JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

CAMILLE JORDAN

Nouvelles recherches sur la limite de transitivité des groupes qui ne contiennent pas le groupe alterné

Journal de mathématiques pures et appliquées 5e série, tome 1 (1895), p. 35-60.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1895_5_1__35_0>

Nouvelles recherches sur la limite de transitivité des groupes qui ne contiennent pas le groupe alterné;

PAR M. CAMILLE JORDAN.

M. Bochert a publié dans les *Mathematische Annalen* (t. XXIX, XXIII et XL), une suite de Mémoires très intéressants sur la *Théorie des substitutions*.

Parmi les résultats remarquables qu'il a obtenus figurent en particulier les suivants :

S'il existe un groupe t fois transitif, de degré n et de classe u, et ne contenant pas le groupe alterné, les trois nombres t, n, u satisferont (si $u > 3$) aux deux inégalités

$$u \overline{\gtrless} \frac{n}{2} - 1, \tag{I}$$

$$\log n \overline{\gtrless} a\sqrt{t \log t} \tag{II}$$

a désignant un facteur numérique qu'on peut prendre égal à $\frac{1}{8}\sqrt{\frac{\log 2}{8}}$, si $t \overline{\gtrless} 8$.

La proposition exprimée par l'inégalité (I) nous paraît être la plus importante qui ait été obtenue dans cette théorie depuis les travaux de M. Sylow; elle ne saurait manquer d'être féconde en conséquences.

Le présent Mémoire a pour but d'établir que cette proposition, combinée avec les résultats de M. Sylow, permet d'établir entre n et t une relation de la forme (II), mais où le coefficient a est sensiblement réduit.

Nous établissons d'abord (§ I) la proposition suivante :

Soit G *un groupe t fois transitif, d'ordre n et de classe u, ne contenant pas le groupe alterné; supposons* $t \overline{\gtrless} 8$.

G *contiendra un sous-groupe* H *jouissant des propriétés suivantes :*

1° *Ses substitutions sont de la forme* AS, A *désignant une substitution opérée entre t lettres données $a_1, \ldots, a_t$,* S *une substitution opérée sur les $n-t$ autres lettres;*

2° *Les substitutions partielles* A, *combinées ensemble, reproduisent toutes celles du groupe alterné $\mathcal{A}_t$ entre les lettres $a_1, \ldots, a_t$;*

3° H *ne contient aucun sous-groupe jouissant des mêmes propriétés.*

Nous précisons la forme des substitutions de H.

Nous cherchons ensuite une limite inférieure de $n - t$; dans cette étude nous distinguons deux cas, que nous traitons séparément dans les § II et III. Cette analyse nous conduit au résultat suivant :

Soient k un entier arbitraire > 4 et $< t$; δ le plus grand entier qui satisfasse à l'inégalité

$$\delta < t - \frac{(t-k+1)\log 2}{t+\log 2}.$$

Posons d'ailleurs, pour abréger,

$$\varphi(t) = \left(t + \frac{1}{2}\right)\log t - t + \frac{1}{2}\log 2\pi + \frac{1}{12t}.$$

On aura l'une des deux inégalités

$$\log(n-t) \overline{\gtrless} (k-3)\log 2 - \log k,$$

$$\log(n-t) > \varphi(t) - \frac{1}{12t} - \varphi(\delta) - \varphi(t-\delta).$$

Dans le § IV nous discutons ces formules pour déterminer la manière la plus avantageuse de choisir l'entier k, et nous arrivons à la relation finale

$$\log(n-t) \overset{=}{>} a\sqrt{t \log t},$$

où le coefficient numérique a tend rapidement vers la valeur asymptotique $\log 2$ lorsque t tend vers ∞.

I.

Soit G un groupe t fois transitif, de degré n, de classe u et ne contenant pas le groupe alterné. Supposons $t \overset{=}{>} 8$. On aura (BOCHERT, *Mathematische Annalen*, t. XL, p. 192)

$$u \overset{=}{>} \tfrac{1}{2} n - 1.$$

Soient $a_1, \ldots, a_t$, t lettres quelconques choisies arbitrairement parmi celles de G, et soit G' le sous-groupe formé par celles des substitutions de G qui permutent exclusivement ces lettres entre elles. Les substitutions de G' seront de la forme

$$\text{AS},$$

A étant une substitution entre les t lettres $a_1, \ldots, a_t$, et S une substitution entre les autres lettres $b_1, \ldots, b_{n-t}$. Les substitutions partielles A permutent entre elles $a_1, \ldots, a_t$ de toutes les manières possibles.

On peut déterminer dans G' un sous-groupe H jouissant des propriétés suivantes :

1° Les substitutions $A_1 S_1$, $A_2 S_2$, ... de H seront telles que leurs premiers facteurs A_1, A_2, ... reproduisent par leur combinaison toutes les substitutions du groupe alterné $\mathfrak{A}_t$ entre t lettres ;

2° H ne contient aucun sous-groupe jouissant de la propriété précédente.

En effet, le sous-groupe formé par toutes celles des substitutions de G qui permutent $a_1, \ldots, a_t$ d'une manière alternée satisfait à la première condition ; et s'il ne remplit pas la seconde, il contiendra un sous-groupe H qui y satisfait.

Les substitutions de H étant de la forme AS, considérons le groupe I formé par celles de ces substitutions où $A = 1$.

Il est permutable aux substitutions de H. Il pourrait d'ailleurs se réduire à la seule substitution 1; mais nous admettrons, pour plus de généralité, qu'il contienne d'autres substitutions.

Si l'ordre O de I ne se réduit pas à une puissance de 2, il admettra au moins un facteur premier impair p; soit p^μ la plus haute de ses puissances qui divise O. D'après M. Sylow (*Mathematische Annalen*, t. V), I contient un groupe J d'ordre p^μ, et l'on aura

$$O = (rp + 1)\nu p^\mu,$$

νp^μ désignant l'ordre du groupe K formé par celles des substitutions de I qui sont permutables à J; r désignant un entier.

Soient d'ailleurs a_i, a_k, a_l, a_m quatre quelconques des lettres $a_1, \ldots, a_t$. Joignons aux substitutions de I celles des substitutions de H où la première substitution partielle A est égale à

$$(a_i a_k)(a_l a_m).$$

Nous obtiendrons un nouveau groupe I_1 d'ordre $2O$. Soit $\nu_1 p^\mu$ l'ordre du groupe formé par celles de ses substitutions qui sont permutables à J; on aura évidemment $\nu_1 = 2\nu$ ou $\nu_1 = \nu$, suivant que, dans les nouvelles substitutions introduites, il y en a ou non qui soient permutables à J. Mais la seconde hypothèse doit être rejetée; car le théorème de M. Sylow, appliqué à I_1, donne

$$2O = (r_1 p + 1)\nu_1 p^\mu = 2(rp + 1)\nu p^\mu,$$

d'où

$$\nu_1 \equiv 2\nu \qquad \text{mod} p.$$

Donc pour toutes les valeurs des indices i, k, l, m, H contiendra une substitution de la forme

$$(a_i a_k)(a_l a_m)S$$

permutable à J. Ces substitutions, combinées avec celles de K, fournissent un groupe H_1 dont les substitutions sont permutables à J, et de la forme AS, A parcourant toute la suite des substitutions dérivées des substitutions $(a_i a_k)(a_l a_m)$, c'est-à-dire toutes les substitutions du groupe alterné. Mais, par hypothèse, H ne contient aucun sous-groupe jouissant de cette propriété; donc $H_1 = H$, et nous pouvons énoncer ce premier résultat :

Le groupe I *contient un groupe* J *d'ordre* p^μ, *permutable à toutes les substitutions de* H.

Si l'ordre de I se réduisait à une puissance de 2, telle que 2^μ, ce résultat subsisterait encore; on n'aurait qu'à poser $p = 2$ et $J = I$; car les substitutions de H sont permutables à I.

Cela posé, le groupe J, d'ordre p^μ, contient (Sylow, *Mathematische Annalen*, t. V) des substitutions auxquelles toutes celles de J sont échangeables. Celles de ces substitutions qui sont d'ordre p forment un groupe L, unique de son espèce parmi les sous-groupes de J. Les substitutions de H étant permutables à J le seront donc à L.

Réunissons dans une même classe les lettres que L permute entre elles. La $i^{\text{ième}}$ classe, par exemple, contiendra p^{μ_i} lettres (μ_i étant un entier, qui peut être nul pour certaines classes, mais non pour toutes). Caractérisons ces lettres par μ_i indices simultanés, $x_1, \ldots, x_{\mu_i}$ variables chacun de 0 à $p-1$ mod$p$; les déplacements que L leur fait subir seront représentés par les substitutions linéaires

$$(1) \qquad |x_1, \ldots, x_{\mu_i} \quad x_1 + \lambda_1, \ldots, x_{\mu_i} + \lambda_{\mu_i}|$$

(Jordan, *Traité des substitutions*, p. 201).

Les substitutions de H, étant permutables à L, seront de la forme suivante

$$ABP,$$

B désignant une substitution qui permute d'un mouvement d'ensemble les diverses classes qui ont le même nombre de lettres, en remplaçant chaque lettre par sa correspondante; P désignant un produit de substitutions partielles $P_1, P_2, \ldots$ opérées respectivement entre les lettres de la première classe, celles de la seconde, etc. D'ailleurs la substitution P_i, par exemple, devant être permutable au groupe (1), sera de la forme linéaire

$$\left|\begin{array}{ll} x_1 & \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_{\mu_i} x_{\mu_i} + \rho_1 \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{\mu_i} & \delta_1 x_1 + \delta_2 x_2 + \ldots + \delta_{\mu_i} x_{\mu_i} + \rho_{\mu_i} \end{array}\right|.$$

Considérons le groupe H′ formé par les substitutions partielles AB. Soit I′ le groupe formé par celles de ses substitutions pour lesquelles $A = 1$. Admettons encore, pour plus de généralité, que I′ contienne des substitutions autres que l'unité. Si O′, ordre de I′, n'est pas une puissance de 2, soient p' un des facteurs premiers impairs de O′; $p'^{\mu'}$ la plus haute puissance de p' qui divise O′. On verra, en répétant les raisonnements précédents : 1° que I′ contient un groupe J′ d'ordre $p'^{\mu'}$; 2° que les substitutions de H′ permutables à J′ forment un groupe H'_1, dans les diverses substitutions duquel le premier facteur A parcourt encore toute la suite des substitutions du groupe alterné.

D'ailleurs $H'_1 = H'$; car, si H'_1 était un sous-groupe de H′, celles des substitutions de H pour lesquelles AB appartient à H'_1 formeraient, contre l'hypothèse, un sous-groupe de H, dans lequel les premières substitutions partielles A reproduiraient le groupe alterné.

Le groupe I′ contient donc un groupe J′ d'ordre $p'^{\mu'}$ auquel toutes les substitutions de H′ sont permutables.

Ce résultat subsistera encore si O′ est une puissance de 2, telle que $2^{\mu'}$; il suffira de poser $p' = 2$ et $J' = I'$.

On verra encore : 1° que J′ contient un groupe L′ formé de substitutions d'ordre p' échangeables à toutes celles de J′; 2° que toutes les substitutions de H′ sont permutables à L′; 3° que si l'on réunit dans une même *bi-classe* les classes (contenant toutes le même nombre de lettres) que L′ permute entre elles, ces bi-classes contiendront respectivement $p'^{\mu'_1}$, $p'^{\mu'_2}$, ... classes (une partie des entiers μ'_1, μ'_2, ... pouvant être nuls) 4° que les substitutions de H′ seront de la forme

$$ACP',$$

et celles de H de la forme

$$ACP'P,$$

C désignant une substitution qui permute d'un mouvement d'ensemble les bi-classes (ou du moins celles d'entre elles qui contiennent le même nombre de classes, contenant elles-mêmes le même nombre de lettres); P' désignant un produit de substitutions $P'_1, P'_2, \ldots$ opérées respectivement entre les classes de la première bi-classe, entre celles de la seconde, etc.; 5° que les substitutions $P'_1, P'_2, \ldots$ appartiendront respectivement aux groupes linéaires de degrés $p'^{\mu'_1}, p'^{\mu'_2}, \ldots$.

Considérons le groupe H'' formé par les substitutions partielles AC. Si le groupe I'' formé par celles de ses substitutions où $A = 1$ contient des substitutions autres que l'unité, on pourra répéter encore ces raisonnements et grouper les bi-classes en tri-classes, et ainsi de suite. Admettons donc, pour fixer les idées en évitant des complications inutiles, que I'' se réduise à la substitution 1.

Groupons les bi-classes en catégories, en réunissant celles que les substitutions C permutent entre elles. Chacune des substitutions C sera un produit de substitutions partielles $C_1, C_2, \ldots$ opérées respectivement entre les bi-classes de la première catégorie, celles de la seconde catégorie, etc. Et les substitutions de H seront de la forme

$$ACP'P = AC_1 C_2 \ldots P'_1 P'_2 \ldots P_1 P_2 \ldots.$$

Chacun des groupes $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \ldots$ respectivement formés par les substitutions partielles C_1, par les substitutions C_2, etc., se réduira à la seule substitution 1, si la catégorie correspondante n'a qu'une bi-classe; sinon il contiendra des substitutions permutant ses bi-classes. Dans ce dernier cas, il sera isomorphe sans mériédrie au groupe alterné $\mathcal{A}_t$ formé par les substitutions A.

En effet, si H contenait une substitution dans laquelle A se réduisît à l'unité, sans qu'on eût en même temps $C_1 = 1$, $C_2 = 1$, ..., I'' contiendrait, contre l'hypothèse, une substitution $C_1 C_2 \ldots$ différente de l'unité.

D'autre part, si H contient une substitution

$$\Sigma = AC_2 \ldots P'P,$$

où C_1, par exemple, se réduise à l'unité, sans qu'il en soit de même de A, il contiendra les transformées de Σ par ses diverses substitutions. Ces transformées, ne déplaçant pas les bi-classes de la première catégorie, seront, comme Σ lui-même, de la forme

$$AC_2\ldots P'P.$$

En les combinant ensemble, on obtiendra un groupe H_1 de substitutions de la même forme, dans lesquelles A parcourra encore toute la suite des substitutions de $\mathcal{A}_t$ (car on sait que ce groupe est simple). Mais, par hypothèse, H ne contient pas de sous-groupe jouissant de cette propriété; donc $H_1 = H$; par suite, dans toutes les substitutions de H, on aura $C_1 = 1$; donc C_1 se réduira à l'unité, et la première catégorie ne contiendra qu'une seule bi-classe.

Nous pouvons donc énoncer, comme résultat de cette analyse, la proposition suivante :

Les substitutions de H *sont de la forme*

$$AC_1C_2\ldots P'_1P'_2\ldots P_1P_2\ldots,$$

P_1, P_2, ... *étant des substitutions linéaires opérées sur les* p^{μ_1}, p^{μ_2}, ... *lettres qui constituent respectivement la première classe, la seconde, etc.;*

P'_1, P'_2, ... *des substitutions d'ensemble linéaires, opérées sur les classes en nombre* p'^{μ_1}, p'^{μ_2}, ... *qui constituent respectivement la première bi-classe, la seconde, etc.;*

C_1, C_2, ... *des substitutions d'ensemble, opérées respectivement sur les bi-classes de la première catégorie, de la seconde, etc.;*

A *une substitution opérée sur les* t *lettres* a_1, ..., a_t.

Les substitutions partielles A *reproduisent le groupe alterné* $\mathcal{A}_t$; *les substitutions* C_1, *les substitutions* C_2, *etc., forment autant de groupes* $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, ...; *chacun d'eux sera isomorphe sans mériédrie à* $\mathcal{A}_t$ *si la catégorie correspondante contient plusieurs bi-classes; si elle n'en contient qu'une, il se réduira à l'unité.*

La forme générale des substitutions de H étant ainsi fixée, soit k un entier arbitraire au moins égal à 5 et au plus égal à t.

Soit K le groupe formé par celles des substitutions de H dont le premier facteur A permute entre elles les lettres a_1, ..., a_k sans déplacer a_{k+1}, ..., a_t.

Deux cas seront ici à distinguer :

1° Dans chaque catégorie, le nombre des bi-classes qui ne sont déplacées par aucune des substitutions de K est supérieur à la moitié du nombre total.

2° Il existe au moins une catégorie où le nombre des bi-classes non déplacées ne surpasse pas la moitié du nombre total.

Discutons successivement ces deux hypothèses.

II.

Admettons d'abord la première hypothèse.

Les bi-classes d'une même catégorie contenant toutes le même nombre de lettres, le nombre de lettres contenues dans les bi-classes que K déplace sera moindre que $\frac{n-t}{2}$.

Les substitutions de K seront de la forme

$$\mathrm{A}\mathrm{R}\mathrm{P}'_i\mathrm{P}'_{i_1}\ldots\mathrm{P}_l\mathrm{P}_{l_1}\ldots,$$

A désignant une substitution du groupe $\mathcal{A}_k$ alterné entre k lettres $a_1, \ldots, a_k$ (les diverses substitutions A reproduisant d'ailleurs tout ce groupe);

R une substitution opérée entre les lettres des bi-classes que K déplace;

P'_i, P'_{i_1}, ... des substitutions d'ensemble linéaires, opérées respectivement entre les classes de chacune des bi-classes restantes;

P_l, P_{l_1}, ... des substitutions linéaires, opérées respectivement entre les lettres de chaque classe de ces dernières bi-classes.

Considérons le groupe K′ formé par les substitutions partielles

$$\mathrm{A}\mathrm{P}'_i\mathrm{P}'_{i_1}\ldots,$$

et les groupes $\mathfrak{P}'_i$, $\mathfrak{P}'_{i_1}$, ... respectivement formés par les substitutions P'_i, par les substitutions P'_{i_1}, ... Deux cas seront à distinguer :

1° L'un au moins des groupes $\mathfrak{P}'_i$, $\mathfrak{P}'_{i_1}$, ..., par exemple $\mathfrak{P}'_i$, admet un groupe composant isomorphe à $\mathcal{A}_k$.

Les classes permutées par P'_i sont, comme on l'a vu, au nombre de $p'^{\mu'_i}$, p' étant un nombre premier et μ'_i un entier. Chacune d'elles contenant au moins une lettre, on aura $n-t \overline{\gtrless} p^{\mu'_i}$.

D'ailleurs, $\mathfrak{L}'_i$ est contenu dans le groupe linéaire de degré $p'^{\mu'_i}$. Pour qu'il admette un groupe composant isomorphe à $\mathcal{A}_k$, les conditions suivantes seront nécessaires (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. I, p. 35 et suivantes)

1°
$$\frac{(p'^{\mu'_i}-1)(p'^{\mu'_i}-p')\dots(p'^{\mu'_i}-p'^{\mu'_i-1})}{\delta(p'-1)}$$

(δ désignant le plus grand commun diviseur de μ'_i et de $p-1$) doit être divisible par $\frac{1.2\dots k}{2}$;

2°
$$\mu'_i \overline{\gtrless} q-1$$

(q désignant le plus grand nombre premier autre que p' et inférieur à $k-1$);

3°
$$\mu'_i \overline{\gtrless} k - \frac{\log k}{\log 2} - 3.$$

Comme p' est au moins égal à 2, cette dernière inégalité donne

$$n - t \overline{\gtrless} p'^{\mu'_i} \overline{\gtrless} 2^{k-\frac{\log k}{\log 2}-3}.$$

Cette inégalité pourra suffire en général [1].

---

[1] Pour les petites valeurs de k, on pourra recourir aux autres relations.

Ainsi, pour $k=5$ ou 6, μ'_i sera au moins égal à 2 (2e relation), à moins qu'on n'ait $p'=3$, $\mu'_i=1$. La première relation montre que cette hypothèse est inadmissible, ainsi que les suivantes $p'^{\mu'_i}=2^2, 2^3, 3^2$. D'ailleurs, 2^4 est moindre que 3^3 et que 5^2. Donc $p'^{\mu'_i}$, et *a fortiori* $n-t$, ne peut être moindre que 2^4.

Il en est de même à plus forte raison si $k=7$ ou 8.

Si $k=9$, $\mu'_i \overline{\gtrless} 6$, à moins qu'on n'ait $p'=7$, $\mu'_i \overline{\gtrless} 4$. Mais $7^4 > 2^6$. Donc $n-t \overline{\gtrless} 2^6$.

Si $k=10$, $\mu'_i \overline{\gtrless} 6$, à moins qu'on n'ait $p'=7$, $\mu'_i \overline{\gtrless} 4$. La première relation exclut les hypothèses $p'^{\mu'_i}=2^6$ ou 2^7. D'ailleurs, 2^8 est moindre que 3^6 et que 7^4. Donc $n-t \overline{\gtrless} 2^8$.

Si $k=11$, on trouvera $n-t \overline{\gtrless} 2^{10}$; ....

2° Supposons, au contraire, qu'aucun des groupes $\mathfrak{P}'_t$, $\mathfrak{P}'_{t_1}$, ... n'ait de groupe composant isomorphe à $\mathcal{A}_k$. Le groupe K' contiendra toutes les substitutions de $\mathcal{A}_k$ (*Bulletin de la Société mathématique*, p. 50). Le groupe K contiendra des substitutions correspondantes, de la forme

$$ARP_tP_{t_1}\ldots,$$

dans lesquelles A parcourt encore toute la suite des substitutions de $\mathcal{A}_k$.

Les groupes $\mathfrak{P}_t$, $\mathfrak{P}_{t_1}$, ..., respectivement formés par les substitutions partielles P_t, par les substitutions P_{t_1}, etc. sont contenus dans des groupes linéaires de degrés p^{μ_t}, $p^{\mu_{t_1}}$, ... Si l'un d'eux, par exemple $\mathfrak{P}_t$, admet un groupe composant isomorphe à $\mathcal{A}_k$, on trouvera pour le nombre $n-t \geqq p^{\mu_t}$ la même limite inférieure que tout à l'heure.

L'hypothèse contraire est d'ailleurs inadmissible. Car K contiendrait des substitutions de la forme

$$AR,$$

où A parcourrait toute la suite des substitutions de $\mathcal{A}_k$. Il contiendrait en particulier une substitution Σ dans laquelle A se réduirait à la substitution circulaire ternaire $(a_1 a_2 a_3)$. Le nombre des lettres déplacées par Σ serait moindre que $3+\frac{n-t}{2}$ et, *a fortiori* (t étant $\geqq 8$), moindre que $\frac{n}{2}-1$; il serait donc moindre que u, ce qui est contraire à l'hypothèse que u est la classe de G.

On aura donc nécessairement, dans le cas que nous venons de discuter,

$$n-t \geqq 2^{k-\frac{\log k}{\log 2}-3},$$

d'où

$$\log(n-t) \geqq (k-3)\log 2 - \log k.$$

III.

Supposons, contrairement à l'hypothèse examinée dans la Section précédente, qu'il existe au moins une catégorie, la première par exemple, dans laquelle les bi-classes non déplacées par K ne forment pas plus de la moitié du nombre total. Cette catégorie contiendra nécessairement plusieurs bi-classes, que nous désignerons par c_1, $c_2, \ldots, c_{n'}$.

Les substitutions de H sont (§ I) de la forme

$$AC_1C_2, \ldots, P'P = AC_1Q,$$

les substitutions partielles A reproduisant tout le groupe alterné $\mathcal{A}_t$ et les substitutions C_i un groupe $\mathcal{C}_1$ isomorphe sans mériédrie à $\mathcal{A}_t$, et d'ordre $\frac{t!}{2}$ comme ce dernier. Quant aux substitutions Q, elles ne déplacent pas les bi-classes $c_1, \ldots, c_{n'}$.

Soit $\mathcal{C}_{11}$ le sous-groupe d'ordre $\frac{t!}{2n'}$ formé par celles des substitutions de $\mathcal{C}_1$ qui ne déplacent pas c_1. Soit μ le nombre des bi-classes $c_1, \ldots, c_\mu$ que toutes les substitutions de $\mathcal{C}_1$ laissent immobiles. Les bi-classes $c_1, \ldots, c_{n'}$ pourront se répartir μ à μ en $\frac{n'}{\mu} = \nu$ systèmes $s_1, \ldots, s_\nu$, tels que toute substitution de $\mathcal{C}_1$ qui laisse immobile une bi-classe laissera aussi immobiles toutes celles de son système ([1]).

Les substitutions de $\mathcal{C}_1$ seront de la forme

$$DS_1S_2\ldots S_\nu,$$

D étant une substitution d'ensemble effectuée sur les ν systèmes; S_1, $S_2, \ldots$ des substitutions effectuées dans l'intérieur de chaque système entre les bi-classes qui le composent.

Les substitutions de H et, en particulier, celles de K seront donc de la forme

$$ADS_1S_2\ldots Q.$$

Deux cas seront à distinguer ici :

Premier cas. — *Ceux des systèmes $s_1, s_2, \ldots$ qui ne sont déplacés par aucune des substitutions de K forment plus de la moitié du nombre total.*

([1]) L'un des nombres μ, ν pourrait se réduire à l'unité sans que notre analyse cessât de s'appliquer.

Les substitutions de K pourront se mettre sous la forme

$$\mathrm{ARS}_i\mathrm{S}_{i_1}\ldots\mathrm{Q},$$

A désignant une substitution entre les lettres $a_1, \ldots, a_k$;
R une substitution opérée entre les bi-classes des systèmes que K déplace;
$\mathrm{S}_i, \mathrm{S}_{i_1}, \ldots$ des substitutions opérées respectivement entre les bi-classes de chacun des systèmes non déplacés s_i, s_{i_1}.

Le groupe alterné $\mathcal{A}_k$ formé par les substitutions A et le groupe Γ formé par les substitutions $\mathrm{RS}_i\mathrm{S}_{i_1}\ldots$ sont des sous-groupes correspondants pris dans les deux groupes $\mathcal{A}_t$ et C_1, qui sont isomorphes sans mériédrie; ils sont isomorphes l'un à l'autre, sans mériédrie; Γ sera donc simple et d'ordre $\frac{k!}{2}$, comme $\mathcal{A}_k$.

Cela posé, soient $\mathfrak{s}_i, \mathfrak{s}_{i_1}, \ldots$ les groupes respectivement formés par les substitutions partielles S_i, par les substitutions S_{i_1}, etc. Le groupe Γ admet évidemment comme facteurs de composition ceux de $\mathfrak{s}_i$; donc $\mathfrak{s}_i$ est simple, et d'ordre $\frac{k!}{2}$, s'il ne se réduit pas à la seule substitution 1, de même pour $\mathfrak{s}_{i_1}, \ldots$.

Mais les groupes $\mathfrak{s}_i, \mathfrak{s}_{i_1}, \ldots$ ne peuvent se réduire tous à la substitution 1; car les substitutions de K, se réduisant à la forme

$$\mathrm{ARQ},$$

laisseraient immobiles les bi-classes des systèmes s_i, s_{i_1}, lesquelles forment plus de la moitié du nombre total des bi-classes de la première catégorie; résultat contraire à notre hypothèse.

Nous devons donc admettre que l'un, au moins, des groupes $\mathfrak{s}_i, \mathfrak{s}_{i_1}, \ldots$, par exemple, $\mathfrak{s}_i$ soit d'ordre $\frac{k!}{2}$. Or, les substitutions de $\mathfrak{s}_i$ sont opérées entre les μ bi-classes du système s_i, lesquelles jouissent de la propriété que toute substitution de C_1, qui laisse l'une d'elles immobile, ne déplace pas les autres. L'ordre de $\mathfrak{s}_i$ ne peut donc surpasser μ, d'où l'inégalité

$$\mu \geqq \frac{k!}{2}.$$

D'ailleurs, le nombre total des lettres qui figurent dans s_i ne surpasse pas $n-t$, et chaque bi-classe en contient au moins une; on aura donc *a fortiori*

$$n-t \overline{\gtrless} \mu \overline{\gtrless} \frac{k!}{2},$$

d'où

$$\log(n-t) \overline{\gtrless} \log k! - \log 2.$$

Or, d'après une formule classique de la théorie des fonctions eulériennes, $\log k!$ est égal à $(k+\frac{1}{2})\log k - k + \frac{1}{2}\log 2\pi + \rho$, le reste ρ étant compris entre o et $\frac{1}{12k}$.

Donc

$$\log(n-t) > (k+\tfrac{1}{2})\log k - k + \tfrac{1}{2}\log 2\pi - \log 2.$$

Le nombre k étant $\overline{\gtrless} 5$, cette limite sera plus élevée que la suivante

$$\log(n-t) > (k-3)\log 2 - \log k,$$

trouvée précédemment dans l'hypothèse traitée dans le § II. Cette dernière limite est donc également applicable au cas actuel.

Deuxième cas. — *Ceux des systèmes $s_1, s_2, \ldots$ que* K *ne déplace pas ne forment pas plus de la moitié du nombre total.*

Le sous-groupe $\mathfrak{S}_{11}$, formé par celles des substitutions de $\mathfrak{S}_1$ qui ne déplacent pas les bi-classes du système s_1, admet ν transformés distincts par les substitutions de $\mathfrak{S}_1$. Ces transformés $\mathfrak{S}_{11}, \mathfrak{S}_{12}, \ldots, \mathfrak{S}_{1\nu}$ seront respectivement formés par celles des substitutions de $\mathfrak{S}_1$ qui laissent immobiles les bi-classes de s_1, celles de s_2, etc.; et chaque substitution de $\mathfrak{S}_1$ transformera ces sous-groupes les uns dans les autres de la même manière qu'elle permute les systèmes correspondants s_1, $s_2, \ldots$. Si donc elle est permutable à l'un de ces sous-groupes, elle ne déplacera pas le système correspondant.

Donc ceux des sous-groupes $\mathfrak{S}_{11}, \ldots, \mathfrak{S}_{1\nu}$ auxquels toutes les substitutions de K sont permutables ne forment pas plus de la moitié du nombre total.

Cela posé, le groupe $\mathfrak{S}_1$ étant isomorphe sans mériédrie au groupe $\mathcal{A}_t$, aux sous-groupes $\mathcal{C}_{11}, \ldots, \mathcal{C}_{1\nu}$ correspondront dans $\mathcal{A}_t$ des sous-groupes $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_\nu$, qui seront transformés les uns dans les autres par les substitutions de $\mathcal{A}_t$ de la même manière que $\mathcal{C}_{11}, \ldots, \mathcal{C}_{1\nu}$ le sont par les substitutions correspondantes de $\mathcal{C}_1$.

Donc ceux des sous-groupes $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_\nu$ auxquels les substitutions du groupe $\mathcal{A}_k$ (isomorphe à K) sont permutables, ne forment pas plus de la moitié du nombre total.

D'ailleurs l'ordre Ω du groupe Γ_1 est égal à $\frac{t!}{2n'}$, ordre de $\mathcal{C}_{11}$; et, chaque bi-classe contenant au moins une lettre, on a $n - t \overset{=}{>} n'$; donc

$$n - t \overset{=}{>} \frac{t!}{2\Omega},$$

Ω désignant l'ordre d'un sous-groupe Γ_1 contenu dans $\mathcal{A}_t$; ce sous-groupe Γ_1 étant d'ailleurs assujetti à la condition que ceux de ses transformés $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_\nu$ qui sont permutables à toutes les substitutions de $\mathcal{A}_k$ ne forment pas plus de la moitié du nombre total.

Pour discuter cette formule, groupons les lettres $a_1, \ldots, a_t$ en classes, en réunissant celles que Γ_1 permute transitivement. Soient respectivement $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ le nombre des lettres qu'elles contiennent; on aura

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \ldots = t,$$

et les substitutions de Γ_1 seront de la forme

$$G_1 G_2 \ldots,$$

$G_1, G_2, \ldots$ étant des substitutions partielles opérées respectivement sur les lettres de chaque classe.

Soient Ω_1 l'ordre du groupe Γ_{11} formé par les substitutions G_1; Ω_2 celui du groupe Γ_{12} formé par les substitutions G_2; etc. Le groupe Γ'_1, dérivé de la combinaison de toutes ces substitutions, aura pour ordre $\Omega_1 \Omega_2 \ldots$. Mais il contient évidemment Γ_1. Donc Ω divise $\Omega_1 \Omega_2 \ldots$. Il divisera même $\frac{1}{2}\Omega_1 \Omega_2 \ldots$ si l'un des groupes $\Gamma_{11}, \Gamma_{12}, \ldots$ n'est pas contenu dans $\mathcal{A}_t$; car Γ_1, étant contenu dans ce dernier groupe, le sera dans le groupe d'ordre $\frac{1}{2}\Omega_1 \Omega_2 \ldots$ formé par les substitutions communes à Γ'_1 et à $\mathcal{A}_t$.

Nous aurons donc

$$n - t \gtreqless \frac{t!}{r\Omega_1\Omega_2\ldots},$$

r étant égal à 2 ou à 1, suivant que les groupes Γ_{11}, Γ_{12}, ... sont tous contenus dans $\mathcal{A}_t$ ou non.

Cela posé, considérons l'expression

$$\frac{x(x-1)\ldots(x-k+1)}{t(t-1)\ldots(t-k+1)}.$$

C'est une fonction de x, qui s'annule pour $x = k - 1$; à partir de ce moment, elle est positive et croissante; pour $x = t$ elle devient égale à 1. L'équation

$$\frac{x(x-1)\ldots(x-k+1)}{t(t-1)\ldots(t-k+1)} = \frac{1}{2}$$

admet donc une racine ξ comprise dans l'intervalle de $k - 1$ à t.

On a évidemment

$$\frac{\xi}{t} > \frac{\xi-1}{t-1} > \ldots > \frac{\xi-k+1}{t-k+1},$$

d'où

$$\left(\frac{\xi}{t}\right)^k > \frac{\xi(\xi-1)\ldots(\xi-k+1)}{t(t-1)\ldots(t-k+1)} > \frac{1}{2},$$

$$\left(\frac{\xi-k+1}{t-k+1}\right)^k < \frac{\xi(\xi-1)\ldots(\xi-k+1)}{t(t-1)\ldots(t-k+1)} < \frac{1}{2}.$$

La première inégalité donne

$$\xi > \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{k}} t > \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} t,$$

quantité plus grande que $\frac{2}{3}t$ et que $\frac{1}{2}t + 1$ (t étant > 4).

On déduit de la seconde

$$\frac{\xi-k+1}{t-k+1} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{k}} < e^{-\frac{1}{k}\log 2} < \frac{1}{1+\frac{1}{k}\log 2},$$

d'où

$$\frac{\xi - t}{t - k + 1} < \frac{-\frac{1}{k}\log 2}{1 + \frac{1}{k}\log 2},$$

$$t - \xi > \frac{(t - k + 1)\log 2}{k + \log 2},$$

$$\xi < t - \frac{(t - k + 1)\log 2}{k + \log 2}.$$

Soit δ le plus grand nombre entier inférieur à la quantité

$$\eta = t - \frac{(t - k + 1)\log 2}{k + \log 2};$$

on aura, d'une part

$$\delta < t,$$

et d'autre part,

$$\delta > \xi - 1 \geqq k - 1 \geqq 4;$$

$$\delta > \frac{2}{3}t - 1 > \frac{1}{2}t.$$

Ces préliminaires posés, nous pouvons établir le théorème suivant :

Si l'un des entiers $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$, par exemple γ_1, est supérieur à δ, le groupe correspondant Γ_{11} ne pourra contenir le groupe $\mathcal{A}_{\gamma_1}$ alterné entre les γ_1 lettres $a_1, \ldots, a_{\gamma_1}$ que Γ_{11} déplace.

Supposons en effet que γ_1 soit $> \delta$, et, par suite, $> \frac{1}{2}t$, et que Γ_{11} contienne $\mathcal{A}_{\gamma_1}$. Il admettra le facteur de composition $\frac{\gamma_1!}{2}$ (précédé du facteur 2 si Γ_{11} est le groupe symétrique). Quant à $\Gamma_{12}, \Gamma_{13}, \ldots$, leurs facteurs de composition divisant respectivement $\gamma_2!, \gamma_3!, \ldots$ seront moindres que $\frac{\gamma_1!}{2}$ $\left(\text{car } \gamma_1 > \frac{1}{2}t > \gamma_2 + \gamma_3 + \ldots\right)$. Si donc nous supprimons tous ceux des facteurs de composition de Γ_1 qui sont moindres que $\frac{\gamma_1!}{2}$, nous obtiendrons comme sous-groupe de Γ_1 le groupe alterné $\mathcal{A}_{\gamma_1}$. Ce sous-groupe est évidemment le seul groupe alterné entre γ_1 lettres qui soit contenu dans Γ_1.

Chacun des transformés $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_\nu$ du groupe Γ_1 contient de même un groupe alterné entre γ_1 lettres prises parmi les lettres $a_1, \ldots, a_t$. Supposons que, parmi eux, il y en ait M qui contiennent le même groupe alterné $\mathcal{A}_{\gamma_1}$. Il y en aura également M qui contiennent chacun des groupes alternés transformés de $\mathcal{A}_{\gamma_1}$. Le nombre de ceux-ci étant évidemment égal au nombre des combinaisons de t lettres γ_1 à γ_1, le nombre ν des transformés de Γ_1 sera

$$\mathrm{M}\frac{t(t-1)\ldots(t-\gamma_1+1)}{1.2\ldots\gamma_1}.$$

Le groupe $\mathcal{A}_k$ sera contenu dans tous ceux de ces transformés qui contiennent un groupe alterné entre γ_1 lettres, parmi lesquelles figurent $a_1, \ldots, a_k$. Ceux-ci sont au nombre de

$$\mathrm{M}\frac{(t-k)(t-k-1)\ldots(t-\gamma_1+1)}{1.2\ldots(\gamma_1-k)}$$

et contenant $\mathcal{A}_k$, ils seront tous permutables à ses substitutions.

Le nombre des groupes de la suite $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_\nu$ qui sont permutables aux substitutions de $\mathcal{A}_k$ sera donc une fraction du nombre total au moins égale à

$$\frac{\gamma_1(\gamma_1-1)\ldots(\gamma_1-k+1)}{t(t-1)\ldots(t-k+1)}.$$

Mais on a, par hypothèse,

$$\gamma_1 \overline{\overline{>}} \delta + 1 \overline{\overline{>}} \eta > \xi.$$

La fraction précédente sera donc plus grande que

$$\frac{\xi(\xi-1)\ldots(\xi-k+1)}{t(t-1)\ldots(t-k+1)} = \frac{1}{2},$$

résultat contraire à l'hypothèse que nous discutons.

Nous sommes maintenant en mesure d'assigner facilement une limite inférieure à la valeur de $n - t$. Nous distinguerons trois cas dans cette discussion.

Premier sous-cas. — *Aucun des nombres $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ ne surpasse δ.*

Le nombre Ω_1 divise la factorielle $\gamma_1!$ il divise même $\frac{\gamma_1!}{2}$ si Γ_1 est contenu dans le groupe alterné. De même, Ω_2 divise $\gamma_2!$ $\left(\text{ou } \frac{\gamma_2!}{2}\right)$; etc. Donc $r\Omega_1\Omega_2\ldots$ divise $\gamma_1!\gamma_2!\ldots$, et l'on aura

$$n - t \overset{=}{>} \frac{t!}{\gamma_1!\gamma_2!\ldots}.$$

D'ailleurs, si $\gamma_1 \overset{=}{>} \gamma_2$, on aura évidemment

$$\gamma_1!\,\gamma_2! < (\gamma_1+1)!\,(\gamma_2-1)!$$

La limite inférieure trouvée ci-dessus prendra donc sa plus petite valeur dans la supposition

$$\gamma_1 = \delta, \qquad \gamma_2 = t - \delta, \qquad \gamma_3 = \gamma_4 = \ldots = 0.$$

On aura ainsi, dans tous les cas,

$$n - t \overset{=}{>} \frac{t!}{\delta!(t-\delta)!}.$$

Posons

$$\varphi(t) = \left(t + \frac{1}{2}\right)\log t - t + \frac{1}{2}\log 2\pi + \frac{1}{12t}.$$

On a, d'après la formule connue qui donne la valeur approchée de $\log\Gamma(t+1)$,

$$\varphi(t) - \frac{1}{12t} < \log t! < \varphi(t)$$

et, par suite,

$$\log(n-t) > \varphi(t) - \frac{1}{12t} - \varphi(\delta) - \varphi(t-\delta).$$

Cette expression, que nous représenterons par $f(\delta)$, est une fonction décroissante de δ $\left(\delta \text{ étant } > \frac{t}{2}\right)$. Car sa dérivée

$$-\log\delta - \frac{1}{2\delta} + \frac{1}{12\delta^2} + \log(t-\delta) + \frac{1}{2(t-\delta)} + \frac{1}{12(t-\delta)^2}$$

s'annule pour $\delta = \frac{t}{2}$, et devient ensuite négative, la dérivée seconde

$$-\frac{1}{\delta} + \frac{1}{2\delta^2} - \frac{1}{6\delta^3} - \frac{1}{t-\delta} + \frac{1}{2(t-\delta)^2} - \frac{1}{6(t-\delta)^3}$$

étant négative

Deuxième cas. — *Le nombre γ_1 surpasse δ; mais le groupe Γ_{11} n'est pas primitif.*

Soient

α le nombre des systèmes entre lesquels les lettres de Γ_{11} se partagent;
$\frac{\gamma_1}{\alpha}$ le nombre des lettres de chaque système;
$r\Omega_1$ divisera $\alpha! \left[\left(\frac{\gamma_1}{\alpha}\right)!\right]^\alpha$;
$\Omega_2\Omega_3\ldots$ divisera $(t-\gamma_1)!$

On aura donc

$$n - t \overset{=}{>} \frac{t!}{\alpha! \left[\left(\frac{\gamma_1}{\alpha}\right)!\right]^\alpha (t-\gamma_1)!};$$

d'où

$$\log(n-t) > \varphi(t) - \frac{1}{12t} - \varphi(\alpha) - \alpha\varphi\left(\frac{\gamma_1}{\alpha}\right) - \varphi(t-\gamma_1),$$

si $t - \gamma_1 > 0$. Cette formule subsistera encore pour $t - \gamma_1 = 0$, si l'on convient de poser $\varphi(0) = 0$.

Désignons par $F(\gamma_1, \alpha)$ le second membre de l'inégalité précédente. Le nombre α, divisant γ_1, ne pourra prendre que des valeurs comprises entre 2 et $\frac{\gamma_1}{2}$. Cherchons le minimum de F, lorsque α varie d'une manière continue entre ces limites.

La dérivée seconde

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2} = -\frac{1}{2\alpha} - \frac{\gamma_1 - \frac{1}{2}}{\alpha^2} - \frac{1}{6\alpha^3} - \frac{1}{6\gamma_1},$$

étant constamment négative, le minimum cherché ne pourra avoir lieu que pour l'une des valeurs extrêmes 2, $\frac{\gamma_1}{2}$. Ce sera pour $\alpha = 2$.

En effet, la différence

$$\mathrm{F}\left(\gamma_1, \frac{\gamma_1}{2}\right) - \mathrm{F}(\gamma_1, 2) = \varphi\left(\frac{\gamma_1}{2}\right) - \left(\frac{\gamma_1}{2} - 1\right)\varphi(2)$$

s'annule pour $\gamma_1 = 4$. Elle sera positive si $\gamma_1 > 4$, car sa dérivée

$$\frac{1}{2}\left(\log\frac{\gamma_1}{2} + \frac{1}{\gamma_1} - \frac{1}{3\gamma_1^2}\right) - \frac{1}{2}\varphi(2)$$

est positive. Or γ_1, étant $> \delta$, est par là même > 4.

On aura donc

$$\log(n - t) > \mathrm{F}(\gamma_1, 2).$$

Supposons que γ_1, qui par hypothèse est $\overline{\gtrless}\, \delta + 1$, varie de $\delta + 1$ à $t - 1$ et cherchons le minimum de cette expression. Sa dérivée

$$-\varphi'\left(\frac{\gamma_1}{2}\right) + \varphi'(t - \gamma_1)$$

est négative si $\frac{\gamma_1}{2} \overline{\gtrless}\, t - \gamma_1$, d'où $\gamma_1 \overline{\gtrless}\, \frac{2}{3}t$. Cette circonstance se présentera dans tout le champ, car $\delta + 1 > \frac{2}{3}t$. Le minimum cherché aura donc lieu pour $\gamma_1 = t_1 - 1$ et sera égal à $\mathrm{F}(t - 1, 2)$.

Il reste à comparer cette valeur à celle qu'on obtiendrait pour $\gamma_1 = t$, laquelle est $\mathrm{F}(t, 2)$.

La différence

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{F}(t-1, 2) - \mathrm{F}(t, 2) \\ &\quad = 2\left[\varphi\left(\frac{t}{2}\right) - \varphi\left(\frac{t-1}{2}\right)\right] - \varphi(1) \\ &\quad = (t+1)\log\frac{t}{2} - t\log\frac{t-1}{2} + \frac{1}{3t} - \frac{1}{3(t-1)} - \frac{1}{2}\log 2\pi - \frac{1}{12} \end{aligned}\right.$$

est une fonction croissante de t, déjà positive pour sa valeur minimum $t = 8$.

Le minimum de $\log(n-t)$ sera donc

$$\begin{aligned}F(t,2) &= \varphi(t) - \frac{1}{12t} - \varphi(2) - 2\varphi\left(\frac{t}{2}\right)\\ &= (t+\tfrac{1}{2})\log t - t + \tfrac{1}{2}\log 2\pi\\ &\quad -(2+\tfrac{1}{2})\log 2 + 2 - \tfrac{1}{2}\log 2\pi - \tfrac{1}{24}\\ &\quad -(t+1)\log\frac{t}{2} + t - \log 2\pi - \frac{1}{3t}\\ &= t\log 2 - \tfrac{1}{2}\log t - \frac{1}{3t} + 2 - \tfrac{1}{24} - \tfrac{3}{2}\log 2 - \log 2\pi.\end{aligned}$$

Cette limite est évidemment plus grande que $(t-3)\log 2 - \log t$, et, *a fortiori*, que $(k-3)\log 2 - \log k$, k étant un nombre quelconque >4, mais $\overline{\gtrless} t$. On doit donc la rejeter, comme moins précise que celle obtenu par la discussion du § II.

TROISIÈME SOUS-CAS. — *Le nombre* γ_1 *est* >8; Γ_{11} *est primitif, mais ne contient pas le groupe alterné.*

Le groupe Γ_{11} ne contenant dans ce cas aucune substitution circulaire ternaire, son ordre Ω_1 ne pourra surpasser $\frac{\gamma_1!}{m!}$, m étant le plus grand entier contenu dans $\frac{\gamma_1+1}{2}$ (BOCHERT, *Mathematische Annalen*, t. XXXIII, p. 584). D'autre part, si $t-\gamma_1>1$, $r\Omega_2\Omega_3\ldots$ divisera $(t-\gamma_1)!$; et si $t-\gamma_1 = 1$ ou 0, $\Omega_2\Omega_3\ldots$ se réduira à l'unité, mais r pourra être égal à 2. On a enfin dans tous les cas

$$\log m! > \varphi(m) - \frac{1}{12m} > \varphi\left(\frac{\gamma_1}{2}\right) - \frac{1}{6\gamma_1},$$

car $m \overline{\gtrless} \frac{\gamma_1}{2}$, et $\varphi(x) - \frac{1}{12x}$ est une fonction croissante.

Posant donc, pour abréger,

$$\varphi(t) - \frac{1}{12t} + \varphi\left(\frac{\gamma_1}{2}\right) - \frac{1}{6\gamma_1} - \varphi(\gamma_1) - \varphi(t-\gamma_1) = \psi(\gamma_1),$$

nous aurons

$$\begin{aligned}&\log(n-t) > \psi(\gamma_1) &&\text{si}\quad \gamma_1 < t-1,\\ &\log(n-t) > \psi(t-1) - \log 2 &&\text{si}\quad \gamma_1 = t-1.\end{aligned}$$

Enfin, si $\gamma_1 = t$, on aura

$$m \gtreqless \frac{t}{2}, \qquad \log m! \gtreqless \log\Gamma\left(\frac{t}{2}+1\right),$$
$$\log(n-t) \gtreqless \varphi\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{1}{6t} - \log 2.$$

Lorsque γ_1 varie de δ à $t-1$, la dérivée seconde

$$\psi''(\gamma_1) = -\frac{1}{2\gamma_1} + \frac{1}{6\gamma_1^3} - \frac{1}{t-\gamma_1} + \frac{1}{2(t-\gamma_1)^2} - \frac{1}{6(t-\gamma_1)^3}$$

sera négative. Le minimum de $\psi(\gamma_1)$ aura donc lieu pour $\gamma_1 = \delta$ ou $t-1$; $\log(n-t)$ sera donc supérieur à la plus petite des trois quantités

$$\psi(\delta), \quad \psi(t-1) - \log 2, \quad \varphi\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{1}{6t} - \log 2.$$

La première de ces limites $\psi(\delta)$ pourra être rejetée, car elle est supérieure à la limite $f(\delta)$ obtenue pour le premier cas : on a en effet

$$\psi(\delta) - f(\delta) = \varphi\left(\frac{\delta}{2}\right) - \frac{1}{6\delta}$$

expression dont la dérivée est positive, et qui l'est elle-même dès que $\delta = 4$.

Les deux autres limites sont également à rejeter, car elles sont supérieures à $(t-3)\log 2 - \log t$, et *a fortiori* à $(k-3)\log 2 - \log k$ si $k < t$. On a en effet

$$\begin{aligned}
&\psi(t-1) - \log 2 - (t-3)\log 2 + \log t \\
&\quad = (t+\tfrac{1}{2})\log t - t + \frac{t}{2}\log\frac{t-1}{2} - \frac{t-1}{2} \\
&\qquad - (t-\tfrac{1}{2})\log(t-1) + (t-1) - \frac{1}{12(t-1)} + 1 - \frac{1}{12} \\
&\qquad - \log 2 - (t-3)\log 2 + \log t.
\end{aligned}$$

Or, on a

$$\begin{aligned}
\frac{t}{2}\log\frac{t-1}{2} - (t-\tfrac{1}{2})\log(t-1) &= -\frac{t}{2}\log 2 - \frac{t-1}{2}\log(t-1) \\
&= -\frac{t}{2}\log 2 - \frac{t-1}{2}\log t - \frac{t-1}{2}\log\left(1-\frac{1}{t}\right).
\end{aligned}$$

Mais

$$-\frac{t-1}{2}\log\left(1-\frac{1}{t}\right) > \frac{t-1}{2}\frac{1}{t} > \frac{1}{2}-\frac{1}{2t}.$$

Substituant cette valeur, on voit que la différence cherchée est plus grande que

$$\left(\frac{t}{2}+2\right)\log t-(1+3\log 2)\frac{t}{2}+\frac{5}{12}+2\log 2-\frac{1}{2t}-\frac{1}{12(t-1)},$$

quantité évidemment positive.

On a d'autre part

$$\begin{aligned}\varphi\left(\frac{t}{2}\right)-\frac{1}{6t}-\log 2-(t-3)\log 2+\log t \\ =\frac{t+3}{2}\log t-\frac{1+3\log 2}{2}t+\frac{3}{2}\log 2+\frac{1}{2}\log 2\pi+\log t,\end{aligned}$$

quantité évidemment positive.

IV.

En réunissant les résultats des deux Sections précédentes, nous pouvons formuler le théorème suivant :

Soit G *un groupe de classe* u, *et au moins* t *fois transitif* ($t \geqq 8$), *et ne contenant pas le groupe alterné.*

Soit k *un entier* > 4 *et* $\leqq t$, *choisi à volonté;* δ *le plus grand entier qui satisfasse à l'inégalité*

$$\delta < t-\frac{(t-k+1)\log 2}{k+\log 2}.$$

Posons en outre

$$\varphi(t)=\left(t+\tfrac{1}{2}\right)\log t-t+\tfrac{1}{2}\log 2\pi+\frac{1}{12t}.$$

On aura nécessairement l'une des deux inégalités suivantes

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned}\log(n-t) &\geqq (k-3)\log 2-\log k,\\ \log(n-t) &> \varphi(t)-\frac{1}{12t}-\varphi(\delta)-\varphi(t-\delta).\end{aligned}\right.$$

Il nous reste à déterminer l'entier arbitraire k de manière à obtenir une limite aussi élevée que possible.

Si nous faisons croître k d'une manière continue de 5 à t, δ croîtra et $\varphi(t) - \frac{1}{12t} - \varphi(\delta) - \varphi(t-\delta)$ décroîtra. Au contraire, l'expression $(k-3)\log 2 - \log k$ sera croissante, et finira par dépasser l'autre. On obtiendra donc le meilleur résultat possible en assignant à k l'une des deux valeurs entières entre lesquelles se trouve comprise la racine de l'équation

$$(k-3)\log 2 - \log k = \varphi(t) - \frac{1}{12t} - \varphi(\delta) - \varphi(t-\delta).$$

Cherchons à nous rendre compte de l'ordre de grandeur de la limite inférieure de $\log(n-t)$ lorsque t est très grand.

Faisons tendre k vers l'infini en même temps que t, mais moins rapidement; la valeur principale de $(k-3)\log 2 - \log k$ sera $k\log 2$; celle de δ sera t; celle de $t-\delta$ sera $\frac{t\log 2}{k}$. Pour trouver celle de

$$\begin{aligned}
&\varphi(t) - \frac{1}{12t}\varphi(\delta) - \varphi(t-\delta) \\
&\quad = (t+\tfrac{1}{2})\log t - (\delta+\tfrac{1}{2})\log\delta \\
&\qquad - (t-\delta+\tfrac{1}{2})\log(t-\delta) - \tfrac{1}{2}\log 2\pi - \frac{1}{12\delta} - \frac{1}{12(t-\delta)},
\end{aligned}$$

remplaçons $\log\delta$ par

$$\log t + \log\left(1 - \frac{t-\delta}{t}\right) = \log t - \frac{t-\delta}{t} - \frac{(t-\delta)^2}{2t^2} - \dots.$$

Le terme prépondérant dans l'expression ainsi transformée sera $(t-\delta)\log t$, dont la valeur principale est

$$\frac{t\log 2}{k}\log t.$$

Elle deviendrait égale à $k\log 2$, si l'on posait

$$k = \sqrt{t\log t}.$$

Si nous prenons pour k une valeur entière voisine de ce dernier nombre, les deux expressions (2), et par suite la limite inférieure de $\log(n-t)$, seront de la forme

$$\sqrt{t\log t}\log 2(1+\varepsilon),$$

ε étant un infiniment petit.