JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

GEORGES HUMBERT

Sur une surface du sixième ordre liée aux fonctions abéliennes de genre trois

Journal de mathématiques pures et appliquées 5e série, tome 2 (1896), p. 263-293.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1896_5_2__263_0>

Sur une surface du sixième ordre liée aux fonctions abéliennes de genre trois;

PAR M. GEORGES HUMBERT.

1. Les surfaces hyperelliptiques, pour lesquelles les coordonnées d'un point sont des fonctions quadruplement périodiques de deux paramètres, et que j'ai, après M. Picard, étudiées dans ce Journal (4[e] série, t. IX), peuvent être définies d'une manière purement géométrique. Soit, en effet, C une courbe de genre deux; imaginons qu'une surface algébrique S soit liée à C de telle sorte qu'à un couple de points de C corresponde un seul point de S, c'est-à-dire que les coordonnées cartésiennes d'un point de la surface puissent s'exprimer par les relations

$$X_i = F_i(\xi_1, \eta_1; \xi_2, \eta_2) \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{1}$$

où $\xi_1, \eta_1; \xi_2, \eta_2$ désignent les coordonnées de deux points quelconques de la courbe C, et les F_i des fonctions rationnelles, qui restent inaltérées quand on permute ξ_1, η_1 et ξ_2, η_2; il est clair que S sera une surface hyperelliptique. En effet, représentons par $g_1(\xi)\,d\xi$ et $g_2(\xi)\,d\xi$ deux différentielles abéliennes distinctes de première espèce appartenant à la courbe C; si l'on pose

$$g_1(\xi_1)\,d\xi_1 + g_1(\xi_2)\,d\xi_2 = du,$$
$$g_2(\xi_1)\,d\xi_1 + g_2(\xi_2)\,d\xi_2 = dv,$$

on sait, par la théorie de l'inversion, que toute fonction rationnelle symétrique en ξ_1, η_1 et ξ_2, η_2 est une fonction abélienne de u, v, à quatre paires de périodes; ce qui démontre la proposition.

Sous ce point de vue, les surfaces hyperelliptiques apparaissent comme un cas particulier de surfaces plus générales, qu'on obtient en remplaçant, dans la définition géométrique ci-dessus, la courbe C, de genre deux, par une courbe de genre quelconque, et dont on peut dire, plus brièvement, qu'*elles représentent les couples de points* d'une courbe quelconque. Le présent Mémoire a pour objet l'étude d'une de ces surfaces, qui correspond à une courbe de genre trois, et qui se trouve liée, d'une manière remarquable, à la surface de Kummer; ses propriétés conduisent aussi à quelques théorèmes simples sur la courbe plane du quatrième ordre.

2. Établissons d'abord une proposition relative au genre de nos surfaces, dans le cas général.

Supposons que la correspondance entre la surface S et la courbe C, de genre p, soit une correspondance *point par couple*, c'est-à-dire qu'à un couple de points de C corresponde un et un seul point de S, ainsi qu'on l'a admis plus haut, et, de plus, qu'à un point de S corresponde *un seul* couple sur C; il est aisé de déterminer le *genre* de la surface.

Ce genre en effet, par définition, est égal au nombre des intégrales doubles abéliennes, linéairement distinctes, de la forme

$$\int\int \varphi(X_1, X_2, X_3)\, dX_1\, dX_2,$$

qui restent finies sur toute la surface; or, en vertu des relations (1), une telle intégrale s'écrit

$$\int\int f(\xi_1, \eta_1; \xi_2, \eta_2)\, d\xi_1\, d\xi_2,$$

f étant une fonction rationnelle de $\xi_1, \eta_1; \xi_2, \eta_2$,

$$f = \varphi\left[\frac{\partial F_1}{\partial \xi_1}\frac{\partial F_2}{\partial \xi_2} - \frac{\partial F_1}{\partial \xi_2}\frac{\partial F_2}{\partial \xi_1}\right],$$

qui *change de signe* quand on y permute ξ_1, η_1 et ξ_2, η_2 (¹).

Or, pour que la nouvelle intégrale double reste finie, il est nécessaire que l'intégrale simple

$$\int f(\xi_1, \eta_1; \xi_2, \eta_2)\, d\xi_1,$$

où ξ_2, η_2 sont supposés constants, demeure finie sur la courbe C; ce sera donc une intégrale abélienne de première espèce appartenant à C, c'est-à-dire qu'on aura

$$f(\xi_1, \eta_1; \xi_2, \eta_2) = A_1 g_1(\xi_1) + \ldots + A_p g_p(\xi_1),$$

en désignant par $A_1, \ldots A_p$ des fonctions (rationnelles) de ξ_2, η_2 et par $g_i(\xi, \eta)\, d\xi$, ou plus simplement par $g_i(\xi)\, d\xi$, les p différentielles abéliennes de première espèce qui appartiennent à C. En raisonnant de même sur l'intégrale $\int f\, d\xi_2$, on voit que les A doivent être des combinaisons linéaires et homogènes des $g_i(\xi_2, \eta_2)$, en sorte qu'on a

$$f(\xi_1, \eta_1; \xi_2, \eta_2) = \sum a_{ik}\, g_i(\xi_1)\, g_k(\xi_2),$$

les a_{ik} désignant des constantes absolues. Pour que f change de signe quand on permute ξ_1, η_1 et ξ_2, η_2, il faut et il suffit que $a_{ik} = -a_{ki}$, c'est-à-dire que

$$f = \sum a_{ik} [g_i(\xi_1)\, g_k(\xi_2) - g_k(\xi_1)\, g_i(\xi_2)].$$

En donnant à i et k les valeurs $1, 2, \ldots p$ $(i \gtrless k)$, on obtient ainsi $\frac{1}{2} p(p-1)$ fonctions f, linéairement distinctes.

Inversement, f étant une de ces fonctions, il est clair que l'intégrale

$$\int\!\!\int f\, d\xi_1\, d\xi_2$$

(¹) $\dfrac{\partial F}{\partial \xi_1}$ désigne la dérivée de F par rapport à ξ_1, en considérant η_1 comme lié à ξ_1 par l'équation de la courbe C.

pourra se mettre sous la forme

$$\int\int \varphi(X_1, X_2, X_3)\, dX_1\, dX_2,$$

et φ sera une fonction rationnelle, car à un couple de points $\xi_1, \eta_{11}; \xi_2, \eta_{12}$, ne correspond, par hypothèse, qu'*un seul* point X_1, X_2, X_3 de la surface S; ainsi :

Une surface qui correspond point par couple à une courbe de genre p est de genre $\frac{1}{2}p(p-1)$.

Pour $p = 2$, le genre est 1, résultat connu de la théorie des surfaces hyperelliptiques.

Cas où la courbe est de genre trois.

3. Nous n'aborderons dans ce Mémoire que le cas de $p = 3$, et encore nous bornerons-nous à un exemple particulier; la courbe C est alors, si l'on veut, et sans que la généralité soit diminuée, une courbe plane du quatrième ordre.

On peut, dans ce cas, indiquer une représentation simple des coordonnées des points des surfaces correspondantes, à l'aide des fonctions abéliennes à six systèmes de périodes. Gardons, en effet, les notations des numéros précédents et posons

$$(2)\qquad \begin{cases} g_1(\xi_1)\,d\xi_1 + g_1(\xi_2)\,d\xi_2 + g_1(\xi_3)\,d\xi_3 = du, \\ g_2(\xi_1)\,d\xi_1 + \dots\dots\dots\dots\dots\dots = dv, \\ g_3(\xi_1)\,d\xi_1 + \dots\dots\dots\dots\dots\dots = dw. \end{cases}$$

Toute fonction rationnelle symétrique par rapport à $(\xi_1, \eta_{11}), (\xi_2, \eta_{12})$, (ξ_3, η_{13}) est une fonction abélienne de u, v, w; il en est de même si l'on suppose que le point ξ_3, η_{13} est fixe, mais alors u, v, w sont liés par une relation, qui est, comme on le sait,

$$(3)\qquad \mathfrak{S}_0(u-\lambda, v-\mu, w-\nu) = 0,$$

$\mathfrak{S}_0(u, v, w)$ désignant la fonction thêta abélienne d'ordre un, de caractéristique nulle, et λ, μ, ν des constantes.

En d'autre termes, en augmentant u, v, w de constantes convenables, on voit que les surfaces qui correspondent au cas de $p = 3$ peuvent être représentées paramétriquement par les équations

$$(4) \qquad X_i = \varphi_i(u, v, w) \qquad (i = 1, 2, 3),$$

où les φ_i sont des fonctions abéliennes, à six systèmes de périodes, des trois paramètres u, v, w, liés eux-mêmes par la relation

$$\mathfrak{S}(u, v, w) = 0,$$

où $\mathfrak{S}(u, v, w)$ est une des 64 fonctions thêta normales du premier ordre, qu'on peut choisir d'ailleurs à volonté.

4. Avant de définir par cette voie la surface particulière qui est l'objet de ce travail, rappelons ou indiquons quelques propriétés des fonctions thêta de genre trois.

Supposons d'abord que les six systèmes de périodes aient été ramenés à être

$$\begin{array}{cccccc} 2\pi i, & 0, & 0, & a, & b, & c; \\ 0, & 2\pi i, & 0, & b, & d, & e; \\ 0, & 0, & 2\pi i, & c, & e, & h; \end{array}$$

on appelle *fonction thêta normale*, d'ordre m, une fonction uniforme, entière, de u, v, w, vérifiant les relations

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} &\Theta(u + 2\pi i, v, w) = e^{\varepsilon_1 \pi i}\Theta(u, v, w), \\ &\Theta(u, v + 2\pi i, w) = e^{\varepsilon_2 \pi i}\Theta(u, v, w), \\ &\Theta(u, v, w + 2\pi i) = e^{\varepsilon_3 \pi i}\Theta(u, v, w), \\ &\Theta(u + a, v + b, w + c) = e^{\eta_1 \pi i} e^{-mu - m\frac{a}{2}}\Theta(u, v, w), \\ &\Theta(u + b, v + d, w + e) = e^{\eta_2 \pi i} e^{-mv - m\frac{d}{2}}\Theta(u, v, w), \\ &\Theta(u + c, v + e, w + h) = e^{\eta_3 \pi i} e^{-mw - m\frac{h}{2}}\Theta(u, v, w), \end{aligned} \right.$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \eta_1, \eta_2, \eta_3$ désignant o ou 1. L'ensemble des six nombres

$$\begin{matrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \end{matrix}$$

est dit la *caractéristique* de la fonction thêta; la caractéristique est dite *nulle* si les six nombres sont nuls.

D'après cela, pour tout ordre m, il y a 64 caractéristiques différentes, c'est-à-dire 64 systèmes de fonctions thêta normales; en particulier, il y a 64 fonctions thêta normales d'ordre *un*. Parmi ces fonctions 36 sont paires et 28 sont impaires; chacune s'annule pour 28 demi-périodes, c'est-à-dire pour 28 systèmes de valeurs de u, v, w compris dans les formules

$$\left.\begin{aligned} u &= l\pi i + p\frac{a}{2} + q\frac{b}{2} + r\frac{c}{2} \\ v &= m\pi i + p\frac{b}{2} + q\frac{d}{2} + r\frac{e}{2} \\ w &= n\pi i + p\frac{c}{2} + q\frac{e}{2} + r\frac{h}{2} \end{aligned}\right\} \qquad (l, m, n, p, q, r = 0 \text{ ou } 1).$$

5. L'algorithme suivant, que j'ai déjà fait connaître dans ce Journal (4ᵉ série, t. X, p. 473), établit un lien entre les 64 fonctions thêta et les demi-périodes annulant chacune d'elles.

Soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta$; $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$; $\alpha'', \beta'', \gamma'', \delta''$ *trois séries de quatre caractères; les* 64 *symboles* $\alpha\alpha'\alpha''$ *représenteront les* 64 *fonctions thêta normales d'ordre un et les* 64 *symboles* $(\alpha\alpha'\alpha'')$ *représenteront les* 64 *demi-périodes, de telle sorte* :

1° *Que les* 28 *demi-périodes annulant la fonction* $\alpha\alpha'\alpha''$ *soient représentées par les symboles* $(pp'p'')$, *où les caractères* $\alpha, \alpha', \alpha''$ *figurent, au total, un nombre impair de fois;*

2° *Que les* 28 *fonctions qui s'annulent pour la demi-période* $(\alpha\alpha'\alpha'')$ *soient également représentées par les symboles* $pp'p''$, *où les caractères* $\alpha, \alpha', \alpha''$ *figurent, au total, un nombre impair de fois.*

L'algorithme jouit de plus des propriétés suivantes :

I. Il peut être appliqué de telle sorte que deux fonctions thêta choisies à volonté aient deux symboles choisis à volonté.

II. Considérons le produit de fonctions thêta normales, d'ordre un, en nombre pair, telles que $\alpha\alpha'\alpha''$; $\beta\beta'\beta''$; ...; écrivons à la suite les uns des autres les caractères qui entrent dans les symboles de ces fonctions, et traitons cette expression comme un produit algébrique; elle sera de la forme

$$\alpha^h\beta^k\gamma^l\delta^m\alpha'^{h'}\beta'^{k'}\ldots\alpha''^{h''}\beta''^{k''}\ldots$$

Si les exposants h, k, l, m sont entre eux de même parité, ainsi que les exposants h', k', l', m' et les exposants h'', k'', l'', m'', le produit des fonctions thêta considérées (produit qui est évidemment une fonction thêta normale) aura sa caractéristique nulle.

De plus, si la somme $h+h'+h''$ est paire, ce produit sera une fonction paire de u, v, w, c'est-à-dire ne changera pas quand on changera simultanément les signes des trois variables.

Ces propriétés s'établissent par les raisonnements que nous avons employés dans le cas des fonctions thêta de deux variables (4[e] série de ce Journal, t. IX, p. 56-60).

Définition analytique d'une surface d'ordre six.

6. Soient ϑ_1 et ϑ_2 deux quelconques des 64 fonctions normales du premier ordre; nous pouvons les supposer représentées par les symboles

$$\alpha\alpha'\alpha'' \quad \text{pour} \quad \vartheta_1, \qquad \text{et} \qquad \alpha\alpha'\beta'' \quad \text{pour} \quad \vartheta_2.$$

Le produit $\vartheta_1\vartheta_2$ est une fonction normale d'ordre deux, paire ou impaire, de caractéristique non nulle. Il est clair que les 62 autres fonctions normales d'ordre un se groupent deux à deux de manière que le produit $\vartheta_i\vartheta_j$ des deux fonctions d'un groupe ait même caractéristique que le produit $\vartheta_1\vartheta_2$; on forme ainsi, au total, 32 produits $\vartheta_i\vartheta_j$, parmi lesquels 16 sont des fonctions paires et 16 des fonctions impaires. Dans notre notation symbolique, le produit des deux fonctions

$$pp'\alpha'' \quad \text{et} \quad pp'\beta''$$

a même caractéristique que $\vartheta_1\vartheta_2$ et même parité, c'est-à-dire est pair ou impair selon que $\vartheta_1\vartheta_2$ est pair ou impair ; le produit des fonctions

$$pp'\gamma'' \quad \text{et} \quad pp'\delta''$$

a même caractéristique que $\vartheta_1\vartheta_2$, mais a la parité contraire.

Or les fonctions thêta normales, d'ordre m, de caractéristique donnée, s'expriment en fonction linéaire et homogène de m^3 d'entre elles, linéairement distinctes ; si la caractéristique donnée n'est pas nulle, et si m est pair, on peut prendre, pour ces m^3 fonctions, $\frac{m^3}{2}$ fonctions paires et $\frac{m^3}{2}$ fonctions impaires. Il en résulte, en supposant $m = 2$, que les fonctions normales, d'ordre deux, de caractéristique non nulle et *paires* sont fonctions linéaires et homogènes de 4 d'entre elles ; de même pour les fonctions analogues *impaires*.

Ajoutons enfin que les fonctions normales, d'ordre pair, de caractéristique non nulle, et *paires*, s'annulent toutes pour 32 demi-périodes ; les fonctions analogues, *impaires*, s'annulent pour les 32 autres demi-périodes (*voir* ce Journal, 4e série, t. IX, p. 39-40).

7. Cela posé, désignons par $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \Theta_4$ quatre fonctions normales d'ordre deux, linéairement distinctes, ayant la caractéristique du produit $\vartheta_1\vartheta_2$, et la parité contraire ; considérons la surface $\mathfrak{S}$ définie paramétriquement par les relations

$$x_i = \Theta_i(u, v, w) \qquad i = 1, 2, 3, 4,$$

les arguments u, v, w étant liés par la relation

$$\vartheta_1(u, v, w) = 0.$$

Nous obtenons ainsi une surface représentant les couples de points d'une courbe de genre trois ; cherchons son ordre.

Observons à cet effet qu'à un point de $\mathfrak{S}$ correspondent (abstraction faite de périodes) les deux systèmes d'arguments u, v, w et $-u, -v, -w$; car ϑ_1 est une fonction paire ou impaire, et les quatre Θ_i sont simultanément paires ou impaires. De plus, les Θ_i s'annulent pour 32 demi-périodes (représentées par les symboles qui contiennent un des caractères γ'' ou δ'') et $\mathfrak{S}_1$ pour 28; et l'on reconnaît aisément que 12 demi-périodes annulent à la fois $\mathfrak{S}_1$ et les Θ_i; ce sont les 12 demi-périodes qui annulent simultanément $\mathfrak{S}_1$ et $\mathfrak{S}_2$. De là résulte la détermination de l'ordre de $\mathfrak{S}$.

Cet ordre est le nombre des solutions non fixes communes aux trois équations

$$a_1\Theta_1 + \ldots + a_4\Theta_4 = 0; \qquad b_1\Theta_1 + \ldots + b_4\Theta_4 = 0; \qquad \mathfrak{S}_1 = 0,$$

$a_1, \ldots, b_4$ étant des constantes; or, d'après M. Poincaré, trois fonctions thêta, de genre trois, d'ordres m, n, p, ont $6\,mnp$ solutions communes; nos trois équations en auront donc $6 \times 2 \times 2 = 24$, parmi lesquelles figurent 12 demi-périodes. Les autres solutions, au nombre de $24 - 12 = 12$, sont deux à deux égales et de signes contraires, de sorte qu'il ne leur correspond que $\frac{1}{2}\,12 = 6$ points de $\mathfrak{S}$. *La surface $\mathfrak{S}$ est donc du sixième ordre.*

Étude de la surface du sixième ordre $\mathfrak{S}$.

8. Quel est le genre de $\mathfrak{S}$? Cette surface ne correspond pas *point par couple* à une courbe C de genre trois, car à un point de $\mathfrak{S}$ répondent deux systèmes de valeurs de u, v, w, c'est-à-dire *deux* couples de points de C; le théorème du n° **2** n'est donc pas immédiatement applicable. Néanmoins le genre est 3, comme dans le cas général $[\frac{1}{2}p(p-1)]$, car les trois intégrales doubles

$$\int\!\!\int du\,dv, \quad \int\!\!\int du\,dw, \quad \int\!\!\int dv\,dw$$

restent finies à l'intérieur d'un parallélépipède des périodes; et, comme elles ne changent pas quand on change u, v, w en $-u, -v, -w$, ce sont des intégrales de première espèce sur la surface $\mathfrak{S}$. Celle-ci est dès lors de genre 3, car la première partie de la démonstration du n° **2** établit que le genre ne peut dépasser $\frac{1}{2}p(p-1)$, ici trois.

9. Avant d'aller plus loin, il est utile de préciser la forme des fonctions Θ_i, qui définissent la surface $\boldsymbol{\mathfrak{S}}$.

Observons que la fonction $\frac{\mathfrak{S}_2}{\mathfrak{S}_1}$ se reproduisant, au signe près, quand on augmente u, v, w d'une période, les trois dérivées partielles logarithmiques

$$\frac{1}{\mathfrak{S}_2}\frac{\partial \mathfrak{S}_2}{\partial u} - \frac{1}{\mathfrak{S}_1}\frac{\partial \mathfrak{S}_1}{\partial u}, \quad \frac{1}{\mathfrak{S}_2}\frac{\partial \mathfrak{S}_2}{\partial v} - \frac{1}{\mathfrak{S}_1}\frac{\partial \mathfrak{S}_1}{\partial v}, \quad \frac{1}{\mathfrak{S}_2}\frac{\partial \mathfrak{S}_2}{\partial w} - \frac{1}{\mathfrak{S}_1}\frac{\partial \mathfrak{S}_1}{\partial w}$$

ne changent pas dans cette substitution; donc les fonctions

$$\mathfrak{S}_2\frac{\partial \mathfrak{S}_1}{\partial u} - \mathfrak{S}_1\frac{\partial \mathfrak{S}_2}{\partial u}, \quad \mathfrak{S}_2\frac{\partial \mathfrak{S}_1}{\partial v} - \mathfrak{S}_1\frac{\partial \mathfrak{S}_2}{\partial v}, \quad \mathfrak{S}_2\frac{\partial \mathfrak{S}_1}{\partial w} - \mathfrak{S}_1\frac{\partial \mathfrak{S}_2}{\partial w}$$

sont des fonctions normales, d'ordre deux, de même caractéristique que le produit $\mathfrak{S}_1\mathfrak{S}_2$; de plus, elles sont évidemment la parité contraire de celle de ce produit. Dès lors, ces trois fonctions peuvent être prises pour les fonctions $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$.

Or puisque, sur la surface $\boldsymbol{\mathfrak{S}}$, $\mathfrak{S}_1$ est nul, on pourra représenter paramétriquement $\boldsymbol{\mathfrak{S}}$ par les équations

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \mathfrak{S}_2\frac{\partial \mathfrak{S}_1}{\partial u} \\ x_2 &= \mathfrak{S}_2\frac{\partial \mathfrak{S}_1}{\partial v} \\ x_3 &= \mathfrak{S}_2\frac{\partial \mathfrak{S}_1}{\partial w} \\ x_4 &= \Theta_4(u, v, w) \end{aligned}\right\} \quad \text{avec la relation :} \quad \mathfrak{S}_1(u, v, w) = 0.$$

Il résulte de là que les points de $\boldsymbol{\mathfrak{S}}$ donnés par l'équation $\mathfrak{S}_2(u, v, w) = 0$ se réduisent au point $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, que nous désignerons par O. Ce point est un point triple de la surface, car la droite $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, par exemple, coupe $\boldsymbol{\mathfrak{S}}$, en dehors de O, aux points dont les arguments vérifient les équations

$$(6) \qquad \frac{\partial \mathfrak{S}_1}{\partial u} = 0; \qquad \frac{\partial \mathfrak{S}_1}{\partial v} = 0; \qquad \mathfrak{S}_1 = 0;$$

or les fonctions $\frac{\partial \vartheta_1}{\partial u}$ et $\frac{\partial \vartheta_1}{\partial v}$, si l'on suppose u, v, w liés par la relation $\vartheta_1 = 0$, satisfont évidemment, quand on augmente u, v, w de périodes, aux mêmes relations (5) que la fonction ϑ_1 elle-même, c'est-à-dire qu'elles peuvent être considérées comme des fonctions thêta normales du premier ordre. Le théorème de M. Poincaré sur le nombre des solutions communes à trois fonctions thêta est dès lors applicable, de sorte que les équations (6) ont 6 solutions communes, auxquelles correspondent trois points distincts de $\mathfrak{S}$. Le point $\vartheta_2 = 0$ est donc bien un point triple.

10. Aux 28 demi-périodes qui annulent ϑ_1 correspondent, sur $\mathfrak{S}$, des lignes et des points remarquables.

D'abord, aux 12 demi-périodes annulant à la fois ϑ_1 et les quatre Θ_i [et dont les symboles sont $(\alpha\beta'\gamma'')$, $(\alpha\beta'\delta'')$; $(\alpha\gamma'\gamma'')$, $(\alpha\gamma'\delta'')$; $(\alpha\delta'\gamma'')$, $(\alpha\delta'\delta'')$; $(\beta\alpha'\gamma'')$, $(\beta\alpha'\delta'')$; $(\gamma\alpha'\gamma'')$, $(\gamma\alpha'\delta'')$; $(\delta\alpha'\gamma'')$, $(\delta\alpha'\delta'')$]; correspondent évidemment 12 *droites;* ces droites passent par le point triple O, car les 12 demi-périodes considérées annulent ϑ_2.

Aux 16 autres demi-périodes annulant ϑ_1 et non les Θ_i répondent, sur la surface $\mathfrak{S}$, seize points *doubles;* supposons en effet que l'une des demi-périodes soit $u = v = w = 0$; les fonctions Θ_i, ne s'annulant pas pour $u = v = w = 0$, et étant paires ou impaires, seront toutes paires, de sorte que, aux environs de $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$, on aura

$$\Theta_i = a_i + (A_i u^2 + B_i v^2 + C_i w^2 + D_i uv + E_i uw + F_i vw) + \ldots,$$

d'où l'on conclut aisément qu'une droite menée par le point $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$ de la surface $\mathfrak{S}$, a avec celle-ci deux intersections confondues au point considéré.

11. Étudions maintenant les courbes qu'on définit, sur $\mathfrak{S}$, en annulant les 62 fonctions thêta normales du premier ordre, autres que ϑ_1 et ϑ_2.

Parmi ces fonctions, il en est, comme on l'a dit, 32 qui, associées deux à deux, donnent des produits $\vartheta_i \vartheta_j$ ayant la caractéristique, mais non la parité, de $\vartheta_1 \vartheta_2$ (ce sont les couples de fonctions $pp'\gamma''$ et $pp'\delta''$); chacun de ces produits est fonction linéaire et homogène des quatre Θ_i, de sorte que les deux courbes qui ont pour équations, sur la surface $\mathfrak{S}$, $\vartheta_i = 0$ et $\vartheta_j = 0$ sont planes et situées dans un même plan. Leur ordre se détermine aisément; ϑ_i s'annule en effet pour 6 des demi-périodes annulant ϑ_1 et les quatre Θ_i; ϑ_j s'annule pour les 6 autres; l'ordre cherché de la courbe $\vartheta_i = 0$ est donc égal à $\frac{1}{2}[6 \times 2 - 6] = 3$. Observons de plus que ϑ_i et ϑ_j s'annulent simultanément pour 6 des 16 demi-périodes qui annulent ϑ_1 et non les quatre Θ_i (toutes ces propositions se vérifient par l'usage de l'algorithme).

On voit par là qu'il existe, sur la surface $\mathfrak{S}$, 32 *cubiques planes, situées par couples dans* 16 *plans;* des deux cubiques d'un même plan, la première rencontre 6 des 12 droites de la surface issues du point triple O, la deuxième rencontre les 6 autres; enfin elles passent toutes deux par 6 des 16 points doubles de $\mathfrak{S}$.

De là se déduit une conséquence importante : les 16 points doubles de $\mathfrak{S}$ forment une configuration de Kummer, c'est-à-dire sont situés 6 par 6 dans 16 plans, et de telle sorte qu'il passe 6 plans par chaque point. Cette dernière partie de la proposition s'établit en observant qu'une des 16 demi-périodes répondant aux points doubles annule douze fonctions ϑ_i, qui, égalées à zéro, donnent 12 cubiques planes, situées par couples dans six plans. Donc :

Les 16 *points doubles de la surface* $\mathfrak{S}$ *sont les points doubles d'une surface de Kummer*, K.

Il reste à étudier les 30 courbes qu'on obtient en annulant les 30 fonctions ϑ_h et ϑ_k, telles que le produit $\vartheta_h \vartheta_k$ ait la caractéristique et la parité du produit $\vartheta_1 \vartheta_2$ (ce sont les couples de fonctions $pp'\alpha''$ et $pp'\beta''$).

On voit immédiatement, en se servant de l'algorithme :

1° Que la fonction ϑ_h s'annule pour 4 des 12 demi-périodes qui annulent à la fois ϑ_1, ϑ_2 et les quatre Θ_i; 2° qu'elle s'annule pour 8 des 16 demi-périodes annulant ϑ_1 et non les Θ_i; 3° par suite, les équations $\vartheta_1 = 0$, $\vartheta_2 = 0$, $\vartheta_h = 0$ ont, en dehors des 4 demi-périodes ci-dessus (1°), deux solutions communes, égales et de signes contraires.

Il en résulte :

1° Que la courbe $\vartheta_h = 0$ est d'ordre $\frac{1}{2}[6 \times 2 - 4] = 4$, et rencontre quatre des douze droites de $\mathfrak{S}$; 2° qu'elle passe par huit des 16 points doubles de $\mathfrak{S}$; 3° qu'elle passe par le point triple, O, et y a un point simple.

D'après cela, la courbe $\vartheta_h = 0$, qui n'est évidemment pas plane, ne peut être qu'une biquadratique ou une unicursale gauche d'ordre quatre; nous verrons plus bas qu'elle est de genre un, ce qui écarte la seconde hypothèse. Il y a donc, sur $\mathfrak{S}$, *trente biquadratiques* passant par le point triple et, respectivement, par 8 des 16 points doubles : on reconnaît, par l'étude des demi-périodes correspondantes, que ces 8 points doubles forment, sur la surface de Kummer K, un des 30 octaèdres de Göpel, c'est-à-dire, en particulier, qu'ils sont la base d'un réseau (système linéaire doublement infini) de quadriques. Par les 8 points de chaque octaèdre et par le point triple O passe donc une biquadratique, qui coïncide nécessairement (comme la coupant en 9 points) avec une des trente biquadratiques situées sur $\mathfrak{S}$.

12. De là résulte une détermination géométrique de la surface $\mathfrak{S}$.

Soient K une surface de Kummer, O le point triple de $\mathfrak{S}$; par chaque système de huit points doubles de K, formant un octaèdre de Göpel, et par le point O, passe une biquadratique; les 30 biquadratiques ainsi définies sont sur la surface d'ordre six, $\mathfrak{S}$, qu'elles déterminent évidemment d'une manière complète.

La surface de Kummer K et le point O peuvent-ils être choisis arbitrairement? La surface K dépend (à une transformation homographique près) de trois invariants; quand elle est donnée, la position du point O comporte trois arbitraires, ce qui donne en tout 6 paramètres; or, la surface $\mathfrak{S}$ dépend de 6 paramètres, à savoir les 6 modules de la courbe de genre trois à laquelle elle correspond; il n'y a donc aucune liaison entre les trois invariants de la surface de Kummer et les coordonnées du point O par rapport à cette surface, c'est-à-dire que K et O sont complètement arbitraires.

13. Présentons une dernière remarque sur les 12 droites et les 30 biquadratiques de $\mathfrak{S}$; soient, comme plus haut, ϑ_h et ϑ_k deux fonctions thêta dont le produit a la caractéristique et la parité de $\vartheta_1\vartheta_2$;

on vérifie, à l'aide de l'algorithme, qu'elles s'annulent *simultanément* pour quatre des 12 demi-périodes qui correspondent aux 12 droites de $\mathfrak{S}$; de plus, ces demi-périodes sont associées deux à deux de telle sorte que toute fonction ϑ_h, s'annulant pour l'une d'elles, s'annule aussi pour l'autre. Géométriquement, on peut donc dire que les 30 biquadratiques sont *associées* deux à deux, les biquadratiques d'un couple rencontrant quatre mêmes droites de $\mathfrak{S}$; les 12 droites de $\mathfrak{S}$ sont également *associées* deux à deux, de telle sorte que toute biquadratique rencontrant une droite d'un couple rencontre également l'autre. Dans notre notation symbolique, les biquadratiques $pp'\alpha''$ et $pp'\beta''$ sont associées; de même les droites $(\alpha\beta'\gamma'')$ et $(\alpha\beta'\delta'')$ dont les symboles ont les deux premiers caractères communs.

Correspondance entre $\mathfrak{S}$ et la courbe plane d'ordre quatre.

14. Nous savons qu'à un couple de points de la courbe plane d'ordre quatre, C, correspond un et un seul point de $\mathfrak{S}$, mais qu'à un point de $\mathfrak{S}$ correspondent deux couples sur C; étudions de plus près cette relation.

Soient ξ_1, η_1 et ξ_2, η_2 deux points arbitraires de C; on a vu (n° **5**) qu'en posant

$$(7)\qquad \begin{cases} g_1(\xi_1)\,d\xi_1 + g_1(\xi_2)\,d\xi_2 = du, \\ g_2(\xi_1)\,d\xi_1 + g_2(\xi_2)\,d\xi_2 = dv, \\ g_3(\xi_1)\,d\xi_1 + g_3(\xi_2)\,d\xi_2 = dw, \end{cases}$$

et en déterminant convenablement les constantes d'intégration, u, v et w sont liés par la relation $\vartheta_1(u, v, w) = 0$; au couple (ξ_1, η_1), (ξ_2, η_2) sur C correspond le point u, v, w sur $\mathfrak{S}$. Au même point de $\mathfrak{S}$ correspondent les arguments $-u$, $-v$, $-w$, c'est-à-dire, sur C, le couple (ξ_3, η_3), (ξ_4, η_4), tel que

$$g_1(\xi_3)\,d\xi_3 + g_1(\xi_4)\,d\xi_4 = -\,du,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

d'où l'on tire

$$
\begin{aligned}
&g_1(\xi_1)\,d\xi_1 + g_1(\xi_2)\,d\xi_2 + g_1(\xi_3)\,d\xi_3 + g_1(\xi_4)\,d\xi_4 = 0,\\
&g_2(\xi_1)\,d\xi_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0,\\
&g_3(\xi_1)\,d\xi_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0;
\end{aligned}
$$

équations qui établissent, comme il est bien connu, que les points ξ_3, η_3 et ξ_4, η_4 sont les deux points où la droite joignant (ξ_1, η_1) et (ξ_2, η_2) coupe de nouveau C. Donc :

A deux couples de points situés en ligne droite sur la courbe C *correspond un seul et même point de la surface* $\mathfrak{S}$, *et réciproquement.*

Désignons maintenant par $G_i(\xi)$ l'intégrale $\int g_i(\xi)\,d\xi$; les relations (7) donnent, si l'on choisit convenablement les limites inférieures des intégrales,

$$
(8)\qquad \left\{
\begin{aligned}
G_1(\xi_1) + G_1(\xi_2) &= u,\\
G_2(\xi_1) + G_2(\xi_2) &= v,\\
G_3(\xi_1) + G_3(\xi_2) &= w,
\end{aligned}
\right.
$$

la relation $\vartheta_1(u, v, w) = 0$ étant toujours satisfaite. Cela posé, observons qu'une quelconque des fonctions thêta normales du premier ordre se déduit de ϑ_1 (à un facteur exponentiel près) en augmentant u, v, w d'une demi-période; en d'autres termes, aux points de la courbe $\vartheta_l(u, v, w) = 0$, sur $\mathfrak{S}$, correspondent, sur C, les couples de points ξ_1, ξ_2 et ξ'_1, ξ'_2, vérifiant les relations

$$
\begin{aligned}
G_1(\xi_1) + G_1(\xi_2) &= G_1(\xi'_1) + G_1(\xi'_2) + \frac{\mathfrak{L}_1}{2},\\
G_2(\xi_1) + G_2(\xi_2) &= G_2(\xi'_1) + G_2(\xi'_2) + \frac{\mathfrak{L}_2}{2},\\
G_3(\xi_1) + G_3(\xi_2) &= G_3(\xi'_1) + G_3(\xi'_2) + \frac{\mathfrak{L}_3}{2}.
\end{aligned}
$$

Désignons par ξ_3, ξ_4 les deux points de C en ligne droite avec ξ'_1 et ξ'_2;

les équations précédentes s'écrivent

$$\left.\begin{aligned}\sum_j G_1(\xi_j) &= \frac{\mathfrak{P}_1}{2},\\ \sum_j G_2(\xi_j) &= \frac{\mathfrak{P}_2}{2},\\ \sum_j G_3(\xi_j) &= \frac{\mathfrak{P}_3}{2};\end{aligned}\right\} \quad j=1,2,3,4,$$

$\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$ étant une période. Ces relations montrent que les quatre points ξ_j sont les points de contact de la courbe C avec une conique quadritangente; en d'autres termes, aux couples que forment les quatre points où C est touchée par une conique quadritangente variable, appartenant à un des 63 systèmes de coniques inscrites, correspond, sur la surface $\mathfrak{S}$, une des 63 courbes $\vartheta_h = 0\,(h>1)$. Ces 63 courbes sont, comme on l'a vu, les 32 cubiques planes, les 30 biquadratiques et le point triple, ou plutôt le cône des tangentes au point triple; d'après ce qui précède, chacune d'elles correspond, point par tangente, à l'enveloppe des droites joignant deux à deux, sur C, les quatre points de contact des coniques inscrites d'un même système. Or, ces droites enveloppent, comme on sait, une courbe générale de troisième classe (de genre un), la *Cayleyenne* du système; les courbes $\vartheta_h = 0$ de la surface $\mathfrak{S}$ sont donc *de genre un*, ce qui montre que les 32 cubiques planes n'ont pas de point double, et que les 30 courbes gauches d'ordre quatre sont bien des biquadratiques.

Nous n'insisterons pas davantage sur ces correspondances, dont une image géométrique plus nette sera indiquée dans la suite.

Génération géométrique de la surface $\mathfrak{S}$.

15. Soient $K(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ l'équation d'une surface quelconque d'ordre quatre; α_1, α_2, α_3, α_4 les coordonnées d'un point extérieur, O. Une sécante quelconque issue de O coupe K en quatre points, a_1, a_2, a_3, a_4, qui se répartissent, de trois manières, en deux couples.

Soit a_1, a_2 et a_3, a_4 un de ces groupements; les couples a_1, a_2

et a_3, a_4 déterminent sur la sécante une involution du second ordre, dans laquelle le point O a un conjugué, m. Cette construction donne trois points m sur toute sécante menée par O; le lieu des points m, quand la sécante tourne autour de O, est une surface du sixième ordre, dont la Géométrie analytique donne aisément l'équation. Cette équation est

$$(9) \quad K(x_1,\ldots,x_4)\,H^2(x_1,\ldots,x_4) - K(\alpha_1,\ldots,\alpha_4)\,P^2(x_1,\ldots,x_4) = 0,$$

où P et H désignent respectivement les premiers membres des équations de la première et de la troisième polaire du point O par rapport à la surface $K = 0$, c'est-à-dire

$$P = \alpha_1 \frac{\partial K}{\partial x_1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \ldots + \alpha_4 \frac{\partial K}{\partial x_4},$$

$$6H = \alpha_1^3 \frac{\partial^3 K}{\partial x_1^3} + 3\alpha_1^2\alpha_2 \frac{\partial^3 K}{\partial x_1^2\,\partial x_2} + \ldots + \alpha_4^3 \frac{\partial^3 K}{\partial x_4^3}.$$

Si K est une surface de Kummer, je dis que la surface du sixième ordre (9) ainsi définie coïncide avec la surface $\mathfrak{S}$ dont les seize points doubles seraient ceux de K, et dont le point triple serait O; il suffit, pour cela, d'établir (n° **12**) que la surface (9) contient les 30 biquadratiques menées par O et par les sommets de chacun des octaèdres de Göpel que forment les 16 points doubles de K.

Considérons un de ces groupes de 8 points : ils sont, comme on sait, la base d'un réseau ponctuel de quadriques, dont les génératrices rectilignes forment un complexe du troisième ordre; sur chaque génératrice, les quadriques du réseau déterminent une involution. Cela posé, soit m un point quelconque de la biquadratique menée par O et par les points de base du réseau; la droite Om appartient au complexe, et les points O et m sont conjugués dans l'involution déterminée sur cette droite par les quadriques du réseau. D'un autre côté, désignons par a_1, a_2, a_3, a_4 les points où la droite Om coupe la surface de Kummer, K : sur cette surface, on sait qu'il existe une infinité simple de biquadratiques passant par les 8 points du groupe considéré; une de ces biquadratiques passe donc par a_1, je dis qu'elle passe aussi par un des points a_2, a_3, a_4. En effet, toute biquadratique passant par les 8 points de base et coupant en un point une droite du complexe, la coupe en un second point; donc, puisque Om est une droite du complexe, la biquadratique qui passe par a_1 passe par a_2; de même, celle qui passe par a_3 passe aussi par a_4. Il en résulte que les couples a_1 et a_2, a_3 et a_4, O et m sont trois couples d'une même involution sur la sécante Om, c'est-à-dire que m est sur la surface (9). Cette surface contient donc les 30 biquadratiques considérées, c'est-à-dire coïncide avec la surface $\mathfrak{S}$ qui a pour points doubles les 16 points doubles de K, et pour triple O. C. Q. F. D.

16. L'équation (9) et le mode de génération correspondant mettent en évidence plusieurs propriétés de la surface $\mathfrak{S}$. D'abord cette surface admet pour ligne double une cubique plane, intersection de la première polaire ($P = 0$) et du plan polaire ($H = 0$) du point O par rapport à la surface de Kummer K; de plus, les deux surfaces $\mathfrak{S}$ et K se touchent le long de la courbe de contact de la surface K avec le cône qui lui est circonscrit à partir de O : cela résulte immédiatement de l'équation (9), qui montre aussi que les 16 points doubles de K sont des points doubles de $\mathfrak{S}$.

La génération géométrique fait voir ensuite que $\mathfrak{S}$ contient les douze tangentes doubles menées de O à la surface de Kummer; ces droites rencontrant nécessairement la cubique double, le cône des tangentes de $\mathfrak{S}$ au point triple O coïncide avec le cône de sommet O qui a la cubique double pour directrice.

17. On peut aussi, en partant de la génération géométrique, retrouver le lien qui rattache la surface $\mathfrak{S}$ à la courbe d'ordre quatre ou aux fonctions abéliennes de genre trois.

On sait, en effet, d'après un beau théorème de M. Klein, qu'à toute répartition en deux couples des quatre points où une droite Δ coupe la surface de Kummer K, correspond une répartition en deux couples des quatre plans tangents menés à K par Δ, et réciproquement. Supposons que la droite Δ passe par O; les plans tangents menés à K par Δ toucheront le cône de quatrième classe $\mathfrak{C}$ circonscrit à K à partir du point O. Soient maintenant Π_1 et Π_2 deux plans tangents arbitraires du cône $\mathfrak{C}$; Δ leur droite d'intersection; Π_3 et Π_4 les deux autres plans tangents menés au cône $\mathfrak{C}$ par Δ : les quatre points où Δ coupe la surface de Kummer se répartissent en deux couples, correspondant aux couples de plans tangents Π_1, Π_2 et Π_3, Π_4 ; à cette répartition correspond un et un seul point m, de la surface $\mathfrak{S}$, point situé sur Δ. En d'autres termes, à deux plans tangents du cône $\mathfrak{C}$ correspond un point m, de $\mathfrak{S}$; à un point m de $\mathfrak{S}$ correspondent deux couples de plans tangents de $\mathfrak{C}$, ces quatre plans ayant une droite commune. C'est là précisément, sous forme *corrélative,* la relation signalée au n° **14** entre la surface $\mathfrak{S}$ et la courbe plane du quatrième ordre.

Ce mode de correspondance conduit à une conséquence simple : laissons fixe le plan Π_1 ; quand Π_2 variera, le point correspondant m de la surface $\mathfrak{S}$ reste dans le plan Π_1, où il décrit évidemment une courbe qui répond au cône $\mathfrak{C}$ point par génératrice. Cette courbe est donc de genre trois et a les mêmes modules que le cône; en d'autres termes :

Les sections de la surface $\mathfrak{S}$ par les plans menés du point triple, tangentiellement à la surface de Kummer, sont des courbes du sixième ordre, de genre trois, et de mêmes modules. Leurs modules sont ceux du cône de quatrième classe enveloppé par les plans considérés.

Sections de la surface $\mathfrak{S}$ par les surfaces adjointes.

18. L'emploi des fonctions abéliennes permet d'étudier assez simplement les courbes tracées sur la surface $\mathfrak{S}$, et, en particulier, les sections par les surfaces adjointes. La surface ayant une cubique plane double et un point triple, ses adjointes passeront simplement par la cubique et par le point; en particulier, les adjointes d'ordre deux se décomposeront en deux plans, dont l'un est celui de la courbe double et l'autre un plan quelconque mené par le point triple : elles sont donc en nombre doublement infini, comme on le savait *a priori,* puisque $\mathfrak{S}$ est de genre trois.

Proposons-nous d'abord de trouver l'équation des courbes découpées sur $\mathfrak{S}$ par les adjointes du troisième ordre : sans indiquer ici la méthode générale applicable à toutes les surfaces de même nature que $\mathfrak{S}$, nous profiterons de propriétés géométriques de cette surface pour parvenir directement au résultat.

19. Nous nous appuierons pour cela sur la propriété suivante. Sur une surface algébrique $S(X, Y, Z) = 0$ d'ordre n, les intégrales doubles abéliennes qui ne deviennent infinies que le long de la section plane (choisie au hasard), $Q(X, Y, Z) = 0$, sont comprises dans la formule

$$\int\!\!\int \frac{dX\,dY}{S'_Z}\,\frac{F(X,Y,Z)}{Q^q},$$

q étant un entier et $F(X, Y, Z)$ le premier membre de l'équation d'une surface d'ordre $n+q-4$, *adjointe à* $S = 0$. En particulier, si l'élément de l'intégrale est infini du premier ordre le long de la section, $q = 1$.

Cela posé, observons que, d'après le n° **9**, la surface $\mathfrak{S}$ est représentée paramétriquement par les équations

$$X = \frac{\partial \Im_1}{\partial u}\,\frac{\Im_2}{\Theta_4}, \qquad \ldots, \qquad Z = \frac{\partial \Im_1}{\partial v}\,\frac{\Im_2}{\Theta_4};$$

d'ailleurs $\int\!\!\int du\,dv$ est une intégrale de première espèce; elle s'écrit

$$\int\!\!\int \frac{du\,dv}{\left(\dfrac{\partial \Im_1}{\partial v}\right)}\,\frac{\Theta_4}{\Im_2}\,Z,$$

et l'on a, d'après la forme générale des intégrales de première espèce sur la surface $S = 0$ (ici $\mathfrak{S}$),

$$\int\!\!\int \frac{du\,dv}{\left(\dfrac{\partial \Im_1}{\partial v}\right)}\,\frac{\Theta_4}{\Im_2}\,Z = \int\!\!\int \frac{dX\,dY}{S'_Z}\,R(X, Y, Z),$$

$R = 0$ étant une surface adjointe d'ordre $n - 4 = 2$, qui se décompose (n° **18**) en deux plans, dont l'un est celui $H(X, Y, Z) = 0$, de la courbe double, et l'autre un plan mené par O, lequel est évidemment le plan $Z = 0$. On a donc

$$\frac{du\,dv}{\left(\dfrac{\partial \Im_1}{\partial v}\right)} = \frac{dX\,dY}{S'_Z}\,H\,\frac{\Im_2}{\Theta_4}. \tag{10}$$

Admettons maintenant, pour abréger le langage, que la fonction désignée jusqu'ici par $\mathfrak{S}_2(u, v, w)$ soit la fonction thêta normale, d'ordre un, *de caractéristique nulle* (cette fonction est paire); et désignons par $\theta(u, v, w)$ une fonction thêta normale, d'ordre trois, de caractéristique nulle et paire [il y a 14 de ces fonctions linéairement distinctes (¹)]. Considérons l'intégrale double

$$(11) \qquad J = \int\int \frac{\theta(u, v, w)}{\Theta(u, v, w)} \frac{du\, dv}{\left(\frac{\partial \mathfrak{S}_1}{\partial w}\right)},$$

où $\Theta(u, v, w)$ est une combinaison linéaire et homogène quelconque des quatre fonctions Θ_i; on peut l'écrire, d'après (10),

$$J = \int\int \frac{dX\, dY}{S'_Z} H \frac{\mathfrak{S}_2 \theta}{\Theta_4 \Theta}.$$

Or, la fonction $\frac{\mathfrak{S}_2 \theta}{\Theta_4 \Theta}$ est une fonction abélienne *paire :* elle peut donc, lorsque u, v, w sont liés par la relation $\mathfrak{S}_1 = 0$, s'exprimer rationnellement en fonction des coordonnées X, Y, Z, d'un point de la surface $\mathfrak{S}$; c'est-à-dire que

$$J = \int\int \frac{dX\, dY}{S'_Z} \frac{M(X, Y, Z)}{N(X, Y, Z)}$$

M et N étant des polynomes. Or l'intégrale J, d'après la forme (11), ne devient infinie que pour les valeurs de u, v, w annulant simultanément $\mathfrak{S}_1$ et Θ, c'est-à-dire pour les points de $\mathfrak{S}$ situés dans le plan de la section plane $\Theta = 0$. Si donc $Q(X, Y, Z)$ est l'équation de ce plan, on aura $\frac{M}{N} = \frac{F}{Q}$, F étant le premier membre de l'équation d'une surface *adjointe* d'ordre trois. Finalement on a

$$\frac{du\, dv}{\left(\frac{\partial \mathfrak{S}_1}{\partial w}\right)} \frac{\theta(u, v, w)}{\Theta(u, v, w)} = \frac{dX\, dY}{S'_Z} \frac{F(X, Y, Z)}{Q(X, Y, Z)},$$

(¹) Car, en général, il y a $\frac{1}{2}[n^3 + 1]$ fonctions thêta d'ordre impair, n, de caractéristique nulle et *paires*.

ce qui montre que la courbe $\theta(u, v, w) = 0$, sur $\mathfrak{S}$, est située sur la surface cubique adjointe $F = 0$.

Ainsi, $\theta(u, v, w)$ étant une fonction thêta quelconque, d'ordre trois, de caractéristique nulle, et paire, la courbe $\theta(u, v, w) = 0$ est l'intersection de la surface $\mathfrak{S}$ avec une surface adjointe du troisième ordre. Or il y a 14 fonctions $\theta(u, v, w)$ linéairement distinctes, parmi lesquelles *quatre* contiennent $\mathfrak{D}_1$ en facteur (ce sont celles qui proviennent de la multiplication de $\mathfrak{D}_1$ par les quatre fonctions thêta distinctes du second ordre, de même caractéristique et de même parité que $\mathfrak{D}_1 \mathfrak{D}_2$); il reste donc *dix* fonctions $\theta(u, v, w)$, auxquelles correspondent autant de surfaces cubiques adjointes linéairement distinctes. Mais d'ailleurs il n'y a que *dix* surfaces cubiques linéairement distinctes adjointes à $\mathfrak{S}$, puisque ces surfaces doivent passer par une cubique plane et un point non situé dans le plan de cette courbe; il en résulte que, réciproquement, toute surface cubique adjointe coupe $\mathfrak{S}$ suivant une ligne dont l'équation est de la forme $\theta(u, v, w) = 0$. Donc :

Les courbes communes à $\mathfrak{S}$ et à ses adjointes d'ordre trois ont pour équation générale $\theta(u, v, w) = 0$, en désignant par θ une fonction normale d'ordre trois, paire, et de caractéristique nulle; et réciproquement.

20. La fonction $\theta(u, v, w)$ peut contenir $\mathfrak{D}_2$ en facteur : la surface cubique adjointe correspondante a alors un point *double* en O, et l'on en conclut aisément que :

Les courbes communes à $\mathfrak{S}$ et à ses adjointes d'ordre trois qui ont un point double en O *(point triple de $\mathfrak{S}$) ont pour équation générale $\eta(v, u, w) = 0$, en désignant par η une fonction normale d'ordre deux (paire) et de caractéristique nulle; et réciproquement.*

Ces résultats se généraliseraient sans difficulté pour des surfaces adjointes d'ordre quelconque.

21. De là se déduisent quelques conséquences géométriques :

1° Le long de chacune des 30 biquadratiques situées sur $\mathfrak{S}$, on peut circonscrire à cette surface une surface cubique adjointe, ayant un point double en O, et coupant en outre $\mathfrak{S}$ suivant les quatre droites (issues de O) qui rencontrent la biquadratique (nos **11** et **13**).

Car si $\mathfrak{S}_h = 0$ est l'équation de la biquadratique, $\mathfrak{S}_h^2$ est une fonction normale paire, d'ordre deux et de caractéristique nulle; elle s'annule pour quatre des demi-périodes qui annulent à la fois $\mathfrak{S}_1$ et les quatre Θ_i. De même :

2° Le long de chacune des 32 cubiques planes situées sur $\mathfrak{S}$, on peut circonscrire à cette surface une surface cubique adjointe, ayant un point double en O, et coupant en outre $\mathfrak{S}$ suivant les six droites (issues de O) qui rencontrent la cubique.

3° Les 30 biquadratiques sont situées, par groupes de trois, sur 60 surfaces cubiques adjointes à $\mathfrak{S}$.

Car, d'après le n° **5**, le produit des quatre fonctions thêta

$$\alpha\alpha'\beta'',\quad \alpha\beta'\beta'',\quad \beta\alpha'\beta'',\quad \beta\beta'\beta''$$

est pair et a sa caractéristique nulle; la fonction $\alpha\alpha'\beta''$, étant (n° **6**) la fonction $\mathfrak{S}_2$, a la même propriété; le produit des trois autres thêta est donc une fonction d'ordre trois, paire et de caractéristique nulle, c'est-à-dire que les trois biquadratiques $\alpha\beta'\beta''$, $\beta\alpha'\beta''$, $\beta\beta'\beta''$ sont sur une surface cubique adjointe à $\mathfrak{S}$.

On reconnaît ainsi que, à une de ces biquadratiques, par exemple $\alpha\alpha'\beta''$, on peut associer *six* couples d'autres biquadratiques, ce qui donne les six groupes

$$\left.\begin{matrix} \alpha\beta'\beta'', & \beta\alpha'\beta'', & \beta\beta'\beta'' \\ \alpha\beta'\beta'', & \beta\alpha'\alpha'', & \beta\beta'\alpha'' \\ \alpha\beta'\beta'', & \gamma\alpha'\beta'', & \gamma\beta'\beta'' \\ \alpha\beta'\beta'', & \gamma\alpha'\alpha'', & \gamma\beta'\alpha'' \\ \alpha\beta'\beta'', & \delta\alpha'\beta'', & \delta\beta'\beta'' \\ \alpha\beta'\beta'', & \delta\alpha'\alpha'', & \delta\beta'\alpha'' \end{matrix}\right\} \text{de trois biquadratiques situées sur une surface cubique adjointe.}$$

Six de ces surfaces cubiques passent donc par une biquadratique donnée, et, par suite, leur nombre total est égal à $\frac{30 \times 6}{3} = 60$.

Il résulte également de là que les tangentes menées en O aux 30 biquadratiques sont trois à trois dans 60 plans.

4° Il existe 240 groupes formés chacun de deux cubiques planes et d'une biquadratique de la surface $\mathfrak{S}$, et tels que les trois courbes d'un groupes soient sur une surface adjointe du troisième ordre; celle-ci coupe en outre $\mathfrak{S}$ suivant deux droites passant par O.

Par exemple, les cubiques $\alpha\beta'\gamma''$, $\alpha\alpha'\gamma''$ et la biquadratique $\alpha\beta'\alpha''$ sont sur une surface cubique adjointe, qui contient les droites $(\alpha\gamma'\delta'')$ et $(\alpha\delta'\delta'')$; on en conclut que ces deux droites et la tangente en O à la biquadratique sont dans un même plan.

En étudiant ces relations de plus près, à l'aide de l'algorithme, on reconnaît que le plan déterminé par deux des droites de la surface $\mathfrak{S}$ (issues de O) et le plan des deux droites associées (n° **15**) se coupent suivant une droite qui touche, en O, une des 30 biquadratiques; les 240 surfaces adjointes du troisième ordre définies plus haut ont quatre à quatre même plan tangent au point O, etc.

Application aux courbes de quatrième classe.

22. On sait que, sur une courbe plane de quatrième classe, les 28 points doubles sont situés 12 par 12 sur 63 courbes du troisième ordre, dont la théorie se rattache intimement à celle de la proposée : Steiner, qui a établi l'existence des 63 cubiques, n'a pas abordé l'étude des relations géométriques que ces courbes peuvent avoir entre elles; il s'est borné à signaler l'intérêt de cette question (¹), à laquelle se rapportent les remarques suivantes :

Soit toujours $\mathfrak{C}$ le cône de quatrième classe de sommet O circonscrit à la surface de Kummer K : c'est, comme on sait, un cône général de classe quatre, de même que les sections planes de K sont des courbes générales d'ordre quatre. Le cône $\mathfrak{C}$ a 28 droites doubles, qui sont les 12 bitangentes menées de O à la surface K, et les 16 droites qui joignent O aux points doubles de cette surface : d'après le théorème de Steiner, rappelé plus haut, les 28 droites doubles sont, 12 par 12,

(¹) *Journal de Crelle*, t. **49**, p. 272.

sur 63 cônes cubiques, qui sont ici les cônes de sommet O ayant respectivement pour directrices : 1° les 30 biquadratiques; 2° les 32 cubiques planes; 3° la cubique double, situées sur $\mathfrak{S}$. Chacun de ces cônes, en effet, contient bien douze droites de $\mathfrak{S}$, car : 1° une biquadratique passe par huit points doubles de K et rencontre quatre des douze bitangentes menées de O à K; 2° une cubique plane contient six points doubles et rencontre six bitangentes de K; 3° le cône, G, de sommet O, qui a pour base la cubique double, contient les douze bitangentes (n° **16**).

On obtient de cette manière une représentation géométrique des 63 cônes, dits *cônes cayleyens de* $\mathfrak{S}$ (n° **14**), et l'on met en évidence plusieurs de leurs propriétés.

23. La cubique double de $\mathfrak{S}$ est située sur la polaire du point O par rapport à la surface K (n° **16**); les douze points où elle coupe cette surface sont donc sur la courbe de contact de K et du cône $\mathfrak{S}$, et les sections, par le plan de la cubique double, du cône $\mathfrak{S}$ et de la surface K, se touchent en ces douze points. Ainsi :

Une courbe de quatrième classe, $\mathfrak{S}^4$, *est coupée par une quelconque de ses* 63 *cubiques cayleyennes* (*en dehors de* 12 *points doubles*) *en douze points simples : elle touche en ces douze points une courbe de quatrième ordre,* C_4.

Nous verrons plus bas que les deux courbes $\mathfrak{S}^4$ et C_4 sont liées d'une manière intéressante.

24. Steiner a montré, dans le Mémoire cité plus haut, que les 63 cubiques cayleyennes de $\mathfrak{S}^4$ forment, trois à trois, des groupes remarquables : les trois cubiques γ, γ_1 et γ_2, d'un même *groupe de Steiner,* sont telles que, parmi les douze points doubles de $\mathfrak{S}^4$ que contient chacune d'elles, six appartiennent à la deuxième et les six autres à la troisième; les cubiques γ, γ_1, γ_2 ne contiennent donc, en tout, que 18 points doubles de $\mathfrak{S}^4$, répartis en trois systèmes de six, et, d'après Aronhold, les six points doubles de chaque système sont sur une conique. Il y a 336 groupes de Steiner, d'où $3 \times 336 = 1008$ coniques passant par six points doubles de $\mathfrak{S}^4$.

Cela posé, soient G_1 et G_2 deux cônes, de sommet O, ayant pour bases respectives deux cubiques de la surface $\mathfrak{S}$, situées dans un même plan : ces cônes, et le cône G qui a pour base la cubique double de $\mathfrak{S}$, forment évidemment un groupe steinérien de trois cônes cayleyens, par rapport au cône $\mathcal{S}$. Or les deux cubiques, bases de G_1 et G_2, ont neuf points communs, dont six sont les points doubles de K (et de $\mathfrak{S}$) contenus dans leur plan, et dont les trois autres sont nécessairement sur la courbe double de $\mathfrak{S}$, c'est-à-dire sur le cône G ; de plus ces trois derniers points sont en ligne droite, puisque la courbe double est plane. Donc :

Trois cubiques cayleyennes γ, γ_1 et γ_2, d'une courbe de quatrième classe, $\mathcal{S}^4$, formant un groupe de Steiner, ont trois points communs; ces points sont sur une même droite, Δ.

On en déduit une autre propriété : les cubiques γ et γ_1 se coupent en neuf points, dont trois sont sur Δ, et les six autres, qui sont des points doubles de $\mathcal{S}^4$, sur une conique, $\omega_2 = 0$; on a donc identiquement

$$\gamma - \gamma_1 = \Delta\omega_2,$$

et de même

$$\gamma - \gamma_2 = \Delta\omega_1;$$

d'où

$$\gamma_1 - \gamma_2 = \Delta(\omega_1 - \omega_2),$$

c'est-à-dire que la conique $\omega_1 - \omega_2 = 0$, qui contient les six points doubles de $\mathcal{S}^4$ communs à γ_1 et γ_2, passe par les quatre points d'intersection des coniques ω_1 et ω_2. Ainsi :

Trois cubiques cayleyennes d'une courbe de quatrième classe, $\mathcal{S}^4$, formant un groupe de Steiner, contiennent en tout 18 *points doubles de $\mathcal{S}^4$, situés* 6 *à* 6 *sur trois coniques : ces trois coniques se coupent en quatre mêmes points.*

Ou encore :

Les 1008 *coniques qui contiennent chacune* 6 *points doubles de $\mathcal{S}^4$ se répartissent en* 336 *groupes de trois, de telle sorte que les*

3 coniques d'un groupe n'aient en commun aucun point double de $\mathfrak{S}^4$, et se coupent en quatre mêmes points.

Cette proposition peut s'énoncer d'une autre manière :

Les douze bitangentes menées d'un point O *à une surface de Kummer,* K, *se répartissent de* 16 *manières en deux groupes de six, les six bitangentes de chaque groupe étant sur un cône de second ordre* (propriété connue) : *les deux cônes qui correspondent ainsi aux deux groupes d'une même répartition se coupent suivant 4 droites, qui s'appuient sur une même conique de la surface de Kummer* (¹).

25. Une cayleyenne γ de $\mathfrak{S}^4$ appartient à $\frac{336 \times 3}{63} = 16$ groupes de Steiner; si γ est la cubique double de $\boldsymbol{\mathfrak{S}}$ ($\mathfrak{S}^4$ étant la section du cône $\mathfrak{S}$ par le plan de cette cubique), les seize droites Δ, qui correspondent respectivement aux 16 groupes, sont les intersections du plan de γ avec

---

(¹) Le même théorème conduit à une propriété des surfaces de troisième classe. On sait, en effet (Geiser), que la section d'une telle surface par un plan tangent est une courbe de quatrième classe, qui admet pour points doubles les intersections du plan avec les 27 droites de la surface. D'ailleurs les 27 droites sont, 6 à 6, sur 360 quadriques (Cremona) qui, comme on le voit aisément, se groupent 3 à 3, de manière que les douze droites situées sur deux quadriques quelconques d'un groupe appartiennent à un même double-six (par exemple, dans la notation de M. Cremona, les quadriques qui contiennent respectivement les trois systèmes de six droites : a_1, a_2, a_3, b_4, b_5, b_6; b_1, b_2, b_3, a_4, a_5, a_6; c_{12}, c_{13}, c_{23}, c_{45}, c_{46}, c_{56} forment un des 120 groupes). En vertu du théorème énoncé dans le texte, les sections de trois quadriques d'un même groupe par un plan tangent *quelconque* de la surface de troisième classe se coupent en quatre mêmes points, d'où il résulte que les trois quadriques appartiennent à un même faisceau ponctuel. Donc :

Les 360 quadriques qui contiennent six droites d'une surface de troisième classe se répartissent en 120 groupes de trois, de telle sorte que les trois quadriques d'un groupe se coupent suivant une même courbe du quatrième ordre.

On voit aisément que cette courbe du quatrième ordre passe par 12 des 45 points triples de la surface de troisième classe, en sorte que : *les 45 points triples d'une surface de troisième classe sont situés, douze par douze, sur 120 biquadratiques.*

les seize plans singuliers de la surface de Kummer K : elles sont donc des tangentes doubles de la courbe du quatrième ordre, C_4, définie au n° **25**, et les propriétés connues de la surface de Kummer conduisent aux propositions suivantes sur les courbes $\mathfrak{S}^4$ et C_4 :

Une cubique cayleyenne, γ, *de* $\mathfrak{S}^4$ *appartient à* 16 *groupes de Steiner, à chacun desquels correspond* (n° **24**) *une droite*, Δ.

Les seize droites Δ *ainsi définies se coupent* 2 *à* 2 *en* 120 *points, qui sont respectivement sur les* 120 *droites joignant deux à deux les* 16 *points doubles de* $\mathfrak{S}^4$ *non situés sur* γ.

Les seize droites Δ *sont doublement tangentes à une même courbe du quatrième ordre*, C_4, *qui touche* $\mathfrak{S}^4$ *en douze points, situés sur la cubique* γ.

Les deux points de contact avec C_4 *de chacune des droites* Δ *sont sur une conique qui contient six points doubles de* $\mathfrak{S}^4$, *non situés sur* γ; *inversement : les deux tangentes menées à* $\mathfrak{S}^4$ *en un point double non situé sur* γ *sont tangentes à une conique qui touche six des droites* Δ.

D'autres propositions se déduiraient des résultats du n° **21** ; nous les avons énoncées dans une Note insérée aux *Comptes rendus des Séances de l'Académie des Sciences* (22 avril 1895); comme on peut les établir directement, sans s'appuyer sur les propriétés de la surface $\mathfrak{S}$, il nous paraît inutile d'y revenir ici.

Cas des fonctions abéliennes hyperelliptiques de genre trois.

26. On a supposé, dans l'étude de la surface $\mathfrak{S}$, définie analytiquement au n° **7**, que les fonctions thêta considérées ne provenaient pas d'une courbe de genre trois *hyperelliptique :* s'il en est autrement, la définition du n° **7** conduit toujours à une surface algébrique, que nous désignerons par $\mathfrak{T}$, mais dont le degré est *cinq*, au lieu de six.

En effet, ce qui caractérise le cas hyperelliptique, c'est qu'une des 64 fonctions thêta normales, *paires*, d'ordre un s'annule pour $u=v=w=0$; d'où il résulte que chacune de ces 64 fonctions s'annule pour une demi-période qui n'est pas un de ses zéros dans le cas général. Il est facile de voir qu'on peut appliquer l'algorithme du n° 5 de telle façon que les fonctions $pp'\alpha''$ et $pp'\beta''$ s'annulent respectivement pour les demi-périodes $(pp'\gamma'')$ et $(pp'\delta'')$, et de même que les fonctions $pp'\gamma''$ et $pp'\delta''$ s'annulent respectivement pour les demi-périodes $(pp'\alpha'')$ et $(pp'\beta'')$.

Cela posé, soient toujours $\alpha\alpha'\alpha''$ la fonction ϑ_1 et $\alpha\alpha'\beta''$ la fonction ϑ_2 : les quatre fonctions Θ_i du n° 7 s'annulent pour les 32 demi-périodes $(pp'\gamma'')$ et $(pp'\delta'')$, dont l'une, $(\alpha\alpha'\gamma'')$, qui n'annulait pas ϑ_1 dans le cas général, l'annule dans le cas hyperelliptique. De plus, cette demi-période compte pour *deux* dans le nombre des solutions communes aux trois équations $\Theta_i = 0$, $\Theta_j = 0$ et $\vartheta_1 = 0$; car si, par exemple, il s'agit de la demi-période $u = v = w = 0$, les Θ_i sont des fonctions impaires et ϑ_1 une fonction paire. Il en résulte que le degré de $\mathfrak{T}$ est

$$\tfrac{1}{2}(6 \times 2 \times 2 - 12 - 2) = 5.$$

La surface $\mathfrak{T}$ est donc du cinquième ordre.

27. D'après le n° **10**, la surface $\mathfrak{T}$ a seize points doubles, correspondant aux seize demi-périodes qui annulent ϑ_1, sans annuler les Θ_i; aux deux fonctions $pp'\gamma''$ et $pp'\delta''$ correspondent (n° **11**) deux courbes de $\mathfrak{T}$ situées dans un même plan; ce plan qui, dans le cas général, contenait *six* points doubles de $\mathfrak{S}$, contient *sept* points doubles de $\mathfrak{T}$, car il renferme, en plus, un point double qui correspond à l'une des demi-périodes $(pp'\alpha'')$ ou $(pp'\beta'')$. En étudiant ainsi la répartition des points doubles entre les 16 plans, on voit qu'ils sont situés quatre à quatre sur huit droites, et, d'une manière plus précise, qu'ils sont à l'intersection de quatre droites ne se coupant pas avec quatre droites s'appuyant sur les premières : ces huit droites D sont d'après cela des génératrices d'une même quadrique, Q; quatre appartiennent à un système et quatre à l'autre système.

Comme dans le cas général, la surface a un point triple O; elle contient nécessairement les huit droites D ci-dessus, et le plan mené par O et par l'une d'elles touche $\mathfrak{T}$ le long de cette droite. Il en résulte que $\mathfrak{T}$ passe par la conique polaire de O par rapport à Q [1]. La sur-

[1] Cette conique correspond à la demi-période $(\alpha\alpha'\gamma'')$.

face $\mathfrak{T}$ contient également les 12 droites issues de O et qui s'appuient sur deux droites D non concourantes.

L'équation de $\mathfrak{T}$ s'obtient assez facilement, en partant de ces propriétés. Voici le résultat :

Soient $Q(x, y, z, t) = 0$ l'équation de la quadrique Q; $\Pi = 0$ celle d'un des systèmes de quatre plans tangents à Q qui découpent sur cette quadrique les huit droites D; si les coordonnées de O sont 0, 0, 0, 1, et si dans Q et Π, les coefficients de la plus haute puissance de t sont égaux à l'unité, l'équation de $\mathfrak{T}$ est

$$(12) \qquad Q(\Pi'_t - \tfrac{1}{6} Q \Pi'''_{t^3}) + Q'_t(Q^2 - \Pi) = 0.$$

On vérifie sans difficulté que cette surface possède toutes les propriétés indiquées ci-dessus; inversement, on peut établir sa liaison avec les fonctions hyperelliptiques, en suivant une marche analogue à celle indiquée par M. Darboux à propos de la surface de Kummer (*Comptes rendus*, t. XCII, p. 1493).

Une droite issue de O coupe la surface $\mathfrak{T}$ en deux points mobiles; si donc on projette $\mathfrak{T}$, à partir du point O, sur un plan Π, à chaque point m de ce plan correspondront deux points M_1 et M_2 de $\mathfrak{T}$: M_1 et M_2 coïncideront lorsque m sera sur la trace du cône de sommet O circonscrit à $\mathfrak{T}$ (courbe de passage). Or ce cône, du huitième ordre, se décompose en huit plans, qui sont les huit plans menés par O et par les huit droites D, et qui d'ailleurs touchent le cône du second ordre, Σ, de sommet O, circonscrit à la quadrique Q. Si donc on représente le point m, du plan Π, par les deux paramètres, λ et μ, des deux plans tangents qu'on peut mener par ce point au cône Σ, les points M_1 et M_2 coïncideront lorsque λ ou μ prendra une des huit valeurs $a_1, a_2, \ldots, a_8$ qui correspondent aux huit plans ci-dessus; en d'autres termes, les coordonnées de M_1 seront fonctions rationnelles des paramètres λ, μ et du radical $\sqrt{(\lambda - a_1)\ldots(\lambda - a_8)(\mu - a_1)\ldots(\mu - a_8)}$.

Observons, pour terminer, que les plans tangents au cône Σ coupent la surface $\mathfrak{T}$ suivant des courbes du cinquième ordre, hyperelliptiques, de genre trois, et de mêmes modules : car les modules d'une de ces courbes sont les rapports anharmoniques que forment, quatre à quatre, les huit tangentes qu'on peut lui mener par son point triple O; ces huit tangentes sont les intersections du plan de la courbe avec les huit plans menés par O et les huit droites D, et leurs rapports anharmoniques (quatre à quatre) sont constants, puisque les huit plans et le plan mobile enveloppent un cône du second ordre, Σ. Ce sont les fonctions abéliennes appartenant à une des courbes hyperelliptiques considérées qui définissent analytiquement la surface $\mathfrak{T}$.