JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

P. DUHEM

Sur la stabilité de l'équilibre des corps flottants

Journal de mathématiques pures et appliquées 5e série, tome 1 (1895), p. 91-180.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1895_5_1__91_0>

Sur la stabilité de l'équilibre des corps flottants;

PAR M. P. DUHEM.

INTRODUCTION, HISTORIQUE.

On sait que l'équilibre d'un corps flottant sur un liquide pesant est assuré lorsque le flotteur déplace un volume liquide aussi pesant que lui et que les deux centres de gravité du flotteur et du liquide déplacé sont sur une même verticale (*axe primitif*). Mais cet équilibre est-il stable?

Bouguer est le premier géomètre qui ait cherché à approfondir cette question. Il se borna à examiner le cas où le flotteur est symétrique par rapport à un plan qui demeure vertical pendant le mouvement; il supposa que le volume du liquide déplacé restait constant et démontra que la stabilité dépendait de la position d'un point particulier qu'il nomma *métacentre*. Ce point est l'intersection de l'axe primitif avec la direction de la résultante de la poussée du fluide après un déplacement infiniment petit. Si ce point est au-dessus du centre de gravité du corps, les forces tendront à ramener le corps à sa première position; elles tendront à l'en éloigner dans le cas contraire. L'équilibre est donc stable ou instable suivant que le métacentre est au-dessus ou au-dessous du centre de gravité du corps flottant. Telle est la condition de stabilité donnée par Bouguer et qui a été longtemps admise sans contestation.

Le raisonnement de Bouguer manquait entièrement de généralité;

non seulement il supposait que le plan de symétrie du corps demeurait vertical durant les oscillations effectuées par ce corps, mais, en outre, il supposait que le volume immergé demeurait invariable.

Duhamel ([1]) appela le premier l'attention sur le caractère arbitraire d'une pareille restriction.

« La supposition, dit-il, de la constance du volume déplacé, a dû paraître bientôt trop restreinte; car, comment admettre que la cause qui produit le dérangement ne puisse changer que l'inclinaison? On a reconnu d'ailleurs que, lors même que cette circonstance aurait lieu au commencement, elle ne subsisterait pas pendant toute la durée du mouvement, excepté dans le cas très particulier où le centre de gravité de la section à fleur d'eau serait situé sur l'axe primitif.

» On ne pouvait donc plus, en restant dans la généralité de la question, se dispenser d'avoir égard à la fois à la variation du volume et à celle de l'inclinaison; et c'est ce que l'on a fait. Mais ce que l'on n'a pas vu, c'est qu'alors le métacentre devenait un point complètement indéterminé, qui dépendait du rapport des deux variations et qui pouvait occuper toutes les positions de l'axe primitif.

» Le raisonnement de Bouguer, que l'on a reproduit, prouverait donc à volonté la stabilité ou l'instabilité de l'équilibre du même corps, suivant la nature du dérangement primitif, en exceptant toutefois le cas particulier où l'axe primitif contiendrait le centre de gravité de la section à fleur d'eau. Cette conséquence absurde du genre de raisonnement suivi depuis Bouguer en rend l'insuffisance évidente et oblige de recourir aux équations du mouvement, même dans le cas d'un corps symétrique par rapport à un plan vertical. »

Duhamel se propose de former ces équations, en considérant toujours le cas d'un corps flottant symétrique dont le plan de symétrie demeure vertical; il suppose également que la surface du liquide demeure horizontale. Pour étudier le mouvement du flotteur, on peut faire abstraction de la présence du liquide, à condition d'appliquer au corps solide des forces de liaison convenablement choisies qui sont les

---

([1]) DUHAMEL, *Note sur divers principes de Mécanique : Observations sur la stabilité de l'équilibre des corps flottants.* (*Journal de l'École Polytechnique*, XXIV^e Cahier, t. XV, p. 12; 1835.)

pressions du liquide sur le solide. *Duhamel admet que ces pressions peuvent être déterminées d'après les règles de l'Hydrostatique,* telles qu'elles ont été établies par Archimède. Il forme alors les équations différentielles du mouvement du corps et, cherchant la condition pour que ce mouvement demeure toujours très petit, il retrouve ainsi la condition donnée par Bouguer, à savoir que le métacentre doit se trouver au-dessus du centre de gravité du corps. « En résumé, conclut-il, la théorie que l'on a donnée jusqu'ici de la stabilité de l'équilibre des corps flottants, par la considération du métacentre, renferme des inexactitudes qui ne permettent plus de la conserver. Néanmoins, la condition à laquelle elle conduit est conforme à celle qu'une analyse exacte aurait fait connaître, et c'est précisément pour cela que l'erreur est restée si longtemps inaperçue. »

Plus tard, Poisson (1) et Duhamel (2) cherchèrent, par une méthode analogue, la condition de stabilité d'un flotteur de forme quelconque; en admettant encore que les pressions du liquide sur le solide pouvaient être déterminées par les règles de l'Hydrostatique, et en faisant usage du principe des forces vives, ils parvinrent au théorème suivant :

L'équilibre peut être encore stable lorsque le centre de gravité du corps est au-dessus de celui du fluide déplacé; il suffit que la distance de ces deux points soit moindre que le plus petit des moments d'inertie de l'aire de la section à fleur d'eau par rapport aux droites menées par son centre de gravité, divisé par le volume immergé.

Cette règle peut encore s'énoncer d'une autre manière.

Donnons au flotteur toutes les positions pour lesquelles le poids du liquide déplacé est précisément égal au poids du corps flottant; marquons, dans le corps, le centre de poussée correspondant à chacune de ces positions; ces centres de poussée dessinent une surface, considérée par Dupin, et nommée *surface des centres de carène;* on sait que la verticale passant par le centre de gravité d'un flotteur en équilibre est normale à la surface des centres de carène.

(1) Poisson, *Traité de Mécanique,* t. II, p. 579 (2e édition).

(2) Duhamel, *Cours de Mécanique,* t. II, p. 252.

Sur cette normale se trouvent deux centres de courbure principaux de la surface des centres de carène; ces deux points se nomment les deux *métacentres* du flotteur; le *petit métacentre* est celui qui se trouve le plus bas.

Ces définitions posées, la condition de stabilité donnée par Poisson et Duhamel peut s'énoncer ainsi : *Le centre de gravité du flotteur doit être au-dessous du petit métacentre.*

Cette règle avait été également donnée par Bravais (1); mais Bravais s'était borné à examiner le cas où le flotteur possède deux plans de symétrie rectangulaires et où les déplacements imposés au flotteur n'altèrent pas le volume immergé. Après avoir énoncé la règle précédente, Bravais ajoute : « Ce serait une erreur de croire que, conformément à un principe bien connu de Mécanique, le centre de gravité du flotteur est le plus bas possible dans la position d'équilibre stable; ce serait mal entendre le principe de Mécanique auquel nous faisons allusion; mais le centre de gravité du système formé par le flotteur et le liquide environnant doit être et est, en effet, le plus bas possible dans l'équilibre stable, comme il nous sera actuellement facile de le démontrer. » Bravais démontre cette proposition en supposant le niveau du liquide maintenu horizontal et le volume immergé maintenu invariable.

Poisson et Duhamel avaient écrit et intégré les équations des oscillations infiniment petites d'un corps flottant dans le cas où le flotteur admet un plan de symétrie qui demeure vertical pendant le mouvement et où toutes les vitesses initiales sont nulles. M. C. Jordan (2) se proposa de traiter dans toute sa généralité le problème des petits mouvements d'un flotteur. Pour mettre ce problème en équation, M. C. Jordan reprit l'hypothèse fondamentale déjà admise par Poisson et par Duhamel, à savoir que l'on pouvait faire abstraction de l'existence du liquide à la condition d'appliquer à la surface du corps des

(1) AUGUSTE BRAVAIS, *Sur l'équilibre des corps flottants*, Thèse de Mécanique soutenue devant la Faculté des Sciences de Lyon le 5 octobre 1837. Paris, 1840.

(2) C. JORDAN, *Sur la stabilité de l'équilibre des corps flottants.* (*Annali di Matematica pura ed applicata*, série II, tome I, p. 170; 1867.)

pressions *données à chaque instant par les principes de l'Hydrostatique;* voici comment M. C. Jordan énonce ces hypothèses :

« Nous supposerons que la surface du liquide est assez étendue pour que son niveau ne soit pas altéré par les oscillations du flotteur; qu'elle reste plane pendant toute la durée du mouvement; enfin, que la poussée du liquide sur le flotteur à un instant quelconque est précisément la même que si tout le système était maintenu au repos. »

M. C. Jordan ajoute : « Ces hypothèses ne sont pas parfaitement exactes; on conçoit, en effet, qu'il est impossible que le flotteur, en oscillant, ne communique pas quelque mouvement au liquide qui l'entoure et que, d'autre part, l'état de ce mouvement devra modifier les réactions qui se produisent; mais ces causes perturbatrices, qui ne paraissent pas susceptibles d'être soumises à un calcul précis, diminuent évidemment en même temps que l'amplitude et la vitesse des oscillations; et dans le cas limite où le déplacement et la vitesse initiale sont infiniment petits tous les deux, elles deviennent négligeables. »

Les suppositions fondamentales sur lesquelles repose l'analyse de M. C. Jordan sont les mêmes que celles de Duhamel et de Poisson; on ne doit donc pas s'étonner qu'il retrouve la condition de stabilité indiquée par ces géomètres.

Ces suppositions fondamentales avaient été très vivement critiquées par Clebsch [1]; parlant des recherches de Poisson et de Duhamel sur les petites oscillations des corps flottants, il ajoute : « Les équations qu'ils ont données reposent sur l'hypothèse que, pendant les mouvements infiniment petits du corps, on peut remplacer la pression hydrodynamique par la pression hydrostatique. Or, les deux pressions diffèrent entre elles de termes qui sont du même ordre que les vitesses que l'on a à considérer. Par conséquent, on voit qu'il n'est pas permis de négliger cette différence. En effet, les pressions hydrostatiques s'annulent les unes les autres à un infiniment petit près, puisque le corps qui éprouve des mouvements est dans une position infiniment voisine de la position d'équilibre. Au contraire, en ce qui concerne les pressions hydrodynamiques qui sont produites par le mouvement, il

---

[1] CLEBSCH, *Ueber das Gleichgewicht schwimmender Körper*. (*Journal de Crelle*, Bd. LVII, p. 149; 1860.)

n'existe aucune destruction de ce genre; d'une manière générale, elles s'opposent en chaque point au mouvement du corps; l'action de ces forces est évidemment du même ordre que l'action totale des pressions hydrostatiques.

» Les considérations qui précèdent suffisent à montrer que les équations ordinaires du mouvement d'un corps flottant ne sont pas simplement insuffisantes et en quelque sorte réduites à la première approximation, mais qu'elles sont nécessairement fausses en ce qu'elles négligent des termes qui sont du même ordre que les termes conservés et qui parfois les surpassent, ainsi qu'il arrive lorsqu'on étudie le mouvement qu'un corps de révolution, d'axe vertical, peut prendre autour de cet axe. »

Après avoir formulé ces critiques, Clebsch cherche, à son tour, à donner une théorie satisfaisante des oscillations infiniment petites des corps flottants. Les considérations auxquelles il se livre l'amènent à écrire six équations pour déterminer comment varient, en fonctions du temps, les trois translations ξ, η, ζ et les trois rotations φ, ψ, ϑ, en lesquelles peut se décomposer le mouvement du flotteur; ces équations ont l'aspect d'équations différentielles linéaires à coefficients constants; mais le premier membre de chacune de ces égalités, au lieu d'être formé par un nombre limité de termes et de contenir les dérivées de la fonction inconnue seulement jusqu'à un certain ordre, est une série renfermant les dérivées de tous les ordres pairs de la fonction inconnue. A ces équations, Clebsch applique des considérations semblables à celles qui servent à intégrer les équations différentielles linéaires à coefficients constants; il cherche à les vérifier par des expressions de la forme

$$\xi = \xi_0 e^{\sigma t}, \qquad \eta = \eta_0 e^{\sigma t}, \qquad \ldots,$$

ξ_0, η_0, $\ldots$, σ étant des constantes. Le carré de la constante σ est déterminé par une certaine équation transcendante

$$f(\sigma^2) = 0.$$

Clebsch en conclut le théorème suivant :

« *L'équilibre d'un corps flottant est stable dans le cas suivant et* *seulement dans ce cas : c'est le cas où toutes les valeurs de σ^2 qui résultent de l'équation*

$$f(\sigma^2) = 0$$

sont négatives. Cette équation dépend de la forme et de la position du corps, mais non des mouvements étrangers que le liquide possédait initialement. »

Sans vouloir examiner ici jusqu'à quel point les équations du mouvement d'un corps flottant, données par Clebsch, peuvent être assimilées à des équations différentielles linéaires à coefficients constants, nous ferons remarquer que la méthode suivie par Clebsch pour obtenir la condition de stabilité d'un corps flottant renferme un cercle vicieux; ce cercle est celui que Lejeune-Dirichlet a déjà signalé dans la démonstration donnée par Lagrange pour établir qu'un système est en équilibre stable lorsque son potentiel a une valeur minima. Pour former les équations du mouvement, Clebsch suppose que le corps demeure toujours infiniment voisin de sa position d'équilibre, c'est-à-dire que l'équilibre est stable; des équations qui renferment implicitement cette hypothèse ne peuvent servir à discuter si l'équilibre est stable ou instable. La méthode de Clebsch suffit à prouver que, lorsque l'équilibre est stable, la fonction $f(\sigma^2)$ ne s'annule pour aucune valeur réelle de σ; elle ne permet pas de démontrer la proposition réciproque.

Clebsch ne forme pas la fonction qu'il désigne par $f(\sigma^2)$; en sorte que, bien qu'il affirme l'existence d'une distinction essentielle entre la règle de stabilité imaginée par Poisson et par Duhamel et celle qu'il propose, on ne voit pas que cette distinction soit établie dans son Mémoire. Un calcul complet lui aurait montré que cette distinction n'est qu'apparente.

Pour éviter l'objection que l'on peut adresser à la méthode de Clebsch, une seule voie se présente; elle consiste à faire usage du principe si rigoureusement démontré par Lejeune-Dirichlet, et à chercher les conditions de stabilité du système en cherchant à rendre minimum le potentiel des actions auxquelles il est soumis.

Plusieurs essais ont été tentés dans cette voie. Nous laisserons de côté ceux de Moseley ([1]) et de Duhil de Benazé et Risbec ([2]), qui n'ont apporté aucun progrès à la solution du problème de la stabilité des corps flottants soumis à des déplacements infiniment petits, et nous aborderons de suite les recherches de M. Guyou ([3]).

M. Guyou considère un flotteur immergé dans une cuve de *dimensions limitées;* il cherche à quelle condition le potentiel de ce système sera minimum, ou, ce qui revient au même pour un système soumis exclusivement à l'action de la pesanteur, à quelle condition le centre de gravité de ce système sera aussi bas que possible; par des démonstrations géométriques très simples et très élégantes qui rappellent les méthodes suivies par Bravais dans sa thèse de Mécanique, M. Guyou établit cette condition, qui est indépendante des dimensions de la cuve et qui, par conséquent, assurera encore la stabilité de l'équilibre du flotteur sur un liquide illimité; cette condition se trouve être précisément celle qu'avaient indiquée Poisson et Duhamel.

Les raisonnements de M. Guyou nous semblent cependant affectés d'une erreur qui en vicie les conclusions; comme cette erreur est assez délicate à apercevoir, nous croyons nécessaire d'y insister quelque peu.

M. Guyou démontre, en premier lieu, que si la surface libre du liquide n'était pas horizontale, on pourrait la déformer de manière à abaisser le centre de gravité du système, et cela sans déplacer le flotteur ni changer la partie de sa surface qui est immergée.

Il démontre, en second lieu, que si le poids du liquide déplacé n'était pas égal au poids du flotteur, une translation verticale convenablement choisie de ce dernier abaisserait le centre de gravité du système.

Il démontre, en troisième lieu, que si le centre de gravité du flotteur

---

([1]) Moseley, *On the dynamical stability and the oscillation of floating bodies* (*Philosophical Transactions;* 1850). *Voir* aussi : Sir E.-J. Reed, *The stability of ships.*

([2]) Duhil de Benazé et Risbec, *Mémoire sur le mouvement complet du navire oscillant sur eau calme* (*Mémorial du Génie maritime,* 10e liv., 1874; p. 175). *Voir* aussi : Pollard et Dudebout, *Théorie du Navire,* t. II, p. 329. Paris, 1891.

([3]) E. Guyou, *Théorie nouvelle de la stabilité de l'équilibre des corps flottants* (*Revue maritime,* mars 1879, p. 682). — *Théorie du Navire,* p. 25. Paris, 1887.

n'était pas sur la même verticale que le centre de poussée et au-dessous des métacentres, on pourrait, par un déplacement qui n'altérerait pas le volume immergé, abaisser le centre de gravité du système.

De là, M. Guyou ([1]) conclut que, pour qu'un corps flottant soit en équilibre stable, il est nécessaire et *suffisant :*

1° Que la surface libre du liquide soit horizontale;

2° Que le poids du liquide déplacé soit égal au poids du flotteur;

3° Que le centre de gravité du flotteur et le centre de poussée soient sur une même verticale;

4° Que le centre de gravité du flotteur soit au-dessous des métacentres.

Il est bien clair que la nécessité de ces conditions pour assurer sinon que l'équilibre est stable, du moins que le centre de gravité du système est le plus bas possible, découle des propositions établies par M. Guyou; mais ces propositions ne nous semblent pas prouver que les conditions dont il s'agit *suffisent* à assurer la stabilité de l'équilibre.

M. Guyou n'indique pas explicitement comment il a été amené à conclure que ces conditions sont suffisantes; mais un passage de son Livre ([2]) nous met sur la voie qui permet de reconstituer sa pensée; voici ce passage :

« Pour amener à une position quelconque le système composé du flotteur et du liquide supposés primitivement en équilibre, on peut d'abord donner au flotteur l'orientation considérée en le maintenant isocarène dans le liquide en repos; conservant ensuite cette orientation, on l'élèvera ou on l'abaissera de la quantité nécessaire, et l'on donnera enfin au liquide son dénivellement. »

Guidés par ce passage, nous pensons pouvoir reconstituer, de la manière suivante, le raisonnement qui a sans doute conduit M. Guyou à énoncer la proposition que nous discutons :

Notre système, formé d'une masse liquide et d'un flotteur, est défini par certaines variables indépendantes, en nombre limité ou illi-

([1]) GUYOU, *Théorie du Navire*, p. 30.

([2]) *Ibid.*, p. 31.

mité. Les conditions précédemment énoncées suffiront à assurer la stabilité de l'équilibre du système si, grâce à elles, la variation infiniment petite la plus générale de ces variables devient incapable d'abaisser le centre de gravité du système.

Or, la variation infiniment petite la plus générale de ces variables indépendantes peut toujours être regardée comme le résultat de trois autres variations infiniment petites des mêmes variables :

1° Une variation infiniment petite qui change l'orientation du flotteur sans altérer le volume immergé ni le niveau du liquide;

2° Une variation infiniment petite qui déplace verticalement le flotteur et le niveau du liquide, en laissant plan ce dernier;

3° Une variation infiniment petite qui déforme la surface du liquide sans déplacer le flotteur.

Chacune de ces variations partielles est incapable, lorsque les conditions énoncées sont vérifiées, d'abaisser le centre de gravité du système.

Mais, *lorsque des variations infiniment petites des variables qui fixent un système sont isolément incapables d'abaisser le centre de gravité du système, la variation infiniment petite que l'on obtient en les composant n'abaisse certainement pas le centre de gravité du système.*

Donc la variation infiniment petite la plus générale des variables qui fixent un système formé d'un liquide et d'un flotteur, ne peut abaisser le centre de gravité du système lorsque les quatre conditions énoncées sont vérifiées, en sorte que ces conditions assurent la stabilité de l'équilibre du système.

Ce raisonnement renferme une proposition sujette à critiques; c'est celle que nous avons mise en italiques.

En général, *cette proposition est exacte;* soient, en effet, α, β, ... les variables indépendantes qui fixent un système et ζ la cote du centre de gravité de ce système; si les variables α, β, ... éprouvent une variation infiniment petite $\delta\alpha$, $\delta\beta$, ..., la cote ζ du centre de gravité éprouve une variation qui peut, en général, se mettre sous la forme

$$\delta\zeta = A\,\delta\alpha + B\,\delta\beta + \ldots, \tag{1}$$

A, B, ... étant des fonctions finies de α, β, ...

Imaginons alors qu'une première variation infiniment petite $\delta'\alpha$, $\delta'\beta$, ... soit incapable d'abaisser le centre de gravité du système; nous aurons

$$(2) \qquad \delta'\zeta = A\,\delta'\alpha + B\,\delta'\beta + \dots \geqq 0;$$

imaginons qu'une seconde variation infiniment petite $\delta''\alpha$, $\delta''\beta$, ... soit incapable d'abaisser le centre de gravité du système; nous aurons

$$(2\ bis) \qquad \delta''\zeta = A\,\delta''\alpha + B\,\delta''\beta + \dots \geqq 0;$$

....

Composons entre elles ces variations infiniment petites; nous obtiendrons une variation résultante

$$\Delta\alpha = \delta'\alpha + \delta''\alpha + \dots,$$
$$\Delta\beta = \delta'\beta + \delta''\beta + \dots,$$

....

qui fera varier la cote du centre de gravité de

$$(3) \qquad \Delta\zeta = A(\delta'\alpha + \delta''\alpha + \dots) + B(\delta\beta + \delta'\beta + \dots) + \dots.$$

Les égalités (2), (2 *bis*), ... et (3) permettront d'écrire

$$\Delta\zeta = \delta'\zeta + \delta''\zeta + \dots \geqq 0,$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

Mais CETTE PROPOSITION DEVIENT INEXACTE DANS CERTAINS CAS EXCEPTIONNELS; *ce sont ceux où les valeurs de* α, β, ... *sont telles que toute variation infiniment petite du premier ordre imposée à ces variables entraîne une variation de la cote du centre de gravité qui est un infiniment petit d'ordre supérieur au premier.*

Imaginons, par exemple, que $\delta\zeta$ soit un infiniment petit du second ordre lorsque $\delta\alpha$, $\delta\beta$, ... sont des infiniment petits du premier ordre;

nous devrons remplacer l'égalité (1) par une égalité telle que

$$(4)\qquad \delta\zeta = a_{11}(\delta\alpha)^2 + a_{22}(\delta\beta)^2 + \ldots + 2a_{12}\,\delta\alpha\,\delta\beta + \ldots,$$

les quantités a_{ij} étant finies; les égalités et inégalités (2) et (2 *bis*) seront remplacées par

$$(5)\qquad \delta'\zeta = a_{11}(\delta'\alpha)^2 + a_{22}(\delta'\beta)^2 + \ldots + 2a_{12}\,\delta'\alpha\,\delta'\beta + \ldots \geqq 0,$$

$$(5\ bis)\qquad \delta''\zeta = a_{11}(\delta''\alpha)^2 + a_{22}(\delta''\beta)^2 + \ldots + 2a_{12}\,\delta''\alpha\,\delta''\beta + \ldots \geqq 0.$$

Nous aurons également dans ce cas, au lieu de l'égalité (3),

$$\begin{aligned}\Delta\zeta = {} & a_{11}(\delta'\alpha + \delta''\alpha + \ldots)^2 + a_{22}(\delta'\beta + \delta''\beta + \ldots)^2 + \ldots \\ & + 2a_{12}(\delta'\alpha + \delta''\alpha + \ldots)(\delta'\beta + \delta''\beta + \ldots) + \ldots.\end{aligned}$$

On voit alors sans peine que les égalités ou inégalités (5) et (5 *bis*) n'entraînent pas nécessairement l'égalité ou inégalité

$$\Delta\zeta \geqq 0.$$

Or, c'est précisément dans un cas exceptionnel de ce genre que M. Guyou paraît avoir fait usage de la proposition en question; parmi les quatre conditions qu'il énonce, les trois premières expriment que la variation éprouvée par la cote du centre de gravité est un infiniment petit d'ordre supérieur aux variations infiniment petites des variables indépendantes.

Cette discussion montre que les raisonnements de M. Guyou ne permettent pas d'affirmer que les conditions par lui énoncées sont suffisantes pour assurer l'équilibre d'un système formé par un fluide et un corps flottant; nous verrons d'ailleurs, au cours du présent travail, que ces conditions suffisent à assurer la stabilité de l'équilibre d'un corps flottant sur un fluide *limité;* mais c'est à des circonstances toutes spéciales que le raisonnement de M. Guyou, inexact en général, doit son succès dans ce cas particulier ([1]).

([1]) Une étude analogue à celle de M. Guyou aurait été faite par MOREAU (*Principes fondamentaux de l'équilibre et du mouvement des corps flottants;* Brest, 1830). Il nous a été impossible de nous procurer cet Ouvrage, que nous citons d'après la *Théorie du navire* de MM. Pollard et Dudebout.

Cet exposé rapide nous montre que les conditions de stabilité d'un corps flottant sont loin d'être encore établies d'une manière certaine et rigoureuse, même dans le cas simple où le fluide et le flotteur sont soumis seulement à l'action de la pesanteur. Quant au cas plus général où le fluide et le flotteur sont soumis à des forces extérieures admettant une fonction potentielle quelconque, il est demeuré jusqu'ici inabordé.

C'est ce problème général que nous nous sommes proposé de traiter.

Nous avons composé le potentiel d'un système formé par un solide et un fluide, et nous avons cherché à quelles conditions le potentiel de ce système avait une valeur minima.

On sait, par la belle et rigoureuse démonstration de Lejeune-Dirichlet, que tout état où le potentiel d'un système a une valeur minima est un état d'équilibre stable; la réciproque de cette proposition est-elle vraie? N'y a-t-il pas d'autres états d'équilibre stable que ceux qui correspondent à une valeur minima du potentiel?

Cette réciproque est vraisemblable; toutefois, elle n'a pas été démontrée jusqu'ici d'une manière entièrement rigoureuse, et elle est généralement admise à titre de postulat.

Bien que ce postulat ne paraisse pas susceptible d'être démontré dans l'état actuel de la Mécanique, il nous semble que l'on peut le déduire, *du moins pour les systèmes dépourvus de frottement et de viscosité,* d'une autre proposition plus simple et dont l'acceptation s'impose plus aisément à l'esprit; cette proposition est la suivante :

Un état d'équilibre stable d'un système ne peut cesser d'être stable parce qu'on introduit dans le système de nouvelles liaisons indépendantes du temps.

Avant d'exposer cette déduction, quelques remarques sont nécessaires.

Considérons un système défini par n variables indépendantes α, β, ..., λ. Prenons un état initial $(\alpha_0, \beta_0, \ldots, \lambda_0)$ de ce système.

Faisons ensuite choix d'une variable θ et de n fonctions $a(\theta)$,

$b(\theta)$, ..., $l(\theta)$ jouissant des propriétés suivantes :

1° Pour $\theta = \theta_0$, on a

$$a(\theta_0) = \alpha_0, \qquad b(\theta_0) = \beta_0, \qquad \ldots, \qquad l(\theta_0) = \lambda_0.$$

2° Lorsque θ croît à partir de θ_0, les fonctions $a(\theta)$, $b(\theta)$, ..., $l(\theta)$ demeurent finies, continues et uniformes, du moins tant que θ ne surpasse pas une certaine limite ; de plus, les dérivées $\frac{d\,a(\theta)}{d\theta}$, $\frac{d\,b(\theta)}{d\theta}$, ..., $\frac{d\,l(\theta)}{d\theta}$ sont finies.

Si nous posons

$$(6) \qquad \alpha = a(\theta), \qquad \beta = b(\theta), \qquad \ldots, \qquad \lambda = l(\theta);$$

nous définirons une suite linéaire et continue d'états du système partant de l'état $(\alpha_0, \beta_0, \ldots, \lambda_0)$ ou, en d'autres termes, une modification virtuelle finie issue de l'état $\alpha_0, \beta_0, \ldots, \lambda_0$.

Cela posé, imaginons que le potentiel thermodynamique

$$\Phi(\alpha, \beta, \ldots, \lambda)$$

du système ne soit pas minimum pour $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$, ..., $\lambda = \lambda_0$.

Il est possible d'imaginer au moins une modification virtuelle finie, issue de l'état $(\alpha_0, \beta_0, \ldots, \lambda_0)$, le long de laquelle la fonction

$$\Phi(\alpha, \beta, \ldots, \lambda)$$

commence par ne pas croître. En d'autres termes, on doit pouvoir, au moins d'une manière, choisir les fonctions $a(\theta)$, $b(\theta)$, ..., $l(\theta)$, qui figurent dans les égalités (6), de manière que, pour toute valeur de θ supérieure à θ_0 et inférieure à une certaine limite Θ qui surpasse θ_0 d'une quantité finie, on ait

$$(7) \qquad \Phi[a(\theta), b(\theta), \ldots, l(\theta)] - \Phi(\alpha_0, \beta_0, \ldots, \lambda_0) \leqq 0.$$

Considérons une de ces manières de choisir les fonctions $a(\theta)$, $b(\theta)$, ..., $l(\theta)$. Écrivons les égalités (6); entre ces égalités, éliminons la variable θ ; nous trouvons les $(n-1)$ relations

$$(8) \qquad \begin{cases} f(\alpha, \beta, \ldots, \lambda) = 0, \\ g(\alpha, \beta, \ldots, \lambda) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ h(\alpha, \beta, \ldots, \lambda) = 0. \end{cases}$$

Si nous imposons au système les $(n-1)$ liaisons bilatérales, indépendantes du temps, exprimées par les relations (8), nous le transformons en un système à liaisons complètes, ne dépendant plus que du seul paramètre θ; nous pourrons, en outre, imposer à ce système la liaison unilatérale et indépendante du temps

$$(9) \qquad \theta > \theta_0.$$

Le potentiel thermodynamique du système deviendra une simple fonction de θ,

$$\Psi(\theta) = \Phi[a(\theta), b(\theta), \ldots, l(\theta)]$$

et l'égalité ou inégalité (7) pourra s'écrire

$$(10) \qquad \Psi(\theta) - \Psi(\theta_0) \leqq 0.$$

Prenons le système dans l'état initial $(\alpha_0, \beta_0, \ldots, \lambda_0)$, où θ_0, et donnons à $\frac{d\theta}{dt}$ une valeur initiale v_0 qui soit *positive;* les divers points du système seront animés de vitesses initiales qui seront compatibles avec les liaisons (8) et (9); le système va prendre un mouvement que le principe des forces vives suffira à mettre en équation.

La force vive du système peut se mettre sous la forme $F(\theta)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$, la fonction $F(\theta)$ demeurant comprise entre deux limites positives M et m lorsque θ varie entre θ_0 et Θ.

Le principe des forces vives nous donne alors

$$(11) \qquad F(\theta)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = F(\theta_0)v_0^2 = [\Psi(\theta_0) - \Psi(\theta)].$$

Cette égalité nous apprend tout d'abord que, tant que θ demeurera compris entre θ_0 et Θ, $\frac{d\theta}{dt}$ ne peut s'annuler; en effet, le premier terme du second membre est essentiellement positif et le second ne peut être négatif, d'après (10). La quantité $\frac{d\theta}{dt}$ ne pouvant changer de signe sans passer par o, on voit que cette quantité, positive au début du mouvement, demeurera positive tant que θ n'aura pas franchi la limite Θ.

Si nous convenons de ne considérer que la partie du mouvement pendant laquelle θ n'a pas encore franchi la limite Θ, nous pourrons écrire l'égalité (11) sous la forme

$$dt = d\theta \sqrt{\frac{F(\theta)}{F(\theta_0)v_0^2 + [\Psi(\theta_0) - \Psi(\theta)]}}, \tag{12}$$

le radical étant pris en valeur absolue.

Le système, partant de l'état caractérisé par la valeur θ_0 du paramètre variable, atteindra pour la première fois l'état caractérisé par la valeur Θ du même paramètre au bout d'un temps

$$T = \int_{\theta_0}^{\Theta} \sqrt{\frac{F(\theta)}{F(\theta_0)v_0^2 + [\Psi(\theta_0) - \Psi(\theta)]}}\, d\theta. \tag{13}$$

On voit sans peine que l'égalité (13) permet d'écrire

$$T \leqq \sqrt{\frac{M}{F(\theta_0)}}\, \frac{\Theta - \theta_0}{v_0}. \tag{14}$$

Ainsi, quelle que soit la valeur initiale donnée de v_0, on pourra fixer un temps fini au bout duquel le système aura passé au moins une fois tous les états caractérisés par des valeurs du paramètre variable comprises entre θ_0 et Θ.

Cette proposition démontre que l'état θ_0, ou $(\alpha_0, \beta_0, \ldots, \lambda_0)$, n'est pas un état d'équilibre stable pour le système soumis aux liaisons (8) et (9); dès lors, d'après le principe que nous avons admis, ce ne peut être non plus un état d'équilibre stable pour le système non soumis à ces liaisons et nous arrivons ainsi à la proposition suivante, réciproque du théorème de Lejeune-Dirichlet :

Un état où le potentiel thermodynamique d'un système n'a pas une valeur minima ne peut être, pour ce système, un état d'équilibre stable.

C'est sur cette proposition que nous allons nous appuyer, en même temps que sur le théorème de Lejeune-Dirichlet, pour traiter de la stabilité de l'équilibre des corps flottants.

Ce n'est cependant pas ce problème que nous traiterons en premier lieu; nous commencerons par étudier la stabilité de l'équilibre d'un système de fluides ne portant pas de flotteur; ce problème, plus simple que la question de la stabilité de l'équilibre des corps flottants, la précède logiquement. La méthode employée, les résultats obtenus en étudiant les fluides qui ne portent pas de flotteur préparent l'étude des fluides qui portent un flotteur.

Ce que nous dirons ici au sujet de la stabilité d'un système composé exclusivement de fluides n'est pas entièrement inédit; après avoir amorcé cette question dans un premier travail [1], nous l'avons développée en partie dans le cours [2] que nous avons professé à la Faculté des Sciences de Lille, en 1890-1891; plus récemment, nous avons traité complètement [3] la stabilité de l'équilibre d'un nombre quelconque de fluides mélangés, question qui renferme comme cas particulier celle dont nous parlons en ce moment. Néanmoins, nous avons cru devoir traiter ici la stabilité de l'équilibre d'un système composé uniquement de fluides non mélangés, parce que ce problème, incomplètement résolu dans nos deux premières publications, se trouvait, dans la troisième, impliqué dans un problème plus général.

Après un premier Chapitre, consacré à la stabilité de l'équilibre de fluides qui ne portent pas de flotteur, un deuxième Chapitre traite des

---

[1] *Sur les principes fondamentaux de l'Hydrostatique* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, t. IV, C. 1890).

[2] *Hydrodynamique, élasticité, acoustique*, Liv. II, Chap. II. Paris, 1891.

[3] *Dissolutions et mélanges;* premier Mémoire : *L'équilibre et le mouvement des fluides mélangés* (*Travaux et Mémoires des Facultés de Lille*, t. III. B. 1893).

conditions d'équilibre des corps flottants; c'est seulement alors que, toutes les propositions préliminaires étant établies, nous abordons, dans un troisième Chapitre, l'étude générale de la stabilité de l'équilibre des corps flottants.

CHAPITRE I.

STABILITÉ DE L'ÉQUILIBRE DE FLUIDES QUI NE PORTENT PAS DE FLOTTEUR.

I. — *Rappel des principes de l'Hydrostatique.*

Considérons un fluide ayant en tout point la même température; nous supposerons que l'état de ce fluide soit entièrement déterminé lorsqu'on connaît la forme de la surface qui le limite et la densité ρ en chaque point (x, y, z) de l'espace que cette surface enferme; cette densité est supposée fonction continue de x, y, z. Lorsque deux fluides différents sont en contact, la densité varie d'une manière discontinue à la traversée de la surface de contact.

Nous admettrons, ce qui implique certaines hypothèses que nous avons détaillées ailleurs [1], que le potentiel thermodynamique interne d'un système formé de deux semblables fluides 1 et 2 est donné par la formule suivante

$$(1) \qquad \mathfrak{F} = \int_1 \varphi_1(\rho_1)\, dv_1 + \int_2 \varphi_2(\rho_2)\, dv_2,$$

la première intégrale s'étendant à tous les éléments de volume dv_1 du fluide 1 et la seconde intégrale s'étendant à tous les éléments de volume dv_2 du fluide 2; la fonction φ_1 et la fonction φ_2 sont deux fonctions analytiques différentes, caractéristiques des fluides 1 et 2.

Les forces extérieures appliquées au système sont de deux sortes :

1° Chaque élément dS de la partie déformable de la surface qui limite le système supporte une force dont les composantes sont

$$P\cos(P, x)\, dS, \quad P\cos(P, y)\, dS, \quad P\cos(P, z)\, dS.$$

---

[1] P. Duhem, *Le potentiel thermodynamique et la pression hydrostatique*. (*Annales de l'École Normale supérieure*, 3e série, t. X, p. 183; 1893.)

2° Chaque élément de volume dv de l'un des fluides, élément dont la masse est $\rho\, dv$, est soumis à une force dont les composantes sont

$$\rho X\, dv, \quad \rho Y\, dv, \quad \rho Z\, dv.$$

Ces principes posés, on peut établir d'une manière très rigoureuse (¹) les propositions suivantes, qui sont, pour la plupart, très anciennement connues, et qui sont les fondements de l'Hydrostatique :

1° Il existe une fonction Π_1, uniforme, finie, continue, douée de dérivées partielles, en tous les points du fluide 1 ; il existe une fonction Π_2 possédant les mêmes propriétés en tous les points du fluide 2.

La fonction Π_1 n'est négative en aucun point du fluide 1 ; la fonction Π_2 n'est négative en aucun point du fluide 2.

2° En tout point du fluide 1, on a

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} \rho_1 X &= \frac{\partial \Pi_1}{\partial x}, \\ \rho_1 Y &= \frac{\partial \Pi_1}{\partial y}, \\ \rho_1 Z &= \frac{\partial \Pi_1}{\partial z}, \end{aligned} \right.$$

$$(3) \qquad \varphi_1(\rho_1) - \rho_1 \frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1} + \Pi_1 = 0.$$

3° En tout point du fluide 2, on a

$$(2\ bis) \qquad \left\{ \begin{aligned} \rho_2 X &= \frac{\partial \Pi_2}{\partial x}, \\ \rho_2 Y &= \frac{\partial \Pi_2}{\partial y}, \\ \rho_2 Z &= \frac{\partial \Pi_2}{\partial z}, \end{aligned} \right.$$

$$(3\ bis) \qquad \varphi_2(\rho_2) - \rho_2 \frac{d\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2} + \Pi_2 = 0.$$

(¹) P. Duhem, *Hydrodynamique, élasticité, acoustique,* cours professé à la Faculté des Sciences de Lille en 1890-1891, t. I, p. 60-80. Paris, 1891.

4° En tout point de la surface de contact S_{12} des fluides 1 et 2, on a

$$\Pi_1 = \Pi_2. \tag{4}$$

5° En tout point de la partie déformable S_1 de la surface qui sépare le fluide 1 de l'extérieur, on a

$$\left\{\begin{aligned} P\cos(P, x) &= \Pi_1 \cos(n_i, x), \\ P\cos(P, y) &= \Pi_1 \cos(n_i, y), \\ P\cos(P, z) &= \Pi_1 \cos(n_i, z), \end{aligned}\right. \tag{5}$$

n_i étant la normale menée à la surface S_1 par le point considérée et dirigée vers l'intérieur du fluide 1.

6° En tout point de la partie déformable S_2 de la surface qui sépare le fluide 2 de l'extérieur, on a

$$\left\{\begin{aligned} P\cos(P, x) &= \Pi_2 \cos(n_i, x), \\ P\cos(P, y) &= \Pi_2 \cos(n_i, y), \\ P\cos(P, z) &= \Pi_2 \cos(n_i, z). \end{aligned}\right. \tag{5 bis}$$

D'après l'égalité (3), la densité ρ_1, en un point du premier fluide, dépend uniquement de la pression Π_1 en ce point; écrivons abréviativement l'égalité (3)

$$\rho_1 = F_1(\Pi_1). \tag{6}$$

Moyennant cette égalité (6), les égalités (2) deviennent

$$\left\{\begin{aligned} F_1(\Pi_1)X &= \frac{\partial \Pi_1}{\partial x}, \\ F_1(\Pi_1)Y &= \frac{\partial \Pi_1}{\partial y}, \\ F_1(\Pi_1)Z &= \frac{\partial \Pi_1}{\partial z}. \end{aligned}\right. \tag{7}$$

Désignons par V_1 une fonction uniforme, finie et continue des coordonnées x_1, y_1, z_1 d'un point de l'espace occupé par le fluide 1, telle que l'on ait

$$\frac{1}{F_1(\Pi_1)} d\Pi_1 + dV_1 = 0. \tag{8}$$

Cette fonction V_1 sera définie à une constante près. Les égalités (7) deviendront alors

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz + dV_1 = 0, \tag{9}$$

en sorte que l'on aura, en tout point du fluide 1,

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} = 0,\\ &\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} = 0,\\ &\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} = 0. \end{aligned}\right. \tag{10}$$

Écrivons de même l'égalité (2 *bis*) sous la forme

$$\rho_2 = F_2(\Pi_2).$$

Désignons par V_2 une fonction uniforme, finie et continue des coordonnées x_2, y_2, z_2 d'un point de l'espace occupé par le fluide 2, définie, à une constante près, par l'égalité

$$\frac{1}{F_2(\Pi_2)} d\Pi_2 + dV_2 = 0. \tag{8 bis}$$

Nous aurons alors, en tout point du fluide 2,

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz + dV_2 = 0, \tag{9 bis}$$

en sorte que les fonctions X, Y, Z vérifieront encore les égalités (10) en tout point de l'espace occupé par le fluide 2.

Les fonctions X, Y, Z, vérifiant les égalités (10) en tout point du système, il existe une fonction V des coordonnées d'un point du système, variable d'une manière continue dans tout l'espace occupé par le système, telle que l'on ait

$$(11)\qquad \begin{cases} X + \dfrac{\partial V}{\partial x} = 0, \\ Y + \dfrac{\partial V}{\partial y} = 0, \\ Z + \dfrac{\partial V}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

Seulement, si l'espace occupé par le système n'est pas simplement connexe, cette fonction peut n'être pas uniforme. Cette fonction est d'ailleurs définie à une constante près.

Dans l'espace occupé par le fluide 1, les deux fonctions V et V_1 sont continues et ont les mêmes dérivées partielles; elles ne diffèrent donc que par une constante, en sorte que l'on a

$$V = V_1 + C_1.$$

D'ailleurs la fonction V_1 est une fonction uniforme des coordonnées d'un point de l'espace occupé par le fluide 1; la fonction V demeure donc uniforme si le point (x, y, z) auquel elle se rapporte varie seulement à l'intérieur du fluide 1.

Des considérations analogues s'appliquent au fluide 2.

Ainsi, pour que des forces extérieures puissent maintenir en équilibre un système formé d'un certain nombre de fluides, il faut qu'elles admettent une fonction potentielle V en tout point de l'espace occupé par ces fluides. Cette fonction potentielle n'est pas forcément uniforme dans tout l'espace occupé par le système; mais elle est uniforme dans chaque espace partiel qu'occupe chacune des masses fluides connexes qui composent le système.

On voit, par conséquent, que les surfaces qui limitent les divers fluides connexes ou les séparent les uns des autres forment autant de surfaces-coupures, transformant la fonction continue, mais non forcément uniforme, V en un groupe de fonctions $V_1, V_2, \ldots, V_n$, séparément uniformes et continues, mais ne se raccordant pas l'une à l'autre avec continuité.

L'égalité (8) donne

$$(12) \qquad V_1 = \Phi_1(\Pi_1)$$

ou, en résolvant cette équation par rapport à Π_1,

$$(13) \qquad \Pi_1 = G_1(V_1).$$

La fonction $G_1(V_1)$ est une fonction uniforme de V_1; en effet, la fonction $F_1(\Pi_1)$, qui est égale à la densité ρ_1 du fluide 1, est essentiellement positive; l'égalité (8) montre alors que V_1 diminue constamment lorsque Π_1 augmente, en sorte qu'une valeur de V_1 ne peut correspondre à plus d'une valeur de Π_1.

Chacune des surfaces définies, à l'intérieur du fluide 1, par une équation telle que

$$V_1 = \text{const.},$$

ou, ce qui revient au même, telle que

$$V = \text{const.},$$

est alors une surface d'égale pression; elle est aussi, d'après l'égalité (6), une surface d'égale densité. Une telle surface se nomme, comme on sait, une *surface de niveau.*

Lorsqu'une partie déformable de la surface qui limite le système fluide est soumise à une pression uniforme et donnée P_0, cette portion de surface prend le nom de *surface libre.*

Si nous considérons une surface libre connexe, confinant, par exemple, au fluide 1, on aura, en tout point de cette surface, $\Pi_1 = P_0$, et, par conséquent, V_1 aura, en tout point de cette surface, la valeur constante $\Phi_1(P_0)$; d'où le théorème suivant :

Toute portion connexe de surface libre est située dans une même surface de niveau.

Si la surface libre d'un système liquide se compose de plusieurs parties différentes, non connexes entre elles mais confinant avec une même masse fluide connexe 1, ces diverses parties seront encore situées dans une même surface de niveau; si, au contraire, ces diverses portions de surface libre ne confinent pas à une même masse fluide connexe, elles pourront être situées dans des surfaces de niveau différentes.

En tout point de la surface de séparation de deux fluides continus 1 et 2, on doit avoir

$$\Pi_1 = \Pi_2. \tag{4}$$

On a, d'ailleurs,

$$\Pi_1 = G_1(V_1), \tag{13}$$

$$\Pi_2 = G_2(V_2). \tag{13 bis}$$

L'égalité (4) devient donc

$$G_1(V_1) - G_2(V_2) = 0. \tag{14}$$

Si donc dx, dy, dz sont les composantes d'un déplacement infiniment petit effectué sur la surface de séparation, on aura

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{dG_1(V_1)}{dV_1}\left(\frac{\partial V_1}{\partial x}dx + \frac{\partial V_1}{\partial y}dy + \frac{\partial V_1}{\partial z}dz\right) \\ &- \frac{dG_2(V_2)}{dV_2}\left(\frac{\partial V_2}{\partial x}dx + \frac{\partial V_2}{\partial y}dy + \frac{\partial V_2}{\partial z}dz\right) = 0. \end{aligned}\right. \tag{15}$$

Mais, en tout point de la surface commune aux deux fluides, on a

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} = \frac{\partial V_2}{\partial x} = -X = \frac{\partial V}{\partial x},$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial y} = \frac{\partial V_2}{\partial y} = -Y = \frac{\partial V}{\partial y},$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial z} = \frac{\partial V_2}{\partial z} = -Z = \frac{\partial V}{\partial z}.$$

On a d'ailleurs, d'après les égalités (13) et (13 *bis*),

$$\frac{dG_1(V_1)}{dV_1}dV_1 + d\Pi_1 = 0,$$

$$\frac{dG_2(V_2)}{dV_2}dV_2 + d\Pi_2 = 0$$

ou bien, en vertu des égalités (8) et (8 *bis*),

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d\,G_1(V_1)}{dV_1} &= F_1(\Pi_1),\\ \frac{d\,G_2(V_2)}{dV_2} &= F_2(\Pi_2).\end{aligned}\right.$$

Si donc nous désignons par Π la valeur commune des pressions Π_1, Π_2, en un point de la surface S_{12}, l'égalité (15) deviendra

$$(17)\qquad [F_1(\Pi) - F_2(\Pi)]\left(\frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz\right) = 0.$$

Si, sous la pression Π qui règne à la surface de contact, les deux fluides n'ont pas la même densité, $F_1(\Pi)$ n'est pas égal à $F_2(\Pi)$ et l'équation (17) devient

$$\frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz = 0.$$

En sorte que *toute portion connexe de la surface de contact de deux fluides de densité différente est une surface de niveau.*

Si, au contraire, les deux fluides ont la même densité, $F_1(\Pi)$ est égal à $F_2(\Pi)$; l'égalité (17) est satisfaite identiquement et la forme de la surface de contact est indéterminée.

Si deux fluides différents, 1 et 2, formant chacun une masse connexe, sont en contact le long de plusieurs surfaces séparées, on peut se demander si ces diverses surfaces sont ou ne sont pas dans une même surface de niveau.

Il n'est pas possible de donner une réponse entièrement générale à cette question. Toutefois, si l'un des fluides, le fluide 1 par exemple, est toujours plus dense que l'autre fluide, le fluide 2, quelles que soient les pressions ϖ_1, ϖ_2, sous lesquelles ces deux fluides sont pris (ces pressions étant, toutefois, comprises parmi celles qui sont réalisées au sein du système), on peut affirmer que les diverses parties de la surface de contact sont dans une même surface de niveau.

Imaginons, en effet, que S_{12}, S'_{12} soient deux parties différentes de la surface de contact; la première correspond à des valeurs V_1, V_2, Π des fonctions considérées dans ce qui précède; la seconde, à des valeurs V'_1, V'_2, Π' des mêmes fonctions. Nous aurons les égalités

$$(14)\qquad G_1(V_1) - G_2(V_2) = 0,$$

$$(14\ bis)\qquad G_1(V'_1) - G_2(V'_2) = 0.$$

De ces égalités nous déduisons

$$G_1(V'_1) - G_1(V_1) - G_2(V'_2) + G_2(V_2) = 0$$

ou bien

$$(18)\qquad \int_{V_1}^{V'_1} \frac{d\,G_1(v)}{dv}\,dv - \int_{V_2}^{V'_2} \frac{d\,G_2(v)}{dv}\,dv = 0.$$

Mais nous savons que l'on peut écrire, à l'intérieur du fluide 1,

$$V_1 = V - C_1,$$

C_1 étant une constante, et à l'intérieur du fluide 2,

$$V_2 = V - C_2,$$

C_2 étant une constante. La fonction V étant continue dans tout l'espace, nous concluons aisément de là que

$$V'_1 - V_1 = V'_2 - V_2.$$

L'égalité (18) peut alors s'écrire

$$(19)\qquad (V'_1 - V_1)\left[\frac{d\,G_1(U_1)}{dU_1} - \frac{d\,G_2(U_2)}{dU_2}\right] = 0,$$

U_1 étant compris entre V_1 et V'_1 et U_2 entre V_2 et V'_2.

Soient ϖ_1, ϖ_2 les valeurs de Π_1, Π_2, qui correspondent aux valeurs U_1, U_2 de V_1, V_2. Les égalités (16) nous donneront

$$\frac{d\,G_1(U_1)}{dU_1} = F_1(\varpi_1),$$

$$\frac{d\,G_2(U_2)}{dU_2} = F_2(\varpi_2).$$

D'ailleurs, d'après l'égalité (8), V_1 varie toujours en sens contraire de Π_1; U_1 étant compris entre V_1 et V'_1, ϖ_1 sera compris entre Π' et Π; de même ϖ_2 sera compris entre Π et Π'. L'égalité (19) deviendra donc

$$(V'_1 - V_1)[F_1(\varpi_1) - F_2(\varpi_2)] = 0,$$

les pressions ϖ_1 et ϖ_2 étant toutes deux comprises entre Π et Π', et, par conséquent, se trouvant au nombre des pressions réalisées au sein du système.

Mais, par hypothèse, le fluide 1 est plus dense sous la pression ϖ_1 que le fluide 2 sous la pression ϖ_2; on a donc

$$F_1(\varpi_1) - F_2(\varpi_2) > 0,$$

en sorte que l'égalité précédente devient

$$V'_1 - V_1 = 0.$$

Il en résulte que les deux surfaces S_{12}, S'_{12} sont, comme nous l'avions annoncé, dans une même surface de niveau.

§ II. — *Fluide soumis à une pression uniforme et constante; potentiel thermodynamique de ce fluide; variation première de ce potentiel.*

Nous avons vu que l'on avait, dans tout l'espace occupé par le fluide,

$$(11) \qquad X = -\frac{\partial V}{\partial x}, \qquad Y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \qquad Z = -\frac{\partial V}{\partial z},$$

la fonction V étant une fonction continue de x, y, z, mais pouvant n'être pas uniforme lorsque le système est formé de plusieurs fluides distincts, et que l'espace qu'il remplit n'est pas simplement connexe.

Nous admettrons désormais que l'on peut tracer autour du système une surface dont tous les points soient à une distance finie de la surface qui limite le système; qu'il existe une certaine fonction V, *uniforme*, finie et continue à l'intérieur de cette surface, telle qu'une masse fluide dm, placée au point (x, y, z), soit soumise à une force ayant pour composantes

$$-\frac{\partial V}{\partial x}dm, \quad -\frac{\partial V}{\partial y}dm, \quad -\frac{\partial V}{\partial z}dm.$$

Cette hypothèse admise, considérons la quantité

$$W = \int V \rho \, dv, \tag{20}$$

dans laquelle l'intégrale s'étend au volume entier d'un fluide continu et cherchons quelle variation subit cette quantité W lorsqu'on impose au fluide une modification infiniment petite.

Soit ρ la densité du fluide, au commencement de la modification, en un point d'un élément de volume dv, fixe dans l'espace; soit $(\rho + \delta\rho)$ la densité, au sein du même élément de volume, à la fin de la modification; soient S la surface primitive du fluide et S' la surface déformée; soit ε une quantité dont la valeur absolue est la distance normale infiniment petite des deux surfaces S, S', dont le signe est le signe $+$ dans les régions où la surface S' est extérieure à la surface S et le signe $-$ dans les régions où la surface S' est intérieure à la surface S; nous aurons évidemment

$$\delta W = \int V \, \delta\rho \, dv + \int V \rho \varepsilon \, dS, \tag{21}$$

la première intégrale s'étendant au volume du fluide, et la seconde à la surface qui le limite.

Cette égalité (21) peut se transformer.

Soient δx, δy, δz les composantes du déplacement du point matériel qui avait pour coordonnées x, y, z, au début de la modification; nous aurons, en désignant par n_i la normale à la surface S vers l'intérieur du fluide,

$$\begin{aligned}\delta\rho &= -\rho\left(\frac{\partial\,\delta x}{\partial x} + \frac{\partial\,\delta y}{\partial y} + \frac{\partial\,\delta z}{\partial z}\right),\\ \varepsilon &= \cos(n_i, x)\,\delta x + \cos(n_i, y)\,\delta y + \cos(n_i, z)\,\delta z,\end{aligned}$$

en sorte que l'égalité (21) deviendra

$$\delta W = -\int \rho V \left(\frac{\partial\, \delta x}{\partial x} + \frac{\partial\, \delta y}{\partial y} + \frac{\partial\, \delta z}{\partial z} \right) dv$$
$$-\int \rho V [\cos(n_i, x)\delta x + \cos(n_i, y)\, \delta y + \cos(n_i, z)\, \delta z]\, dS.$$

Des intégrations par parties transforment aisément cette égalité en

$$\delta W = \int \rho \left(\frac{\partial V}{\partial x} \delta x + \frac{\partial V}{\partial y} \delta y + \frac{\partial V}{\partial z} \delta z \right) dv$$

ou bien, en vertu des égalités (11), en

$$\delta W = -\int \rho (X\, \delta x + Y\, \delta y + Z\, \delta z)\, dv.$$

L'intégrale qui figure au second membre est évidemment le travail virtuel, effectué dans la modification considérée, par l'ensemble des forces appliquées aux diverses masses élémentaires qui composent le fluide. Donc, *moyennant les hypothèses faites, les forces appliquées aux divers éléments de masse qui composent un fluide admettent un potentiel* W, *défini par l'égalité* (20).

Si le système était composé de deux fluides, 1 et 2, le potentiel des forces qui agissent sur les divers éléments de masse qui le forment serait donné par l'égalité

$$(20\ bis) \qquad W = \int_1 V \rho_1\, dv_1 + \int_2 V \rho_2\, dv_2.$$

La variation que cette quantité éprouve dans une modification infiniment petite du fluide s'obtiendra par une formule analogue à la formule (21); si nous désignons par ε_1 une quantité, analogue à ε, comptée positivement vers l'extérieur du fluide 1, et par ε_2 une quantité, analogue à ε, comptée positivement vers l'intérieur du fluide 2, nous aurons

$$(21\ bis) \qquad \left\{ \begin{aligned} \delta W = {} & \int_1 V\, \delta\rho_1\, dv_1 + \int_2 V\, \delta\rho_2\, dv_2 \\ & + \int_1 V \rho_1 \varepsilon_1\, dS_1 + \int_2 V \rho_2 \varepsilon_2\, dS_2 \\ & + \int_{S_{12}} V(\rho_1 \varepsilon_1 + \rho_2 \varepsilon_2)\, dS_{12}. \end{aligned} \right.$$

Les pressions appliquées à la surface déformable du système n'admettent pas, en général, de potentiel; il faut, toutefois, faire exception à cette règle dans le cas où *les parties déformables* S_1, S_2 *de la surface qui limite le système supportent une pression uniforme qui garde une valeur invariable* P_0 *pendant les diverses modifications du système;* dans ce cas particulier, où nous nous supposerons placé désormais, les pressions extérieures admettent, comme l'on sait, pour potentiel la fonction

$$W' = P_0\left(\int_1 dv_1 + \int_2 dv_2\right), \tag{22}$$

dont la variation est

$$\delta W' = P_0\left(\int_{S_1} \varepsilon_1\, dS_1 + \int_{S_2} \varepsilon_2\, dS_2\right). \tag{23}$$

En toutes circonstances, le système admet pour potentiel thermodynamique interne la quantité

$$\mathfrak{F} = \int_1 \varphi_1(\rho_1)\, dv_1 + \int_2 \varphi_2(\rho_2)\, dv_2, \tag{1}$$

dont la variation est

$$\left\{\begin{aligned} \delta\mathfrak{F} = {} & \int_1 \frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1}\delta\rho_1\, dv_1 + \int_2 \frac{d\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2}\delta\rho_2\, dv_2 \\ & + \int_{S_1} \varphi_1(\rho_1)\varepsilon_1\, dS_1 + \int_{S_2} \varphi_2(\rho_2)\varepsilon_2\, dS_2 \\ & + \int_{S_1} [\varphi_1(\rho_1)\varepsilon_1 + \varphi_2(\rho_2)\varepsilon_2]\, dS_{12}. \end{aligned}\right. \tag{24}$$

Si donc on admet les deux hypothèses indiquées dans le présent paragraphe, on voit que *le système admet un potentiel thermodynamique total;* ce potentiel a pour expression, en vertu des égalités (1), (20 *bis*) et (22),

$$\left\{\begin{aligned} \Phi & = \mathfrak{F} + W + W' \\ & = \int_1 [\varphi_1(\rho_1) + V\rho_1 + P_0]\, dv_1 + \int_2 [\varphi_2(\rho_2) + V\rho_2 + P_0]\, dv_2. \end{aligned}\right. \tag{25}$$

Dans une modification infiniment petite du fluide, cette quantité Φ éprouve une variation $\delta\Phi$, qui a pour valeur, d'après les égalités (24), (21 *bis*) et (23),

$$
(26)\quad \left\{
\begin{aligned}
\delta\Phi = &\int_1 \left[\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1} + \mathrm{V}\right]\delta\rho_1\, dv_1 + \int_2 \left[\frac{d\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2} + \mathrm{V}\right]\delta\rho_2\, dv_2 \\
&+ \int_{\mathrm{S}_1} [\varphi_1(\rho_1) + \mathrm{V}\rho_1 + \mathrm{P}_0]\varepsilon_1\, d\mathrm{S}_1 \\
&+ \int_{\mathrm{S}_2} [\varphi_2(\rho_2) + \mathrm{V}\rho_2 + \mathrm{P}_0]\varepsilon_2\, d\mathrm{S}_2 \\
&+ \int_{\mathrm{S}_{12}} \big\{[\varphi_1(\rho_1) + \mathrm{V}\rho_1]\varepsilon_1 + [\varphi_2(\rho_2) + \mathrm{V}\rho_2]\varepsilon_2\big\}\, d\mathrm{S}_{12}.
\end{aligned}
\right.
$$

On remarquera que cette formule, très générale, ne suppose pas que le système fluide auquel on l'applique soit en équilibre.

§ III. — *Variation seconde du potentiel thermodynamique.*

Une variation infiniment petite des variables indépendantes dont dépend l'état du système a fait subir au potentiel thermodynamique une variation $\delta\Phi$, donnée par l'égalité (26); donnons, de nouveau, la même variation aux variables indépendantes et cherchons la variation $\delta^2\Phi$ que subit la quantité $\delta\Phi$.

La variation de la quantité $\int_1 \left[\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1} + \mathrm{V}\right]\delta\rho_1\, dv_1$ est aisée à former. Nous avons évidemment

$$
(27)\quad \left\{
\begin{aligned}
\delta\int_1 \left[\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1} + \mathrm{V}\right]\delta\rho_1\, dv_1 = &\int_1 \frac{d^2\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1^2}(\delta\rho_1)^2\, dv_1 \\
&+ \int_1 \left[\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1} + \mathrm{V}\right]\delta^2\rho_1\, dv_1 \\
&+ \int_{\mathrm{S}_1} \left[\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1} + \mathrm{V}\right]\delta\rho_1\varepsilon_1\, d\mathrm{S}_1 \\
&+ \int_{\mathrm{S}_{12}} \left[\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1} + \mathrm{V}\right]\delta\rho_1\varepsilon_1\, d\mathrm{S}_{12}.
\end{aligned}
\right.
$$

La variation de la quantité $\int_2 \left[\frac{d\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2} + V\right] \delta\rho_2 \, dv_2$ s'exprime d'une manière analogue.

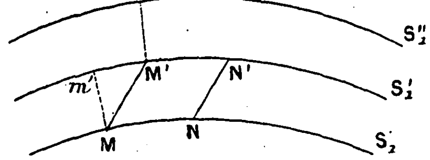
Le calcul de la quantité

$$\delta \int_{S_1} [\varphi_1(\rho_1) + V\rho_1 + P_0] \varepsilon_1 \, dS_1$$

nécessite quelques explications plus détaillées.

S_1 (*fig.* 1) est la position initiale de la surface S_1; S'_1 sa position

Fig. 1.



après la première variation; S''_1 sa position après la seconde variation.

Faisons correspondre, *suivant une loi quelconque*, un point M' de la surface S'_1 à chaque point M de la surface S_1, cette loi étant seulement assujettie à faire correspondre des points infiniment voisins à des points infiniment voisins.

Ce mode de correspondance fait correspondre à l'élément superficiel $MN = dS_1$ l'élément superficiel $M'N' = dS'_1$.

Pour calculer la nouvelle valeur prise par l'intégrale

$$\int_{S_1} [\varphi_1(\rho_1) + V\rho_1 + P_0] \varepsilon_1 \, dS_1,$$

il faut substituer à $[\varphi_1(\rho_1) + V\rho_1]$ la valeur $[\varphi_1(\rho'_1) + V\rho'_1]$ que prend la même quantité non plus au point M, au commencement de la première modification, mais au point M', au commencement de la deuxième modification; à la distance normale $\varepsilon_1 = Mm'$ du point M à la surface S'_1 la distance normale $\varepsilon'_1 = M'm''$ du point M' à la surface S''_1; à l'élément dS_1, l'élément dS'_1; enfin intégrer non plus pour la surface S_1, mais pour la surface S'_1. La nouvelle valeur de notre intégrale sera donc

$$\int_{S'_1} [\varphi_1(\rho'_1) + V'\rho'_1 + P_0] \varepsilon'_1 \, dS'_1,$$

et la variation cherchée aura pour valeur

$$\begin{aligned}
&\delta \int [\varphi_1(\rho_1) + V\rho_1 + P_0]\varepsilon_1 dS_1 \\
= &\int_{S_1} [\varphi_1(\rho'_1) - \varphi_1(\rho_1) + V(\rho'_1 - \rho_1) + \rho_1(V' - V)]\varepsilon_1 dS_1 \\
&+ \int_{S_1} [\varphi_1(\rho_1) + V\rho_1 + P_0](\varepsilon'_1 - \varepsilon_1) dS_1 \\
&+ \int_{S_1} [\varphi_1(\rho_1) + V\rho_1 + P_0]\varepsilon_1 (dS'_1 - dS_1).
\end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned}
\rho'_1 - \rho_1 &= D\rho_1, \\
V' - V &= DV, \\
\varepsilon'_1 - \varepsilon_1 &= D\varepsilon_1, \\
dS'_1 - dS_1 &= D\, dS'_1
\end{aligned}$$

et nous aurons

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned}
&\delta \int_{S_1} [\varphi_1(\rho_1) + V\rho_1 + P_0]\varepsilon_1 dS_1 \\
= &\int_{S_1} \left[\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1} + V\right] D\rho_1\, \varepsilon_1 dS_1 + \int_{S_1} \rho_1 DV \varepsilon_1 dS_1 \\
&+ \int_{S_1} [\varphi_1(\rho_1) + V\rho_1 + P_0] D\varepsilon_1 dS_1 \\
&+ \int_{S_1} [\varphi_1(\rho_1) + V\rho_1 + P_0]\varepsilon_1 D\, dS_1.
\end{aligned}\right.$$

Soient Dx, Dy, Dz les composantes du segment MM'; nous aurons

$$(29)\qquad DV = \frac{\partial V}{\partial x} Dx + \frac{\partial V}{\partial y} Dy + \frac{\partial V}{\partial z} Dz.$$

Si ρ_1 est la densité, au point M, au commencement de la première modification, la densité au même point et au commencement de la deuxième modification est $(\rho_1 + \delta\rho_1)$; la densité au point M' et au commencement de la deuxième modification est alors

$$\rho_1 + D\rho_1 = \rho_1 + \delta\rho_1 + \frac{\partial(\rho_1+\delta\rho_1)}{\partial x}Dx + \frac{\partial(\rho_1+\delta\rho_1)}{\partial y}Dy + \frac{\partial(\rho_1+\delta\rho_1)}{\partial z}Dz.$$

On a donc, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur,

$$D\rho_1 = \delta\rho_1 + \frac{\partial\rho_1}{\partial x}Dx + \frac{\partial\rho_1}{\partial y}Dy + \frac{\partial\rho_1}{\partial z}Dz. \tag{30}$$

En vertu des égalités (29) et (30), l'égalité (28) devient

$$\left\{\begin{aligned}
&\delta\int_{S_1}[\varphi_1(\rho_1)+V\rho_1+P_0]\varepsilon_1 dS_1\\
&= \int_{S_1}\left[\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1}+V\right]\delta\rho_1\varepsilon_1 dS_1\\
&+\int_{S_1}\Bigg\{\quad\left[\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1}\frac{\partial\rho_1}{\partial x}+V\frac{\partial\rho_1}{\partial x}+\rho_1\frac{\partial V}{\partial x}\right]Dx\\
&\qquad\qquad+\left[\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1}\frac{\partial\rho_1}{\partial y}+V\frac{\partial\rho_1}{\partial y}+\rho_1\frac{\partial V}{\partial y}\right]Dy\\
&\qquad\qquad+\left[\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1}\frac{\partial\rho_1}{\partial z}+V\frac{\partial\rho_1}{\partial z}+\rho_1\frac{\partial V}{\partial z}\right]Dz\Bigg\}\varepsilon_1 dS_1\\
&+\int_{S_1}[\varphi_1(\rho_1)+V\rho_1+P_0]D(\varepsilon_1 dS_1).
\end{aligned}\right. \tag{31}$$

Les quantités

$$\delta\int_{S_2}[\varphi_2(\rho_2)+V\rho_2+P_0]\varepsilon_2 dS_2,$$

$$\delta\int_{S_{12}}\{[\varphi_1(\rho_1)+V\rho_1]\varepsilon_1+[\varphi_2(\rho_2)+V\rho_2]\varepsilon_2\}dS_{12}$$

se calculent d'une manière analogue.

Nous avons laissé entièrement quelconque la loi de correspondance établie entre un point $M(x, y, z)$ de la surface primitive et un point $M'(x + Dx, y + Dy, z + Dz)$ de la surface déformée; nous avons supposé que cette loi faisait toujours correspondre deux points infiniment voisins M′, N′ de la surface déformée à deux points infiniment voisins, M, N, de la surface primitive. *Dans certains cas, il est commode de faire correspondre au point géométrique* M, *où se trouvait un certain point matériel du fluide au début de la première modification, le point géométrique* M′ *où se trouve le même point matériel à la fin de la première modification;* on a alors

$$(32) \qquad Dx = \delta x, \qquad Dy = \delta y, \qquad Dz = \delta z,$$

δx, δy, δz étant les composantes du déplacement virtuel du fluide au point M. Lorsque nous adopterons ce mode particulier de correspondance, nous conviendrons d'écrire $\delta\varepsilon$, $\delta\, dS$, au lieu de $D\varepsilon$, $D\, dS$. Il ne faut pas oublier que *l'adoption de ce mode de correspondance n'est nullement obligatoire;* dans certains cas, il est plus commode d'en adopter un autre.

§ IV. — *Expression de la variation seconde dans le cas où le système est en équilibre.*

Les résultats précédents nous permettent d'écrire la forme générale de $\delta^2\Phi$. Il nous sera utile, pour les développements qui vont suivre, de chercher l'expression de $\delta^2\Phi$ dans le cas particulier où l'état initial du système est un état d'équilibre.

Pour cela, il nous faudra introduire dans l'expression de $\delta^2\Phi$ les simplifications qui résultent des conditions d'équilibre données au § I. Mais ces simplifications se trouveront indiquées d'une manière toute naturelle si nous donnons aux conditions d'équilibre la forme que l'on obtient en exprimant que l'on doit avoir

$$(33) \qquad \delta\Phi = 0,$$

pour toute modification virtuelle du système.

Si l'on observe que l'on a, en tout point de la surface S_{12},

$$(34) \qquad \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 0,$$

l'égalité (33) pourra s'écrire, en vertu de l'égalité (26),

$$(35)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_1 \left[\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1} + V\right] \delta\rho_1\, dv_1 + \int_2 \left[\frac{d\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2} + V\right] \delta\rho_2\, dv_2 \\ \displaystyle + \int_{S_1} [\varphi_1(\rho_1) + V\rho_1 + P_0]\varepsilon_1\, dS_1 + \int_{S_2} [\varphi_2(\rho_2) + V\rho_2 + P_0]\varepsilon_2\, dS_2 \\ \displaystyle + \int_{S_{12}} [\varphi_1(\rho_1) + V\rho_1 - \varphi_2(\rho_2) - V\rho_2]\varepsilon_1\, dS_{12} = 0. \end{cases}$$

Cette égalité (35) ne doit pas avoir lieu identiquement; elle doit avoir lieu seulement pour les modifications virtuelles qui laissent invariable la masse de chacun des corps 1 et 2. Ces conditions s'expriment par les égalités

$$\delta\int_1 \rho_1\, dv_1 = 0, \qquad \delta\int_2 \rho_2\, dv_2 = 0,$$

qui peuvent encore s'écrire

$$(36)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_1 \delta\rho_1\, dv_1 + \int_{S_1} \rho_1 \varepsilon_1\, dS_1 + \int_{S_{12}} \rho_1 \varepsilon_1\, dS_{12} = 0, \\ \displaystyle\int_{S_1} \delta\rho_2\, dv_2 + \int_2 \rho_2 \varepsilon_2\, dS_2 + \int_{S_{12}} \rho_2 \varepsilon_2\, dS_{12} = 0. \end{cases}$$

L'égalité (35) devant avoir lieu toutes les fois que les égalités (34) et (36) ont lieu, il doit exister deux constantes C_1 et C_2, telles que l'on ait

$$(37)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_1 \left[\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1} + V + C_1\right] \delta\rho_1\, dv + \int_2 \left[\frac{d\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2} + V + C_2\right] \delta\rho_2\, dv_2 \\ \displaystyle + \int_{S_1} [\varphi_1(\rho_1) + V\rho_1 + P_0 + C_1\rho_1]\varepsilon_1\, dS_1 \\ \displaystyle + \int_{S_2} [\varphi_2(\rho_2) + V\rho_2 + P_0 + C_2\rho_2]\varepsilon_2\, dS_2 \\ \displaystyle + \int_{S_{12}} [\varphi_1(\rho_1) + V\rho_1 - C_1\rho_1 - \varphi_2(\rho_2) - V\rho_2 - C_2\rho_2]\varepsilon_1\, dS_{12} = 0, \end{cases}$$

quelles que soient les quantités $\delta\rho_1$, $\delta\rho_2$, ε_1, ε_2.

Par conséquent, *on doit avoir, en désignant par* C_1 *et* C_2 *deux constantes :*

1° *En tout point du fluide* 1,

$$\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1} + V + C_1 = 0, \tag{38}$$

et, en tout point du fluide 2,

$$\frac{d\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2} + V + C_2 = 0; \tag{38 bis}$$

2° *En tout point de la surface* S_1,

$$\varphi_1(\rho_1) + (V + C_1)\rho_1 + P_0 = 0, \tag{39}$$

et, en tout point de la surface S_2,

$$\varphi_2(\rho_2) + (V + C_2)\rho_2 + P_0 = 0; \tag{39 bis}$$

3° *En tout point de la surface* S_{12},

$$\varphi_1(\rho_1) + (V + C_1)\rho_1 = \varphi_2(\rho_2) + (V + C_2)\rho_2. \tag{40}$$

Avant de faire usage de ces conditions d'équilibre, assurons-nous qu'elles résultent des conditions posées au § I.

Les égalités (2) nous donnent, en tout point du fluide 1,

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{\rho_1}\frac{\partial \Pi_1}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{1}{\rho_1}\frac{\partial \Pi_1}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{1}{\rho_1}\frac{\partial \Pi_1}{\partial z} &= 0. \end{aligned}$$

D'autre part, l'égalité (3) nous donne

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_1}{\partial x} - \rho_1\frac{d^2\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1^2}\frac{\partial \rho_1}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \Pi_1}{\partial y} - \rho_1\frac{d^2\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1^2}\frac{\partial \rho_1}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \Pi_1}{\partial z} - \rho_1\frac{d^2\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1^2}\frac{\partial \rho_1}{\partial z} &= 0. \end{aligned}$$

Ces égalités nous montrent que l'on a, en tout point du fluide 1,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1}+V\right]=0,$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1}+V\right]=0,$$
$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1}+V\right]=0$$

et, par conséquent,

$$\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1}+V+C_1=0, \tag{38}$$

C_1 étant une constante. L'égalité (38 *bis*) se déduit de même des égalités (2 *bis*) et (3 *bis*).

Les égalités (3) et (38) donnent, en tout point du fluide 1,

$$\varphi_1(\rho_1)+(V+C_1)\rho_1+\Pi_1=0. \tag{41}$$

Les égalités (3 *bis*) et (38 *bis*) donnent, en tout point du fluide 2,

$$\varphi_2(\rho_2)+(V+C_2)\rho_2+\Pi_2=0. \tag{41 bis}$$

Observons que l'on a, en tout point de la surface S_1, $\Pi_1=P_0$; en tout point de la surface S_2, $\Pi_2=P_0$; enfin, en tout point de la surface S_{12}, $\Pi_1=\Pi_2$, et nous verrons sans peine que les égalités (41) et (41 *bis*) donnent les égalités (39), (39 *bis*) et (40).

Revenons maintenant aux égalités (38), (38 *bis*), (39), (39 *bis*) et (40), et voyons quelles simplifications subit l'expression de $\delta^2\Phi$ lorsqu'on les suppose vérifiées.

Les modifications virtuelles auxquelles se rapporte la variation seconde $\delta^2\Phi$ ne sont pas quelconques; elles laissent constante la masse de chacun des deux fluides 1 et 2, en sorte qu'elles sont assujetties aux égalités

$$\delta\int_1 \rho_1\,dv_1=0,\qquad \delta\int_2 \rho_2\,dv_2=0,$$
$$\delta^2\int_1 \rho_1\,dv_1=0,\qquad \delta^2\int_2 \rho_2\,dv_2=0.$$

Les deux premières égalités équivalent, nous l'avons vu, aux égalités (36); quant aux deux dernières, elles peuvent se transformer par un raisonnement semblable à celui qui fait connaître $\delta^2\Phi$; elles prennent alors la forme suivante :

$$(42)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_1 \delta^2\rho_1\,dv_1 + 2\int_{S_1}\delta\rho_1\varepsilon_1\,dS_1 + 2\int_{S_{12}}\delta\rho_1\varepsilon_1\,dS_{12} \\ &+\int_{S_1}\left(\frac{\partial\rho_1}{\partial x}Dx + \frac{\partial\rho_1}{\partial y}Dy + \frac{\partial\rho_1}{\partial z}Dz\right)\varepsilon_1\,dS_1 \\ &+\int_{S_{12}}\left(\frac{\partial\rho_1}{\partial x}Dx + \frac{\partial\rho_1}{\partial y}Dy + \frac{\partial\rho_1}{\partial z}Dz\right)\varepsilon_1\,dS_{12} \\ &+\int_{S_1}\rho_1\,D(\varepsilon_1\,dS_1) + \int_{S_{12}}\rho_1\,D(\varepsilon_1\,dS_{12}) = 0, \end{aligned}\right.$$

$$(42\,bis)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_2 \delta^2\rho_2\,dv_2 + 2\int_{S_2}\delta\rho_2\varepsilon_2\,dS_2 + 2\int_{S_{12}}\delta\rho_2\varepsilon_2\,dS_{12} \\ &+\int_{S_2}\left(\frac{\partial\rho_2}{\partial x}Dx + \frac{\partial\rho_2}{\partial y}Dy + \frac{\partial\rho_2}{\partial z}Dz\right)\varepsilon_2\,dS_2 \\ &+\int_{S_{12}}\left(\frac{\partial\rho_2}{\partial x}Dx + \frac{\partial\rho_2}{\partial y}Dy + \frac{\partial\rho_2}{\partial z}Dz\right)\varepsilon_2\,dS_{12} \\ &+\int_{S_2}\rho_2\,D(\varepsilon_2\,dS_2) + \int_{S_{12}}\rho_2\,D(\varepsilon_2\,dS_{12}) = 0. \end{aligned}\right.$$

Considérons maintenant l'expression de $\delta^2\Phi$. Par un groupement convenable des termes qui la composent, elle peut s'écrire

$$(43)\quad \left\{\begin{aligned} \delta^2\Phi = &\int_1 \frac{d^2\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1}(\delta\rho_1)^2\,dv_1 + \int_1\left[\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1} + V\right]\delta^2\rho_1\,dv_1 \\ &+\int_{S_1}\left[\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1} + V\right]\left(2\,\delta\rho_1 + \frac{\partial\rho_1}{\partial x}Dx + \frac{\partial\rho_1}{\partial y}Dy + \frac{\partial\rho_1}{\partial z}Dz\right)\varepsilon_1\,dS_1 \\ &+\int_{S_{12}}\left[\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1} + V\right]\left(2\,\delta\rho_1 + \frac{\partial\rho_1}{\partial x}Dx + \frac{\partial\rho_1}{\partial y}Dy + \frac{\partial\rho_1}{\partial z}Dz\right)\varepsilon_1\,dS_{12} \\ &+\int_{S_1}[\varphi_1(\rho_1) + V\rho_1 + P_0]\,D(\varepsilon_1\,dS_1) \\ &+\int_{S_{12}}[\varphi_1(\rho_1) + V\rho_1]\,D(\varepsilon_1\,dS_{12}) \\ &+\int_{S_1}\rho_1\left(\frac{\partial V}{\partial x}Dx + \frac{\partial V}{\partial y}Dy + \frac{\partial V}{\partial z}Dz\right)\varepsilon_1\,dS_1 \\ &+\int_{S_{12}}\rho_1\left(\frac{\partial V}{\partial x}Dx + \frac{\partial V}{\partial y}Dy + \frac{\partial V}{\partial z}Dz\right)\varepsilon_1\,dS_{12} + \ldots, \end{aligned}\right.$$

le signe : ... désignant des termes de même forme que ceux qui sont écrits, mais où l'indice 2 remplace l'indice 1.

En vertu des égalités (34), (38), (38 *bis*), (39), (39 *bis*) et (40), l'égalité (43) peut s'écrire

$$(44)\quad \left\{\begin{aligned}
\delta^2\Phi = &\int_1 \frac{d^2\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1^2}(\delta\rho_1)^2\,dv_1\\
&+\int_{S_1}\rho_1\left(\frac{\partial V}{\partial x}Dx+\frac{\partial V}{\partial y}Dy+\frac{\partial V}{\partial z}Dz\right)\varepsilon_1\,dS_1\\
&+\int_{S_{12}}\rho_1\left(\frac{\partial V}{\partial x}Dx+\frac{\partial V}{\partial y}Dy+\frac{\partial V}{\partial z}Dz\right)\varepsilon_1\,dS_{12}\\
&+C_1\left[\int_1 \delta^2\rho_1\,dv_1\right.\\
&\qquad+\int_{S_1}\left(2\,\delta\rho_1+\frac{\partial\rho_1}{\partial x}Dx+\frac{\partial\rho_1}{\partial y}Dy+\frac{\partial\rho_1}{\partial z}Dz\right)\varepsilon_1\,dS_1\\
&\qquad+\int_{S_{12}}\left(2\,\delta\rho_1+\frac{\partial\rho_1}{\partial x}Dx+\frac{\partial\rho_1}{\partial y}Dy+\frac{\partial\rho_1}{\partial z}Dz\right)\varepsilon_1\,dS_{12}\\
&\qquad\qquad\left.+\int_{S_1}\rho_1\,D(\varepsilon_1\,dS_1)+\int_{S_{12}}\rho_1\,D(\varepsilon_1\,dS_{12})\right]+\ldots.
\end{aligned}\right.$$

En chaque point de la surface S_{12} on peut attribuer à Dx, Dy, Dz la même valeur dans l'expression

$$\rho_1\left(\frac{\partial V}{\partial x}Dx+\frac{\partial V}{\partial y}Dy+\frac{\partial V}{\partial z}Dz\right)\varepsilon_1\,dS_{12},$$

et dans l'expression

$$\rho_2\left(\frac{\partial V}{\partial x}Dx+\frac{\partial V}{\partial y}Dy+\frac{\partial V}{\partial z}Dz\right)\varepsilon_2\,dS_{12}.$$

Dès lors, en vertu des égalités (34), (42) et (42 *bis*), l'égalité (44) devient

$$(45)\quad \left\{\begin{aligned}
\delta^2\Phi = &\int_1 \frac{d^2\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1^2}(\delta\rho_1)^2\,dv_1+\int_2 \frac{d^2\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2^2}(\delta\rho_2)^2\,dv_2\\
&\qquad+\int_{S_1}\rho_1\left(\frac{\partial V}{\partial x}Dx+\frac{\partial V}{\partial y}Dy+\frac{\partial V}{\partial z}Dz\right)\varepsilon_1\,dS_1\\
&\qquad+\int_{S_2}\rho_2\left(\frac{\partial V}{\partial x}Dx+\frac{\partial V}{\partial y}Dy+\frac{\partial V}{\partial z}Dz\right)\varepsilon_2\,dS_2\\
&+\int_{S_{12}}(\rho_1-\rho_2)\left(\frac{\partial V}{\partial x}Dx+\frac{\partial V}{\partial y}Dy+\frac{\partial V}{\partial z}Dz\right)\varepsilon_1\,dS_{12}.
\end{aligned}\right.$$

Telle est la forme très simple que prend la *variation seconde du potentiel thermodynamique d'un système composé de deux fluides, soumis à une pression constante, dans le cas où l'état initial est un état d'équilibre.*

§ V. — *Stabilité de l'équilibre d'un fluide dont les masses élémentaires ne sont sollicitées par aucune force.*

Imaginons tout d'abord que les divers éléments de masse qui composent le système ne soient soumis à aucune force extérieure; la seule force extérieure qui agisse sur le système est la pression P_0, appliquée à la surface libre.

Dans ce cas, la fonction V se réduit à une constante; l'égalité (38) nous apprend alors que la densité ρ_1 a la même valeur en tous les points du fluide 1 et l'égalité (41) nous enseigne qu'il en est de même de la pression Π_1; les égalités (38 *bis*) et (41 *bis*) entraînent également la constance des quantités ρ_2 et Π_2 à l'intérieur du fluide 2; *chacun des fluides que renferme le système en équilibre est homogène.*

La constance de la fonction V entraîne, en tout point du système, les égalités

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial z} = 0,$$

en sorte que l'égalité (45) se réduit à

$$\delta^2\Phi = \int_1 \frac{d^2\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1^2}(\delta\rho_1)^2\, dv_1 + \int_2 \frac{d^2\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2^2}(\delta\rho_2)^2\, dv_2.$$

Si l'on remarque que ρ_1 a la même valeur en tout point du fluide 1 et ρ_2 la même valeur en tout point du fluide 2, cette égalité peut encore s'écrire

$$(46) \qquad \delta^2\Phi = \frac{d^2\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1^2}\int_1 (\delta\rho_1)^2\, dv_1 + \frac{d^2\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2^2}\int_2 (\delta\rho_2)^2\, dv_2.$$

Il est des modifications pour lesquelles cette quantité $\delta^2\Phi$ est évidemment égale à 0; ce sont celles dans lesquelles chaque particule fluide qui se déplace est remplacée par une particule fluide de même densité; pour de semblables modifications, non seulement $\delta^2\Phi$ est égal à o, mais il en est de même de toutes les variations d'ordre supérieur de Φ, en sorte que, pour de semblables modifications, l'équilibre du système doit être regardé comme indifférent; cette proposition est une conséquence immédiate et évidente de la définition du mot *fluide*.

Excluons ces modifications particulières et cherchons à quelles conditions l'équilibre du système sera stable pour toutes les autres modifications; la condition cherchée s'obtiendra en exprimant que, pour toutes ces modifications, la quantité $\delta^2\Phi$ est positive, ce qui donnera, en vertu de l'égalité (46),

$$(47) \qquad \frac{d^2\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1^2}\int_1 (\delta\rho_1)^2\, dv_1 + \frac{d^2\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2^2}\int_2 (\delta\rho_2)^2\, dv_2 > o.$$

Les variations $\delta\rho_1$, $\delta\rho_2$ sont seulement assujetties aux conditions (36), qui les laissent entièrement arbitraires. La condition (47) équivaut donc aux deux conditions

$$(48) \qquad \frac{d^2\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1^2} > o, \qquad \frac{d^2\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2^2} > o.$$

Telles sont les conditions qui expriment que le système est en équilibre stable sous l'action d'une pression uniforme et constante.

Nous admettrons que l'équilibre d'un système fluide, soumis uniquement à l'action d'une pression uniforme et constante, est toujours un équilibre stable; *nous admettrons*, par conséquent, *que les inégalités* (48) *sont toujours vérifiées par tous les fluides.*

Interprétons ces inégalités.

La densité ρ_1 que prend le fluide 1 soumis exclusivement à une pression uniforme P_0 est donnée par l'égalité (3), où Π_1 prend la valeur P_0, c'est-à-dire par l'égalité

$$(49) \qquad \varphi_1(\rho_1) - \rho_1 \frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1} + P_0 = o.$$

Sous la pression uniforme $(P_0 + dP_0)$, à la même température, le fluide 1 prend une densité $(\rho_1 + d\rho_1)$; l'équation qui lie $d\rho_1$ à dP_0, obtenue en différentiant l'égalité (49), est

$$\rho_1 \frac{d^2\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1^2} d\rho_1 = dP_0.$$

La première inégalité (48) nous apprend donc simplement que $d\rho_1$ est de même signe que dP_0. Ainsi, *l'hypothèse que nous avons admise revient à supposer que, dans tout fluide soumis exclusivement à une pression uniforme, un accroissement de cette pression détermine un accroissement de la densité.*

§ VI. — *Stabilité de l'équilibre d'un système fluide terminé par des surfaces libres.*

Revenons au cas général auquel se rapporte l'égalité (45).

Nous avons vu que, dans ce cas, chacune des surfaces S_1, S_2, S_{12} était une surface de niveau.

De ce fait que la surface S_1 est une surface de niveau, il résulte que l'on peut, en désignant par n_i la normale à la surface S_1, dirigée vers l'intérieur du fluide 1, écrire

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial n_i} \cos(n_i, x),$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial n_i} \cos(n_i, y),$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial V}{\partial n_i} \cos(n_i, z).$$

On a donc

$$\frac{\partial V}{\partial x} Dx + \frac{\partial V}{\partial y} Dy + \frac{\partial V}{\partial z} Dz$$
$$= \frac{\partial V}{\partial n_i} [\cos(n_i, x) Dx + \cos(n_i, y) Dy + \cos(n_i, z) Dz].$$

Mais, d'autre part, on a évidemment

$$\varepsilon_1 = -[\cos(n_i, x) Dx + \cos(n_i, y) Dy + \cos(n_i, z) Dz].$$

Par conséquent, on a

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x} Dx + \frac{\partial V}{\partial y} Dy + \frac{\partial V}{\partial z} Dz\right) \varepsilon_1 = - \frac{\partial V}{\partial n_i} \varepsilon_1^2.$$

Cette remarque et deux autres remarques analogues permettent de transformer l'égalité (45) en

$$(50) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta^2 \Phi = & \int_1 \frac{d^2 \varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1^2} (\delta\rho_1)^2 \, dv_1 + \int_2 \frac{d^2 \varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2^2} (\delta\rho_2)^2 \, dv_2 \\ & - \int_{S_1} \rho_1 \frac{\partial V}{\partial n_i} \varepsilon_1^2 \, dS_1 - \int_{S_2} \rho_2 \frac{\partial V}{\partial n_i} \varepsilon_2^2 \, dS_2 \\ & - \int_{S_{12}} (\rho_2 - \rho_1) \frac{\partial V}{\partial n_2} \varepsilon_1^2 \, dS_{12}, \end{aligned} \right.$$

n_2 étant la normale à la surface S_{12} vers l'intérieur du fluide 2.

Il existe évidemment des modifications du système dans lesquelles cette variation est égale à o : ce sont celles où le liquide se meut de telle manière que chacune des trois surfaces S_1, S_2, S_{12} demeure invariable et que chaque particule fluide déplacée soit remplacée par une particule de même densité. De pareilles modifications annulent non seulement $\delta^2\Phi$, mais encore toutes les variations d'ordre supérieur de Φ; on doit regarder l'équilibre du système comme indifférent à de semblables modifications; en fait, elles ne font varier aucun des paramètres qui, par hypothèse, suffisent à déterminer l'état du système.

Laissons de côté ces modifications particulières et cherchons la condition de stabilité du système pour toutes les autres modifications; cette condition s'obtiendra en exprimant que la quantité $\delta^2\Phi$ est positive pour toutes ces modifications; elle s'écrira, en vertu de l'égalité (50),

$$(51) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int_1 \frac{d^2 \varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1^2} (\delta\rho_1)^2 \, dv_1 + \int_2 \frac{d^2 \varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2^2} (\delta\rho_2)^2 \, dv_2 \\ & \quad - \int_{S_1} \rho_1 \frac{\partial V}{\partial n_i} \varepsilon_1^2 \, dS_1 - \int_{S_2} \rho_2 \frac{\partial V}{\partial n_i} \varepsilon_2^2 \, dS_2 \\ & \qquad - \int_{S_{12}} (\rho_2 - \rho_1) \frac{\partial V}{\partial n_2} \varepsilon_1^2 \, dS_{12} > 0. \end{aligned} \right.$$

Si nous admettons l'exactitude de l'hypothèse énoncée au paragraphe précédent, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Pour que l'équilibre d'un système de fluides terminés par des surfaces libres soit un équilibre stable, il faut et il suffit que l'on ait :

1° *En tout point des surfaces libres* S_1, S_2,

$$\frac{\partial V}{\partial n_i} \leqq 0; \tag{52}$$

2° *En tout point de la surface de contact* S_{12} *de deux fluides* 1 *et* 2,

$$(\rho_2 - \rho_1) \frac{\partial V}{\partial n_2} \leqq 0. \tag{53}$$

Dans ces deux conditions, l'égalité n'a jamais lieu pour tous les points d'une région d'étendue finie de la surface.

Que ces conditions suffisent à assurer l'inégalité (51), cela est bien évident; mais qu'elles soient nécessaires pour que cette égalité soit vérifiée, cela s'aperçoit moins aisément, car les quantités $\delta\rho_1$, $\delta\rho_2$, ε_1, ε_2 ne sont pas arbitraires, mais soumises aux conditions (36); une démonstration est donc ici nécessaire; démontrons, par exemple, qu'en tout point de la surface S_1, on a nécessairement

$$\frac{\partial V}{\partial n_i} \leqq 0, \tag{52 bis}$$

l'égalité n'ayant pas lieu en tous les points d'une région d'étendue finie prise sur la surface S_1; la nécessité des deux autres conditions s'établirait d'une manière analogue.

La condition (52 *bis*) ne peut être en défaut que de deux manières; ou bien $\frac{\partial V}{\partial n_i}$ est égal à 0 en tous les points d'un domaine d'étendue finie tracé sur la surface S_1; ou bien $\frac{\partial V}{\partial n_i}$ est positif au moins en un point de la surface S_1; dans ce dernier cas, on pourrait, autour du point où $\frac{\partial V}{\partial n_i}$ est positif, tracer un domaine d'étendue finie où, par raison de continuité, $\frac{\partial V}{\partial n_i}$ serait également positif; donc, si la condition (52 *bis*) était en défaut, on pourrait assurément tracer, sur la surface S_1, un domaine D, d'étendue finie, en tout point duquel la quantité $\frac{\partial V}{\partial n_i}$ serait nulle ou positive.

Cela posé, imaginons qu'on laisse immobiles le fluide 2 et les surfaces S_2, S_{12} qui le limitent; qu'on laisse également invariable la partie de la surface S_1 qui est extérieure au domaine D; qu'on déplace le fluide 1 de telle manière que le liquide qui remplissait un élément de volume fixe dans l'espace soit remplacé par un liquide de même densité; que l'on donne enfin, aux divers points du domaine D, des déplacements tels que

$$\int_D \varepsilon_1 \, dS_1 = 0.$$

Si l'on observe que la densité ρ_1 a la même valeur en tous les points du domaine D, qui appartient à une surface libre et partant à une surface de niveau, on verra sans peine que les égalités (36) sont vérifiées et, par conséquent, que la modification considérée est une modification virtuelle du système.

Or, pour une semblable modification, le premier membre de l'inégalité (51) se réduit à

$$-\int_D \rho_1 \frac{\partial V}{\partial n_i} \varepsilon_1^2 \, dS_1,$$

et, contrairement à l'inégalité (51), ce premier membre serait nul ou négatif si la condition (52 *bis*) n'était pas vérifiée. Cette condition (52 *bis*) est donc nécessairement vérifiée.

Maintenant que nous avons, en (52) et (53), les conditions générales de la stabilité de l'équilibre, cherchons à interpréter ces conditions.

La surface libre S_1 est une surface de niveau; la force (X, Y, Z) en un point de cette surface est normale à cette surface; pour que $\frac{\partial V}{\partial n_i}$ soit négatif, il faut et il suffit que la force soit dirigée vers l'intérieur du fluide 1; la condition (52) peut donc s'énoncer ainsi :

La force extérieure ne doit pas être nulle en tous les points d'une région d'étendue finie prise sur une surface libre; en tout point d'une telle surface où elle n'est pas nulle, elle doit être dirigée vers l'intérieur du fluide.

De même, la condition (53) peut s'énoncer ainsi :

La force extérieure ne doit pas être nulle en tous les points d'une région d'étendue finie prise sur la surface de contact de deux fluides; en tout point d'une telle surface où elle n'est pas nulle, elle doit être dirigée vers l'intérieur du fluide le plus dense.

CHAPITRE II.

L'ÉQUILIBRE DES CORPS FLOTTANTS.

§ I. — *Théorèmes généraux sur l'équilibre des corps flottants.*

Imaginons un système formé de deux fluides 1 et 2, et d'un solide 3. Ce dernier sera supposé absolument invariable de forme et d'état. Nous supposerons le solide en contact avec le fluide 1 par une partie S_{13} de sa surface, et avec le fluide 2 par une autre partie S_{23} de sa surface. Le fluide sera soumis à deux sortes de forces extérieures : des forces appliquées à ses divers éléments de masse, et des pressions appliquées aux divers éléments de la surface qui le limite; au sujet de ces forces, nous admettrons les mêmes hypothèses, nous emploierons les mêmes notations qu'au Chapitre précédent; quant au corps solide, nous le supposerons soumis à des forces que nous réduirons à une force et à un couple; ξ, η, ζ seront les composantes de la force résultante suivant les trois axes de coordonnées et λ, μ, ν les composantes de l'axe du couple suivant les trois mêmes axes.

L'état du solide étant supposé rigoureusement invariable, la présence de ce corps introduit seulement, dans le potentiel thermodynamique interne, un terme constant que l'on peut négliger d'écrire; le potentiel thermodynamique interne sera donc encore donné par l'égalité (1) du Chapitre I.

Les conditions d'équilibre d'un pareil système, s'obtiendront en écrivant que, pour toute modification virtuelle du système, on a

$$\delta\mathfrak{F} - d\mathfrak{T}_e \geqq 0, \tag{1}$$

$\delta\mathfrak{F}$ étant la variation du potentiel thermodynamique interne dans la modification considérée et $d\mathfrak{T}_e$ le travail des forces extérieures.

Désignons par δx, δy, δz les composantes du déplacement imposé à un point matériel de l'un des deux fluides; par δf, δg, δh les trois translations suivant Ox, Oy, Oz et par δl, δm, δn les trois rotations autour de ces mêmes axes; le travail des forces extérieures appliquées au système aura pour expression

$$(2)\left\{\begin{aligned} d\mathfrak{T}_e = & \int_{S_1}[\mathrm{P}\cos(\mathrm{P},x)\,\delta x + \mathrm{P}\cos(\mathrm{P},y)\,\delta y + \mathrm{P}\cos(\mathrm{P},z)\,\delta z]\,dS_1 \\ & + \int_{S_2}[\mathrm{P}\cos(\mathrm{P},x)\,\delta x + \mathrm{P}\cos(\mathrm{P},y)\,\delta y + \mathrm{P}\cos(\mathrm{P},z)\,\delta z]\,dS_2 \\ & + \int_1 \rho_1(\mathrm{X}\,\delta x + \mathrm{Y}\,\delta y + \mathrm{Z}\,\delta z)\,dv_1 \\ & + \int_2 \rho_2(\mathrm{X}\,\delta x + \mathrm{Y}\,\delta y + \mathrm{Z}\,\delta z)\,dv_2 \\ & + \xi\,\delta f + \eta\,\delta g + \zeta\,\delta h + \lambda\,\delta l + \mu\,\delta m + \nu\,\delta n. \end{aligned}\right.$$

D'autre part, on aura

$$(3)\left\{\begin{aligned} \delta\mathfrak{F} = & \int_{S_1}\varphi_1(\rho_1)\varepsilon_1\,dS_1 + \int_{S_2}\varphi_2(\rho_2)\varepsilon_2\,dS_2 \\ & + \int_1 \frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1}\,\delta\rho_1\,dv_1 + \int_2 \frac{d\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2}\,\delta\rho_2\,dv_2. \end{aligned}\right.$$

Ces égalités (2) et (3) permettent de donner une forme explicite à l'égalité (1).

On peut supposer, en premier lieu, que le corps solide demeure immobile et que, seul, le fluide éprouve un déplacement virtuel. La considération de tels déplacements virtuels redonnera toutes les conditions énumérées au Chapitre I, § I.

En vertu de ces conditions, les inégalités et égalités (1), (2) et (3) donnent, pour toute transformation où le fluide ne se creuse pas de cavité,

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\xi\delta f + \eta\delta g + \zeta\delta h + \lambda\delta l + \mu\delta m + \nu\delta n \\ &\quad - \int_{S_{13}} \Pi_1 \Big[\cos(N,x)\delta x + \cos(N,y)\delta y + \cos(N,z)\delta z\Big] dS_{13}, \\ &\quad - \int_{S_{23}} \Pi_2 \Big[\cos(N,x)\delta x + \cos(N,y)\delta y + \cos(N,z)\delta z\Big] dS_{23} \leqq 0, \end{aligned}\right.$$

N étant la normale au point (x, y, z) de la surface du corps solide, dirigée vers l'extérieur de ce corps. D'ailleurs, comme toute modification où le fluide ne se creuse pas de cavité est une modification renversable, le signe d'inégalité peut être effacé.

Le fluide demeurant en contact avec le corps solide durant la modification considérée, si l'on désigne par Δx, Δy, Δz les composantes du déplacement du point matériel *appartenant au corps solide*, dont les coordonnées sont x, y, z, à l'instant t, on a, en tout point des surfaces S_{13} et S_{23},

$$\begin{aligned} &\cos(N,x)\,\delta x + \cos(N,y)\,\delta y + \cos(N,z)\,\delta z \\ &= \cos(N,x)\Delta x + \cos(N,y)\Delta y + \cos(N,z)\Delta z. \end{aligned}$$

On a, d'autre part,

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} \Delta x &= \delta f + z\delta m - y\delta n, \\ \Delta y &= \delta g + x\delta n - z\delta l, \\ \Delta z &= \delta h + y\delta l - x\delta m, \end{aligned}\right.$$

L'égalité (4) devient donc

$$
(6) \quad \left\{
\begin{aligned}
& \left[\xi - \int_{S_{13}} \Pi_1 \cos(N, x)\, dS_{13} - \int_{S_{23}} \Pi_2 \cos(N, x)\, dS_{23} \right] \delta f \\
+ & \left[\eta - \int_{S_{13}} \Pi_1 \cos(N, y)\, dS_{13} - \int_{S_{23}} \Pi_2 \cos(N, y)\, dS_{23} \right] \delta g \\
+ & \left[\zeta - \int_{S_{13}} \Pi_1 \cos(N, z)\, dS_{13} - \int_{S_{23}} \Pi_2 \cos(N, z)\, dS_{23} \right] \delta h \\
+ & \Big\{ \lambda - \int_{S_{13}} \Pi_1 [y \cos(N, z) - z \cos(N, y)]\, dS_{13} \\
& \qquad - \int_{S_{23}} \Pi_2 [y \cos(N, z) - z \cos(N, y)]\, dS_{23} \Big\} \delta l \\
+ & \Big\{ \mu - \int_{S_{13}} \Pi_1 [z \cos(N, x) - x \cos(N, z)]\, dS_{13} \\
& \qquad - \int_{S_{23}} \Pi_2 [z \cos(N, x) - x \cos(N, z)]\, dS_{23} \Big\} \delta m \\
+ & \Big\{ \nu - \int_{S_{13}} \Pi_1 [x \cos(N, y) - y \cos(N, x)]\, dS_{13} \\
& \qquad - \int_{S_{23}} \Pi_2 [x \cos(N, y) - y \cos(N, x)]\, dS_{23} \Big\} \delta n = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Cette égalité doit avoir lieu quels que soient δf, δg, δh, δl, δm, δn, en sorte que nous trouvons les conditions

$$
(7) \quad \left\{
\begin{aligned}
\xi &= \int_{S_{13}} \Pi_1 \cos(N, x)\, dS_{13} + \int_{S_{23}} \Pi_2 \cos(N, x)\, dS_{23} \\
\eta &= \int_{S_{13}} \Pi_1 \cos(N, y)\, dS_{13} + \int_{S_{23}} \Pi_2 \cos(N, y)\, dS_{23}, \\
\zeta &= \int_{S_{13}} \Pi_1 \cos(N, z)\, dS_{13} + \int_{S_{23}} \Pi_2 \cos(N, z)\, dS_{23}, \\
\lambda &= \int_{S_{13}} \Pi_1 [y \cos(N, z) - z \cos(N, y)]\, dS_{13} \\
& \quad + \int_{S_{23}} \Pi_2 [y \cos(N, z) - z \cos(N, y)]\, dS_{23},
\end{aligned}
\right.
$$

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} \mu = & \int_{S_{13}} \Pi_1 [z\cos(N,x) - x\cos(N,z)]\, dS_{13} \\ & + \int_{S_{23}} \Pi_2 [z\cos(N,x) - x\cos(N,z)]\, dS_{23}, \\ \nu = & \int_{S_{13}} \Pi_1 [x\cos(N,y) - y\cos(N,x)]\, dS_{13} \\ & + \int_{S_{23}} \Pi_2 [x\cos(N,y) - y\cos(N,x)]\, dS_{23}. \end{aligned}\right.$$

Telles sont les conditions qui, jointes aux équations de l'Hydrostatique, donnent les conditions d'équilibre d'un système de fluides qui porte un flotteur.

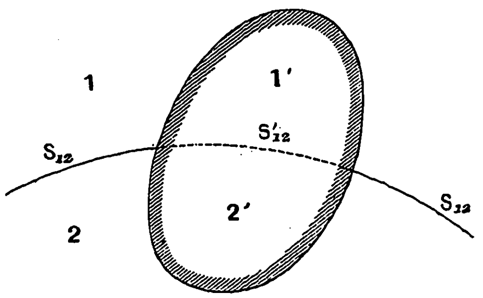
Ce que nous venons de dire est général.

Imaginons maintenant que les forces extérieures admettent une fonction potentielle V; que cette fonction soit uniforme, finie et continue en tous les points d'un espace renfermant non seulement les fluides, mais le corps solide.

La surface de séparation S_{12} des fluides 1 et 2 est une surface de niveau; la fonction V prend, en tous les points de cette surface, une même valeur A.

Le lieu des points, intérieurs au corps 3, où la fonction V prend la valeur A, forme une surface S'_{12}, connexe avec la surface S_{12} (*fig.* 2).

Fig. 2.



Cette surface S'_{12} sépare le corps 3 en deux régions; l'une, contiguë au fluide 1, que nous désignerons par 1'; l'autre, contiguë au fluide 2, que nous désignerons par 2'.

A l'intérieur du fluide 1, la densité ρ_1 et la pression Π_1 sont des fonctions bien déterminées de V :

$$\rho_1 = R_1(V), \tag{8}$$

$$\Pi_1 = P_1(V); \tag{9}$$

ces fonctions sont telles que l'on ait

$$\rho_1\, dV + d\Pi_1 = 0. \tag{10}$$

En chaque point de l'espace 1′, nous définirons les fonctions ρ_1 et Π_1 par les équations (8) et (9). Nous aurons donc encore, en tout point de l'espace 1′, l'égalité (10), qui peut s'écrire

$$\left\{\begin{aligned} &\rho_1 \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_1}{\partial x} = 0,\\ &\rho_1 \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial \Pi_1}{\partial y} = 0,\\ &\rho_1 \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial \Pi_1}{\partial z} = 0. \end{aligned}\right. \tag{11}$$

De même, à l'intérieur du fluide 2, la densité ρ_2 et la pression Π_2 sont deux fonctions bien déterminées de V :

$$\rho_2 = R_2(V), \tag{8 bis}$$

$$\Pi_2 = P_2(V). \tag{9 bis}$$

Ces fonctions sont telles que l'on ait

$$\rho_2\, dV_2 + d\Pi_2 = 0. \tag{10 bis}$$

En chaque point de l'espace 2′, nous définirons les fonctions ρ_2 et Π_2 par les équations (8 *bis*) et (9 *bis*). Nous aurons donc encore, en tout point de l'espace 2′, l'égalité (10 *bis*), qui peut s'écrire

$$\left\{\begin{aligned} &\rho_2 - \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_2}{\partial x} = 0,\\ &\rho_2 \quad \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial \Pi_2}{\partial y} = 0,\\ &\rho_2 \quad \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial \Pi_2}{\partial z} = 0. \end{aligned}\right. \tag{11 bis}$$

Cela posé, on trouvera sans peine que l'on a

$$
(12)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\int_{S_{13}} \Pi_1 \cos(N, x)\, dS_{13} + \int_{S_{23}} \Pi_2 \cos(N, x)\, dS_{23} \\
&\quad = \int_{1'} \frac{\partial \Pi_1}{\partial x} dv_3 + \int_{2'} \frac{\partial \Pi_2}{\partial x} dv_3 \\
&\quad = -\int_{1'} \rho_1 \frac{\partial V}{\partial x} dv_3 - \int_{2'} \rho_2 \frac{\partial V}{\partial x} dv_3 \\
&\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
&\qquad \int_{S_{13}} \Pi_1 [y \cos(N, z) - z \cos(N, y)]\, dS_{13} \\
&\qquad + \int_{S_{23}} \Pi_2 [y \cos(N, z) - z \cos(N, y)]\, dS_{23} \\
&\quad = \int_{1'} \left(y \frac{\partial \Pi_1}{\partial z} - z \frac{\partial \Pi_1}{\partial y} \right) dv_3 + \int_{2'} \left(y \frac{\partial \Pi_2}{\partial z} - z \frac{\partial \Pi_2}{\partial y} \right) dv_3 \\
&\quad = -\int_{1'} \rho_1 \left(\frac{\partial V}{\partial z} y - \frac{\partial V}{\partial y} z \right) dv_3 - \int_{2'} \rho_1 \left(\frac{\partial V}{\partial z} y - \frac{\partial V}{\partial y} z \right) dv_3, \\
&\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\right.
$$

En vertu des égalités (12), les égalités (7) prennent la forme suivante :

$$
(13)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\xi = -\int_{1'} \rho_1 \frac{\partial V}{\partial x} dv_3 - \int_{2'} \rho_2 \frac{\partial V}{\partial x} dv_3, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
&\lambda = -\int_{1'} \rho_1 \left(y \frac{\partial V}{\partial z} - z \frac{\partial V}{\partial y} \right) dv_3 - \int_{2'} \rho_2 \left(y \frac{\partial V}{\partial z} - z \frac{\partial V}{\partial y} \right) dv_3, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\right.
$$

Ces égalités peuvent s'interpréter.

Remplissons l'espace occupé par le corps solide par un fluide fictif ayant pour densité ρ_1 en tout point de l'espace $1'$ et ρ_2 en tout point de l'espace $2'$. Considérons les forces extérieures qui agissent sur les divers éléments de masse de ce fluide, et *composons-les comme s'il s'agissait d'un corps solide;* soient ξ', η', ζ' les composantes de la force résultante et λ', μ', ν' les composantes de l'axe du couple résultant; on voit sans peine que l'on a

$$(14) \qquad \begin{cases} \xi - \xi' = 0, \\ \eta - \eta' = 0, \\ \zeta - \zeta' = 0, \\ \lambda - \lambda' = 0, \\ \mu - \mu' = 0, \\ \nu - \nu' = 0. \end{cases}$$

Ces égalités sont une généralisation du principe d'Archimède.

§ II. — *Potentiel thermodynamique d'un système qui renferme un flotteur. Variation première de ce potentiel.*

Considérons un système formé de deux fluides et d'un flotteur en contact avec ces deux fluides. Le potentiel thermodynamique interne de ce système pourra s'écrire [Chapitre I, égalité (1)]

$$(15) \qquad \mathfrak{F} = \int_1 \varphi_1(\rho_1)\, dv_1 + \int_2 \varphi_2(\rho_2)\, dv_2,$$

la présence du corps solide introduisant seulement dans ce potentiel un terme constant qu'il est inutile d'écrire.

Nous supposerons le système limité par une surface invariable, en sorte que les pressions qui peuvent agir aux divers points de cette surface n'effectueront aucun travail. Pour calculer le potentiel des forces extérieures, il suffira de tenir compte des forces appliquées aux divers éléments de masse des corps fluides et du corps solide.

Les forces appliquées aux divers éléments de masse des corps fluides admettent un potentiel qui a pour valeur

$$(16) \qquad \Omega = \int_1 V \rho_1\, dv_1 + \int_2 V \rho_2\, dv_2.$$

Nous supposerons que chaque masse élémentaire $dm_3 = \rho_3\, dv_3$ du corps solide soit soumise à une force dont les composantes ont pour valeur

$$-\rho_3 \frac{\partial U}{\partial x} dv_3, \quad -\rho_3 \frac{\partial U}{\partial y} dv_3, \quad -\rho_3 \frac{\partial U}{\partial z} dv_3,$$

U étant une fonction potentielle, qui est uniforme, finie et continue en tous les points d'un domaine à l'intérieur duquel se trouve le corps solide.

Les forces extérieures auxquelles le corps solide est soumis admettront alors un potentiel qui aura pour valeur

$$\Omega' = \int_3 \rho U_3 \, dv_3 \tag{17}$$

et le système admettra un potentiel thermodynamique total ayant pour valeur

$$\Phi = \mathcal{F} + \Omega + \Omega'. \tag{18}$$

La variation première de ce potentiel aura pour valeur

$$\delta\Phi = \delta(\mathcal{F} + \Omega) + \delta\Omega'. \tag{19}$$

Si l'on se reporte à l'expression de $(\mathcal{F} + \Omega)$, donnée par les égalités (15) et (16), on voit que cette expression se rapproche du potentiel thermodynamique total d'un système ne renfermant pas de flotteur, potentiel dont nous avons calculé la variation première au Chapitre I [égalité (26)]. Seulement les parties déformables de la surface qui limite le fluide se nomment ici S_{13}, S_{23}, au lieu de se nommer S_1, S_2; de plus, les termes en P_0 font défaut. On aura donc

$$(23) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta(\mathcal{F} + \Omega) = & \int_1 \left[\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1} + V \right] \delta\rho_1 \, dv_1 + \int_2 \left[\frac{d\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2} + V \right] \delta\rho_2 \, dv_2 \\ & + \int_{S_{13}} [\varphi_1(\rho_1) + V\rho_1] \varepsilon_1 \, dS_{13} + \int_{S_{23}} [\varphi_2(\rho_2) + V\rho_2] \varepsilon_2 \, dS_{23} \\ & + \int_{S_{12}} \{ [\varphi_1(\rho_1) + V\rho_1] \varepsilon_1 + [\varphi_2(\rho_2) + V\rho_2] \varepsilon_2 \} \, dS_{12}. \end{aligned} \right.$$

D'autre part, on a

$$(21) \qquad \delta\Omega' = \int_3 \rho_3 \left(\frac{\partial U}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial U}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial U}{\partial z} \Delta z \right) dv_3.$$

$\Delta x, \Delta y, \Delta z$ étant donnés par les égalités (5), cette dernière égalité devient

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta\Omega' = \quad & \delta f \int_3 \rho_3 \frac{\partial U}{\partial x} dv_3 + \delta g \int_3 \rho_3 \frac{\partial U}{\partial y} dv_3 + \delta h \int_3 \rho_3 \frac{\partial U}{\partial z} dv_3 \\ & + \delta l \int_3 \rho_3 \left(y \frac{\partial U}{\partial z} - z \frac{\partial U}{\partial y} \right) dv_3 + \delta m \int_3 \rho_3 \left(z \frac{\partial U}{\partial x} - x \frac{\partial U}{\partial z} \right) dv_3 \\ & + \delta n \int_3 \rho_3 \left(x \frac{\partial U}{\partial y} - y \frac{\partial U}{\partial x} \right) dv_3. \end{aligned} \right.$$

Les égalités (19), (20), (21), (22) font connaître la variation première du potentiel thermodynamique.

Nous allons en faire usage pour retrouver les conditions d'équilibre d'un système fluide portant un flotteur sous une forme qui nous sera utile par la suite.

Ces conditions s'expriment en écrivant que l'on a, pour toute déformation virtuelle,

$$(23) \qquad \delta\Phi = 0.$$

Si l'on observe que l'on a, en tout point de la surface S_{13},

$$\varepsilon_1 = -[\Delta x \cos(N, x) + \Delta y \cos(N, y) + \Delta z \cos(N, z)];$$

qu'en tout point de la surface S_{23} ε_2 s'exprime d'une manière analogue; on voit sans peine que les égalités (5), (19), (20) et (22) transforment l'égalité (23) en

$$(24) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int_1 \left[\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1} + V \right] \delta\rho_1 \, dv_1 + \int_2 \left[\frac{d\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2} + V \right] \delta\rho \, dv_2 \\ & + \int_{S_{12}} \{ [\varphi_1(\rho_1) + V\rho_1] \varepsilon_1 + [\varphi_2(\rho_2) + V\rho_2] \varepsilon_2 \} dS_{12} \end{aligned} \right.$$

$$
(24)\quad \left\{
\begin{aligned}
&+\delta f\Big\{\int_3 \rho_3 \frac{\partial U}{\partial x}\,dv_3 - \int_{S_{13}} [\varphi_1(\rho_1)+V\rho_1]\cos(N,x)\,dS_{13} \\
&\qquad\qquad - \int_{S_{23}} [\varphi_2(\rho_2)+V\rho_2]\cos(N,x)\,dS_{23}\Big\} \\
&+\delta g\{\ldots\}+\delta h\{\ldots\} \\
&+\delta l\Big\{\int_3 \rho_3\Big(y\frac{\partial U}{\partial z} - z\frac{\partial U}{\partial y}\Big)\,dv_3 \\
&\qquad - \int_{S_{13}} [\varphi_1(\rho_1)+V\rho_1][y\cos(N,z)-z\cos(N,y)]\,dS_{13} \\
&\qquad - \int_{S_{23}} [\varphi_2(\rho_2)+V\rho_2][y\cos(N,z)-z\cos(N,y)]\,dS_{23}\Big\} \\
&+\delta m\{\ldots\}+\delta n\{\ldots\} = 0.
\end{aligned}\right.
$$

Cette égalité (24) ne doit pas avoir lieu identiquement; elle doit avoir lieu seulement pour les modifications virtuelles qui laissent invariable la masse de chacun des fluides 1 et 2.

Exprimons que la masse du corps I demeure invariable; nous trouvons

$$\int_1 \delta\rho_1\,dv_1 + \int_{S_{12}} \rho_1\varepsilon_1\,dS_{12} + \int_{S_{13}} \rho_1\varepsilon_1\,dS_{13} = 0$$

ou encore

$$
(25)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\int_1 \delta\rho_1\,dv_1 + \int_{S_{12}} \rho_1\varepsilon_1\,dS_{12} \\
&\quad - \delta f\int_{S_{13}} \rho_1\cos(N,x)\,dS_{13} - \delta g\int_{S_{13}} \rho_1\cos(N,y)\,dS_{13} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad - \delta h\int_{S_{13}} \rho_1\cos(N,z)\,dS_{13} \\
&\quad - \delta l\int_{S_{13}} \rho_1[z\cos(N,z)-z\cos(N,y)]\,dS_{13} \\
&\quad - \delta m\int_{S_{13}} \rho_1[z\cos(N,x)-x\cos(N,z)]\,dS_{13} \\
&\quad - \delta n\int_{S_{13}} \rho_1[x\cos(N,y)-y\cos(N,x)]\,dS_{13} = 0.
\end{aligned}\right.
$$

Le fluide 2 fournit une égalité analogue, que nous désignerons par (25 *bis*).

L'égalité (24) doit avoir lieu toutes les fois que les égalités (25) et (25 *bis*) sont vérifiées, et seulement dans ce cas. Le calcul des variations nous enseigne qu'il existe alors deux constantes C_1, C_2, telles qu'en ajoutant au premier membre de l'égalité (24) le produit par C_1 du premier membre de l'égalité (25) et le produit par C_2 du premier membre de l'égalité (25 *bis*), on obtienne une quantité identiquement nulle.

Si l'on observe alors que l'on a, en tout point de la surface S_{12}, $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 0$, on trouve les conditions suivantes :

1° *On a, en tout point du fluide* 1,

$$\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1} + V + C_1 = 0 \tag{26}$$

et, en tout point du fluide 2,

$$\frac{d\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2} + V + C_2 = 0. \tag{26 bis}$$

2° *On a, en tout point de la surface* S_{12},

$$\varphi_1(\rho_1) + (V + C_1)\rho_1 = \varphi_2(\rho_2) + (V + C_2)\rho_2. \tag{27}$$

3° *On a, enfin,*

$$\tag{28} \left\{ \begin{aligned} &\int_3 \rho_3 \frac{\partial U}{\partial x}\, dv_3 = \int_{S_{13}} [\varphi_1(\rho_1) + (V + C_1)\rho_1] \cos(N, x)\, dS_{13} \\ &\qquad\qquad + \int_{S_{23}} [\varphi_2(\rho_2) + (V + C_2)\rho_2] \cos(N, x)\, dS_{23}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &\int_3 \rho_3 \left(y \frac{\partial U}{\partial z} - z \frac{\partial U}{\partial y} \right) dv_3 \\ &\quad = \int_{S_{13}} [\varphi_1(\rho_1) + (V + C_1)\rho_1] [y \cos(N, z) - z \cos(N, y)]\, dS_{13} \\ &\qquad + \int_{S_{23}} [\varphi_2(\rho_2) + (V + C_2)\rho_2] [y \cos(N, z) - z \cos(N, y)]\, dS_{23}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned} \right.$$

Telles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour l'équilibre d'un système de deux fluides portant un flotteur; on prouverait aisément qu'elles sont équivalentes aux conditions établies au § I.

CHAPITRE III.

STABILITÉ DE L'ÉQUILIBRE D'UN FLOTTEUR.

§ I. — *Variation seconde du potentiel thermodynamique d'un système de fluides qui renferme un flotteur.*

Considérons un système de deux fluides, 1 et 2, contenant un flotteur; concevons que ce système soit soumis aux hypothèses indiquées au § 2 du Chapitre II; ce système admet un potentiel thermodynamique Φ, défini par les égalités (15), (16), (17), (18) du Chapitre II; la variation première $\delta\Phi$ de ce potentiel est donnée par les égalités (19), (20), (21), (22) du même Chapitre; proposons-nous de déterminer la forme générale de la variation seconde $\delta^2\Phi$.

Nous aurons

$$\delta^2\Phi = \delta^2(\mathcal{F} + \Omega) + \delta^2\Omega'. \tag{1}$$

En raisonnant sur l'expression de $\delta(\mathcal{F} + \Omega)$ [Chapitre II, égalité (20)] comme au Chapitre I, § 3, nous avons raisonné sur l'expression de $\delta\Phi$, nous trouverons

$$\left\{\begin{aligned}
\delta^2(\mathcal{F}+\Omega) = {} & \int_1 \frac{d^2\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1^2}(\delta\rho_1)^2\,dv_1 + \int_1 \left[\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1} + \mathrm{V}\right]\delta^2\rho_1\,dv_1 \\
& + 2\int_{S_{12}} \left[\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1} + \mathrm{V}\right]\delta\rho_1\,\varepsilon_1\,dS_{12} + 2\int_{S_{13}} \left[\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1} + \mathrm{V}\right]\delta\rho_1\,\varepsilon_1\,dS_{13} \\
& + \int_{S_{12}} \Bigg\{ \left[\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1}\frac{\partial\rho_1}{\partial x} + \mathrm{V}\frac{\partial\rho_1}{\partial x} + \rho_1\frac{\partial\mathrm{V}}{\partial x}\right]\mathrm{D}x \\
& \qquad + \left[\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1}\frac{\partial\rho_1}{\partial y} + \mathrm{V}\frac{\partial\rho_1}{\partial y} + \rho_1\frac{\partial\mathrm{V}}{\partial y}\right]\mathrm{D}y \\
& \qquad + \left[\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1}\frac{\partial\rho_1}{\partial z} + \mathrm{V}\frac{\partial\rho_1}{\partial z} + \rho_1\frac{\partial\mathrm{V}}{\partial z}\right]\mathrm{D}z \Bigg\}\varepsilon_1\,dS_{12} \\
& + \int_{S_{12}} [\varphi_1(\rho_1) + \mathrm{V}\rho_1]\,\mathrm{D}(\varepsilon_1\,dS_1)
\end{aligned}\right. \tag{2}$$

$$
(2)\quad\left\{
\begin{aligned}
&+\int_{S_{13}}\Big\{\left[\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1}\frac{\partial\rho_1}{\partial x}+V\frac{\partial\rho_1}{\partial x}+\rho_1\frac{\partial V}{\partial x}\right]Dx\\
&\qquad+\left[\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1}\frac{\partial\rho_1}{\partial y}+V\frac{\partial\rho_1}{\partial y}+\rho_1\frac{\partial V}{\partial y}\right]Dy\\
&\qquad+\left[\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1}\frac{\partial\rho_1}{\partial z}+V\frac{\partial\rho_1}{\partial z}+\rho_1\frac{\partial V}{\partial z}\right]Dz\Big\}\varepsilon_1\,dS_{13}\\
&+\int_{S_{13}}[\varphi_1(\rho_1)+V\rho_1]D(\varepsilon_1\,dS_{13})\\
&+\text{etc.}\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}\right.
$$

le symbole : etc. représentant des termes qui sont analogues à ceux que nous avons écrits et qui se déduisent de ceux-là en permutant les indices 1 et 2.

Les égalités [Chapitre II, égalités (26) et (27)]

$$(3)\qquad \frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1}+V+C_1=0 \qquad \text{(en tout point du fluide 1)},$$

$$(4)\qquad \varphi_1(\rho_1)+(V+C_1)\rho_1=0 \qquad \text{(en tout point de la surface } S_{12})$$

permettent d'écrire

$$
(5)\quad\left\{
\begin{aligned}
&\int_1\left[\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1}+V\right]\delta^2\rho_1\,dv_1\\
&\quad+2\int_{S_{12}}\left[\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1}+V\right]\delta\rho_1\,\varepsilon_1\,dS_{12}+2\int_{S_{13}}\left[\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1}+V\right]\delta\rho_1\,\varepsilon_1\,dS_{13}\\
&\quad+\int_{S_{12}}\left[\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1}+V\right]\left(\frac{\partial\rho_1}{\partial x}Dx+\frac{\partial\rho_1}{\partial y}Dy+\frac{\partial\rho_1}{\partial z}Dz\right)\varepsilon_1\,dS_{12}\\
&\quad+\int_{S_{12}}[\varphi_1(\rho_1)+V\rho_1]D(\varepsilon_1\,dS_{12})\\
&\quad+\int_{S_{13}}\left[\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1}+V\right]\left(\frac{\partial\rho_1}{\partial x}Dx+\frac{\partial\rho_1}{\partial y}Dy+\frac{\partial\rho_1}{\partial z}Dz\right)\varepsilon_1\,dS_{13}\\
&\quad+\int_{S_{13}}[\varphi_1(\rho_1)+V\rho_1]D(\varepsilon_1\,dS_{13})\\
&=-C_1\Big\{\int_1\delta^2\rho_1\,dv_1+2\int_{S_{12}}\delta\rho_1\,\varepsilon_1\,dS_{12}+2\int_{S_{13}}\delta\rho_1\,\varepsilon_1\,dS_{13}\\
&\qquad+\int_{S_{12}}\left(\frac{\partial\rho_1}{\partial x}Dx+\frac{\partial\rho_1}{\partial y}Dy+\frac{\partial\rho_1}{\partial z}Dz\right)\varepsilon_1\,dS_{12}+\int_{S_{12}}\rho_1 D(\varepsilon_1\,dS_{12})\\
&\qquad+\int_{S_{13}}\left(\frac{\partial\rho_1}{\partial x}Dx+\frac{\partial\rho_1}{\partial y}Dy+\frac{\partial\rho_1}{\partial z}Dz\right)\varepsilon_1\,dS_{13}\Big\}\\
&\quad+\int_{S_{13}}[\varphi_1(\rho_1)+V\rho_1]D(\varepsilon_1\,dS_{13}).
\end{aligned}\right.
$$

En exprimant que la masse du fluide 1 est essentiellement invariable, nous trouvons l'identité

$$(6)\qquad \int_1 \delta\rho_1\, dv_1 + \int_{S_{12}} \rho_1 \varepsilon_1\, dS_{12} + \int_{S_{13}} \rho_1 \varepsilon_1\, dS_{13} = 0.$$

Le premier membre de cette égalité (6) étant identiquement nul, il en doit être de même de sa variation, ce qui nous donne l'égalité

$$(7)\left\{\begin{aligned} &\int_1 \delta^2\rho_1\, dv_1 + 2\int_{S_{12}} \delta\rho_1 \varepsilon_1\, dS_{12} + 2\int_{S_{13}} \delta\rho_1 \varepsilon_1\, dS_{13} \\ &\quad + \int_{S_{12}} \left(\frac{\partial\rho_1}{\partial x} Dx + \frac{\partial\rho_1}{\partial y} Dy + \frac{\partial\rho_1}{\partial z} Dz\right) \varepsilon_1\, dS_{12} + \int_{S_{12}} \rho_1 D(\varepsilon_1 dS_{12}) \\ &\quad + \int_{S_{13}} \left(\frac{\partial\rho_1}{\partial x} Dx + \frac{\partial\rho_1}{\partial y} Dy + \frac{\partial\rho_1}{\partial z} Dz\right) \varepsilon_1\, dS_{13} + \int_{S_{13}} \rho_1 D(\varepsilon_1 dS_{13}) = 0. \end{aligned}\right.$$

Moyennant cette égalité (7), le second membre de l'égalité (5) se réduit à

$$\int_{S_{13}} [\varphi_1(\rho_1) + (V + C_1)\rho_1] D(\varepsilon_1 dS_{13}).$$

Ce calcul, et un calcul semblable effectué sur le fluide 2, donnent à l'égalité (2) la forme.

$$(8)\left\{\begin{aligned} \delta^2(\mathcal{F} + \Omega) = &\int_1 \frac{d^2\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1^2} (\delta\rho_1)^2\, dv_1 \\ &+ \int_{S_{12}} \rho_1 \left(\frac{\partial V}{\partial x} Dx + \frac{\partial V}{\partial y} Dy + \frac{\partial V}{\partial z} Dz\right) \varepsilon_1\, dS_{12} \\ &+ \int_{S_{13}} \rho_1 \left(\frac{\partial V}{\partial x} Dx + \frac{\partial V}{\partial y} Dy + \frac{\partial V}{\partial z} Dz\right) \varepsilon_1\, dS_{13} \\ &+ \int_{S_{13}} [\varphi_1(\rho_1) + (V + C_1)\rho_1] D(\varepsilon_1 dS_{13}) + \text{etc.}, \end{aligned}\right.$$

le symbole : etc. ayant un sens analogue à celui qu'il a dans l'égalité (2).

Nous pouvons, en tous les points de la surface S_{13}, prendre

$$(9)\qquad Dx = \Delta x, \qquad Dy = \Delta y, \qquad Dz = \Delta z,$$

Δx, Δy, Δz étant les composantes du déplacement du point du corps solide dont les coordonnées initiales sont x, y, z, et étant donnés, par conséquent, par les égalités

$$(10) \qquad \begin{cases} \Delta x = \delta f + z\,\delta m - y\,\delta n, \\ \Delta y = \delta g + x\,\delta n - z\,\delta l, \\ \Delta z = \delta h + y\,\delta l - x\,\delta m. \end{cases}$$

Nous aurons alors

$$\varepsilon_1 = -[\cos(N,x)\Delta x + \cos(N,y)\Delta y + \cos(N,z)\Delta z]$$

ou bien, en vertu des égalités (10),

$$(11) \qquad \begin{cases} \varepsilon_1 = -\{\cos(N,x)\,\delta f + \cos(N,y)\,\delta g + \cos(N,z)\,\delta h \\ \qquad + [y\cos(N,z) - z\cos(N,y)]\,\delta l \\ \qquad + [z\cos(N,x) - x\cos(N,z)]\,\delta m \\ \qquad + [x\cos(N,y) - y\cos(N,x)]\,\delta n\,\}. \end{cases}$$

Si nous convenons de prendre δf, δg, δh, δl, δm, δn comme variations indépendantes, nous aurons, en vertu de l'égalité (11),

$$(12) \qquad \begin{cases} \Delta\varepsilon_1 = -\delta f\,\Delta\cos(N,x) - \delta g\,\Delta\cos(N,y) - \delta h\,\Delta\cos(N,z) \\ \qquad - \delta l\,[y\,\Delta\cos(N,z) - z\,\Delta\cos(N,y)] \\ \qquad - \delta l\,[\cos(N,z)\Delta y - \cos(N,y)\Delta z] \\ \qquad - \delta m\,[z\,\Delta\cos(N,x) - x\,\Delta\cos(N,z)] \\ \qquad - \delta m\,[\cos(N,x)\Delta z - \cos(N,z)\Delta x] \\ \qquad - \delta n\,[x\,\Delta\cos(N,y) - y\,\Delta\cos(N,x)] \\ \qquad - \delta n\,[\cos(N,y)\Delta x - \cos(N,x)\Delta y]. \end{cases}$$

Mais on a également

$$(13) \qquad \begin{cases} \Delta\cos(N,x) = \cos(N,z)\,\delta m - \cos(N,y)\,\delta n, \\ \Delta\cos(N,y) = \cos(N,x)\,\delta n - \cos(N,z)\,\delta l, \\ \Delta\cos(N,z) = \cos(N,y)\,\delta l - \cos(N,x)\,\delta m. \end{cases}$$

En vertu des égalités (10) et (13), l'égalité (12) devient

$$(14) \qquad \Delta\varepsilon_1 = 0.$$

D'ailleurs, l'élément dS_{13} est un élément d'aire invariable de la surface du solide, en sorte que

$$\Delta\, dS_{13} = 0. \tag{15}$$

En vertu des égalités (14) et (15), l'égalité (8) devient

$$\left\{\begin{aligned} \delta^2(\mathfrak{F}+\Omega) = & \int_1 \frac{d^2\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1^2}(\delta\rho_1)^2\, dv_1 \\ & + \int_{S_{12}} \rho_1\left(\frac{\partial V}{\partial x}Dx + \frac{\partial V}{\partial y}Dy + \frac{\partial V}{\partial z}Dz\right)\varepsilon_1\, dS_{12} \\ & + \int_{S_{13}} \rho_1\left(\frac{\partial V}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial V}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial V}{\partial z}\Delta z\right)\varepsilon_1\, dS_{13} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right. \tag{16}$$

Calculons maintenant $\delta^2\Omega'$.

Nous avons

$$\Omega' = \int_3 \rho_3 U\, dv_3,$$

$$\delta\Omega' = \int_3 \rho_3\left(\frac{\partial U}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial U}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial U}{\partial z}\Delta z\right) dv_3,$$

$$\left\{\begin{aligned} \delta^2\Omega' = & \int_3 \rho_3\left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(\Delta x)^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}(\Delta y)^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}(\Delta z)^2\right. \\ & \qquad \left. + 2\frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial z}\Delta y\,\Delta z + 2\frac{\partial^2 U}{\partial z\,\partial x}\Delta z\,\Delta x + 2\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}\Delta x\,\Delta y\right] dv_3 \\ & + \int_3 \rho_3 \frac{\partial U}{\partial x}\left(\frac{\partial\,\Delta x}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial\,\Delta x}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial\,\Delta x}{\partial z}\Delta z + \Delta^2 x\right) dv_3 \\ & + \int_3 \rho_3 \frac{\partial U}{\partial y}\left(\frac{\partial\,\Delta y}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial\,\Delta y}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial\,\Delta y}{\partial z}\Delta z + \Delta^2 y\right) dv_3 \\ & + \int_3 \rho_3 \frac{\partial U}{\partial z}\left(\frac{\partial\,\Delta z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial\,\Delta z}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial\,\Delta z}{\partial z}\Delta z + \Delta^2 z\right) dv_3. \end{aligned}\right. \tag{17}$$

Les égalités (10) donnent

$$\frac{\partial\,\Delta x}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial\,\Delta x}{\partial y} = -\delta n, \qquad \frac{\partial\,\Delta x}{\partial z} = \delta m,$$

$$\Delta^2 x = 0,$$

ce qui donne la première des égalités

$$(18)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \Delta x}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial \Delta x}{\partial y}\Delta y + \dfrac{\partial \Delta x}{\partial z}\Delta z + \Delta^2 x = (\Delta z\, \delta m - \Delta y\, \delta n), \\ \dfrac{\partial \Delta y}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial \Delta y}{\partial y}\Delta y + \dfrac{\partial \Delta y}{\partial z}\Delta z + \Delta^2 y = (\Delta x\, \delta n - \Delta z\, \delta l), \\ \dfrac{\partial \Delta z}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial \Delta z}{\partial y}\Delta y + \dfrac{\partial \Delta z}{\partial z}\Delta z + \Delta^2 z = (\Delta y\, \delta l - \Delta x\, \delta m). \end{cases}$$

Les deux autres s'établissent d'une manière analogue.

En vertu des égalités (8), l'égalité (17) devient

$$(19)\quad \begin{cases} \delta^2 \Omega' = \displaystyle\int_3 \rho_3 \Big[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(\Delta x)^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}(\Delta y)^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}(\Delta z)^2 \\ \qquad + 2\dfrac{\partial^2 U}{\partial y\, \partial z}\Delta y\, \Delta z + 2\dfrac{\partial^2 U}{\partial z\, \partial x}\Delta z\, \Delta x + 2\dfrac{\partial^2 U}{\partial x\, \partial y}\Delta x\, \Delta y \Big]\, dv_3 \\ \quad + \displaystyle\int_3 \rho_3 \Big[(\Delta z\, \delta m - \Delta y\, \delta n)\frac{\partial U}{\partial x} + (\Delta x\, \delta n - \Delta z\, \delta l)\frac{\partial U}{\partial y} \\ \qquad + (\Delta y\, \delta l - \Delta x\, \delta m)\dfrac{\partial U}{\partial z} \Big]\, dv_3. \end{cases}$$

Les égalités (16) et (19), jointes aux égalités (10) et (11), donnent

$$(20)\quad \begin{cases} \delta^2(\mathcal{F} + \Omega + \Omega') = \displaystyle\int_1 \frac{d^2 \varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1^2}(\delta\rho_1)^2\, dv_1 + \int_2 \frac{d^2 \varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2^2}(\delta\rho_2)^2\, dv_2 \\ \qquad + \displaystyle\int_{S_{12}} \rho_1 \left(\frac{\partial V}{\partial x} Dx + \frac{\partial V}{\partial y} Dy + \frac{\partial V}{\partial z} Dz \right) \varepsilon_1\, dS_{12} \\ \qquad + \displaystyle\int_{S_{12}} \rho_2 \left(\frac{\partial V}{\partial x} Dx + \frac{\partial V}{\partial y} Dy + \frac{\partial V}{\partial z} Dz \right) \varepsilon_2\, dS_{12} \\ \qquad + Q, \end{cases}$$

Q étant une forme quadratique des six variables

$$\delta f, \quad \delta g, \quad \delta h, \quad \delta l, \quad \delta m, \quad \delta n,$$

$$(21)\quad \begin{cases} Q = A_{11}(\delta f)^2 + A_{22}(\delta g)^2 + A_{33}(\delta h)^2 \\ \quad + A_{44}(\delta l)^2 + A_{55}(\delta m)^2 + A_{66}(\delta n)^2 \\ \quad + A_{23}\,\delta g\,\delta h + A_{31}\,\delta h\,\delta f + A_{12}\,\delta f\,\delta g \\ \quad + A_{56}\,\delta m\,\delta n + A_{64}\,\delta n\,\delta l + A_{45}\,\delta l\,\delta m \\ \quad + A_{14}\,\delta f\,\delta l + A_{25}\,\delta g\,\delta m + A_{36}\,\delta h\,\delta n \\ \quad + A_{15}\,\delta f\,\delta m + A_{16}\,\delta f\,\delta n \\ \quad + A_{26}\,\delta g\,\delta n + A_{24}\,\delta g\,\delta l \\ \quad + A_{34}\,\delta h\,\delta l + A_{35}\,\delta h\,\delta m. \end{cases}$$

Les coefficients A_{ij} de cette forme ont les valeurs suivantes :

$$A_{11} = -\int_{S_{13}} \rho_1 \frac{\partial V}{\partial x} \cos(N, x)\, dS_{13} - \int_{S_{23}} \rho_2 \frac{\partial V}{\partial x} \cos(N, x)\, dS_{23} + \int_3 \rho_3 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\, dv_3,$$

$$A_{22} = -\int_{S_{13}} \rho_1 \frac{\partial V}{\partial y} \cos(N, y)\, dS_{13} - \int_{S_{23}} \rho_2 \frac{\partial V}{\partial y} \cos(N, y)\, dS_{23} + \int_3 \rho_3 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\, dv_3,$$

$$A_{33} = -\int_{S_{13}} \rho_1 \frac{\partial V}{\partial z} \cos(N, z)\, dS_{13} - \int_{S_{23}} \rho_2 \frac{\partial V}{\partial z} \cos(N, z)\, dS_{23} + \int_3 \rho_3 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\, dv_3,$$

$$\begin{aligned}
A_{44} = &-\int_{S_{13}} \rho_1 \Big\{ z^2 \frac{\partial V}{\partial y} \cos(N, y) - yz\Big[\frac{\partial V}{\partial y}\cos(N, z) + \frac{\partial V}{\partial z}\cos(N, y)\Big] \\
&\qquad\qquad + y^2 \frac{\partial V}{\partial z}\cos(N, z)\Big\}\, dS_{13} \\
&-\int_{S_{23}} \rho_2 \Big\{ z^2 \frac{\partial V}{\partial z} \cos(N, y) - yz\Big[\frac{\partial V}{\partial y}\cos(N, z) + \frac{\partial V}{\partial z}\cos(N, y)\Big] \\
&\qquad\qquad + y^2 \frac{\partial V}{\partial z}\cos(N, z)\Big\}\, dS_{23} \\
&+\int_3 \rho_3 \Big(z^2 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - 2yz \frac{\partial^2 U}{\partial y\, \partial z} + y^2 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - y \frac{\partial U}{\partial y} - z \frac{\partial U}{\partial z}\Big)\, dv_3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{55} = &-\int_{S_{13}} \rho_1 \Big\{ x^2 \frac{\partial V}{\partial z} \cos(N, z) - zx\Big[\frac{\partial V}{\partial z}\cos(N, x) + \frac{\partial V}{\partial x}\cos(N, z)\Big] \\
&\qquad\qquad + z^2 \frac{\partial V}{\partial x}\cos(N, x)\Big\}\, dS_{13} \\
&-\int_{S_{23}} \rho_2 \Big\{ x^2 \frac{\partial V}{\partial z} \cos(N, z) - zx\Big[\frac{\partial V}{\partial z}\cos(N, x) + \frac{\partial V}{\partial x}\cos(N, z)\Big] \\
&\qquad\qquad + z^2 \frac{\partial V}{\partial x}\cos(N, x)\Big\}\, dS_{23} \\
&+\int_3 \rho_3 \Big(x^2 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - 2zx \frac{\partial^2 U}{\partial z\, \partial x} + z^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - z \frac{\partial U}{\partial z} - x \frac{\partial U}{\partial x}\Big)\, dv_3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{66} = &-\int_{S_{13}} \rho_1 \Big\{ y^2 \frac{\partial V}{\partial x} \cos(N, x) - xy\Big[\frac{\partial V}{\partial x}\cos(N, y) + \frac{\partial V}{\partial y}\cos(N, x)\Big] \\
&\qquad\qquad + x^2 \frac{\partial V}{\partial y}\cos(N, y)\Big\}\, dS_{13} \\
&-\int_{S_{23}} \rho_2 \Big\{ y^2 \frac{\partial V}{\partial x} \cos(N, x) - xy\Big[\frac{\partial V}{\partial x}\cos(N, y) + \frac{\partial V}{\partial y}\cos(N, x)\Big] \\
&\qquad\qquad + x^2 \frac{\partial V}{\partial y}\cos(N, y)\Big\}\, dS_{23} \\
&+\int_3 \rho_3 \Big(y^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 U}{\partial x\, \partial y} + x^2 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - x \frac{\partial U}{\partial x} - y \frac{\partial U}{\partial y}\Big)\, dv_3,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
A_{23} = &-\int_{S_{13}} \rho_1 \left[\frac{\partial V}{\partial y}\cos(N,z) + \frac{\partial V}{\partial z}\cos(N,y)\right] dS_{13} \\
&-\int_{S_{23}} \rho_2 \left[\frac{\partial V}{\partial y}\cos(N,z) + \frac{\partial V}{\partial z}\cos(N,y)\right] dS_{23} + 2\int_3 \rho_3 \frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial z}\,dv_3,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_{31} = &-\int_{S_{13}} \rho_1 \left[\frac{\partial V}{\partial z}\cos(N,x) + \frac{\partial V}{\partial x}\cos(N,z)\right] dS_{13} \\
&-\int_{S_{23}} \rho_2 \left[\frac{\partial V}{\partial z}\cos(N,x) + \frac{\partial V}{\partial x}\cos(N,z)\right] dS_{23} + 2\int_3 \rho_3 \frac{\partial^2 U}{\partial z\,\partial x}\,dv_3,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_{12} = &-\int_{S_{13}} \rho_1 \left[\frac{\partial V}{\partial x}\cos(N,y) + \frac{\partial V}{\partial y}\cos(N,x)\right] dS_{13} \\
&-\int_{S_{23}} \rho_2 \left[\frac{\partial V}{\partial x}\cos(N,y) + \frac{\partial V}{\partial y}\cos(N,x)\right] dS_{23} + 2\int_3 \rho_3 \frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}\,dv_3,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_{56} = &\int_{S_{13}} \rho_1 \Big\{ \frac{\partial V}{\partial x}[2yz\cos(N,x) - xz\cos(N,y) - xy\cos(N,z)] \\
&\qquad + \frac{\partial V}{\partial y}[x^2\cos(N,z) - xz\cos(N,x)] \\
&\qquad + \frac{\partial V}{\partial z}[x^2\cos(N,y) - xy\cos(N,x)] \Big\}\, dS_{13} \\
&+\int_{S_{23}} \rho_2 \Big\{ \frac{\partial V}{\partial x}[2yz\cos(N,x) - xz\cos(N,y) - zy\cos(N,z)] \\
&\qquad + \frac{\partial V}{\partial y}[x^2\cos(N,z) - xz\cos(N,x)] \\
&\qquad + \frac{\partial V}{\partial z}[x^2\cos(N,y) - xy\cos(N,x)] \Big\}\, dS_{23} \\
&-\int_3 \rho_2 \Big\{ 2yz\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - 2xz\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y} - 2xy\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial z} \\
&\qquad + 2x^2\frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial z} - z\frac{\partial U}{\partial y} - y\frac{\partial U}{\partial z} \Big\}\, dv_3,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_{64} = &\int_{S_{13}} \rho_1 \Big\{ \frac{\partial V}{\partial x}[y^2\cos(N,z) - yz\cos(N,y)] \\
&\qquad + \frac{\partial V}{\partial y}[2zx\cos(N,y) - yx\cos(N,z) - yz\cos(N,x)] \\
&\qquad + \frac{\partial V}{\partial z}[y^2\cos(N,x) - yx\cos(N,y)] \Big\}\, dS_{13} \\
&+\int_{S_{23}} \rho_2 \Big\{ \frac{\partial V}{\partial x}[y^2\cos(N,z) - yz\cos(N,y)] \\
&\qquad + \frac{\partial V}{\partial y}[2zx\cos(N,y) - yx\cos(N,z) - yz\cos(N,x)] \\
&\qquad + \frac{\partial V}{\partial z}[y^2\cos(N,x) - yx\cos(N,y)] \Big\}\, dS_{23}
\end{aligned}
$$

$$-\int_3 \rho_3 \Big\{ 2zx\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - 2yz\frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial z} - 2yz\frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial x}$$
$$+ 2y^2\frac{\partial^2 U}{\partial z\,\partial x} - x\frac{\partial U}{\partial z} - z\frac{\partial U}{\partial x}\Big\}\,dv_3,$$

$$A_{45} = \int_{S_{13}} \rho_1 \Big\{ \frac{\partial V}{\partial x}[z^2\cos(N,y) - zy\cos(N,z)]$$
$$+ \frac{\partial V}{\partial y}[z^2\cos(N,x) - zy\cos(N,z)]$$
$$+ \frac{\partial V}{\partial z}[2xy\cos(N,z) - zy\cos(N,x) - zx\cos(N,y)]\Big\}\,dS_{13}$$
$$+ \int_{S_{23}} \rho_2 \Big\{ \frac{\partial V}{\partial x}[z^2\cos(N,y) - zy\cos(N,z)]$$
$$+ \frac{\partial V}{\partial y}[z^2\cos(N,x) - zx\cos(N,z)]$$
$$+ \frac{\partial V}{\partial z}[2xy\cos(N,z) - zy\cos(N,x) - zx\cos(N,y)]\Big\}\,dS_{23}$$
$$-\int_3 \rho_3 \Big\{ 2xy\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - 2zy\frac{\partial^2 U}{\partial z\,\partial x} - 2zx\frac{\partial^2 U}{\partial z\,\partial y}$$
$$+ 2z^2\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y} - y\frac{\partial U}{\partial x} - x\frac{\partial U}{\partial y}\Big\}\,dv_3,$$

$$A_{14} = -\int_{S_{13}} \rho_1 \Big\{ \frac{\partial V}{\partial x}[y\cos(N,z) - z\cos(N,y)]$$
$$+ \cos(N,x)\Big(y\frac{\partial V}{\partial z} - z\frac{\partial V}{\partial y}\Big)\Big\}\,dS_{13}$$
$$-\int_{S_{23}} \rho_2 \Big\{ \frac{\partial V}{\partial x}[y\cos(N,z) - z\cos(N,y)]$$
$$+ \cos(N,x)\Big(y\frac{\partial V}{\partial z} - z\frac{\partial V}{\partial y}\Big)\Big\}\,dS_{23}$$
$$+ 2\int_3 \rho_3 \Big(y\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial z} - z\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}\Big)\,dv_3,$$

$$A_{25} = -\int_{S_{13}} \rho_1 \Big\{ \frac{\partial V}{\partial y}[z\cos(N,x) - x\cos(N,z)]$$
$$+ \cos(N,y)\Big(z\frac{\partial V}{\partial x} - x\frac{\partial V}{\partial z}\Big)\Big\}\,dS_{13}$$
$$-\int_{S_{23}} \rho_2 \Big\{ \frac{\partial V}{\partial y}[z\cos(N,x) - x\cos(N,z)]$$
$$+ \cos(N,y)\Big(z\frac{\partial V}{\partial x} - x\frac{\partial V}{\partial z}\Big)\Big\}\,dS_{23}$$
$$+ 2\int \rho_3 \Big(z\frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial x} - x\frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial z}\Big)\,dv_3,$$

$$A_{30} = -\int_{S_{13}} \rho_1 \left\{ \frac{\partial V}{\partial z} [x \cos(N, y) - y \cos(N, x)] \right.$$
$$\left. + \cos(N, z)\left(x \frac{\partial V}{\partial z} - z \frac{\partial V}{\partial x}\right) \right\} dS_{13}$$
$$- \int_{S_{23}} \rho_2 \left\{ \frac{\partial V}{\partial z} [x \cos(N, y) - y \cos(N, x)] \right.$$
$$\left. + \cos(N, z)\left(x \frac{\partial V}{\partial z} - z \frac{\partial V}{\partial x}\right) \right\} dS_{23}$$
$$+ 2\int_{3} \rho_3 \left(x \frac{\partial^2 U}{\partial z\, \partial y} - y \frac{\partial^2 U}{\partial z\, \partial x}\right) dv_3,$$

$$A_{15} = -\int_{S_{13}} \rho_1 \left\{ 2z \frac{\partial V}{\partial x} \cos(N, x) - x \left[\frac{\partial V}{\partial z} \cos(N, x) + \frac{\partial V}{\partial x} \cos(N, z)\right] \right\} dS_{13}$$
$$- \int_{S_{23}} \rho_2 \left\{ 2z \frac{\partial V}{\partial x} \cos(N, x) - x \left[\frac{\partial V}{\partial z} \cos(N, x) + \frac{\partial V}{\partial x} \cos(N, z)\right] \right\} dS_{23}$$
$$+ \int_{3} \rho_3 \left(2z \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - 2x \frac{\partial^2 U}{\partial x\, \partial z} - \frac{\partial U}{\partial z}\right) dv_3,$$

$$A_{26} = -\int_{S_{13}} \rho_1 \left\{ 2x \frac{\partial V}{\partial y} \cos(N, y) - y \left[\frac{\partial V}{\partial x} \cos(N, y) + \frac{\partial V}{\partial y} \cos(N, x)\right] \right\} dS_{13}$$
$$- \int_{S_{23}} \rho_2 \left\{ 2x \frac{\partial V}{\partial y} \cos(N, y) - y \left[\frac{\partial V}{\partial x} \cos(N, y) + \frac{\partial V}{\partial y} \cos(N, x)\right] \right\} dS_{23}$$
$$+ \int_{3} \rho_3 \left(2x \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - 2y \frac{\partial^2 U}{\partial y\, \partial x} - \frac{\partial U}{\partial x}\right) dv_3,$$

$$A_{34} = -\int_{S_{13}} \rho_1 \left\{ 2y \frac{\partial V}{\partial z} \cos(N, z) - z \left[\frac{\partial V}{\partial y} \cos(N, z) + \frac{\partial V}{\partial z} \cos(N, y)\right] \right\} dS_{13}$$
$$- \int_{S_{23}} \rho_2 \left\{ 2y \frac{\partial V}{\partial z} \cos(N, z) - z \left[\frac{\partial V}{\partial y} \cos(N, z) + \frac{\partial V}{\partial z} \cos(N, y)\right] \right\} dS_{23}$$
$$+ \int_{3} \rho_3 \left(2y \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - 2z \frac{\partial^2 U}{\partial z\, \partial y} - \frac{\partial U}{\partial y}\right) dv_3,$$

$$A_{16} = \int_{S_{13}} \rho_1 \left\{ 2y \frac{\partial V}{\partial x} \cos(N, x) - x \left[\frac{\partial V}{\partial y} \cos(N, x) + \frac{\partial V}{\partial x} \cos(N, y)\right] \right\} dS_{13}$$
$$+ \int_{S_{23}} \rho_2 \left\{ 2y \frac{\partial V}{\partial x} \cos(N, x) - x \left[\frac{\partial V}{\partial y} \cos(N, x) + \frac{\partial V}{\partial x} \cos(N, y)\right] \right\} dS_{23}$$
$$- \int_{3} \rho_3 \left(2y \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - 2x \frac{\partial^2 U}{\partial x\, \partial z} + \frac{\partial U}{\partial y}\right) dv_3,$$

$$A_{24} = \int_{S_{12}} \rho_1 \left\{ 2z\frac{\partial V}{\partial y}\cos(N,y) - y\left[\frac{\partial V}{\partial z}\cos(N,y) + \frac{\partial V}{\partial y}\cos(N,z)\right]\right\} dS_{13}$$
$$+ \int_{S_{23}} \rho_2 \left\{ 2z\frac{\partial V}{\partial y}\cos(N,y) - y\left[\frac{\partial V}{\partial z}\cos(N,y) + \frac{\partial V}{\partial y}\cos(N,z)\right]\right\} dS_{23}$$
$$- \int_3 \rho_3 \left(2z\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - 2y\frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z}\right) dv_3,$$

$$A_{35} = \int_{S_{12}} \rho_1 \left\{ 2x\frac{\partial V}{\partial z}\cos(N,z) - z\left[\frac{\partial V}{\partial x}\cos(N,z) + \frac{\partial V}{\partial z}\cos(N,x)\right]\right\} dS_{13}$$
$$+ \int_{S_{23}} \rho_2 \left\{ 2x\frac{\partial V}{\partial z}\cos(N,z) - z\left[\frac{\partial V}{\partial x}\cos(N,z) + \frac{\partial V}{\partial z}\cos(N,x)\right]\right\} dS_{23}$$
$$- \int_3 \rho_3 \left(2x\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - 2z\frac{\partial^2 U}{\partial z\,\partial y} + \frac{\partial U}{\partial x}\right) dv_3.$$

Ces égalités, jointes aux égalités (20) et (21), font connaître la forme de la quantité $\delta^2(\mathcal{F} + \Omega + \Omega')$, dans le cas particulier où l'état initial du système est un état d'équilibre. Pour calculer plus brièvement cette quantité, nous avons supposé que les variations

$$\delta f, \quad \delta g, \quad \delta h, \quad \delta l, \quad \delta m, \quad \delta n$$

étaient des variations arbitraires, en sorte que l'on eût

$$\delta^2 f = 0, \quad \delta^2 g = 0, \quad \delta^2 h = 0, \quad \delta^2 l = 0, \quad \delta^2 m = 0, \quad \delta^2 n = 0.$$

Nous aurions pu ne pas faire cette hypothèse; la quantité

$$\delta^2(\mathcal{F} + \Omega + \Omega')$$

aurait alors renfermé une fonction linéaire et homogène de

$$\delta^2 f, \quad \delta^2 g, \quad \delta^2 h, \quad \delta^2 l, \quad \delta^2 m, \quad \delta^2 n.$$

Mais les égalités (28) du Chapitre II nous auraient permis de démontrer que cette fonction est identiquement nulle lorsque l'état initial du système est un état d'équilibre.

§ II. — *Stabilité de l'équilibre d'un système de fluides qui renferme un flotteur.*

Une transformation analogue à celle qui a fourni l'égalité (50) du Chapitre précédent permet d'écrire l'égalité (20) sous la forme

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned}\delta^2(\mathcal{F}+\Omega+\Omega') = & \int_1 \frac{d^2\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1^2}(\delta\rho_1)^2\,dv_1 + \int_2 \frac{d^2\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2^2}(\delta\rho_2)^2\,dv_2 \\ & - \int_{S_{12}} (\rho_2-\rho_1)\frac{\partial V}{\partial n_2}\varepsilon_1^2\,dS_{12} + Q.\end{aligned}\right.$$

Nous avons admis que, quels que soient les fluides 1 et 2, on avait [Chapitre I, inégalités (48)],

$$(23)\qquad \frac{d^2\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1^2} > 0, \qquad \frac{d^2\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2^2} > 0.$$

Ces inégalités admises, nous allons chercher s'il est possible de marquer les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'on ait, pour tout déplacement du système, l'inégalité

$$(24)\qquad \delta^2(\mathcal{F}+\Omega+\Omega') > 0.$$

Ces conditions seront les conditions de stabilité du système.

Imaginons que l'on maintienne le flotteur immobile; que l'on garde une densité invariable au fluide qui remplit chaque élément de volume du système; on pourra néanmoins déformer la surface S_{12}, cette déformation étant simplement soumise à la condition

$$\int_{S_{12}} \varepsilon_1\,dS_{12} = 0.$$

L'inégalité (24) se réduira, dans ce cas, à

$$\int_{S_{12}} (\rho_2-\rho_1)\frac{\partial V}{\partial n_2}\varepsilon_1^2\,dS_{12} < 0.$$

Cette inégalité entraîne, comme nous l'avons vu à la fin du Chapitre I, la conséquence suivante, qui est une PREMIÈRE CONDITION NÉCESSAIRE POUR LA STABILITÉ DE L'ÉQUILIBRE DU SYSTÈME :

La force extérieure ne doit pas être nulle en tous les points d'une aire d'étendue finie prise sur la surface de contact des deux fluides; en tout point de cette surface où elle est différente de o, *elle doit être dirigée vers l'intérieur du fluide le plus dense.*

On peut imaginer des déplacements qui laissent invariable la densité du fluide qui remplit chacun des éléments de volume du système; seulement, en exprimant que la masse de chacun des deux fluides doit demeurer invariable, on trouve que de semblables déplacements sont assujettis aux conditions suivantes :

$$(25)\qquad \left\{\begin{aligned} &\int_{S_{12}} \rho_1 \varepsilon_1\, dS_{12} + \int_{S_{13}} \rho_1 \varepsilon_1\, dS_{13} = 0,\\ &\int_{S_{12}} \rho_2 \varepsilon_2\, dS_{12} + \int_{S_{23}} \rho_2 \varepsilon_2\, dS_{23} = 0. \end{aligned}\right.$$

Si l'on remarque que les densités ρ_1, ρ_2 ont des valeurs constantes le long de la surface S_{12}, ces égalités peuvent s'écrire

$$(26)\qquad \left\{\begin{aligned} &\rho_1 \int_{S_{12}} \varepsilon_1\, dS_{12} + \int_{S_{13}} \rho_1 \varepsilon_1\, dS_{13} = 0,\\ &\rho_2 \int_{S_{12}} \varepsilon_2\, dS_{12} + \int_{S_{23}} \rho_2 \varepsilon_2\, dS_{23} = 0. \end{aligned}\right.$$

On peut même assujettir un tel déplacement à ne pas déformer la surface de séparation S_{12}; dans ce cas, les égalités (26) deviennent

$$\int_{S_{13}} \rho_1 \varepsilon_1\, dS_{13} = 0, \qquad \int_{S_{23}} \rho_2 \varepsilon_2\, dS_{23} = 0$$

ou bien, en vertu de l'égalité (11),

$$(27)\qquad \left\{\begin{aligned} &\delta f \int_{S_{13}} \rho_1 \cos(N,x)\, dS_{13} + \delta g \int_{S_{13}} \rho_1 \cos(N,y)\, dS_{13} + \delta h \int_{S_{13}} \rho_1 \cos(N,z)\, dS_{13}\\ &\qquad + \delta l \int_{S_{13}} \rho_1 [y\cos(N,z) - z\cos(N,y)]\, dS_{13}\\ &\qquad + \delta m \int_{S_{13}} \rho_1 [z\cos(N,x) - x\cos(N,z)]\, dS_{13}\\ &\qquad + \delta n \int_{S_{13}} \rho_1 [x\cos(N,y) - y\cos(N,x)]\, dS_{13} = 0, \end{aligned}\right.$$

et une égalité analogue, qui se déduit de la précédente en remplaçant l'indice 1 par l'indice 2, et que nous désignerons par (27 *bis*).

Lorsque les six quantités δf, δg, δh, δl, δm, δn vérifient ces deux relations (27) et (27 *bis*) on peut prendre :

$\delta \rho_1 = 0$, en tout point du fluide 1;
$\delta \rho_2 = 0$, en tout point du fluide 2;
$\varepsilon_1 = 0$, en tout point de la surface S_{12}.

L'inégalité (24) se réduit alors à

$$Q > 0.$$

Cette inégalité nous donne une SECONDE CONDITION NÉCESSAIRE POUR LA STABILITÉ DE L'ÉQUILIBRE DU SYSTÈME :

La forme quadratique Q *des six variables* δf, δg, δh, δl, δm, δn *doit être une forme définie positive toutes les fois que ces six variables vérifient les deux relations linéaires et homogènes* (27) *et* (27 *bis*).

Nous venons de trouver deux conditions qui sont nécessaires pour que l'équilibre du système soit un équilibre stable; mais il n'est pas prouvé que ces conditions suffisent à assurer la stabilité de cet équilibre; inversement, nous pouvons énoncer deux CONDITIONS QUI SUFFISENT A ASSURER LA STABILITÉ DE L'ÉQUILIBRE DU SYSTÈME; mais la seconde de ces conditions peut n'être pas nécessaire.

Voici ces conditions :

1° *La force extérieure n'est pas nulle en tous les points d'une aire d'étendue finie, prise sur la surface de contact des deux fluides; en tout point de cette surface où elle est différente de* 0, *elle est dirigée vers l'intérieur du fluide le plus dense.*

2° *La forme quadratique* Q *des six variables* δf, δg, δh, δl, δm, δn *est une forme définie positive, quelles que soient les valeurs attribuées à ces variables; ou, du moins, elle ne devient nulle que pour des valeurs de ces variables qui ne vérifient pas à la fois les égalités* (27) *et* (27 *bis*).

Considérons, en effet, la quantité $\delta^2(\mathcal{F} + \Omega + \Omega')$ donnée par l'égalité (22); notre première condition empêche le troisième terme d'être jamais négatif; notre seconde condition produit le même effet sur le quatrième terme; quant aux deux premiers, en vertu des inégalités (23), ils ne sont jamais négatifs. De plus, les quatre termes ne pourront être simultanément égaux à o; le quatrième, en effet, ne peut devenir égal à o que pour des valeurs de δf, δg, δh, δl, δm, δn qui ne vérifient pas à la fois les deux relations (27) et (27 *bis*); dans ce cas, l'un au moins des trois premiers termes, doit être différent de zéro.

§ III. — *Cas où les deux fluides confinent par une surface illimitée.*

La surface fixe qui enferme les deux fluides et le flotteur a des dimensions limitées; mais il peut se faire que la fonction potentielle V puisse se prolonger indéfiniment d'une manière analytique en dehors de cette surface; on pourra alors supposer que l'on prenne successivement des surfaces closes de plus en plus grandes, et que l'on donne à la surface de contact des deux fluides des dimensions de plus en plus grandes. C'est dans ce cas que nous allons maintenant nous placer.

Nous remarquerons, en premier lieu, que lorsqu'on étend ainsi, de plus en plus, l'aire de la surface de contact des deux fluides, en prolongeant analytiquement cette surface, on ne modifie pas les valeurs des coefficients de la forme quadratique Q.

Supposons que la forme Q puisse être rendue négative par un choix convenable des six variations

$$\delta f,\quad \delta g,\quad \delta h,\quad \delta l,\quad \delta m,\quad \delta n.$$

Si ces six quantités ne vérifient pas les conditions (27) et (27 *bis*), et si la surface qui enferme les deux fluides et le flotteur a des dimensions données, il n'est pas certain que l'équilibre du flotteur ne soit pas stable; mais nous allons démontrer que, *si l'on suppose variables les dimensions de la surface de contact des deux fluides, on pourra toujours prendre l'aire de cette surface assez grande pour que, dans le cas considéré, l'équilibre du système ne soit plus stable.*

Prenons, en effet, une surface S_{12} déterminée.

Nous pourrons imposer au système une variation virtuelle définie de la manière suivante :

1° Les éléments du déplacement du corps solide ont les valeurs considérées δf, δg, δh, δl, δm, δn, qui donnent à Q une valeur négative;

2° La quantité $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2$ a la même valeur en tout point de la surface S_{12};

3° La quantité $\delta\rho_1$ a la même valeur en tout point du fluide 1;

4° La quantité $\delta\rho_2$ a la même valeur en tout point du fluide 2;

Ces diverses quantités sont liées par les relations qui expriment que chacun des fluides 1 et 2 garde une masse invariable; ces relations sont l'égalité

$$(28)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int_1 \delta\rho_1\, dv_1 - \int_{S_{12}} \rho_1 \varepsilon_1\, dS_{12} \\ &\quad + \delta f \int_{S_{13}} \rho_1 \cos(N,x)\, dS_{13} + \delta g \int_{S_{13}} \rho_1 \cos(N,y)\, dS_{13} \\ &\qquad\qquad + \delta h \int_{S_{13}} \rho_1 \cos(N,z)\, dS_{13} \\ &\quad + \delta l \int_{S_{13}} \rho_1 [y\cos(N,z) - z\cos(N,y)]\, dS_{13} \\ &\quad + \delta m \int_{S_{13}} \rho_1 [z\cos(N,x) - x\cos(N,z)]\, dS_{13} \\ &\quad + \delta n \int_{S_{13}} \rho_1 [x\cos(N,y) - y\cos(N,x)]\, dS_{13} = 0 \end{aligned} \right.$$

et une égalité, que nous désignerons par (28 *bis*), et qui se déduit de la précédente en permutant les indices 1 et 2.

Ce déplacement peut faire prendre à la quantité $\delta^2(\mathcal{F} + \Omega + \Omega')$ une valeur positive, bien que Q ait une valeur négative, car les trois termes

$$(\delta\rho_1)^2 \int_1 \frac{d^2\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1^2}\, dv_1, \quad (\delta\rho_2)^2 \int_2 \frac{d^2\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2^2}\, dv_2, \quad (\rho_1 - \rho_2)\varepsilon_1^2 \int_{S_{12}} \frac{\partial V}{\partial n_2}\, dS_{12}$$

ont des valeurs positives.

Faisons maintenant croître les dimensions de la surface close qui enferme le système; l'aire de la surface S_{12} est multipliée par le nombre λ; le volume occupé par le fluide 1 est multiplié par le nombre μ_1; le volume occupé par le fluide 2 est multiplié par le nombre μ_2.

On voit sans peine que l'on vérifiera les égalités (28) et (28 *bis*) en prenant pour ε_1, $\delta\rho_1$, $\delta\rho_2$ de nouvelles valeurs ε'_1, $\delta\rho'_1$, $\delta\rho'_2$, telles que

$$\lambda\varepsilon'_1 = \varepsilon_1, \qquad \mu_1\delta\rho'_1 = \delta\rho_1, \qquad \mu_2\delta\rho'_2 = \delta\rho_2.$$

Les valeurs des intégrales

$$\int_1 \frac{d^2\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1^2}\,dv_1, \quad \int_2 \frac{d^2\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2^2}\,dv_2, \quad \int_{S_{12}} \frac{\partial V}{\partial n_2}\,dS_{12}$$

seront multipliées par des nombres qui seront respectivement de l'ordre de μ_1, μ_2, λ. Par conséquent, dans l'expression de

$$\delta^2(\mathcal{F} + \Omega + \Omega'),$$

le terme Q, qui est négatif, gardera une valeur invariable, tandis que les valeurs positives des termes

$$(\delta\rho_1)^2\int_1 \frac{d^2\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1^2}\,dv_1, \quad (\delta\rho_2)^2\int_2 \frac{d^2\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2^2}\,dv_2, \quad (\rho_1-\rho_2)\varepsilon_1^2\int_{S_{12}} \frac{\partial V}{\partial n_2}\,dS_{12}$$

seront multipliées par des nombres de l'ordre de $\frac{1}{\mu_1}$, $\frac{1}{\mu_2}$, $\frac{1}{\lambda}$.

On pourra donc toujours prendre μ_1, μ_2, λ assez grands pour que la quantité $\delta^2(\mathcal{F} + \Omega + \Omega')$ soit négative, ce qui démontre la proposition énoncée.

Il résulte de cette proposition que si deux fluides, portant un flotteur, confinent par une surface illimitée, l'équilibre du système sera instable si la forme Q peut être rendue négative.

En rapprochant cette proposition de celles qui ont été démontrées au paragraphe précédent et qui sont indépendantes de l'aire de la surface de contact des deux fluides, nous arrivons à énoncer de la manière suivante les CONDITIONS NÉCESSAIRES ET SUFFISANTES *pour la* *stabilité de l'équilibre d'un corps flottant à la surface illimitée qui sépare deux fluides :*

1° *La force extérieure ne doit pas être nulle en tous les points d'une aire d'étendue finie prise sur la surface de contact des deux fluides ; en tout point où cette force est différente de zéro, elle doit être dirigée vers l'intérieur du fluide le plus dense ;*

2° *La forme quadratique* Q *ne doit être négative pour aucun ensemble de valeurs de* $\delta f, \delta g, \delta h, \delta l, \delta m, \delta n$; *elle ne doit pas être nulle pour un ensemble de valeurs des mêmes quantités vérifiant les égalités* (27) *ou* (27 *bis*).

Ainsi, dans le cas particulier où les deux fluides qui portent le flotteur confinent par une surface illimitée, le problème de la stabilité de l'équilibre des corps flottants est complètement résolu.

§ IV. — *Cas où les forces extérieures se réduisent à la pesanteur.*

Prenons l'axe des z dirigé vers le zénith; si les forces extérieures qui agissent sur le flotteur et sur le corps solide se réduisent à la pesanteur, et si nous désignons par g l'intensité de la pesanteur, nous aurons

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = g,$$
$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = g.$$

Les égalités données à la fin du § I, qui font connaître les coefficients A_{ij}, deviendront

$$A_{11} = 0,$$
$$A_{22} = 0,$$
$$A_{33} = -g\int_{S_{13}} \rho_1 \cos(N, z)\, dS_{13} - g\int_{S_{23}} \rho_2 \cos(N, z)\, dS_{23},$$
$$A_{44} = -g\int_{S_{13}} \rho_1 y[y\cos(N, z) - z\cos(N, y)]\, dS_{13}$$
$$- g\int_{S_{23}} \rho_2 y[y\cos(N, z) - z\cos(N, y)]\, dS_{23} - g\int_3 \rho_3 z\, dv_3,$$

$$A_{55} = -g\int_{S_{13}} \rho_1 x[x\cos(N,z) - z\cos(N,x)]\,dS_{13}$$
$$\quad - g\int_{S_{23}} \rho_2 x[x\cos(N,z) - z\cos(N,x)]\,dS_{23} - g\int_3 \rho_3 z\,dv_3,$$
$$A_{66} = 0,$$
$$A_{23} = -g\int_{S_{13}} \rho_1 \cos(N,y)\,dS_{13} - g\int_{S_{23}} \rho_2 \cos(N,y)\,dS_{23},$$
$$A_{31} = -g\int_{S_{13}} \rho_1 \cos(N,x)\,dS_{13} - g\int_{S_{23}} \rho_2 \cos(N,x)\,dS_{23},$$
$$A_{12} = 0,$$
$$A_{56} = g\int_{S_{13}} \rho_1[x^2\cos(N,y) - xy\cos(N,x)]\,dS_{13}$$
$$\quad + g\int_{S_{23}} \rho_2[x^2\cos(N,y) - xy\cos(N,x)]\,dS_{23} + g\int_3 \rho_3 y\,dv_3,$$
$$A_{64} = g\int_{S_{13}} \rho_1[y^2\cos(N,x) - yx\cos(N,y)]\,dS_{13}$$
$$\quad + g\int_{S_{23}} \rho_2[y^2\cos(N,x) - yx\cos(N,y)]\,dS_{23} + g\int_3 \rho_3 x\,dv_3,$$
$$A_{45} = g\int_{S_{13}} \rho_1[2xy\cos(N,z) - zy\cos(N,x) - zx\cos(N,y)]\,dS_{13}$$
$$\quad + g\int_{S_{13}} \rho_2[2xy\cos(N,z) - zy\cos(N,x) - zx\cos(N,y)]\,dS_{23},$$
$$A_{14} = -g\int_{S_{13}} \rho_1 y\cos(N,x)\,dS_{13} - g\int_{S_{23}} \rho_2 y\cos(N,x)\,dS_{23},$$
$$A_{25} = g\int_{S_{13}} \rho_1 x\cos(N,y)\,dS_{13} + g\int_{S_{23}} \rho_2 x\cos(N\,y)\,dS_{23},$$
$$A_{36} = -g\int_{S_{13}} \rho_1[x\cos(N,y) - y\cos(N,x)]\,dS_{13}$$
$$\quad - g\int_{S_{23}} \rho_2[x\cos(N,y) - y\cos(N,x)]\,dS_{23},$$
$$A_{15} = -g\int_{S_{13}} \rho_1 x\cos(N,x)\,dS_{13}$$
$$\quad + g\int_{S_{23}} \rho_2 x\cos(N,x)\,dS_{23} - g\int_3 \rho_3\,dv_3,$$
$$A_{26} = 0,$$

$$A_{34} = \quad g\int_{S_{13}} \rho_1 [z\cos(N,y) - 2y\cos(N,z)]\, dS_{13}$$
$$+ g\int_{S_{23}} \rho_2 [z\cos(N,y) - 2y\cos(N,z)]\, dS_{23},$$

$$A_{16} = 0,$$

$$A_{24} = -g\int_{S_{13}} \rho_1 y\cos(N,y)\, dS_{13}$$
$$- g\int_{S_{23}} \rho_2 y\cos(N,y)\, dS_{23} - g\int \rho_3\, dv_3,$$

$$A_{35} = \quad g\int_{S_{13}} \rho_1 [2x\cos(N,z) - z\cos(N,x)]\, dS_{13}$$
$$+ g\int_{S_{23}} \rho_2 [2x\cos(N,z) - z\cos(N,x)]\, dS_{23}.$$

Six de ces coefficients, les coefficients A_{11}, A_{22}, A_{66}, A_{12}, A_{26}, A_{16} sont égaux à o; nous ne devons pas nous en étonner; en effet, il est évident *a priori* que la forme Q doit être identiquement nulle lorsque l'on a

$$\delta h = 0, \qquad \delta m = 0, \qquad \delta n = 0.$$

Une modification, infiniment petite ou finie, qui consiste exclusivement en une translation du flotteur parallèlement à la surface de contact des deux fluides et une rotation autour d'un axe normal à cette surface ne change en rien la valeur du potentiel thermodynamique du système; pour de tels déplacements, l'équilibre du système est indifférent; c'est seulement lorsqu'on les exclut qu'il peut être question de stabilité de l'équilibre.

§ V. — *Cas où les deux fluides en contact sont homogènes.*

L'expression de la forme Q devient beaucoup plus simple lorsque l'on suppose homogènes les deux fluides 1 et 2, soit qu'on les regarde comme incompressibles, soit que l'on néglige les variations que la densité de chacun de ces fluides éprouve d'un point à l'autre par l'effet de la pesanteur.

Pour transformer, dans ce cas, l'expression des coefficients A_{ij}, nous ferons usage des formules bien connues

$$(29)\qquad \begin{cases} \int F\cos(n_e, x)\,dS = \int \frac{\partial F}{\partial x}\,dv, \\ \int F\cos(n_e, y)\,dS = \int \frac{\partial F}{\partial y}\,dv, \\ \int F\cos(n_e, z)\,dS = \int \frac{\partial F}{\partial z}\,dv, \end{cases}$$

dans lesquelles les intégrales des premiers membres s'étendent à une surface fermée S et les intégrales du second membre au volume v qu'enferme cette surface; n_e est la normale extérieure à la surface S.

Transformation du coefficient A_{33}. — Nous avons, d'après les formules du numéro précédent,

$$A_{33} = -g\rho_1 \int_{S_{13}} \cos(N, z)\,dS_{13} - g\rho_2 \int_{S_{23}} \cos(N, z)\,dS_{23}.$$

Prolongeons, à l'intérieur du solide, la surface plane S_{12}; soit S'_{12} ce prolongement; soit Σ l'aire de la surface S'_{12}; appliquons la troisième égalité (29) à la surface fermée que forment les surfaces S_{13} et S'_{12}; nous trouverons sans peine

$$\int_{S_{13}} \cos(N, z)\,dS_{13} + \int_{S'_{12}} \cos(n_2, z)\,dS'_{12} = 0.$$

Mais, en tout point de la surface S'_{12}, $\cos(n_2, z) = 1$, *si nous supposons le fluide* 2 *superposé au fluide* 1. L'égalité précédente nous donne alors

$$\int_{S_{13}} \cos(N, z)\,dS_{13} = -\Sigma.$$

Nous aurons de même

$$\int_{S_{23}} \cos(N, z)\,dS_{23} = \Sigma$$

et, partant,

$$A_{33} = g(\rho_1 - \rho_2)\Sigma.$$

Transformation des coefficients A_{44} *et* A_{55}. — Nous avons

$$A_{44} = - g\rho_1 \int_{S_{13}} [y^2 \cos(N, z) - zy \cos(N, y)]\, dS_{13}$$
$$- g\rho_2 \int_{S_{23}} [y^2 \cos(N, z) - zy \cos(N, y)]\, dS_{23} - g \int \rho_3 z\, dv_3.$$

La troisième égalité (29), appliquée à la surface fermée $S_{13}S'_{12}$, donne

$$(a) \quad \begin{cases} \displaystyle\int_{S_{13}} y^2 \cos(N, z)\, dS_{13} + \int_{S'_{12}} y^2\, dS'_{12} = 0. \\ \text{On a, de même,} \\ \displaystyle\int_{S_{23}} y^2 \cos(N, z)\, dS_{23} - \int_{S'_{12}} y^2\, dS'_{12} = 0. \end{cases}$$

La seconde égalité (29), appliquée à la même surface fermée, donne

$$\int_{S_{13}} zy \cos(N, y)\, dS_{13} = \int z\, dv'_1,$$

v'_1 étant le volume compris entre les surfaces S'_{12} et S_{13}.

On a, de même,

$$\int_{S_{23}} zy \cos(N, y)\, dS_{23} = \int z\, dv'_2,$$

v'_2 étant le volume compris entre les surfaces S_{23} et S'_{12}.

Soient

ξ, η_1, ζ_1 les coordonnées du centre de gravité du fluide 1 qui remplirait le volume v'_1;

ξ_2, η_2, ζ_2 les coordonnées du centre de gravité du fluide 2 qui remplirait le volume v'_2;

M'_1 la masse du premier fluide;

M'_2 la masse du second fluide.

Nous aurons, d'après les égalités précédentes,

$$(b) \qquad \begin{cases} \rho_1 \int_{S_{13}} zy \cos(N, y)\, dS_{13} = \zeta_1 M'_1, \\ \rho_2 \int_{S_{23}} zy \cos(N, y)\, dS_{23} = \zeta_2 M'_2. \end{cases}$$

Soient ξ_3, η_3, ζ_3 les coordonnées du centre de gravité du solide; M_3 sa masse; nous aurons

$$(c) \qquad \int_3 \rho_3 z\, dv_3 = M_3 \zeta_3.$$

Les égalités (a), (b) et (c) nous donneront

$$A_{44} = g(\rho_1 - \rho_2) \int_{S'_{12}} y^2\, dS'_{12} + g(M'_1 \zeta_1 - M'_2 \zeta_2 - M_3 \zeta_3),$$

Désignons par Ξ, H, Z les coordonnées du centre de gravité de l'ensemble des fluides déplacés par le corps solide; nous aurons

$$M'_1 \zeta_1 + M'_2 \zeta_2 = (M'_1 + M'_2) Z.$$

D'ailleurs, d'après le principe d'Archimède,

$$M'_1 + M'_2 = M_3.$$

On a donc, tout calcul fait,

$$A_{44} = g(\rho_1 - \rho_2) \int_{S'_{12}} y^2\, dS'_{12} + M_3 g (Z - \zeta_3).$$

On a de même

$$A_{55} = g(\rho_1 - \rho_2) \int_{S'_{12}} z^2\, dS'_{12} + M_3 g (Z - \zeta_3).$$

Transformation des coefficients A_{23}, A_{31}. — Nous avons

$$A_{23} = - g\rho_1 \int_{S_{13}} \cos(N, y)\, dS_{13} - g\rho_2 \int_{S_{23}} \cos(N, y)\, dS_{23}.$$

La deuxième égalité (29), appliquée à la surface fermée formée par S_{13} et S'_{12} donne

$$\int_{S_{13}} \cos(N, y)\, dS_{13} = 0.$$

On a également

$$\int_{S_{23}} \cos(N, y)\, dS_{23} = 0$$

et, par conséquent,

$$A_{23} = 0.$$

On a de même

$$A_{31} = 0.$$

Transformation des coefficients A_{56}, A_{64}. — Nous avons

$$\begin{aligned} A_{56} = \quad & g\rho_1 \int_{S_{13}} [x^2 \cos(N, y) - xy \cos(N, x)]\, dS_{13} \\ & + g\rho_2 \int_{S_{23}} [x^2 \cos(N, y) - xy \cos(N, x)]\, dS_{23} + g \int \rho_3 y\, dv_3 \end{aligned}$$

On trouve sans peine, par les égalités (29),

$$\int_{S_{13}} x^2 \cos(N, y)\, dS_{13} = 0, \qquad \int_{S_{23}} x^2 \cos(N, y)\, dS_{23} = 0,$$

$$\int_{S_{13}} xy \cos(N, x)\, dS_{13} = \int y\, dv'_1,$$

$$\int_{S_{23}} xy \cos(N, x)\, dS_{23} = \int y\, dv'_2,$$

en sorte que l'on peut écrire

$$A_{56} = g(M_3 \eta_3 - M'_1 \eta_1 - M'_2 \eta_2) = g M_3 (\eta_3 - H).$$

Mais le centre de gravité du flotteur et le centre de gravité de l'ensemble des fluides déplacés sont sur une même verticale; on a donc

$$\eta_3 - H = 0$$

et

$$A_{56} = 0.$$

On a de même

$$A_{64} = 0.$$

Transformation du coefficient A_{45}. — Nous avons

$$A_{45} = g\rho_1 \int_{S_{13}} [2xy\cos(N,z) - zy\cos(N,x) - zx\cos(N,y)]\, dS_{13}$$
$$+ g\rho_2 \int_{S_{23}} [2xy\cos(N,z) - zy\cos(N,x) - zx\cos(N,y)]\, dS_{23}.$$

On trouve sans peine, à l'aide des formules (29),

$$\int_{S_{13}} xy\cos(N,z)\, dS_{13} = -\int_{S'_{12}} xy\, dS'_{12},$$
$$\int_{S_{23}} xy\cos(N,z)\, dS_{23} = \int_{S'_{12}} xy\, dS'_{12},$$
$$\int_{S_{13}} z[y\cos(N,x) + x\cos(N,y)]\, dS_{13} = 0,$$
$$\int_{S_{23}} z[y\cos(N,x) + x\cos(N,y)]\, dS_{23} = 0$$

et, par conséquent,

$$A_{45} = -2g(\rho_1 - \rho_3)\int_{S'_{12}} xy\, dS'_{12}.$$

Transformation des coefficients A_{14}, A_{25}. — Nous avons

$$A_{14} = -g\rho_1 \int_{S_{13}} y\cos(N,x)\, dS_{13} - g\rho_2 \int_{S_{23}} y\cos(N,x)\, dS_{23}.$$

On trouve sans peine, par les formules (29),

$$\int_{S_{13}} y\cos(N,x)\, dS_{13} = 0, \qquad \int_{S_{23}} y\cos(N,x)\, dS_{23} = 0$$

et, par conséquent,

$$A_{14} = 0.$$

De même,

$$A_{25} = 0.$$

Transformation du coefficient A_{36}. — Il suffit de remarquer que l'on a

$$A_{36} = -(A_{14} + A_{25})$$

pour trouver

$$A_{36} = 0.$$

Transformation des coefficients A_{15}, A_{24}. — Nous avons

$$\begin{aligned} A_{15} = {} & g\rho_1 \int_{S_{13}} x \cos(N, x)\, dS_{13} \\ & + g\rho_2 \int_{S_{23}} x \cos(N, x)\, dS_{23} - g \int \rho_3\, dv_3. \end{aligned}$$

Les formules (29) donnent

$$\int_{S_{13}} x \cos(N, x)\, dS_{13} = v'_1,$$

$$\int_{S_{23}} x \cos(N, x)\, dS_{23} = v'_2.$$

On a donc

$$A_{15} = g(M'_1 + M'_2 - M_3).$$

Mais, d'après le principe d'Archimède,

$$M'_1 + M'_2 = M_3.$$

On a donc

$$A_{15} = 0$$

et de même

$$A_{24} = 0.$$

Transformation des coefficients A_{34}, A_{35}. — Nous avons

$$\begin{aligned} A_{34} = {} & g\rho_1 \int_{S_{13}} [z \cos(N, y) - 2y \cos(N, z)]\, dS_{13} \\ & + g\rho_2 \int_{S_{23}} [z \cos(N, y) - 2y \cos(N, z)]\, dS_{23}. \end{aligned}$$

Les formules (29) nous donnent sans peine

$$\int_{S_{13}} z \cos(N, y)\, dS_{13} = 0,$$

$$\int_{S_{23}} z \cos(N, y)\, dS_{23} = 0,$$

$$\int_{S_{13}} y \cos(N, z)\, dS_{13} = -\int_{S'_{12}} y\, dS'_{12},$$

$$\int_{S_{23}} y \cos(N, z)\, dS_{23} = \int_{S'_{12}} y\, dS'_{12}$$

et, par conséquent,

$$A_{34} = 2g(\rho_1 - \rho_2)\int_{S'_{12}} y\, dS'_{12}.$$

On a de même

$$A_{35} = -2g(\rho_1 - \rho_2)\int_{S'_{12}} x\, dS'_{12}.$$

Les calculs que nous venons de faire nous apprennent que, *dans le cas où le flotteur est porté par deux fluides homogènes soumis à la seule action de la pesanteur, la forme quadratique* Q *peut s'écrire*

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned} Q = {} & g(\rho_1 - \rho_2)\Sigma(\delta h)^2 \\ & + \left[g(\rho_1 - \rho_2)\int_{S'_{12}} y^2\, dS'_{12} + M_3 g(Z - \zeta_3)\right](\delta l)^2 \\ & + \left[g(\rho_1 - \rho_2)\int_{S'_{12}} x^2\, dS'_{12} + M_3 g(Z - \zeta_3)\right](\delta m)^2 \\ & - \left[2g(\rho_1 - \rho_2)\int_{S'_{12}} xy\, dS'_{12}\right]\delta l\, \delta m \\ & + \left[2g(\rho_1 - \rho_2)\int_{S'_{12}} y\, dS'_{12}\right]\delta h\, \delta l \\ & - \left[2g(\rho_1 - \rho_2)\int_{S'_{12}} x\, dS'_{12}\right]\delta h\, \delta m. \end{aligned}\right.$$

Cette forme donnée à la quantité Q suppose l'axe des z vertical et, par conséquent, le plan des xy horizontal; mais elle ne suppose rien de plus au sujet des axes de coordonnées. Par un choix plus particulier des axes de coordonnées, on peut lui donner une forme beaucoup plus simple.

En premier lieu, *imaginons que l'on fasse passer l'axe des z par le centre de gravité γ de l'aire Σ de la section à fleur d'eau* S'_{12}; nous aurons

$$(31) \qquad \int_{S'_{12}} x\,dS'_{12} = 0, \qquad \int_{S'_{12}} y\,dS'_{12} = 0.$$

En second lieu, si par le centre de gravité γ de la section à fleur d'eau on mène, dans le plan de cette section, un axe mobile, le moment d'inertie de l'aire de la section à fleur d'eau par rapport à cet axe D variera lorsqu'on fera tourner cet axe D autour du point γ. On sait qu'il existe une position de l'axe D pour laquelle le moment d'inertie est maximum, et une position de l'axe D pour laquelle le moment d'inertie est minimum; ces deux positions sont rectangulaires; on les nomme les *axes principaux d'inertie de la section* S'_{12}; les moments d'inertie de la section S'_{12} par rapport à ces axes sont les *moments d'inertie principaux* de cette section. *Prenons les axes* Ox, Oy, *parallèles aux axes principaux d'inertie de la section à fleur d'eau;* désignons par J_x, J_y les moments principaux d'inertie qui se rapportent respectivement à l'axe parallèle à Ox et à l'axe parallèle à Oy. Nous aurons

$$(32) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\int_{S'_{12}} y^2\,dS'_{12} = J_x, \\ &\int_{S'_{12}} x^2\,dS'_{12} = J_y, \\ &\int_{S'_{12}} xy\,dS'_{12} = 0. \end{aligned} \right.$$

En vertu des égalités (31) et (32), l'égalité (30) se réduit à

$$(33) \qquad \left\{ \begin{aligned} Q = {} & g(\rho_1 - \rho_2)\Sigma(\delta h)^2 \\ & + [g(\rho_1 - \rho_2)J_x + M_3 g(Z - \zeta_3)](\delta l)^2 \\ & + [g(\rho_1 - \rho_2)J_y + M_3 g(Z - \zeta_3)](\delta m)^2. \end{aligned} \right.$$

Dans le cas où les fluides 1 et 2 sont homogènes, les égalités (27) et (27 *bis*) se réduisent à la forme unique

$$\Sigma\,\delta h + \delta l \int_{S'_{12}} y\, dS'_{12} - \delta m \int_{S'_{12}} x\, dS'_{12} = 0. \tag{34}$$

Si l'on fait passer l'axe des z par le centre de gravité γ de la section à fleur d'eau, cette égalité se réduit à

$$\delta h = 0. \tag{35}$$

Les égalités (33) et (35) nous permettent de donner les CONDITIONS QUI SONT NÉCESSAIRES ET SUFFISANTES *pour la stabilité de l'équilibre d'un corps solide pesant flottant à la surface de séparation de deux fluides homogènes pesants.*

Si nous nous reportons à ce que nous avons dit à la fin du § II, nous pouvons énoncer les propositions suivantes :

1° Il est *nécessaire* que le fluide le moins dense soit superposé au fluide le plus dense, ce qu'exprime l'inégalité

$$\rho_1 - \rho_2 > 0. \tag{36}$$

Il est *nécessaire* que la forme Q soit positive pour tous les déplacements du solide qui vérifient l'égalité (35), ce qui, en vertu de l'égalité (33), donne les inégalités

$$\left\{ \begin{aligned} M_3 g(Z - \zeta_3) + g(\rho_1 - \rho_2) J_x > 0, \\ M_3 g(Z - \zeta_3) + g(\rho_1 - \rho_2) J_y > 0. \end{aligned} \right. \tag{37}$$

2° Il est *suffisant* que le fluide le moins dense soit superposé au fluide le plus dense et qu'en outre la quantité Q soit positive pour tous les déplacements du solide. Or ces conditions suffisantes sont vérifiées lorsque les conditions nécessaires (36) et (37) le sont.

Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

Pour que l'équilibre d'un corps solide pesant qui flotte à la surface de séparation de deux fluides homogènes pesants soit un *équilibre stable, il faut et il suffit que l'on ait les trois inégalités*

$$\rho_1 - \rho_2 > 0, \tag{36}$$

$$\left\{\begin{array}{l} M_3 g(Z-\zeta_3) + g(\rho_1-\rho_2)J_x > 0, \\ M_3 g(Z-\zeta_3) + g(\rho_1-\rho_2)J_y > 0. \end{array}\right. \tag{37}$$

On suppose exclus, bien entendu, les déplacements pour lesquels on aurait

$$\delta h = 0, \qquad \delta l = 0, \qquad \delta m = 0;$$

pour de tels déplacements, l'*équilibre du système est indifférent.*

Les conditions de stabilité obtenues sont indépendantes de l'aire de la surface de contact des deux fluides; par conséquent, *elles s'appliquent même au cas où les deux fluides sont en contact par une surface illimitée.*

Des deux inégalités (37), une seule est nécessaire; des deux moments d'inertie principaux, J_x, J_y, il en est un qui est plus petit que l'autre, à moins qu'ils ne soient égaux entre eux; soit j la plus petite des deux quantités J_x, J_y; les deux inégalités (37) pourront être remplacées par l'inégalité unique

$$M_3(Z-\zeta_3) + (\rho_1-\rho_2)j > 0. \tag{38}$$

On reconnaît sans peine dans cette inégalité la condition trouvée par Poisson et Duhamel et critiquée par Clebsch.

Nous pouvons donc, en dernière analyse, énoncer la proposition suivante :

POUR QUE L'ÉQUILIBRE D'UN CORPS SOLIDE PESANT QUI FLOTTE SUR LA SURFACE DE SÉPARATION, LIMITÉE OU ILLIMITÉE, DE DEUX FLUIDES HOMOGÈNES PESANTS SOIT UN ÉQUILIBRE STABLE, IL FAUT ET IL SUFFIT : 1° QUE LE FLUIDE LE MOINS DENSE SOIT SUPERPOSÉ AU FLUIDE LE PLUS DENSE; 2° QUE LE PETIT MÉTACENTRE SOIT AU-DESSUS DU CENTRE DE GRAVITÉ DU CORPS SOLIDE.

Nos formules générales nous redonnent donc la règle classique de la stabilité de l'équilibre des corps flottants; elles la démontrent par une méthode qui nous paraît exempte de toute contestation.

Il nous est possible maintenant d'expliquer pourquoi le raisonnement de M. Guyou, bien qu'inexact, conduisait dans le cas actuel à des conclusions exactes.

Le raisonnement de M. Guyou consiste, comme nous l'avons vu, à partager toute modification du système en trois modifications composantes :

1° Une déformation de la surface de séparation des deux fluides;

2° Une translation verticale du corps flottant;

3° Un déplacement qui n'altère pas le volume immergé, c'est-à-dire une rotation autour d'un axe passant par le centre de gravité de l'aire de la section à fleur d'eau.

M. Guyou cherche la condition pour que le centre de gravité du système s'élève en chacune de ces modifications isolées; en d'autres termes, il cherche à rendre positive la variation seconde du potentiel relative à chacune des modifications isolées.

Il admet alors que la variation seconde du potentiel relative à la modification la plus générale du système est positive.

En général, ce raisonnement ne serait pas valable, parce que la variation seconde du potentiel d'un système relative à la modification la plus générale de ce système n'est pas la somme des variations secondes relatives à des modifications partielles en lesquelles la modification la plus générale peut se décomposer.

Mais cette proposition, qui n'est ordinairement pas vraie, se trouve être exacte dans le cas particulier qui nous occupe.

En effet, la variation seconde du potentiel thermodynamique du système est, pour la modification la plus générale, en vertu des égalités (20) et (33),

$$\begin{aligned}\delta^2(\mathfrak{F}+\Omega+\Omega') = (\rho_1-\rho_2)g\int_{S_{12}}\varepsilon_1^2\,dS_{12} + (\rho_1-\rho_2)g\Sigma(\delta h)^2 \\ +[(\rho_1-\rho_2)gJ_x + M_3 g(Z-\zeta_3)](\delta l)^2 \\ +[(\rho_1-\rho_2)gJ_y + M_3 g(Z-\zeta_3)](\delta m)^2.\end{aligned}$$

Or le premier terme représente précisément la variation seconde relative à la première modification composante considérée par M. Guyou; le deuxième terme représente la variation seconde relative à la deuxième modification composante; et les deux derniers termes représentent la variation seconde relative à la troisième modification composante. Ainsi la variation seconde du potentiel, relativement à la modification la plus générale est bien la somme des variations secondes relatives aux trois modifications partielles que M. Guyou a imaginées.

Mais l'exactitude de cette proposition tient à une circonstance particulière au cas que nous venons de traiter; cette circonstance, c'est l'absence de termes en $\delta l \, \delta h$ et en $\delta m \, \delta h$. Elle cesserait d'être exacte, même pour le cas de la pesanteur, si les deux fluides étaient assez compressibles pour cesser d'être sensiblement homogènes.