$ une surface algébrique admettant des génératrices unicursales, c'est-à-dire sur laquelle on peut tracer une série infinie et continue de courbes unicursales d'un même ordre, m. On peut exprimer les coordonnées d'un point quelconque de cette surface, en fonction de deux paramètres, d'une manière intéressante.

Une courbe unicursale quelconque d'ordre m, de l'espace, est représentable, en coordonnées homogènes, par des équations de la forme

$$(1) \qquad \rho x_i = a_i t^m + b_i t^{m-1} + \ldots + k_i t + l_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4);$$

x_1, x_2, x_3, x_4 sont les quatre coordonnées d'un point de la courbe, ρ un facteur de proportionnalité, t un paramètre variable et a_i, b_i, ..., l_i des constantes. Comme on peut remplacer t par $\frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}$ sans changer la forme des équations (1), on a le droit d'admettre que trois des coefficients $\frac{a_i}{a_1}$, $\frac{b_i}{a_1}$, $\ldots$, $\frac{l_i}{a_1}$ ont des valeurs données *a priori*.

Écrivons maintenant que la courbe (1) est sur la surface $\mathfrak{S}$, dont l'équation est $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$: nous obtenons, en remplaçant dans cette équation $x_1, \ldots, x_4$ par leurs valeurs proportionnelles (1) et annulant les coefficients de toutes les puissances de t, un certain nombre d'équations algébriques entre les constantes a_i, b_i, $\ldots$, l_i. Comme la surface admet, par hypothèse, une série infinie de courbes unicursales d'ordre m, ces équations devront se ramener à des relations, en nombre inférieur de une unité au moins, au nombre des coefficients $\frac{a_i}{a_1}$, ..., $\frac{l_i}{a_1}$, ou plutôt au nombre de ceux de ces coefficients qui ne sont pas fixes. Si le nombre des relations est inférieur de $k + 1$

unités à celui des coefficients, ce qui arrivera seulement dans le cas où la surface $\mathfrak{S}$ admettra une série $k+1$ fois infinie de courbes unicursales d'ordre m, on établira entre les a_i, b_i, ..., l_i, k relations algébriques tout à fait quelconques, de telle sorte que le nombre total des équations entre les coefficients soit inférieur de une unité au nombre de ceux-ci.

Alors, en toute hypothèse, l'ensemble de ces équations algébriques permettra d'exprimer les coefficients $\frac{a_i}{a_1}$, ..., $\frac{l_i}{a_1}$ en fonction fuchsienne d'un paramètre, u, et nous aurons ainsi la représentation cherchée de la surface $\mathfrak{S}$ à l'aide de deux paramètres t et u, sous la forme

$$(2) \qquad \rho x_i = a_i(u)t^m + b_i(u)t^{m-1} + \ldots + l_i(u) \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

les fonctions $a_i(u)$, ..., $l_i(u)$ étant des fonctions fuchsiennes de la variable u.

Nous nous bornons à indiquer ici ce mode de représentation sur lequel nous aurons à revenir pour une étude plus approfondie et qui conduit à des résultats géométriques intéressants, relatifs, par exemple, à la théorie des surfaces adjointes d'un ordre quelconque.

2. Si dans les équations (2) on fait $u = \text{const.}$, on obtient une courbe unicursale d'ordre m, ce qui donne une série simplement infinie de ces courbes, ainsi qu'on devait s'y attendre. Inversement, à une courbe unicursale de la série peuvent correspondre plusieurs valeurs de u (abstraction faite de celles qui se déduisent de l'une d'elles par les substitutions du groupe fuchsien); ces valeurs sont en involution, c'est-à-dire que les points qui ont ces valeurs pour arguments sur une courbe algébrique, C, dont les coordonnées sont des fonctions fuchsiennes quelconques de u (dépendant du groupe fuchsien considéré), forment sur cette courbe une involution d'espèce un : la proposition est évidente, puisque, si un de ces points est donné, les autres le sont d'une manière unique et symétrique.

Par conséquent on peut dire, en vertu des résultats du Mémoire précédent, qu'à une courbe unicursale tracée sur $\mathfrak{S}$, de la série considérée, correspond un seul point d'une courbe algébrique $\mathfrak{C}$, et réciproquement : cette propriété était absolument évidente *a priori*, mais il n'était pas sans intérêt de la rattacher à la représentation paramétrique de $\mathfrak{S}$.

Dans ce qui suit nous désignerons par ϖ le genre de la courbe *fondamentale* $\mathfrak{S}$, par ξ un quelconque de ses points et par (ξ) la courbe unicursale tracée sur $\mathfrak{S}$ qui correspond à ce point.

3. Nous nous bornerons, dans ce Mémoire, à l'étude des surfaces algébriques sur lesquelles on peut tracer une série simplement infinie de courbes unicursales, telle qu'il passe n courbes $(n > 1)$ de la série par un point quelconque de la surface, les courbes de la série se coupant deux à deux en *un point mobile* seulement.

Il est bien évident, dans ce cas, que les points $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ de $\mathfrak{S}$, qui correspondent aux courbes unicursales $(\xi_1), \ldots, (\xi_n)$ passant par un *même* point de $\mathfrak{S}$, forment les groupes d'une involution d'espèce deux : si l'on se donne en effet les points ξ_1 et ξ_2, on se donne les courbes (ξ_1) et (ξ_2), et, par suite, leur point unique d'intersection sur $\mathfrak{S}$; on détermine donc sans ambiguïté les courbes $(\xi_3), \ldots, (\xi_n)$ qui passent par ce point et, par suite, les points correspondants $\xi_3, \ldots, \xi_n$ de $\mathfrak{S}$.

L'involution, I, ainsi définie est donc rationnelle, d'après les propositions du premier Mémoire, ou bien elle est d'ordre deux, et dans ce cas, par un point de $\mathfrak{S}$ ne passent que deux courbes unicursales de la série.

Examinons successivement les deux hypothèses.

4. Si l'involution d'espèce deux, I, est rationnelle, ses groupes sont découpés sur $\mathfrak{S}$ par les courbes d'un système linéaire deux fois infini,

$$F(\xi, \eta) + \lambda\varphi(\xi, \eta) + \mu\psi(\xi, \eta) = 0, \tag{3}$$

λ et μ désignant deux paramètres variables.

D'après ce qui vient d'être dit, à un point de $\mathfrak{S}$ correspond un groupe de l'involution I, c'est-à-dire un système de valeurs de λ, μ, et réciproquement; en d'autres termes, la surface $\mathfrak{S}$ est représentable, point par point, sur le plan des variables λ, μ.

Dans ce mode de représentation, à une courbe unicursale (ξ) de la série considérée, tracée sur $\mathfrak{S}$, correspond un seul point ξ_0, η_0 de $\mathfrak{S}$; par suite, les valeurs de λ, μ qui correspondent à un point de cette courbe unicursale sont liées par la relation (3), où x, y ont les valeurs x_0, y_0,

$$(4) \qquad F(\xi_0, \eta_0) + \lambda\varphi(\xi_0, \eta_0) + \mu\psi(\xi_0, \eta_0) = 0.$$

Ainsi, sur le plan des λ, μ, une courbe unicursale de $\mathfrak{S}$ a pour image une droite. Les droites ainsi obtenues ne passent pas par un même point, sinon par un point arbitraire du plan; on ne pourrait en mener qu'une, ce qui revient à dire que, par un point de $\mathfrak{S}$, on ne pourrait mener qu'une courbe unicursale de la série, contrairement à l'hypothèse. Les droites images des courbes unicursales enveloppent donc une courbe proprement dite (de classe n) [1].

Cela posé, nous savons que les coordonnées homogènes d'un point de $\mathfrak{S}$ sont des polynomes entiers en λ et μ : le degré de ces polynomes, qui est celui des courbes images des sections planes de $\mathfrak{S}$, est nécessairement égal à m, m étant toujours l'ordre des courbes unicursales de la série, car cet ordre est aussi égal au nombre des points d'intersection des droites (4), qui n'ont aucun point fixe commun, avec les images des sections planes de $\mathfrak{S}$.

A toute droite du plan des λ, μ correspond dès lors, sur $\mathfrak{S}$, une courbe, évidemment unicursale, et d'ordre m; la surface admet donc une série *doublement* infinie de courbes unicursales d'ordre m, ayant pour images les droites du plan et se coupant deux à deux en un point mobile. Inversement, il est clair que toute surface représentable point par point sur un plan, de telle sorte que ses sections planes aient pour images des courbes d'ordre m, admettra une série doublement infinie de courbes unicursales d'ordre m, se coupant deux à deux en un seul point mobile : ces courbes sont celles qui ont pour images les droites du plan.

---

[1] Cette courbe ne peut se décomposer en courbes de classe moindre, sinon la série considérée de courbes unicursales sur $\mathfrak{S}$ se décomposerait en plusieurs autres.

5. Si l'involution d'espèce deux, I, est d'ordre 2, par un point de $\mathfrak{S}$ ne passent que deux courbes unicursales de la série; donc, à un point de $\mathfrak{S}$ correspondent deux points de la courbe $\mathfrak{C}$, et réciproquement. Le lieu des points de $\mathfrak{S}$ qui correspondent à deux points de $\mathfrak{C}$, dont l'un, ξ, est fixe, et dont l'autre est mobile, est la courbe unicursale (ξ); cette courbe correspond donc, point par point, à la courbe $\mathfrak{C}$, qui est par suite *unicursale*.

Ainsi, à chaque point de $\mathfrak{S}$ correspondent deux points d'une courbe $\mathfrak{C}$, unicursale; réciproquement, à deux points de la courbe unicursale correspond un point de $\mathfrak{S}$, qui reste le même quand on permute les deux précédents : si donc t_1 et t_2 désignent les paramètres qui correspondent à ces deux points sur leur courbe, et si l'on pose $t_1 + t_2 = \lambda$, $t_1 t_2 = \mu$, on voit qu'à chaque système de valeurs de λ et μ correspond un point de $\mathfrak{S}$, et réciproquement. La surface est donc représentable, point par point, sur le plan des λ, μ.

Les courbes unicursales de la série (ξ) correspondent individuellement aux points de $\mathfrak{C}$, c'est-à-dire à des valeurs constantes de t_1 ou de t_2; les relations

$$t_1^2 - \lambda t_1 + \mu = 0,$$
$$t_2^2 - \lambda t_2 + \mu = 0$$

montrent que ces courbes ont pour images, sur le plan des λ, μ, les droites

$$\theta^2 - \lambda\theta + \mu = 0,$$

où θ désigne un paramètre variable, et qui enveloppent la conique $\lambda^2 - 4\mu = 0$. On en conclut, comme au n° **4**, que les sections planes de $\mathfrak{S}$ ont pour images des courbes d'ordre m, et l'on n'obtient ainsi qu'un cas particulier des surfaces trouvées tout à l'heure.

6. Voici donc le théorème final :

Si l'on peut tracer, sur une surface algébrique, une série simplement infinie de courbes unicursales, de même ordre m, se coupant deux à deux en un point mobile, la surface est représentable point par point sur le plan. Elle admet une série linéaire doublement infinie de courbes unicursales d'ordre m, se coupant deux à deux en un point et dont fait partie la série primitive; ces courbes *ont pour images les droites du plan et les sections planes de la surface ont pour images des courbes quelconques d'ordre m.*

L'ordre de la surface est, d'après cela, inférieur à m^2; on peut même dire que toutes les surfaces jouissant de la propriété énoncée sont des variétés ou des dégénérescences d'une même surface, d'ordre m^2.

7. Une application intéressante se fait immédiatement au cas de $m = 2$. Soit, en effet, une surface admettant une famille simplement infinie de coniques, se coupant deux à deux en un ou plusieurs points. Si elles se coupent en plus de deux points, la surface est évidemment plane; si elles se coupent en deux points, la surface est évidemment la quadrique qui passe par trois d'entre elles; si enfin elles se coupent deux à deux en un point, le théorème précédent nous apprend que la surface est représentable point par point sur le plan, les images des sections planes étant des coniques. C'est donc une *surface de Steiner* ou une dégénérescence d'une telle surface. Par suite :

Toute surface sur laquelle on peut tracer une série simplement infinie de coniques, de telle sorte qu'il passe plus d'une conique de la série par chaque point de la surface, est une surface de Steiner, ou une dégénérescence de cette surface (1).

---

(1) Les résultats de ce Mémoire et ceux du précédent ont été communiqués verbalement à la Société Mathématique, dans la séance du 21 décembre 1892; le procès-verbal de la séance mentionne explicitement le théorème sur les surfaces engendrées par des coniques qui se coupent deux à deux, en le rattachant à la théorie des involutions sur les courbes algébriques (*Bulletin de la Société Mathématique de France*, t. XX, p. 121). Dans une Note, présentée le 12 juin 1893 à l'Académie des Sciences et publiée dans la huitaine, j'ai donné un résumé complet de ces recherches. De son côté, un géomètre italien, M. Castelnuovo, a présenté à l'Académie des Sciences de Turin, le 11 juin 1893, un travail sur les mêmes questions, travail qui n'a été publié que postérieurement à ma Note des *Comptes rendus*, puisque l'auteur cite cette Note.

M. Castelnuovo établit le théorème fondamental des involutions sur les courbes planes par une méthode analogue à la mienne. Il en déduit en particulier un théorème général un peu plus étendu que celui du n° 6, sur les surfaces engendrées par des courbes se coupant deux à deux en un seul point.

TROISIÈME MÉMOIRE.

DES SÉRIES DE COURBES ALGÉBRIQUES TRACÉES SUR LES SURFACES ALGÉBRIQUES.

---

1. Soit, sur une surface algébrique S, une série algébrique simplement infinie de courbes algébriques, σ, de même ordre m, se coupant deux à deux en k points mobiles ($k \geqq 1$). A chaque courbe σ on peut faire correspondre un point d'une courbe algébrique plane $\mathfrak{S}$, et, réciproquement, à chaque point de $\mathfrak{S}$ correspond une courbe σ : cela résulte de ce qu'un être algébrique à une dimension, dans un espace à un nombre quelconque de dimensions, peut toujours être représenté point par point sur une courbe algébrique plane.

Par un point quelconque M de S, de coordonnées (ξ, η, ζ), passent n courbes σ, n étant supérieur à un, puisque, par hypothèse, deux quelconques de ces courbes se coupent en des points mobiles; désignons par (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n) les coordonnées de n points correspondants sur $\mathfrak{S}$ et par $g(x, y)\,dx$ une différentielle abélienne de première espèce appartenant à la courbe $\mathfrak{S}$. La somme

$$(1) \qquad g(x_1, y_1)\,dx_1 + g(x_2, y_2)\,dx_2 + \ldots + g(x_n, y_n)\,dx_n$$

est évidemment, si on l'exprime en fonction des coordonnées ξ, η, ζ du point M, une différentielle totale de la forme $\mathrm{N}\,d\xi + \mathrm{P}\,d\eta$, N et P étant rationnels en ξ, η, ζ, car, si l'on se donne le point ξ, η, ζ, les points correspondants (x_i, y_i) sont déterminés d'une manière unique.

L'intégrale de l'expression (1) ne devenant infinie en aucun point de $\mathfrak{S}$, l'intégrale $\int \mathrm{N}\,d\xi + \mathrm{P}\,d\eta$ ne devient infinie en aucun point de S : c'est, par suite, ce que M. Picard appelle une *intégrale de différentielle totale de première espèce*.

2. Admettons maintenant que la surface S n'ait pas d'intégrales de

cette nature : N et P seront nuls identiquement et il viendra

$$(2)\qquad g(x_1, y_1)\,dx_1 + \ldots + g(x_n, y_n)\,dx_n = 0,$$

quelle que soit la différentielle de première espèce, $g(x, y)\,dx$, dont on est parti.

Il résulte de là, en vertu d'un théorème fondamental de la théorie des courbes algébriques, que les n points (x_i, y_i), qui correspondent à un point ξ, η, ζ de S, forment des groupes, en nombre doublement infini, qui appartiennent à un *système de groupes*, c'est-à-dire que ces groupes sont compris parmi les groupes de n points mobiles découpés sur la courbe $\mathfrak{S}$ par les courbes d'une même famille linéaire

$$(3)\qquad \lambda_1\varphi_1(x, y) + \lambda_2\varphi_2(x, y) + \ldots + \lambda_\rho\varphi_\rho(x, y) = 0,$$

où les λ sont des constantes et ρ un entier supérieur à deux. Nous avons déjà fait usage de cette proposition au n° **3** du premier Mémoire.

Observons de plus, comme à ce numéro, qu'on peut supposer qu'il n'existe aucune relation identique de la forme

$$(4)\qquad \mu_1\varphi_1(x, y) + \mu_2\varphi_2(x, y) + \ldots + \mu_\rho\varphi_\rho(x, y) = P(x, y)f(x, y)$$

les μ étant des constantes, $P(x, y)$ un polynome et $f(x, y)$ le premier membre de l'équation de $\mathfrak{S}$.

Si l'on se donne un point ξ, η, ζ de S, les points $x_1, \ldots, x_n$ correspondants sur $\mathfrak{S}$ seront déterminés d'une seule manière; comme ils sont à l'intersection de $\mathfrak{S}$ avec une courbe du système linéaire (3), il faut aussi que cette courbe soit déterminée d'une seule manière, c'est-à-dire que $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \frac{\lambda_3}{\lambda_1}, \ldots, \frac{\lambda_\rho}{\lambda_1}$ soient des fonctions rationnelles de ξ, η, ζ. On peut dire, si l'on veut, que $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\rho$ seront égaux à des polynomes entiers en ξ, η, ζ, que nous désignerons par

$$\mathcal{F}_1(\xi, \eta, \zeta), \quad \ldots, \quad \mathcal{F}_\rho(\xi, \eta, \zeta).$$

Quelques-uns de ces polynomes peuvent être identiquement nuls et les autres peuvent ne pas être linéairement distincts sur la surface S.

D'après cela, les courbes du système linéaire (3), qui découpent sur $\mathfrak{C}$ les groupes de points $x_1, \ldots, x_n$ correspondant à un point ξ, η, ζ de S, ont pour équation générale

$$\mathcal{F}_1(\xi,\eta,\zeta)\,\varphi_1(x,y)+\mathcal{F}_2(\xi,\eta,\zeta)\varphi_2(x,y)+\ldots+\mathcal{F}_\rho(\xi,\eta,\zeta)\varphi_\rho(x,y)=0.$$

En désignant par $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots, \mathcal{F}_r$ ceux des polynomes $\mathcal{F}$ qui sont linéairement distincts sur la surface S (¹), cette équation prend la forme

$$(5)\qquad \mathcal{F}_1(\xi,\eta,\zeta)\,\psi_1(x,y)+\ldots+\mathcal{F}_r(\xi,\eta,\zeta)\,\psi_r(x,y)=0,$$

où les polynomes $\psi(x,y)$ sont des combinaisons linéaires et homogènes des φ. Ces polynomes ψ, d'après leur mode de formation, sont linéairement distincts; on peut donc admettre qu'il n'existe aucune relation identique de la forme (4),

$$(4\ bis)\qquad \left\{\begin{array}{l} \mu_1\psi_1(x,y)+\mu_2\psi_2(x,y)+\ldots+\mu_r\psi_r(x,y) \\ \quad = P(x,y)f(x,y). \end{array}\right.$$

3. Cela posé, dans l'équation (5) considérons x et y comme des paramètres, vérifiant toujours l'équation $f(x,y)=0$ de la courbe $\mathfrak{C}$, et regardons ξ, η, ζ comme des coordonnées courantes : nous obtenons ainsi une série, simplement infinie, de surfaces algébriques, et nous désignerons par F_i celle des surfaces dont l'équation s'obtient en remplaçant x et y dans (5) par les coordonnées d'un point x_i, y_i de $\mathfrak{C}$.

Je dis que la surface F_i coupe la surface S suivant la courbe σ_i qui correspond, sur cette dernière, au point x_i, y_i de $\mathfrak{C}$. En effet, d'après ce qui précède, l'équation (5), où l'on regarde ξ, η, ζ comme données et x, y comme inconnues, est vérifiée pour les n points (non fixes) de la courbe $\mathfrak{C}$ qui correspondent aux n courbes σ passant par le point

(¹) D'après cela, il n'existe aucune relation identique de la forme

$$\theta_1\mathcal{F}_1(\xi,\eta,\zeta)+\ldots+\theta_r\mathcal{F}_r(\xi,\eta,\zeta)=Q(\xi,\eta,\zeta)\,S(\xi,\eta,\zeta)$$

les θ étant des constantes, Q un polynome et S le premier membre de l'équation de la surface S.

ξ, η, ζ de la surface S; donc, inversement, si x, y sont donnés, l'équation (5) exprime que le point ξ, η, ζ de S est situé sur la courbe σ correspondant au point x, y de $\mathfrak{S}$. En d'autres termes, la surface F_i ne coupe S, en dehors de courbes fixes, communes à toutes les surfaces F, que suivant la courbe σ_i (1).

4. Considérons maintenant les surfaces représentées par l'équation générale

$$(6)\qquad \theta_1 \mathcal{F}_1(\zeta, \eta, \zeta) + \theta_2 \mathcal{F}_2(\xi, \eta, \zeta) + \ldots + \theta_r \mathcal{F}_r(\xi, \eta, \zeta) = 0,$$

que nous appellerons surfaces $\mathcal{F}$; $\theta_1, \ldots, \theta_r$ désignant des constantes arbitraires. Les surfaces $\mathcal{F}$ forment un système linéaire, dont font partie les surfaces (5) que nous avons appelées F; nous allons établir qu'elles passent par tous les points fixes communs aux surfaces F et même qu'elles ont, en ces points, les mêmes singularités que les surfaces F.

En effet, si ξ_0, η_0, ζ_0 est un point commun à toutes les surfaces (5), on a

$$(7)\qquad \mathcal{F}_1(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)\psi_1(x, y) + \ldots + \mathcal{F}_r(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)\psi_r(x, y) = 0$$

quel que soit le point x, y, sur la courbe $\mathfrak{S}$. En d'autres termes, le premier membre de (7) doit être divisible par le premier membre $f(x, y)$ de l'équation de $\mathfrak{S}$, ce qui donne une identité, en x, y, de la forme (4 *bis*) : or une telle identité n'est possible que si tous les coefficients des fonctions ψ sont nuls; on a donc

$$\mathcal{F}_1(\xi_0, \eta_0, \zeta_0) = 0, \qquad \ldots, \qquad \mathcal{F}_r(\xi_0, \eta_0, \zeta_0) = 0,$$

et, par suite, les surfaces $\mathcal{F}$ passent toutes par le point ξ_0, η_0, ζ_0.

---

(1) La surface F_i ne touche pas S le long de la courbe σ_i. S'il en était ainsi, la surface (5) où x, y sont remplacés par les constantes x_i, y_i, et la surface infiniment voisine, obtenue en remplaçant x, y par les coordonnées du point voisin de x_i, y_i sur la courbe $\mathfrak{S}$, se couperaient suivant la courbe σ_i : en d'autres termes, si l'on désigne par ξ, η, ζ un point de S situé sur cette courbe, la courbe plane définie par l'équation (5), où x, y sont des coordonnées courantes, toucherait $\mathfrak{S}$ au point x_i, y_i. Cette conclusion est inadmissible, puisque les courbes (3) ou (5) découpent sur $\mathfrak{S}$ un groupe de n points mobiles, qui sont distincts pour la courbe (5) la plus générale.

Si les surfaces F ont au point ξ_0, η_0, ζ_0 une singularité commune, par exemple un point double, on aura, quel que soit le point x, y de $\mathfrak{S}$,

$$\frac{\partial \mathfrak{F}_1}{\partial \xi_0}(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)\psi_1(x, y) + \ldots + \frac{\partial \mathfrak{F}_r}{\partial \xi_0}(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)\psi_r(x, y) = 0,$$
$$\frac{\partial \mathfrak{F}_1}{\partial \eta_0}(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)\psi_1(x, y) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0,$$
$$\frac{\partial \mathfrak{F}_1}{\partial \zeta_0}(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)\psi_1(x, y) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0.$$

Ces relations étant encore linéaires par rapport aux ψ entraînent

$$\frac{\partial \mathfrak{F}_i}{\partial \xi_0} = 0, \qquad \frac{\partial \mathfrak{F}_i}{\partial \eta_0} = 0, \qquad \frac{\partial \mathfrak{F}_i}{\partial \zeta_0} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, r)$$

ce qui montre que les surfaces $\mathfrak{F}$ admettent le point ξ_0, η_0, ζ_0 pour point double.

D'une manière générale, si les surfaces F ont en un point une singularité *commune*, on exprimera ce fait analytiquement par des relations *linéaires* et *homogènes* par rapport aux coefficients qui figurent dans leur équation, c'est-à-dire par rapport à

$$\psi_1(x, y), \quad \ldots, \quad \psi_r(x, y):$$

ces relations devant avoir lieu quel que soit le point x, y sur la courbe $\mathfrak{S}$ seront des identités, et auront lieu quelles que soient les valeurs de ces coefficients. En d'autres termes, les surfaces $\mathfrak{F}$ posséderont au même point la singularité considérée.

La conclusion de cette discussion est que les surfaces $\mathfrak{F}$ ont les mêmes singularités fixes que les surfaces F; en particulier, elles passent par toutes les courbes fixes communes à S et aux surfaces F, avec les mêmes singularités que celles-ci, et de là résultent deux conséquences :

1° Chaque surface $\mathfrak{F}$ coupe S, en dehors des courbes fixes, suivant une courbe ayant le même degré, m, que les courbes σ découpées par les surfaces F; car les surfaces F et $\mathfrak{F}$ sont de même ordre et présentent les mêmes singularités le long des courbes fixes qu'elles ont en commun avec S.

2° Les courbes mobiles, $\mathfrak{s}$, découpées sur S par les surfaces $\mathcal{F}$ ont, *en général*, le même genre que les courbes σ. Il en sera du moins ainsi lorsque les courbes σ n'auront pas de points multiples mobiles en dehors de ceux qui peuvent être situés sur les lignes multiples de S; de plus, si chaque courbe σ a une singularité en un point non fixe, d'une ligne multiple, $\mathcal{L}$, de S, il faudra, pour que la proposition s'applique, que cette singularité soit *linéaire*. Nous voulons dire par là que les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'intersection avec S d'une surface quelconque présente, le long de $\mathcal{L}$, la même singularité doivent être linéaires par rapport aux coefficients de la surface inconnue. Ce dernier point résulte de ce que les surfaces $\mathcal{F}$ ont les mêmes singularités fixes que les surfaces F.

Il peut évidemment arriver que les courbes σ soient de genre inférieur à celui des courbes $\mathfrak{s}$; on en a un exemple immédiat en supposant que les surfaces F soient celles du système linéaire $\mathcal{F}$ qui touchent en un ou plusieurs points (mobiles) la surface S.

3. Nous pouvons maintenant énoncer les théorèmes généraux suivants :

I. *Sur une surface algébrique n'ayant pas d'intégrales de différentielles totales de première espèce, une série quelconque, simplement infinie, de courbes algébriques se coupant deux à deux en un ou plusieurs points mobiles, est comprise dans une série linéaire deux fois infinie au moins) de courbes du même ordre.*

Dans le cas où les courbes de la série considérée *ne se coupent pas* (en des points mobiles), on peut recommencer des raisonnements analogues. Soient $\mathcal{C}$ la courbe dont chaque point correspond univoquement à une courbe de la série, $g(x, y)\,dx$ une de ses différentielles de première espèce. Par un point (ξ, η, ζ) de S ne passe qu'une courbe de la série; si x, y est le point correspondant sur $\mathcal{C}$, la différentielle $g(x, y)\,dx$ est une différentielle totale de première espèce sur la surface S : celle-ci n'admettant pas de différentielle de cette nature,

$g(x, y)$ est nul, c'est-à-dire que la courbe $\mathfrak{S}$ est unicursale. Les points d'une telle courbe sont découpés individuellement sur elle par un faisceau de courbes algébriques

$$\lambda_1 \varphi_1(x, y) + \lambda_2 \varphi_2(x, y) = 0;$$

et le point (x, y) de $\mathfrak{S}$ qui correspond à un point (ξ, η, ζ) de S sera donné par une relation de la forme

$$\mathcal{F}_1(\xi, \eta, \zeta)\varphi_1(x, y) + \mathcal{F}_2(\xi, \eta, \zeta)\varphi_2(x, y) = 0;$$

on en conclut, par les raisonnements des n^{os} **3** et **4**, que les surfaces

$$\theta_1 \mathcal{F}_1(\xi, \eta, \zeta) + \theta_2 \mathcal{F}_2(\xi, \eta, \zeta) = 0$$

découpent sur S les courbes de la série considérée; cette série est donc linéaire. Par suite, dans tous les cas :

II. *Sur une surface n'ayant pas d'intégrales de différentielles totales de première espèce, les courbes algébriques d'un même ordre se répartissent en une ou plusieurs séries linéaires* (1).

Ce théorème suppose, bien entendu, qu'il existe une *infinité continue* de courbes algébriques de l'ordre considéré : il ne s'applique pas aux courbes isolées, qui peuvent être en nombre fini.

Dans ces énoncés, on entend, par *série linéaire* de courbes, des courbes découpées sur la surface fixe par des surfaces appartenant à un même système linéaire, chaque surface mobile ne coupant la proposée, en dehors des courbes fixes, que suivant *une seule* courbe mobile.

La proposition exprimée par le théorème précédent peut n'être pas vraie pour une surface ayant des intégrales de différentielles totales de

(1) On a aussi établi que : *Sur une surface sans intégrales de différentielles totales de première espèce, un système simplement infini de courbes du même ordre, ne se coupant deux à deux en aucun point mobile, est un système linéaire.*

première espèce. Par exemple, sur un cône de genre supérieur à zéro, les génératrices ne forment pas une série linéaire, car on ne peut les découper individuellement par les surfaces d'un faisceau. De même une surface réglée, d'ordre quatre et de genre un, admet une double infinité de courbes planes du troisième ordre (de genre un), situées dans ses plans tangents : par deux points de la surface passent évidemment *deux* de ces courbes, ce qui prouve que la série n'est pas linéaire.

6. Une autre conséquence des raisonnements du n° 4 est celle-ci :

III. *Soit, sur une surface qui n'a pas d'intégrales de différentielles totales de première espèce, une série simplement infinie de courbes algébriques du même ordre, n'ayant aucun point multiple mobile en dehors des lignes multiples de la surface* [1] : *cette série est comprise dans une série linéaire (doublement infinie au moins) de courbes du même ordre et du même* genre.

APPLICATION AUX SURFACES A GÉNÉRATRICES UNICURSALES.

7. Les surfaces à génératrices unicursales n'ont pas d'intégrales de différentielles totales de première espèce, lorsque les génératrices unicursales se coupent deux à deux en un ou plusieurs points mobiles. En effet, d'après les équations (2) du deuxième Mémoire, une surface, $\mathfrak{S}$, engendrée par des courbes rationnelles peut être représentée par des équations de la forme

$$\rho x_i = a_i(u)t^m + \ldots + k_i(u)t + l_i(u) \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

où t est un paramètre et $a_i, \ldots, l_i$ des fonctions fuchsiennes d'un second paramètre, u. En posant $\xi = \frac{x_1}{x_4}$, $\eta = \frac{x_2}{x_4}$, $\zeta = \frac{x_3}{x_4}$, toute expression

[1] Pour plus de précision dans cet énoncé, *voir* le n° 4 (2°).

de la forme $N\,d\xi + P\,d\eta$, où N et P sont rationnels en ξ, η, ζ, s'écrira sur la surface

$$\Phi(t, u)\,dt + \Psi(t, u)\,du; \tag{8}$$

$F(t, u)$ est une fonction rationnelle par rapport à t et fuchsienne par rapport à u; $\Phi(t, u)$ est fonction rationnelle de t et fonction thêtafuchsienne d'ordre un (pouvant devenir infinie) par rapport à u. Pour que l'intégrale de l'expression (8) reste finie, il est nécessaire qu'elle ne dépende pas de t, c'est-à-dire que $\Phi(t, u)$ soit identiquement nul, et que $\Psi(t, u)$ se réduise à une fonction thêtafuchsienne de u, d'ordre un et sans infinis; en d'autres termes, une différentielle totale de première espèce sur la surface se ramène nécessairement au type $\theta(u)\,du$, c'est-à-dire à une différentielle de première espèce du groupe fuchsien considéré.

Or, d'après ce qui a été dit au n° **2** du deuxième Mémoire, à une valeur de u correspond sur la surface $\mathfrak{S}$ une courbe unicursale et inversement à une courbe unicursale correspond un groupe de valeurs de u. Par suite, à un point de $\mathfrak{S}$ correspondent autant de séries de valeurs de u qu'il y a de courbes unicursales passant par ce point, et la fonction $\int \theta(u)\,du$ n'a pas une valeur unique (à des périodes près) en chaque point de $\mathfrak{S}$, puisque, d'après l'hypothèse, il passe par ce point plus d'une courbe unicursale, et que deux courbes unicursales se coupent en un point mobile, au moins.

Donc enfin la surface $\mathfrak{S}$ n'admet pas de différentielles totales de première espèce, et le théorème du n° **6** lui est applicable. Par conséquent :

Si l'on peut tracer sur une surface algébrique, $\mathfrak{S}$, une série simplement infinie de courbes unicursales se coupant deux à deux en plus d'un point mobile, et n'ayant pas de point singulier mobile en dehors des lignes multiples de $\mathfrak{S}$, il existera, sur la surface, une série linéaire, deux fois infinie au moins, de courbes unicursales comprenant la série primitive.

Or M. Nöther a établi qu'une surface qui admet une série linéaire, simplement infinie au moins, de courbes unicursales est représentable point par point sur le plan ([1]). Donc :

La surface $\mathfrak{S}$ est représentable point par point sur le plan.

8. A titre d'exemple, nous allons chercher à déterminer les surfaces engendrées par des *cubiques gauches* se coupant deux à deux en un point au moins.

Toutes ces surfaces, d'après le théorème précédent, sont représentables point par point sur le plan; le cas des cubiques se coupant deux à deux en un seul point mobile a été examiné dans le second Mémoire : la surface correspondante est du neuvième ordre et ses sections planes ont pour images des courbes quelconques du troisième ordre; ses variétés et ses dégénérescences donnent également des solutions de la question.

Pour traiter les autres cas, nous nous appuierons sur un important théorème de M. Guccia relatif à la réduction des systèmes linéaires de courbes unicursales planes ([2]).

Voici ce théorème :

Un système linéaire de courbes unicursales tel que deux courbes du système se coupent en k points mobiles est réductible, au moyen de transformations Cremona, aux types suivants :

1° *Système de courbes d'ordre* $\frac{k+2}{2}$ *ayant en commun un point multiple ordinaire d'ordre* $\frac{k}{2}$ *et un point simple;*

2° *Système de courbes d'ordre* $\frac{k+s+1}{2}$ $(0 \leqq s \leqq k-1)$ *ayant en commun un point multiple d'ordre* $\frac{k+s-1}{2}$ *avec s tangentes fixes, communes en ce point à toutes les courbes;*

3° *Système de coniques sans point commun* $(k=4)$;

4° *Système des droites du plan* $(k=1)$.

([1]) *Mathem. Annalen*, t. III.

([2]) *Rendiconti del Circolo Matem. di Palermo*, t. I, p. 152.

Supposons que les cubiques génératrices se coupent deux à deux en k points ($k \geqq 2$), et distinguons successivement les hypothèses

$$k = 2, 3, 4, \ldots.$$

Pour $k = 2$, le système des courbes *unicursales* qui sont les images sur le plan des cubiques gauches tracées sur la surface se ramène, d'après le théorème de M. Guccia, à l'un des systèmes ci-dessous :

1° Système de coniques ayant deux points communs distincts, a_1 et a_2;

2° Système de coniques ayant un point commun et même tangente en ce point.

Désignons par N l'ordre des courbes images des sections planes de la surface; par h_1 et h_2 les ordres des points multiples qu'elles possèdent aux points a_1 et a_2 dans la première hypothèse, ces ordres pouvant être nuls. Pour que les coniques passant par a_1, a_2 soient les images de courbes de l'espace du troisième ordre, il faut qu'elles coupent en trois points mobiles les images des sections planes, c'est-à-dire que l'on ait

$$3 = 2N - h_1 - h_2.$$

D'ailleurs on a évidemment

$$h_1 + h_2 \leqq N,$$

$$h_1 < N; \qquad h_2 < N,$$

et, de plus, on devra supposer

$$h_1 > 0 \qquad \text{et} \qquad h_2 > 0.$$

Si, en effet, h_1 est nul, les courbes d'ordre N ne passent pas par a_1, et, puisque les coniques menées par a_1 et a_2 coupent ces courbes en trois points non fixes, le même fait a lieu pour les coniques passant seulement par a_2; en d'autres termes, les coniques menées par a_2 sont les images de cubiques gauches, tracées sur la surface, se coupant deux à deux en *trois* points mobiles, et la surface est, en réalité, engendrée par des cubiques qui se coupent deux à deux en trois points.

Cela posé, on tire des relations précédentes l'inégalité

$$N \geqq 2N - 3, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad N \leqq 3,$$
$$2N - 3 \geqq 2, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad N \geqq 3.$$

On a donc la seule solution $N = 3$, avec $h_1 + h_2 = 3$, c'est-à-dire $h_1 = 2$, $h_2 = 1$. Les images des sections planes de la surface sont donc des cubiques planes ayant un point double en a_1 et un point simple en a_2 : la surface est la *surface unicursale réglée d'ordre quatre.*

La seconde hypothèse conduit à la même conclusion.

On traiterait d'une manière tout à fait pareille le cas de $k = 3$ et celui de $k = 4$; dans le premier cas, on trouve la surface réglée du troisième ordre (pouvant devenir un cône unicursal), et dans le second une quadrique.

Pour $k \geqq 5$, la même méthode montre que la surface cherchée n'existe pas. Donc :

La surface la plus générale engendrée par des cubiques gauches *se coupant deux à deux en k points mobiles* ($k \geqq 2$) *est la surface réglée unicursale d'ordre* $6 - k$.

Le nombre k ne peut dépasser 4.

Une discussion analogue se fait sans difficulté pour les surfaces engendrées par des unicursales sans point multiple, d'un ordre donné, se coupant deux à deux en plus d'un point.