JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

H. ANDOYER

Sur la division algébrique appliquée aux polynômes homogènes

Journal de mathématiques pures et appliquées 5e série, tome 1 (1895), p. 61-90.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1895_5_1__61_0>

Sur la division algébrique appliquée aux polynomes homogènes;

PAR M. H. ANDOYER.

---

1. Soient g et f deux formes binaires des degrés n et p par rapport aux variables homogènes x_1 et x_2. Soient y_1 et y_2 un autre couple d'indéterminées, covariantes aux premières, et posons, pour abréger l'écriture,

$$(xy) = x_1 y_2 - x_2 y_1,$$
$$(xy)^m = x_1^m Y_0^{(m)} + x_1^{m-2} x_2 Y_1^{(m)} + \ldots + x_2^m Y_m^{(m)},$$

de sorte que, d'une façon générale, on a

$$Y_p^{(m)} = (-1)^p \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-p+1)}{1.2.3\ldots p} y_1^p y_2^{m-p}.$$

En supposant $n \geqq p$, on peut déterminer deux formes q et f_1, respectivement des degrés $n-p$ et $p-1$ par rapport aux variables x, telles que l'on ait l'identité

$$g + fq + (xy)^{n-p+1} f_1 = 0.$$

Cette opération, qui est une généralisation naturelle de la division algébrique, est possible et possible d'une seule façon.

Soit en effet

$$
\begin{aligned}
g &= a_0 x_1^n + a_1 x_1^{n-1} x_2 + \ldots + a_{n-1} x_1 x_2^{n-1} + a_n x_2^n,\\
f &= b_0 x_1^p + b_1 x_1^{p-1} x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + b_p x_2^p,\\
f_1 &= \alpha_0 x_1^{p-1} + \alpha_1 x_1^{p-2} x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \alpha_{p-1} x_2^{p-1},\\
q &= \beta_0 x_1^{n-p} + \beta_1 x_1^{n-p-1} x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \beta_{n-p} x_2^{n-p},
\end{aligned}
$$

les α et β étant des coefficients indéterminés.

Si l'on écrit les équations d'identification, et que l'on élimine les coefficients inconnus entre ces équations et les deux relations écrites en dernier lieu, on trouve immédiatement sous forme de déterminants deux équations propres à déterminer q et f_1.

Pour plus de netteté dans l'écriture des déterminants, nous représenterons par la notation

$$
\begin{array}{ccc}
a_0 & \cdots & \cdot \\
\vdots & (\lambda, \mu) & \vdots \\
\cdot & \cdots & a_n
\end{array}
$$

un tableau rectangulaire de λ lignes et μ colonnes composé de la façon suivante : la première colonne contient les éléments a_0, a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n, puis des zéros; la seconde colonne contient d'abord un zéro, puis les éléments a_0, a_1, ..., a_n et est terminée par des zéros; la troisième colonne contient d'abord deux zéros, puis les éléments a_0, a_1, ..., a_n, et est terminée par des zéros; et ainsi de suite. On a d'ailleurs la relation évidente

$$\lambda - \mu = n.$$

Ceci posé, les équations propres à déterminer q et f_1 sont

$$
0 = \left|
\begin{array}{ccc|c|ccc}
0 & 0 \ldots\ldots & 0 & -q & x_1^{n-p} & x_1^{n-p-1} x_2 \;\ldots & x_2^{n-p} \\
Y_0^{(n-p+1)} & \cdots & \cdot & a_0 & b_0 & \cdots & \cdot \\
\vdots & (n+1, p) & \vdots & a_1 & \vdots & (n+1,\; n-p+1) & \vdots \\
\cdot & \cdots & Y_{n-p+1}^{(n-p+1)} & \vdots\;\; a_n & \cdot & \cdots & b_p
\end{array}
\right|
$$

et

$$0 = \begin{vmatrix} x_1^{p-1} \; x_1^{p-2}x_2 \ldots x_2^{p-1} & -f_1 & 0 \quad 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 0 \\ Y_0^{(n-p+1)} \ldots\ldots\ldots & a_0 & b_0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \vdots \quad (n+1, p) \quad \vdots & a_1 & \vdots \quad (n+1,\; n-p+1) \quad \vdots \\ & \vdots & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots Y_{n-p+1}^{(n-p+1)} & a_n & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots b_p \end{vmatrix}.$$

Le coefficient de $-q$ ou $-f_1$ dans les seconds membres est, au facteur $(-1)^p$ près, le résultant des deux formes f et $(xy)^{n-p+1}$, et par suite est égal à $(-1)^p[f(y)]^{n-p+1}$, en désignant en général par $\varphi(y)$ ce que devient la fonction φ des variables x_1 et x_2, quand on y fait $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$. Par suite, on a

$$(-1)^p[f(y)]^{n-p+1} q$$
$$= \begin{vmatrix} 0 \quad 0 \quad \ldots\ldots \quad 0 & 0 & x_1^{n-p} \quad x_1^{n-p-1}x_2 \quad \ldots \quad x_2^{n-p} \\ Y_0^{(n-p+1)} \ldots\ldots\ldots & a_0 & b_0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \vdots \quad (n+1, p) \quad \vdots & a_1 & \vdots \quad (n+1,\; n-p+1) \quad \vdots \\ & \vdots & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots Y_{n-p+1}^{(n-p+1)} & a_n & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots b_p \end{vmatrix},$$

$$(-1)^p[f(y)]^{n-p+1} f_1$$
$$= \begin{vmatrix} x_1^{p-1} \; x_1^{p-2}x_2 \ldots x_2^{p-1} & 0 & 0 \quad 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 0 \\ Y_0^{(n-p+1)} \ldots\ldots\ldots & a_0 & b_0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \vdots \quad (n+1, p) \quad \vdots & a_1 & \vdots \quad (n+1,\; n-p+1) \quad \vdots \\ & \vdots & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots Y_{n-p+1}^{(n-p+1)} & a_n & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots b_p \end{vmatrix},$$

ce qui démontre la proposition annoncée.

2. Comme (xy) est un covariant, il résulte de la proposition précédente que q et f_1 sont des covariants simultanés à deux séries de variables des formes g et f; q est même un covariant absolu.

On pourra de même obtenir successivement les identités suivantes, où, pour la symétrie, on a écrit f_0 et q_0 au lieu de f et q,

$$\begin{array}{l}
g+f_0 q_0+(xy)^{n-p+1} f_1=0, \\
f_0+f_1 q_1+(xy)^2 f_2 \quad =0, \\
f_1+f_2 q_2+(xy)^2 f_3 \quad =0, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\
f_{i-1}+f_i q_i+(xy)^2 f_{i+1}=0, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\
f_{p-2}+f_{p-1} q_{p-1}+(xy)^2 f_p=0.
\end{array}$$

Les q_i (sauf q_0) sont du premier degré par rapport aux x; la fonction f_i est de degré $p-i$ par rapport aux mêmes variables.

Ces fonctions q_i et f_i sont d'ailleurs des covariants simultanés des deux formes données. Les q_i offrent peu d'intérêt : on les éliminera en remplaçant les identités précédentes par de nouvelles identités qui s'en déduisent par un procédé bien connu, et dont la forme générale sera

$$f_i(xy)^{n-p+2i-1}+G_i g+F_i f=0,$$

les G_i et les F_i étant des fonctions nécessairement covariantes, des degrés $i-1$ et $n-p+i-1$ respectivement par rapport aux x.

En particulier, on a

$$\begin{array}{ll}
G_0=0, & F_0=-(xy)^{n-p-1}, \\
G_1=1, & F_1=q_0.
\end{array}$$

De la relation générale

$$(xy)^2 f_{i+1}+f_i q_i+f_{i-1}=0,$$

on tire

$$\begin{array}{l}
G_{i+1}+G_i q_i+(xy)^2 G_{i-1}=0, \\
F_{i+1}+F_i q_i+(xy)^2 F_{i-1}=0,
\end{array}$$

et, par suite,

$$G_i F_{i+1}-F_i G_{i+1}=(xy)^2(G_{i-1} F_i-F_{i-1} G_i);$$

comme on a en particulier

$$G_0 F_1 - F_1 G_0 = (xy)^{n-p-1},$$

il vient

$$G_i F_{i+1} - F_i G_{i+1} = (xy)^{n-p+2i-1}.$$

Les relations

$$\begin{aligned} f_i(xy)^{n-p+2i-1} &+ G_i g + F_i f = 0, \\ f_{i+1}(xy)^{n-p+2i+1} &+ G_{i+1} g + F_{i+1} f = 0 \end{aligned}$$

donnent alors, en vertu de la précédente,

$$f_i F_{i+1} - (xy)^2 f_{i+1} F_i + g = 0, \qquad f_i G_{i+1} - (xy)^2 f_{i+1} G_i - f = 0.$$

Si maintenant on fait

$$\begin{aligned} f_i &= \alpha_0 x_1^{p-i} + \alpha_1 x_1^{p-i-1} x_2 + \ldots, \\ G_i &= \beta_0 x_1^{i-1} + \beta_1 x_1^{i-2} x_2 + \ldots, \\ F_i &= \gamma_0 x_1^{n-p+i-1} + \gamma_1 x_1^{n-p+i-2} x_2 + \ldots, \end{aligned}$$

et qu'on élimine les coefficients α, β, γ entre ces relations et celles que l'on obtient en écrivant que l'identité fondamentale est vérifiée, on trouve aisément

$$\frac{f_i}{A_i} = \frac{G_i}{B_i} = \frac{F_i}{C_i} = \lambda_i,$$

λ_i étant indépendant des x, avec

$$A_i = \left| \begin{array}{ccccc} x_1^{p-i} \quad x_1^{p-i-1} x_2 \quad \ldots \quad x_2^{p-i} & & 0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0 & & 0 \quad 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 0 \\ Y_0^{(n-p+2i-1)} \cdots\cdots & & a_0 \cdots\cdots & & b_0 \cdots\cdots \\ \vdots \quad (n+i, p-i+1) \quad \vdots & & \vdots \quad (n+i, i) \quad \vdots & & \vdots \quad (n+i, n-p+i) \quad \vdots \\ \cdots\cdots\cdots \; Y_{n-p+2i-1}^{(n-p+2i-1)} & & \cdots\cdots a_n & & \cdots\cdots b_p \end{array} \right|,$$

$$B_i = \left| \begin{array}{ccc} 0 \quad 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 0 & x_1^{i-1} \; x_1^{i-2}x_2 \ldots x_2^{i-1} & 0 \quad 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 0 \\ Y_0^{(n-p+2i-1)} \ldots\ldots\ldots\ldots & a_0 \ldots\ldots\ldots\ldots & b_0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \vdots \; (n+i, p-i+1) \; \vdots & \vdots \; (n+i, i) \; \vdots & \vdots \; (n+i, n-p+i) \; \vdots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots Y_{n-p+2i-1}^{(n-p+2i-1)} & \ldots\ldots\ldots\ldots a_n & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots b_p \end{array} \right|,$$

$$C_i = \left| \begin{array}{ccc} 0 \quad 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 0 & 0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0 & x_1^{n-p+i-1} \; x_1^{n-p+i-2}x_2 \ldots x_2^{n-p+i-1} \\ Y_0^{(n-p+2i-1)} \ldots\ldots\ldots\ldots & a_0 \ldots\ldots\ldots\ldots & b_0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \vdots \; (n+i, p-i+1) \; \vdots & \vdots \; (n+1, i) \; \vdots & \vdots \; (n+i, n-p+i) \; \vdots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots Y_{n-p+2i-1}^{(n-p+2i-1)} & \ldots\ldots\ldots\ldots a_n & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots b_p \end{array} \right|.$$

Ces déterminants A_i, B_i, C_i sont d'ordre $n+i+1$; ils comprennent trois groupes de colonnes, composés respectivement de $p-i+1$, i, et $n-p+i$ colonnes.

Il faut maintenant déterminer les λ_i. D'abord, à cause de $A_0 = \frac{f_0}{\lambda_0}$, on trouve immédiatement

$$\lambda_0 = \frac{(-1)^p}{[f(y)]^{n-p-1}},$$

et, à cause de la valeur donnée plus haut de f_1, on trouve aussi

$$\lambda_1 = \frac{(-1)^p}{[f(y)]^{n-p+1}}.$$

On a encore, en vertu de relations écrites plus haut,

$$f_i(y)\,F_{i+1}(y) + g(y) = 0,$$
$$f_i(y)\,G_{i+1}(y) - f(y) = 0,$$

ou

$$\lambda_i\lambda_{i+1}A_i(y)\,C_{i+1}(y) + g(y) = 0,$$
$$\lambda_i\lambda_{i+1}A_i(y)\,B_{i+1}(y) - f(y) = 0.$$

Considérons le déterminant d'ordre $n+i$,

$$\Delta_i = \left| \begin{array}{ccc} Y_0^{(n-p+2i)} \ldots\ldots\ldots\ldots & a_0 \ldots\ldots\ldots\ldots & b_0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \vdots \; (n+i, p-i) \; \vdots & \vdots \; (n+i, i) \; \vdots & \vdots \; (n+i, n-p+i) \; \vdots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots Y_{n-p+2i}^{(n-p+2i)} & \ldots\ldots\ldots\ldots a_n & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots b_p \end{array} \right|;$$

une transformation évidente donne

$$A_i(y) = (-1)^{p-i}\Delta_i.$$

On obtient aussi facilement

$$\begin{aligned} B_{i+1}(y) &= (-1)^p f(y)\,\Delta_i, \\ C_{i+1}(y) &= -(-1)^p g(y)\,\Delta_i, \end{aligned}$$

et, par suite, il vient

$$\lambda_i \lambda_{i+1} \Delta_i^2 = (-1)^i.$$

On a d'ailleurs

$$\Delta_0 = [f(y)]^{n-p},$$

et, par suite,

$$\lambda_1 = \frac{1}{\lambda_0 \Delta_0^2} = \frac{(-1)^p}{[f(y)]^{n-p+1}},$$

comme plus haut.

Il vient ensuite

$$\lambda_2 = -\frac{\lambda_0 \Delta_0^2}{\Delta_1^2}, \quad \lambda_3 = -\frac{\Delta_1^2}{\lambda_0 \Delta_0^2 \Delta_2^2},$$

$$\lambda_4 = +\frac{\lambda_0 \Delta_0^2 \Delta_2^2}{\Delta_1^2 \Delta_3^2}, \qquad \lambda_5 = +\frac{\Delta_1^2 \Delta_3^2}{\lambda_0 \Delta_0^2 \Delta_2^2 \Delta_4^2}, \qquad \ldots.$$

Toutes les fonctions A_i, B_i, C_i, Δ_i que nous avons introduites sont d'ailleurs des covariants.

3. Avant d'aller plus loin, nous allons démontrer quelques propositions dont nous pourrions nous passer à la rigueur, mais qui ont de l'importance par elles-mêmes.

Considérons une matrice M de pq éléments, à p lignes et q colonnes, avec $p \geqq q$:

$$M = \begin{Vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \ldots & a_1^q \\ a_2^1 & a_2^2 & \ldots & a_2^q \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_p^1 & a_p^2 & \ldots & a_p^q \end{Vmatrix}.$$

De cette matrice on peut tirer $\frac{p(p-1)\ldots(p-q+1)}{1.2\ldots q}$ déterminants d'ordre q; celui de ces déterminants qui est formé par les lignes de rangs $i_1, i_2, \ldots, i_q$ (les indices étant supposés aller en croissant) sera représenté par $(i_1 i_2 \ldots i_q)$. Plus généralement $(i_1 i_2 \ldots i_r)$ désignera la matrice formée par les lignes de rangs $i_1, i_2, \ldots, i_r$ du tableau M, les indices étant supposés aller en croissant et r pouvant être $\gtrless q$.

Nous dirons que la matrice M est nulle quand tous les déterminants d'ordre le plus élevé q qu'on en peut tirer sont nuls : pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que, M' désignant une matrice non nulle formée avec $q-1$ lignes de M, tous les déterminants obtenus en bordant M' avec l'une quelconque des $p-q+1$ autres lignes de M soient nuls : en tout $p-q+1$ conditions. Si toutes les matrices telles que M' sont nulles, il en est évidemment de même de M. Plus généralement, si une matrice M'' à $r-1$ lignes $(r<q)$ tirée de M n'est pas nulle, et si toutes les matrices à r lignes obtenues en bordant M'' avec une quelconque des $p-r+1$ autres lignes de M sont nulles, toutes les matrices à r lignes tirées de M sont nulles. Ces propositions sont rendues évidentes par la théorie élémentaire des déterminants et celle des équations linéaires.

Nous appellerons *poids* du déterminant $(i_1 i_2 \ldots i_q)$ la somme $i_1 + i_2 + \ldots + i_q$; ce poids pourra prendre toutes les valeurs entières depuis $\frac{q(q+1)}{2}$ jusqu'à $\frac{q(2p-q+1)}{2}$, en nombre total $q(p-q)+1$. Soient $\delta_{\varpi_1}, \delta_{\varpi_2}, \ldots, \delta_{\varpi_s}$ les s déterminants de même poids ϖ, et λ_{ϖ_1}, $\lambda_{\varpi_2}, \ldots, \lambda_{\varpi_s}$ des nombres arbitraires tous différents de zéro : nous allons faire voir que les conditions nécessaires et suffisantes pour que la matrice M soit nulle, *indépendamment de toute hypothèse faite a priori*, sont celles du type suivant, en nombre $q(p-q)+1$:

$$\lambda_{\varpi_1}\delta_{\varpi_1} + \lambda_{\varpi_2}\delta_{\varpi_2} + \ldots + \lambda_{\varpi_s}\delta_{\varpi_s} = 0.$$

Nous allons démontrer ce théorème sur un cas particulier : la marche de la démonstration prouvera immédiatement sa généralité.

Soit $p = 7$, $q = 4$, et faisons les λ égaux à l'unité, ce qui ne modifie en rien la démonstration; les conditions ci-dessus s'écriront

$$
\begin{aligned}
o &= (1234),\\
o &= (1235),\\
o &= (1236) + (1245),\\
o &= (1237) + (1246) + (1345),\\
o &= (1247) + (1256) + (1346) + (2345),\\
o &= (1257) + (1347) + (1356) + (2346),\\
o &= (1267) + (1357) + (1456) + (2347) + (2356),\\
o &= (1367) + (1457) + (2357) + (2456),\\
o &= (1467) + (2367) + (2457) + (3456),\\
o &= (1567) + (2467) + (3457),\\
o &= (2567) + (3467),\\
o &= (3567),\\
o &= (4567).
\end{aligned}
$$

Nous pouvons supposer $(1) \neq o$, sans quoi on serait ramené à la même question pour $p = 6$, $q = 4$.

Soit :

1° $(12) \neq o$: (*a*) $(123) \neq o$. — Les conditions donnent $(1234) = o$, $(1235) = o$, d'où $(12345) = o$; les conditions donnent alors $(1236) = o$ et, par suite, $(123456) = o$; les conditions donnent encore $(1237) = o$, d'où, enfin, on tire $M = o$.

(*b*) $(123) = o$, $(124) \neq o$. — Les conditions donnent $(1245) = o$, d'où $(12345) = o$; les conditions donnent alors $(1246) = o$, d'où $(123456) = o$; les conditions donnent encore $(1247) = o$, d'où enfin $M = o$.

(*c*) $(123) = (124) = o$, $(125) \neq o$. — Les matrices à trois lignes tirées de (1234) sont nulles. Les conditions donnent alors $(1256) = o$, d'où $(123456) = o$; puis $(1257) = o$, d'où $M = o$.

(*d*) $(123) = (124) = (125) = o$, $(126) \neq o$. — Les matrices à trois lignes tirées de (12345) sont nulles. Les conditions donnent alors $(1267)=0$, d'où $M=0$.

(*e*) $(123)=(124)=(125)=(126)=0$. — Les matrices à trois lignes tirées de (123456) sont nulles, d'où $M=0$.

2° $(12)=0$, $(13)\neq 0$: (*a*) $(134)\neq 0$. — Les conditions donnent $(1345)=0$, d'où $(12345)=0$; puis $(1346)=0$, d'où $(123456)=0$; puis $(1347)=0$, d'où $M=0$.

(*b*) $(134)=0$, $(135)\neq 0$. — Les matrices à trois lignes tirées de (1234) sont nulles. Les conditions donnent alors $(1356)=0$, d'où $(123456)=0$; puis $(1357)=0$, d'où $M=0$.

(*c*) $(134)=(135)=0$, $(136)\neq 0$. — Les matrices à trois lignes tirées de (12345) sont nulles. Les conditions donnent alors $(1367)=0$, d'où $M=0$.

(*d*) $(134)=(135)=(136)=0$. — Les matrices à trois lignes tirées de (123456) sont nulles, d'où $M=0$.

3° $(12)=(13)=0$, $(14)\neq 0$. — Les matrices à deux lignes tirées de (123) sont nulles.

(*a*) $(145)\neq 0$. — Les matrices à trois lignes de (1234) sont nulles. Les conditions donnent alors $(1456)=0$, d'où $(123456)=0$; puis $(1457)=0$, d'où $M=0$.

(*b*) $(145)=0$, $(146)\neq 0$. — Les matrices à trois lignes tirées de (12345) sont nulles. Les conditions donnent alors $(1467)=0$, d'où $M=0$.

(*c*) $(145)=(146)=0$. — Les matrices à trois lignes tirées de (123456) sont nulles, d'où $M=0$.

4° $(12)=(13)=(14)=0$, $(15)\neq 0$. — Les matrices à deux lignes tirées de (1234) sont nulles.

(*a*) $(156)\neq 0$. — Les matrices à trois lignes tirées de (12345) sont nulles. Les conditions donnent alors $(1567)=0$, d'où $M=0$.

(*b*) $(156)=0$. — Les matrices à trois lignes tirées de (123456) sont nulles, d'où $M=0$.

5° $(12)=(13)=(14)=(15)=0$. — Les matrices à deux lignes tirées de (12345) sont nulles, d'où $M=0$.

Cette démonstration montre clairement que les conditions sont nécessaires et suffisantes, comme nous l'avons annoncé, indépendamment de toute hypothèse. Celles, en effet, qui n'interviennent pas dans la démonstration interviendraient si l'on supposait successivement

$$(1)=0,\quad 2\neq 0;\qquad (1)=0,\quad (2)=0,\quad (3)\neq 0;\qquad \ldots.$$

4. Considérons la même matrice M et faisons-en un déterminant P d'ordre p, en la bordant de $p-q$ colonnes nouvelles, de façon à obtenir

$$P=\begin{vmatrix} Y_0^{(q)} \cdots\cdots & & a_1^1 & a_1^2 & \ldots & a_1^q \\ \vdots & \vdots & a_2^1 & a_2^2 & \ldots & a_2^q \\ \vdots\ (p,p-q) & \vdots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \vdots\cdots\cdots & Y_q^{(q)} & a_p^1 & a_p^2 & \ldots & a_p^q \end{vmatrix},$$

les Y gardant toujours la signification indiquée au début.

Développons P par rapport aux déterminants de M; soit

$$(i_1\, i_2 \ldots i_q)=\delta$$

l'un de ces déterminants, avec $i_1<i_2<\ldots<i_q$, et faisons $P=\Sigma D\delta$, de sorte que D est le coefficient de δ dans P.

On voit d'abord immédiatement que, si ϖ est le poids de δ, D est égal à $y_1^{pq-\varpi-\frac{q(q-1)}{2}}\, y_2^{\varpi-\frac{q(q+1)}{2}} D_0$, D_0 désignant ce que devient D quand on y fait $y_1=y_2=1$; et ceci montre tout de suite que les déterminants δ de même poids sont multipliés par les mêmes puissances de y_1 et y_2.

Il nous reste à déterminer les coefficients numériques D_0. A cet effet considérons la matrice

$$M_0=\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \ldots & 2^{q-1} \\ 1 & 3 & 3^2 & \ldots & 3^{q-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \ldots & \ldots \\ 1 & p & p^2 & \ldots & p^{q-1} \end{Vmatrix},$$

et appelons δ_0 ce que devient δ dans cette hypothèse; soit de plus P_0 le déterminant P où l'on a fait $y_1=y_2=1$, et où l'on a remplacé M par M_0, de sorte que

$$P_0=\Sigma D_0\delta_0.$$

On sait que, si l'on ajoute les coefficients du développement de $(x-a)^m$ multipliés respectivement par les puissances $p^{\text{ièmes}}$ $(p<m)$ de nombres entiers consécutifs, le résultat est zéro. Si donc on fait le carré de P_0 par colonnes, on voit immédiatement que P_0^2 est égal au produit de deux déterminants qui sont respectivement les carrés de la matrice M_0 et de la matrice complémentaire qui, avec M_0, forme P_0. D'après un théorème connu, on a donc

$$P_0^2 = (\Sigma D_0 \delta_0)^2 = \Sigma D_0^2 \times \Sigma \delta_0^2;$$

de cette identité entre quantités réelles, on conclut que les coefficients D_0 sont proportionnels aux déterminants δ_0. Le facteur de proportionnalité est d'ailleurs facile à calculer : en effet, si

$$\delta_0 = (123\ldots q)_0 = 2^{q-2}3^{q-3}\ldots(q-3)^3(q-2)^2(q-1),$$

on a $D_0 = 1$, et, par suite, si, en général, $\delta_0 = (i_1 i_2 \ldots i_q)_0$, on a

$$D_0 = \frac{\delta_0}{2^{q-2}3^{q-3}\ldots(q-3)^3(q-2)^2(q-1)},$$

avec

$$\delta_0 = \begin{vmatrix} 1 & i_1 & i_1^2 & \ldots & i_1^{q-1} \\ 1 & i_2 & i_2^2 & \ldots & i_2^{q-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \ldots & \ldots \\ 1 & i_q & i_q^2 & \ldots & i_q^{q-1} \end{vmatrix} = \Pi(i_r - i_s) \qquad \left(\begin{matrix} i_r > i_s, \\ \left.\begin{matrix} r \\ s \end{matrix}\right\} = 1, 2, \ldots, q \end{matrix} \right).$$

Finalement, on obtient donc pour développer P la formule

$$P = \sum y_1^{pq-\varpi-\frac{q(q-1)}{2}} y_2^{\varpi-\frac{q(q+1)}{2}} (i_1 i_2 \ldots i_q) \frac{\Pi(i_r - i_s)}{2^{q-2}3^{q-3}\ldots(q-2)^2(q-1)},$$

avec

$$\varpi = i_1 + i_2 + \ldots + i_q.$$

Ceci nous montre suffisamment que, écrire que la matrice M est nulle, ou bien écrire que le déterminant P, fonction de y_1 et y_2, est identiquement nul, sont deux choses équivalentes. C'est surtout de cette propriété que nous allons nous servir maintenant.

5. Revenons aux résultats obtenus au n° **2**, et supposons que le déterminant Δ_i soit nul identiquement sans qu'il en soit de même pour aucun des Δ d'indice inférieur à i. Alors, d'après ce qui précède, la matrice

$$\left\| \begin{array}{ccc|ccc} a_0 & \cdots & \cdots & b_0 & \cdots & \cdots \\ \vdots & (n+i, i) & \vdots & \vdots & (n+i, n-p+i) & \vdots \\ \cdots & \cdots & a_n & \cdots & \cdots & b_p \end{array} \right\|$$

est nulle, et, par suite, A_i et f_i sont eux-mêmes nuls identiquement. On a donc l'identité

$$G_i g + F_i f = 0,$$

et les deux polynomes g et f ont $p - i + 1$ facteurs linéaires communs, ni plus ni moins. La condition qui exprime ce fait est donc l'évanouissement identique du covariant A_i à deux séries de variables, ou plus simplement du covariant Δ_i à une seule série de variables : ce dernier covariant est d'ailleurs aisé à développer, d'après ce qui a été dit plus haut.

Si l'on a $\Delta_i = 0$, tous les $\Delta_{i+i'} (i' > 0)$ seront nuls ainsi que les $A_{i+i'}$, $B_{i+i'}$, $C_{i+i'}$; il n'y a pas lieu de s'occuper des $f_{i+i'}$, $F_{i+i'}$, $G_{i+i'}$; on a

$$A_i = 0, \qquad B_i = -(-1)^i \frac{f \Delta_{i-1}^2}{A_{i-1}}, \qquad C_i = (-1)^i \frac{g \Delta_{i-1}^2}{A_{i-1}}.$$

Ces dernières formules se vérifient tout de suite en remarquant que les $p - i + 1$ facteurs linéaires communs à f et g sont donnés par l'équation $f_{i-1} = 0$, ou $A_{i-1} = 0$, et cela quelles que soient les valeurs attribuées à y_1 et y_2 : donc A_{i-1} est le produit de deux facteurs, l'un fonction des x seuls, l'autre fonction des y seuls, et il en est de même de B_i et C_i.

6. Reprenons l'identité

$$f_i (xy)^{n-p+2i-1} + G_i g + F_i f = 0,$$

et supposons

$$g = (x\alpha^{(1)})(x\alpha^{(2)})\ldots(x\alpha^{(n)}),$$

en faisant

$$(x\alpha^{(i)}) = x_1\alpha_2^{(i)} - x_2\alpha_1^{(i)},$$

de sorte que g est ainsi décomposé en ses facteurs linéaires.

En faisant $x_1 = \alpha_1^{(1)}$, $x_2 = \alpha_2^{(1)}$ dans l'identité précédente, il vient

$$(-1)^{n-p-1} f_i(\alpha^{(1)})(y\alpha^{(1)})^{n-p+2i-1} + F_i(\alpha^{(1)}) f(\alpha^{(1)}) = 0,$$

et l'on a des formules analogues jusqu'à

$$(-1)^{n-p-1} f_i(\alpha^{(n)})(y\alpha^{(n)})^{n-p+2i-1} + F_i(\alpha^{(n)}) f(\alpha^{(n)}) = 0.$$

Supposons alors

$$f_i = \alpha_0 x_1^{p-i} + \ldots,$$
$$F_i = \gamma_0 x_1^{n-p+i-1} + \ldots,$$

et éliminons les coefficients α et γ entre ces diverses relations. Il vient

$$0 = \begin{vmatrix} (-1)^{n-p-1} f_i & x_1^{p-i} & \ldots & x_2^{p-i} & 0 & \ldots & 0 \\ F_i & 0 & \ldots & 0 & x_1^{n-p+i-1} & \ldots & x_2^{n-p+i-1} \\ 0 & (\alpha_1^{(n)})^{p-i}(y\alpha^{(1)})^{n-p+2i-1} & \ldots & (\alpha_2^{(1)})^{p-i}(y\alpha^{(1)})^{n-p+2i-1} & (\alpha_1^{(1)})^{n-p+i-1} f(\alpha^{(1)}) & \ldots & (\alpha_2^{(1)})^{n-p+i-1} f(\alpha^{(1)}) \\ \cdot & \cdots\cdots & \ldots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \ldots & \cdots\cdots \\ 0 & (\alpha_1^{(n)})^{p-i}(y\alpha^{(n)})^{n-p+2i-1} & \ldots & (\alpha_2^{(n)})^{p-i}(y\alpha^{(n)})^{n-p+2i-1} & (\alpha_1^{(n)})^{n-p+i-1} f(\alpha^{(n)}) & \ldots & (\alpha_2^{(n)})^{n-p+i-1} f(\alpha^{(n)}) \end{vmatrix}.$$

On en tire

$$\frac{f_i}{a_i} = \frac{F_i}{c_i} = \mu_i,$$

en désignant par μ_i une quantité indépendante des x, et posant

$$a_i = \sum \frac{(x\alpha^{(1)})(x\alpha^{(2)})\ldots(x\alpha^{(p-i)})\left[(y\alpha^{(1)})(y\alpha^{(2)})\ldots(y\alpha^{(p-i)})\right]^{n-p+2i-1} f(\alpha^{(p-i+1)})\ldots f(\alpha^{(n)})}{(\alpha^{(1)}\alpha^{(p-i+1)})\ldots(\alpha^{(1)}\alpha^{(n)})(\alpha^{(2)}\alpha^{(p-i+1)})\ldots(\alpha^{(p-i)}\alpha^{(n)})},$$

$$c_i = (-1)^{n-i} \sum \frac{(x\alpha^{(p-i+2)})\ldots(x\alpha^{(n)})\left[(y\alpha^{(1)})(y\alpha^{(2)}\ldots(y\alpha^{(p-i+1)})\right]^{n-p+2i-1} f(\alpha^{(p-i+2)})\ldots f(\alpha^{(n)})}{(\alpha^{(1)}\alpha^{(p-i+2)})\ldots(\alpha^{(p-i+1)}\alpha^{(n)})}.$$

Les sommations sont étendues à tous les termes analogues à ceux qui sont écrits; dans les dénominateurs figurent les produits des déterminants $(\alpha^{(q)}\alpha^{(q')})$, q étant l'un des indices des α qui sont aux numérateurs accompagnés des y, et q' l'un des indices des α qui sont aux numérateurs sous la forme $f(\alpha^{(q')})$.

On a ici, comme plus haut,

$$\mu_i\mu_{i+1}a_i(y)c_{i+1}(y)+g(y)=0;$$

soit alors

$$a_i(y)=\delta_i=\sum\frac{[(y\alpha^{(1)})\ldots(y\alpha^{(p-i)})]^{n-p+2i}f(\alpha^{(p-i+1)})\ldots f(\alpha^{(n)})}{(\alpha^{(1)}\alpha^{(p-i+1)})\ldots(\alpha^{(p-i)}\alpha^{(n)})};$$

on a aussi

$$c_{i+1}(y)=(-1)^{n-i-1}\delta_i g(y)$$

et, par suite, il vient

$$\mu_i\mu_{i+1}\delta_i^2=(-1)^{n-i}.$$

Calculons μ_0; on a

$$a_0=\sum\frac{(x\alpha^{(1)})(x\alpha^{(2)})\ldots(x\alpha^{(p)})[(y\alpha^{(1)})\ldots(y\alpha^{(p)})]^{n-p-1}f(\alpha^{(p+1)})\ldots f(\alpha^{(n)})}{(\alpha^{(1)}\alpha^{(p+1)})\ldots(\alpha^{(p)}\alpha^{(n)})};$$

le développement du déterminant de Vandermonde donne d'ailleurs l'identité

$$(-1)^{(n-1)p}=\sum\frac{(\alpha_2^{(1)}\ldots\alpha_2^{(p)})^{n-p}(\alpha_1^{(p+1)}\ldots\alpha_1^{(n)})^p}{(\alpha^{(1)}\alpha^{(p+1)})\ldots(\alpha^{(p)}\alpha^{(n)})},$$

et, par suite, il vient

$$a_0=(-1)^{(n-1)p}f[f(y)]^{n-p-1};$$

il suffit de comparer les premiers termes de ces covariants pour vérifier leur égalité.

Finalement, on a donc

$$\mu_0=\frac{(-1)^{(n-1)p}}{[f(y)]^{n-p-1}}.$$

Quant à la valeur de δ_0, c'est $(-1)^{(n-1)p}f(y)^{n-p}$, et, par suite, on a successivement

$$\begin{aligned}
\mu_1 &= \frac{(-1)^n}{\mu_0 \delta_0^2} = \frac{(-1)^{n+p(n-1)}}{[f(y)]^{n-p+1}},\\
\mu_2 &= -\frac{\mu_0 \delta_0^2}{\delta_1^2},\\
\mu_3 &= -\frac{(-1)^n \delta_1^2}{\mu_0 \delta_0^2 \delta_2^2},\\
\mu_4 &= \frac{\mu_0 \delta_0^2 \delta_2^2}{\delta_1^2 \delta_3^2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

On voit encore que les fonctions a_i, c_i, δ_i ne diffèrent des fonctions A_i, C_i, Δ_i que par le signe, si elles en diffèrent.

La condition nécessaire et suffisante pour que les polynomes f et g aient $p - i + 1$ facteurs linéaires communs est l'évanouissement identique du covariant δ_i, ce que montre bien sa forme.

7. Soit de même encore

$$f = (x\beta^{(1)})(x\beta^{(2)})\ldots(x\beta^{(p)}).$$

On a des formules telles que

$$(-1)^{n-p-1} f_i(\beta^{(1)})(y\beta^{(1)})^{n-p+2i-1} + G_i(\beta^{(1)}) g(\beta^{(1)}) = 0,$$

et l'on en tire, comme précédemment,

$$\frac{f_i}{a'_i} = \frac{G_i}{b'_i} = \mu'_i,$$

en posant

$$a' = \sum \frac{(x\beta^{(1)}\ldots(x\beta^{(p-i)})[(y\beta^{(1)})\ldots(y\beta^{(p-i)})]^{n-p+2i-1} g(\beta^{(p-i+1)})\ldots g(\beta^{(p)})}{(\beta^{(1)}\beta^{(p-i+1)})\ldots(\beta^{(p-i)}\beta^{(p)})},$$

$$b'_i = (-1)^{n-i} \sum \frac{(x\beta^{(p-i+2)})\ldots(x\beta^{(p)})[(y\beta^{(1)})\ldots(y\beta^{(p-i+1)})]^{n-p+2i-1} g(\beta^{(p-i+2)})\ldots g(\beta^{(p)})}{(\beta^{(1)}\beta^{(p-i+2)})\ldots(\beta^{(p-i+1)}\beta^{(p)})}.$$

On a la relation

$$\mu'_i \mu'_{i+1} a'_i(y) b'_{i+1}(y) - f(y) = 0;$$

en faisant

$$a'_i(y) = \delta'_i = \sum \frac{[(y\beta^{(1)})\ldots(y\beta^{(p-i)}]^{n-p+2i}\, g(\beta^{(p-i+1)})\ldots g(\beta^{(p)})}{(\beta_1^{(1)}\beta^{(p-i+1)})\ldots(\beta^{(p-i)}\beta^{(p)})},$$

on a aussi

$$b'_{i+1}(y) = (-1)^{n-i-1}\,\delta'_i f(y),$$

et, par suite,

$$\mu'_i \mu'_{i+1} \delta'^2_i = (-1)^{n-i-1}.$$

On trouve facilement

$$a'_0 = f[f(y)]^{n-p-1}, \qquad \mu'_0 = \frac{1}{[f(y)]^{n-p-1}}, \qquad \delta'_0 = [f(y)]^{n-p}$$

et, par suite,

$$\mu'_1 = \frac{(-1)^{n-1}}{\mu'_0 \delta'^2_0} = \frac{(-1)^{n-1}}{[f(y)]^{n-p+1}}, \qquad \mu'_2 = -\frac{\mu'_0 \delta'^2_0}{\delta'^2_1},$$

$$\mu'_3 = -\frac{(-1)^{n-1}\delta'^2_1}{\mu'_0 \delta'^2_0 \delta'^2_2}, \qquad \mu'_4 = \frac{\mu'_0 \delta'^2_0 \delta'^2_2}{\delta'^2_1 \delta'^2_3},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Les fonctions a'_i, b'_i, δ'_i ne diffèrent que par le signe, si elles en diffèrent, des fonctions A_i, B_i, Δ_i.

8. Supposons que l'on prenne pour forme f,

$$f = y_1 \frac{\partial g}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial g}{\partial x_2},$$

de sorte que l'on a $p = n - 1$, et aussi

$$\begin{aligned}
b_0 &= n a_0 y_1 + a_1 y_2, \\
b_1 &= (n-1) a_1 y_1 + 2 a_2 y_2, \\
b_2 &= (n-2) a_2 y_1 + 3 a_3 y_2, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

En outre, si l'on fait

$$g = (x\alpha^{(1)})(x\alpha^{(2)})\ldots(x\alpha^{(n)}),$$

on a

$$f = \Sigma(y\alpha^{(1)})(x\alpha^{(2)})\dots(x\alpha^{(n)}).$$

On a ici

$$a_i = (-1)^{(n-1)(i+1)+\frac{i(i+1)}{2}} g(y)\Sigma(x\alpha^{(1)})\dots(x\alpha^{(n-i-1)})[(y\alpha^{(1)})\dots(y\alpha^{(n-i-1)})]^{2i-1} \times (\alpha^{(n-i)}\alpha^{(n-i+1)})^2\dots(\alpha^{(n-1)}\alpha^{(n)})^2,$$

$$c_i = (-1)^{(n-i)(i+1)+\frac{i(i-1)}{2}} g(y)\Sigma(x\alpha^{(n-i+1)})\dots(x\alpha^{(n)})[(y\alpha^{(1)})\dots(y\alpha^{(n-i)})]^{2i-1} \times (\alpha^{(n-i+1)}\alpha^{(n-i+2)})^2\dots(\alpha^{(n-1)}\alpha^{(n)})^2,$$

$$\delta_i = (-1)^{(n-1)(i+1)+\frac{i(i+1)}{2}} g(y)\Sigma[(y\alpha^{(1)})\dots(y\alpha^{(n-i-1)})]^{2i} \times (\alpha^{(n-i)}\alpha^{(n-i+1)})^2\dots(\alpha^{(n-1)}\alpha^{(n)})^2.$$

En outre

$$f(y) = ng(y),$$

et l'on a

$$\mu_0 = (-1)^{n-1}, \qquad \mu_1 = -\frac{1}{g^2(y)\sigma_0^2},$$

$$\mu_2 = -\frac{(-1)^{n-1}\sigma_0^2}{\sigma_1^2}, \qquad \mu_3 = \frac{\sigma_1^2}{g^2(y)\sigma_0^2\sigma_2^2}, \qquad \dots,$$

si l'on fait

$$\sigma_i = \Sigma[(y\alpha^{(1)})\dots(y\alpha^{(n-i-1)})]^{2i} \times (\alpha^{(n-i)}\alpha^{(n-i+1)})^2\dots(\alpha^{(n-1)}\alpha^{(n)})^2,$$

de sorte que, en particulier

$$\sigma_0 = n.$$

Si l'on fait encore

$$\varphi_i = \Sigma(x\alpha^{(1)})\dots(x\alpha^{(n-i-1)})[(y\alpha^{(1)})\dots(y\alpha^{(n-i-1)})]^{2i-1} \times (\alpha^{(n-i)}\alpha^{(n-i+1)})^2\dots(\alpha^{(n-1)}\alpha^{(n)})^2,$$

de sorte que

$$\varphi_i(y) = \sigma_i,$$

et en particulier

$$\varphi_0 = \frac{f}{g(y)},$$

on aura donc

$$
\begin{aligned}
f_0 &= g(y)\varphi_0,\\
f_1 &= \frac{1}{g(y)\sigma_0^2}\varphi_1,\\
f_2 &= \frac{g(y)\sigma_0^2}{\sigma_1^2}\varphi_2,\\
f_3 &= \frac{\sigma_1^2}{g(y)\sigma_0^2\sigma_2^2}\varphi_3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

De même, si l'on fait

$$
\begin{aligned}
\psi_i = \Sigma(x\alpha^{(n-i+1)})\ldots(x\alpha^{(n)})[(y\alpha^{(1)})\ldots(y\alpha^{(n-i)})]^{2i-1}\\
\times(\alpha^{(n-i+1)}\alpha^{(n-i+2)})^2\ldots(\alpha^{(n-1)}\alpha^{(n)})^2,
\end{aligned}
$$

de sorte que

$$\psi_{i+1}(y) = g(y)\sigma_i,$$

et en particulier

$$\psi_0 = \frac{1}{g(y)},$$

on aura

$$
\begin{aligned}
F_0 &= -g(y)\psi_0 = -1,\\
F_1 &= -\frac{1}{g(y)\sigma_0^2}\psi_1,\\
F_2 &= -\frac{g(y)\sigma_0^2}{\sigma_1^2}\psi_2,\\
F_3 &= -\frac{\sigma_1^2}{g(y)\sigma_0^2\sigma_2^2}\psi_3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

De même enfin, si l'on fait

$$
\begin{aligned}
G_1 &= \frac{1}{g(y)\sigma_0^2}\chi_1 = 1,\\
G_2 &= \frac{g(y)\sigma_0^2}{\sigma_1^2}\chi_2,\\
G_3 &= \frac{\sigma_1^2}{g(y)\sigma_0^2\sigma_2^2}\chi_3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}
$$

de sorte que

$$\chi_i = \frac{f\psi_i - \varphi_i(xy)^{2i}}{g},$$

et, par suite,

$$\chi_{i+1}(y) = ng(y)\sigma_i,$$

et, en particulier,

$$\chi_1 = n^2 g(y),$$

on trouvera en déterminant χ_i par cette relation même et faisant les réductions nécessaires

$$\begin{aligned}
\chi_i = \Sigma \big\{ &[(y\alpha^{(1)})\ldots(y\alpha^{(n-i)})]^{2i-1}(\alpha^{(n-i+1)}\alpha^{(n-i+2)})^2\ldots(\alpha^{(n-1)}\alpha^{(n)})^2 \\
&\qquad\times \Sigma(y\alpha^{(n-i+1)})(x\alpha^{(n-i+2)})\ldots(x\alpha^{(n)}) \big\} \\
+ 2\Sigma \big\{ &[(y\alpha^{(1)})\ldots(y\alpha^{(n-i-1)})]^{2i-1} \\
&\times \Sigma(x\alpha^{(n-i)})(x\alpha^{(n-i+1)})\ldots(x\alpha^{(n-2)})(y\alpha^{(n-1)})^i(y\alpha^{(n)})^i \\
&\times (\alpha^{(n-i)}\alpha^{(n-i+1)})^2\ldots(\alpha^{(n-3)}\alpha^{(n-2)})^2 \\
&\times (\alpha^{(n-i)}\alpha^{(n-1)})(\alpha^{(n-i)}\alpha^{(n)})\ldots(\alpha^{(n-2)}\alpha^{(n-1)})(\alpha^{(n-2)}\alpha^{(n)}) \big\}.
\end{aligned}$$

L'évanouissement identique du covariant σ_i est la condition nécessaire et suffisante pour que le polynome g ait $n-i$ facteurs linéaires communs avec sa forme polaire f.

9. On peut chercher encore à exprimer les diverses fonctions que nous venons de considérer sous forme de déterminants. En se reportant au n° **2** et faisant quelques transformations faciles à retrouver, on obtient les formules suivantes

$$\sigma_i = \frac{(-1)^{\frac{i(i+1)}{2}}}{n^{i-1}}
\times \begin{vmatrix}
Y_0^{(2i)} \cdots\cdots & & n a_0 \cdots\cdots & & a_1 \cdots\cdots \\
\vdots & & (n-1)a_1 & & 2a_2 \\
\vdots\ (n+i-1, n-i-1)\ \vdots & & \vdots\ (n+i-1, i)\ \vdots & & \vdots\ (n+i-1, i)\ \vdots \\
\cdots\cdots Y_{2i}^{(2i)} & & \cdots\cdots a_{n-1} & & \cdots\cdots n a_n
\end{vmatrix},$$

$$\varphi_i = \frac{(-1)^{n-1+\frac{i(i-1)}{2}}}{n^{i-1}}$$
$$\times \left| \begin{array}{ccc|ccc|ccc}
x_1^{n-i-1} & \dots\dots & x_2^{n-i-1} & 0 & \dots\dots & 0 & 0 & \dots\dots & 0 \\
Y_0^{(2i-1)} & \dots\dots & \vdots & na_0 & \dots\dots & \vdots & a_1 & \dots\dots & \vdots \\
\vdots & (n+i-1,\, n-i) & \vdots & \vdots & (n+i-1,\, i) & \vdots & \vdots & (n+i-1,\, i) & \vdots \\
\dots & \dots\dots & Y_{2i-1}^{(2i-1)} & \dots & \dots\dots & a_{n-1} & \dots & \dots\dots & na_n
\end{array} \right|,$$

$$\psi_i = \frac{(-1)^{n-1+\frac{i(i-1)}{2}}}{n^{i-1}}$$
$$\times \left| \begin{array}{ccc|ccc|ccc}
0 & \dots\dots & 0 & x_1^{i-1}x_2 \quad x_1^{i-2}x_2^2 & \dots & x_2^i & -x_1^i \quad -x_1^{i-1}x_2 & \dots & -x_1x_2^{i-1} \\
Y_0^{(2i-1)} & \dots\dots & \vdots & na_0 & \dots\dots & \vdots & a_1 & \dots\dots & \vdots \\
\vdots & (n+i-1,\, n-i) & \vdots & \vdots & (n+i-1,\, i) & \vdots & \vdots & (n+i-1,\, i) & \vdots \\
\dots & \dots\dots & Y_{2i-1}^{(2i-1)} & \dots & \dots\dots & a_{n-1} & \dots & \dots\dots & na_n
\end{array} \right|,$$

$$\chi_i = \frac{(-1)^{n-1+\frac{i(i-1)}{2}}}{n^{i-2}}$$
$$\times \left| \begin{array}{ccc|ccc|ccc}
0 & \dots\dots & 0 & x_1^{i-1}y_2 \quad x_1^{i-2}x_2y_2 & \dots & x_2^{i-1}y_2 & -x_1^{i-1}y_1 \quad -x_1^{i-2}x_2y_1 & \dots & -x_2^{i-2}y_1 \\
Y_0^{(2i-1)} & \dots\dots & \vdots & na_0 & \dots\dots & \vdots & a_1 & \dots\dots & \vdots \\
\vdots & (n+i-1,\, n-i) & \vdots & \vdots & (n+i-1,\, i) & \vdots & \vdots & (n+i-1,\, i) & \vdots \\
\dots & \dots\dots & Y_{2i-1}^{(2i-1)} & \dots & \dots\dots & a_{n-1} & \dots & \dots\dots & na_n
\end{array} \right|.$$

Ces trois dernières formes sont d'ailleurs illusoires pour $i = 0$.

10. Les fonctions f_i dont nous venons de donner l'expression sous forme de déterminant, ou sous forme de fonction symétrique des racines de g, sont les fonctions de Sturm telles qu'on doit les concevoir dans la théorie des formes. Elles jouissent des propriétés de ces fonctions; cependant remarquons que l'on a

$$\frac{f_0}{g} = \sum \frac{(y\alpha^{(1)})}{(x\alpha^{(1)})}.$$

Ce rapport change donc de signe lorsque (la forme g étant supposée à coefficients réels) $\frac{x_1}{x_2}$ devient égal à une racine réelle $\frac{\alpha_1^{(k)}}{\alpha_2^{(k)}}$ de g, les valeurs données à y_1 et y_2 étant fixes, d'ailleurs quelconques : mais la variation qui en résulte peut être perdue ou gagnée.

Pour fixer les idées, supposons que l'on prenne toujours x_2, y_2, $\alpha_2^{(k)}$ positifs : la variation est perdue si l'on a $\frac{y_1}{y_2} > \frac{\alpha_1^{(k)}}{\alpha_2^{(k)}}$, gagnée dans le cas contraire.

On peut donc énoncer la règle suivante : Soit à chercher le nombre N des racines réelles de g comprises entre deux nombres a et b, tels que l'on ait $a < b$; donnons à y_1 et y_2 des valeurs fixes quelconques, et soit y_2 positif : 1° si $\frac{y_1}{y_2} > b$, N est égal au nombre des variations perdues par la suite des fonctions $g, f_0, f_1, f_2, \ldots$, quand on y remplace successivement $\frac{x_1}{x_2}$ par a et $b\,(x_2 > 0)$; 2° si $\frac{y_1}{y_2} < a$, N est égal au nombre des variations gagnées dans les mêmes circonstances; 3° si $a < \frac{y_1}{y_2} < b$, désignons par v_1, v_2, v les nombres des variations de la suite lorsqu'on y fait respectivement $\frac{x_1}{x_2} = a$, $\frac{x_1}{x_2} = b$, $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$: on a alors

$$\mathrm{N} = v_1 + v_2 - 2v.$$

On remarquera d'ailleurs que la suite des fonctions g, f_0, f_1, f_2, ... peut être remplacée dans ces opérations par la suite $\frac{g}{g(y)}$, φ_0, φ_1, φ_2, ..., et en particulier, quand on fera $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$, par la suite 1, σ_0, σ_1, σ_2, ...; ceci résulte des formules données plus haut.

Si, en particulier, on veut avoir le nombre total N des racines réelles de g, on fera $a = -\infty$, $b = +\infty$; alors $v_1 + v_2 = n$, nécessairement, et $\mathrm{N} = n - 2v$; ainsi, comme on le sait, chaque variation dans la suite $1, \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \ldots$, ou plus simplement à cause de $\sigma_0 = n$, dans la suite $n, \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}$, indique la présence d'un couple de racines imaginaires, et cela quelles que soient les valeurs attribuées à y_1 et y_2.

On obtiendra les fonctions de Sturm ordinaires en faisant $y_1 = 1$, $y_2 = 0$, et le nombre des couples de racines imaginaires sera celui des variations de la suite $n, s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}$, où l'on a

$$s_i = \Sigma(\alpha_2^{(1)}\alpha_2^{(2)}\ldots\alpha_2^{(n-i-1)})^{2i}(\alpha^{(n-i)}\alpha^{(n-i+1)})^2\ldots(\alpha^{(n-1)}\alpha^{(n)})^2$$
$$= \frac{(-1)^{\frac{i(i+1)}{2}}}{n^{i-1}}\begin{vmatrix} na_0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ (n-1)a_1 & na_0 & \ddots & \vdots & 2a_2 & a_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ (n-2i+1)a_{2i-1} & (n-2i+2)a_{2i-2} & \cdots & (n-i)a_i & 2ia_{2i} & (2i-1)a_{2i-1} & \cdots & (i+1)a_{i+1} \end{vmatrix},$$

le déterminant étant d'ordre $2i$.

Faisons encore

$$x_1 = x, \qquad x_2 = 1,$$

et

$$R_i = \Sigma(\alpha_2^{(1)}\ldots\alpha_2^{(n-i-1)})^{2i-1}(\alpha^{(n-i)}\alpha^{(n-i+1)})^2\ldots(\alpha_{n-1}\alpha_n)^2(x\alpha_2^{(1)}-\alpha_1^{(1)})\ldots(x\alpha_2^{(n-i-1)}-\alpha_1^{(n-i-1)})$$
$$= \frac{(-1)^{\frac{i+1}{2}}}{n^{i-1}}\begin{vmatrix} x^{n-i-1} & x^{n-i-2} & \cdots & x & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & na_0 & \cdots & \cdot & a_1 & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \vdots & (n+i-1,\, i) & \vdots & \vdots & (n+i-1,\, i) & \vdots \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdot & \cdots & a_{n-1} & \cdot & \cdots & na_n \end{vmatrix};$$

les véritables fonctions de Sturm seront alors

$$S_{-1} = g,$$
$$S_0 = \frac{dg}{dx},$$
$$S_1 = \frac{1}{n^2 a_0} R_1,$$
$$S_2 = \frac{n^2 a_0}{s_1^2} R_2,$$
$$S_3 = \frac{s_1^2}{n^2 a_0 s_2^2} R_3,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Si l'on pose

$$s_i = \frac{(-1)^{\frac{i(i+1)}{2}}}{n^{i-1}} d_i, \qquad R_i = \frac{(-1)^{\frac{i(i+1)}{2}}}{n^{i-1}} D_i,$$

on a d'une façon générale

$$S_{2i+1} = (-1)^{i+1} \frac{D_{2i+1}}{n^2 a_0} \frac{d_1^2 d_3^2 \ldots d_{2i-1}^2}{d_2^2 d_4^2 \ldots d_{2i}^2},$$

$$S_{2i} = (-1)^i n a_0 D_{2i} \frac{d_2^2 d_4^2 \ldots d_{2i-2}^2}{d_1^2 d_3^2 \ldots d_{2i-1}^2}.$$

Les D_i et d_i sont les déterminants qui figurent dans R_i et s_i; leur composition est facile à retenir.

Les résultats précédents sont connus : je les ai rappelés ici pour réunir ensemble les principales formules relatives à cette théorie.

11. A propos des fonctions de Sturm, j'indiquerai encore ici un procédé qui permet de les calculer assez rapidement quand on est en présence d'équations numériques.

Soient deux polynomes des degrés n et $n-1$, dont les coefficients successifs sont pour le premier $a_0, a_1, a_2, \ldots$ et pour le second b_0, $b_1, b_2, \ldots$. Faisons

$$\alpha_i = \frac{a_i}{a_0}, \qquad \beta_i = \frac{b_i}{b_0},$$

et soit

$$c_0 = \beta_1 - \alpha_1, \qquad c_1 = \beta_2 - \alpha_2, \qquad c_2 = \beta_3 - \alpha_3, \qquad \ldots;$$

faisons encore

$$\gamma_i = \frac{c_i}{c_0},$$

et soit

$$d_0 = \gamma_1 - \beta_1, \qquad d_1 = \gamma_2 - \beta_2, \qquad d_2 = \gamma_3 - \beta_3, \qquad \ldots;$$

le reste changé de signe de la division des deux polynomes est, à un facteur près qui a le signe de $a_0 c_0$, le polynome qui a pour coefficients successifs $d_0, d_1, d_2, \ldots$.

Les calculs se font aisément par logarithmes, et l'application répétée de cette règle fournit les fonctions successives de Sturm à des facteurs positifs près, ce qui est sans importance.

12. Cherchons maintenant la condition nécessaire et suffisante pour que le polynome homogène g ait q facteurs linéaires d'ordre p

de multiplicité. Connaissant cette condition, on saura exprimer que g a ses facteurs linéaires groupés en facteurs égaux de telle façon qu'on voudra.

Considérons les deux formes covariantes de g, où y_1 et y_2, z_1 et z_2 désignent deux nouveaux couples de variables

$$\frac{1}{(p-1)!}\left(y_1^{p-1}\frac{\partial^{p-1}g}{\partial x_1^{p-1}}+C_{p-1}^{(1)}y_1^{p-2}y_2\frac{\partial^{p-1}g}{\partial x_1^{p-2}\,\partial x_2}+\ldots\right),\qquad \frac{1}{(p-1)!}\left(z_1^{p-1}\frac{\partial^{p-1}g}{\partial x_1^{p-1}}+C_{p-1}^{(1)}z_1^{p-2}z_2\frac{\partial^{p-1}g}{\partial x_1^{p-2}\,\partial x_2}+\ldots\right),$$

$C_m^{(p)}$ étant le nombre des combinaisons de m lettres p à p.

Égalons à zéro le covariant qui exprime par son évanouissement que ces deux formes ont, quelles que soient les variables y et z, q facteurs linéaires communs : on aura ainsi la condition cherchée.

On peut simplifier cette condition en faisant, après division par une puissance convenable de (yz), $z_1=y_1$, $z_2=y_2$; et l'on obtient un nouveau covariant égalé à zéro, et qui n'est autre que le déterminant qui exprime par son évanouissement que les deux formes

$$\frac{1}{(p-1)!}\left[(p-1)\,y_1^{p-2}\frac{\partial^{p-1}g}{\partial x_1^{p-1}}+(p-2)\,C_{p-1}^{(1)}y_1^{p-3}y_2\frac{\partial^{p-1}g}{\partial x_1^{p-2}\,\partial x_2}+\ldots\right],$$
$$\frac{1}{(p-1)!}\left[1.C_{p-1}^{(1)}y_1^{p-2}\frac{\partial^{p-1}g}{\partial x_1^{p-2}\,\partial x_2}+2\,C_{p-2}^{(2)}y_1^{p-3}y_2\frac{\partial^{p-1}g}{\partial x_1^{p-2}\,\partial x_2}+\ldots\right]$$

ont q facteurs linéaires communs.

Après des modifications immédiates dans l'écriture des coefficients, on obtient, en faisant $i=n+2-p-q$,

$$0=\left|\begin{array}{ccc}
Y_0^{(2i)}\ \cdots & a_0\,y_1^{p-2}+\dfrac{a_1}{C_n^{(1)}}C_{p-2}^{(1)}y_1^{p-3}y_2+\cdots\ \cdots & \dfrac{a_1}{C_n^{(1)}}y_1^{p-2}+\dfrac{a_2}{C_n^{(2)}}C_{p-2}^{(1)}y_1^{p-3}y_2+\cdots\ \cdots \\
\vdots & C_{n-p+1}^{(1)}\left(\dfrac{a_1}{C_n^{(1)}}y_1^{p-2}+\dfrac{a_2}{C_n^{(2)}}C_{p-2}^{(1)}y_1^{p-3}y_2+\ldots\right) & C_{n-p+1}^{(1)}\left(\dfrac{a_2}{C_n^{(2)}}y_1^{p-2}+\dfrac{a_3}{C_n^{(3)}}C_{p-2}^{(1)}y_1^{p-3}y_2+\ldots\right) \\
(2i+q-1,\ q-1) & C_{n-p+1}^{(2)}\left(\dfrac{a_2}{C_n^{(2)}}y_1^{p-2}+\dfrac{a_3}{C_n^{(3)}}C_{p-2}^{(1)}y_1^{p-3}y_2+\ldots\right) & \vdots \\
\vdots & (2i+q-1,\ i) & (2i+q-1,\ i) \\
\cdots\ Y_{2i}^{(2i)} & \cdots\ \dfrac{a_{n-p+1}}{C_n^{(n-p+1)}}y_1^{p-2}+\ldots & \cdots\ \dfrac{a_{n-p+2}}{C_n^{(n-p+2)}}y_2^{p-2}+\ldots
\end{array}\right|.$$

On peut remplacer cette condition par la suivante, qui est l'évanouissement d'un déterminant d'ordre $pi+q-1$, dans lequel on a

$$\alpha_k = \frac{(p-k-1)(p-k)}{2}, \qquad \beta_k = -k(p-k-1), \qquad \gamma_k = \frac{k(k+1)}{2},$$

et où les notations

$$\begin{array}{lcr} \alpha \cdots & & \cdots \\ \vdots & (\lambda, \lambda) & \vdots \\ \cdots & & \cdots \alpha \end{array}, \qquad \begin{array}{lcr} \mathrm{o} \cdots & & \cdots \\ \vdots & (\lambda, \mu) & \vdots \\ \cdots & & \cdots \mathrm{o} \end{array}$$

désignent, la première un tableau carré de λ lignes et λ colonnes dans lequel tous les éléments sont nuls, sauf ceux de la diagonale principale qui sont tous égaux à α, et la seconde un tableau rectangulaire de λ lignes et μ colonnes, dans lequel tous les éléments sont nuls :

$$\mathrm{o} = \left| \begin{array}{ccccccc}
\begin{array}{lcr} Y_0^{(2i)} \cdots & & \\ & (2i+q-1, q-1) & \\ & & \cdots Y_{2i}^{(2i)} \end{array} &
\begin{array}{lcr} a_0 \cdots & & \\ C^{(1)}_{n-p+1} \dfrac{a_1}{C_n^{(1)}} & & \\ & (2i+q-1, i) & \\ & & \cdots \dfrac{a_{n-p+1}}{C_n^{(n-p+1)}} \end{array} &
\begin{array}{lcr} \dfrac{a_1}{C_n^{(1)}} \cdots & & \\ C^{(1)}_{n-p+1} \dfrac{a_2}{C_n^{(2)}} & & \\ & (2i+q-1, i) & \\ & & \cdots \dfrac{a_{n-p+2}}{C_n^{(n-p+2)}} \end{array} &
\ddots & \ddots & \ddots &
\begin{array}{lcr} \dfrac{a_{p-1}}{C_n^{(p-1)}} \cdots & & \\ C^{(1)}_{n-p+1} \dfrac{a_p}{C_n^{(p)}} & & \\ & (2i+q-1, i) & \\ & & \cdots a_n \end{array} \\
\begin{array}{lcr} \mathrm{o} \cdots & & \\ & & \\ & [(p-2)i, q-1] & \\ & & \\ & & \cdots \mathrm{o} \end{array} &
\begin{array}{lcr} \alpha_1 y_2^2 \cdots & & \\ & (i, i) & \\ & & \cdots \alpha_1 y_2^2 \end{array} &
\begin{array}{lcr} \beta_1 y_1 y_2 \cdots & & \\ & (i, i) & \\ & & \cdots \beta_1 y_1 y_2 \end{array} &
\begin{array}{lcr} \gamma_1 y_1^2 \cdots & & \\ & (i, i) & \\ & & \cdots \gamma_1 y_1^2 \end{array} &
\begin{array}{lcr} \mathrm{o} \cdots & & \\ & (i, i) & \\ & & \cdots \mathrm{o} \end{array} &
\begin{array}{lcr} \mathrm{o} \cdots & & \\ & (i, i) & \\ & & \cdots \mathrm{o} \end{array} &
\begin{array}{lcr} \mathrm{o} \cdots & & \\ & (i, i) & \\ & & \cdots \mathrm{o} \end{array} \\
 &
\begin{array}{lcr} \mathrm{o} \cdots & & \\ & (i, i) & \\ & & \cdots \mathrm{o} \end{array} &
\begin{array}{lcr} \alpha_2 y_2^2 \cdots & & \\ & (i, i) & \\ & & \cdots \alpha_2 y_2^2 \end{array} &
\begin{array}{lcr} \beta_2 y_1 y_2 \cdots & & \\ & (i, i) & \\ & & \cdots \beta_2 y_1 y_2 \end{array} &
\begin{array}{lcr} \gamma_2 y_1^2 \cdots & & \\ & (i, i) & \\ & & \cdots \gamma_2 y_1^2 \end{array} &
\begin{array}{lcr} \mathrm{o} \cdots & & \\ & (i, i) & \\ & & \cdots \mathrm{o} \end{array} &
\begin{array}{lcr} \mathrm{o} \cdots & & \\ & (i, i) & \\ & & \cdots \mathrm{o} \end{array} \\
 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 &
\begin{array}{lcr} \mathrm{o} \cdots & & \\ & (i, i) & \\ & & \cdots \mathrm{o} \end{array} &
\begin{array}{lcr} \mathrm{o} \cdots & & \\ & (i, i) & \\ & & \cdots \mathrm{o} \end{array} &
\begin{array}{lcr} \mathrm{o} \cdots & & \\ & (i, i) & \\ & & \cdots \mathrm{o} \end{array} &
\begin{array}{lcr} \mathrm{o} \cdots & & \\ & (i, i) & \\ & & \cdots \mathrm{o} \end{array} &
\begin{array}{lcr} \beta_{p-2} y_1 y_2 \cdots & & \\ & (i, i) & \\ & & \cdots \beta_{p-2} y_1 y_2 \end{array} &
\begin{array}{lcr} \gamma_{p-2} y_1^2 \cdots & & \\ & (i, i) & \\ & & \cdots \gamma_{p-2} y_1^2 \end{array}
\end{array} \right|$$

En effet, si l'on multiplie ce déterminant par celui-ci

$$
\left|\begin{array}{c|ccccc}
\begin{matrix} 1 \cdots\cdots & \vdots \\ \vdots & (q-1,\,q-1) \\ \cdots\cdots & 1 \end{matrix} & \multicolumn{5}{c}{\begin{matrix} 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \vdots \\ \vdots & (q-1,\,pi) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & 0 \end{matrix}} \\
\hline
\begin{matrix} 0 \cdots\cdots \\ \vdots \end{matrix} & \begin{matrix} y_1^{p-2} \cdots & \vdots \\ \vdots & (i,\,i) \\ \cdots & y_1^{p-2} \end{matrix} & \begin{matrix} C_{p-2}^{(1)} y_1^{p-3} y_2 \cdots & \vdots \\ \vdots & (i,\,i) \\ \cdots & C_{p-2}^{(1)} y_1^{p-3} y_2 \end{matrix} & \begin{matrix} \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \end{matrix} & \begin{matrix} y_2^{p-2} \cdots & \vdots \\ \vdots & (i,\,i) \\ \cdots & y_2^{p-2} \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \cdots & \vdots \\ \vdots & (i,\,i) \\ \cdots & 0 \end{matrix} \\
(pi,\,q-1) & \begin{matrix} 0 \cdots & \vdots \\ \vdots & (i,\,i) \\ \cdots & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} y_1^{p-2} \cdots & \vdots \\ \vdots & (i,\,i) \\ \cdots & y_1^{p-2} \end{matrix} & \begin{matrix} \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \end{matrix} & \begin{matrix} C_{p-2}^{(1)} y_1 y_2^{p-1} \cdots & \vdots \\ \vdots & (i,\,i) \\ \cdots & C_{p-2}^{(1)} y_1 y_2^{p-1} \end{matrix} & \begin{matrix} y_2^{p-2} \cdots & \vdots \\ \vdots & (i,\,i) \\ \cdots & y_2^{p-2} \end{matrix} \\
\begin{matrix} \vdots \\ \cdots\cdots & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \cdots & \vdots \\ \vdots & [(p-2)i,\,i] \\ \cdots & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \cdots & \vdots \\ \vdots & [(p-2)i,\,i] \\ \cdots & 0 \end{matrix} & \multicolumn{3}{c}{\begin{matrix} 1 \cdots\cdots\cdots\cdots & \vdots \\ \vdots & [(p-2)i,\,(p-2)i] \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & 1 \end{matrix}}
\end{array}\right|,
$$

qui est égal à $y_1^{2i(p-2)}$, on reproduit le déterminant proposé multiplié par le même facteur.

Pour plus de clarté, appliquons ce résultat aux questions suivantes :

1° Condition pour que la forme quintique

$$u = a_0 x_1^5 + 5 a_1 x_1^4 x_2 + 10 a_2 x_1^3 x_2^2 + 10 a_3 x_1^2 x_2^3 + 5 a_4 x_1 x_2^4 + a_5 x_2^5$$

ait un facteur triple.

On obtient

$$0=\begin{vmatrix}
a_0 & 0 & 0 & a_1 & 0 & 0 & a_2 & 0 & 0\\
3a_1 & a_0 & 0 & 3a_2 & a_1 & 0 & 3a_3 & a_2 & 0\\
3a_2 & 3a_1 & a_0 & 3a_3 & 3a_2 & a_1 & 3a_4 & 3a_3 & a_2\\
a_3 & 3a_2 & 3a_1 & a_4 & 3a_3 & 3a_2 & a_5 & 3a_4 & 3a_3\\
0 & a_3 & 3a_2 & 0 & a_4 & 3a_3 & 0 & a_5 & 3a_4\\
0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & a_4 & 0 & 0 & a_5\\
x_2^2 & 0 & 0 & -x_1x_2 & 0 & 0 & x_1^2 & 0 & 0\\
0 & x_2^2 & 0 & 0 & -x_1x_2 & 0 & 0 & x_1^2 & 0\\
0 & 0 & x_2^2 & 0 & 0 & -x_1x_2 & 0 & 0 & x_1^2
\end{vmatrix},$$

ce qui, en conservant les notations de l'Algèbre supérieure de Salmon, donne

$$S^3 - 27T^2 = 0.$$

En même temps que cette condition, la suivante, qui exprime que u a deux facteurs communs avec sa forme polaire, sera vérifiée :

$$0=\begin{vmatrix}
x_2^6 & a_0 & 0 & 0 & a_1 & 0 & 0\\
-6x_2^5x_1 & 4a_1 & a_0 & 0 & 4a_2 & a_1 & 0\\
15x_2^4x_1^2 & 6a_2 & 4a_1 & a_0 & 6a_3 & 4a_2 & a_1\\
-20x_2^3x_1^3 & 4a_3 & 6a_2 & 4a_1 & 4a_4 & 6a_3 & 4a_2\\
15x_2^2x_1^4 & a_4 & 4a_3 & 6a_2 & a_5 & 4a_4 & 6a_3\\
-6x_2x_1^5 & 0 & a_4 & 4a_3 & 0 & a_5 & 4a_4\\
x_1^6 & 0 & 0 & a_4 & 0 & 0 & a_5
\end{vmatrix}.$$

2° Condition pour que la même forme quintique ait un facteur quadruple.

On obtient

$$
o = \begin{vmatrix}
a_0 & o & a_1 & o & a_2 & o & a_3 & o \\
2a_1 & a_0 & 2a_2 & a_1 & 2a_3 & a_2 & 2a_4 & a_3 \\
a_2 & 2a_1 & a_3 & 2a_2 & a_4 & 2a_3 & a_5 & 2a_4 \\
o & a_2 & o & a_3 & o & a_4 & o & a_5 \\
3x_2^2 & o & -2x_1x_2 & o & x_1^2 & o & o & o \\
o & 3x_2^2 & o & -2x_1x_2 & o & x_1^2 & o & o \\
o & o & x_2^2 & o & -2x_1x_2 & o & 3x_1^2 & o \\
o & o & o & x_2^2 & o & -2x_1x_2 & o & 3x_1^2
\end{vmatrix},
$$

ou, d'après les notations de Salmon, $\mathrm{HS} - u\mathrm{T} = o$.

En même temps, les conditions qui expriment que u a trois facteurs communs avec sa forme polaire, ou deux facteurs communs avec sa forme polaire du second ordre seront vérifiées, et l'on a ainsi :

$$
o = \begin{vmatrix}
x_2^4 & o & a_0 & o & a_1 & o \\
-4x_2^3x_1 & x_2^4 & 4a_1 & a_0 & 4a_2 & a_1 \\
6x_2^2x_1^2 & -4x_2^3x_1 & 6a_2 & 4a_1 & 6a_3 & 4a_2 \\
-4x_2x_1^3 & 6x_2^2x_1^2 & 4a_3 & 6a_2 & 4a_4 & 6a_3 \\
x_1^4 & -4x_2x_1^3 & a_4 & 4a_3 & a_5 & 4a_4 \\
o & x_1^4 & o & a_4 & o & a_5
\end{vmatrix}
$$

ou $5\mathrm{HS} - 9u\mathrm{T} = o$, avec

$$
o = \begin{vmatrix}
x_2^4 & a_0 & o & a_1 & o & a_2 & o \\
-4x_2^3x_1 & 3a_1 & a_0 & 3a_2 & a_1 & 3a_3 & a_2 \\
6x_2^2x_1^2 & 3a_2 & 3a_1 & 3a_3 & 3a_2 & 3a_4 & 3a_3 \\
-4x_2x_1^3 & a_3 & 3a_2 & a_4 & 3a_3 & a_5 & 3a_4 \\
x_1^4 & o & a_3 & o & a_4 & o & a_5 \\
o & x_2^2 & o & -x_1x_2 & o & x_1^2 & o \\
o & o & x_2^2 & o & -x_1x_2 & o & x_1^2
\end{vmatrix}
$$

ou $2\mathrm{HS} - 3u\mathrm{T} = o$.

Ceci nous montre que l'on a $HS = 0$ et $uT = 0$, et, par suite, que S et T doivent être nuls. On sait qu'il suffit que S soit nul, et l'on voit par cet exemple que l'on aura souvent des conditions superflues.