

JOURNAL  
DE  
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

---

E. MATHY

**Expression des composantes de l'attraction d'un ellipsoïde homogène sur un point extérieur, au moyen des fonctions  $\theta$  et  $\zeta$**

*Journal de mathématiques pures et appliquées 5<sup>e</sup> série*, tome 2 (1896), p. 305-316.

[http://www.numdam.org/item?id=JMPA\\_1896\\_5\\_2\\_\\_305\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1896_5_2__305_0)

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Gallica de la Bibliothèque nationale de France  
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc  
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc  
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

*Expression des composantes de l'attraction d'un ellipsoïde homogène sur un point extérieur, au moyen des fonctions  $\theta$  et  $\zeta$  ;*

PAR M. E. MATHY.

I. — Expression par les fonctions  $\theta$ .

1. Soient  $a, b, c$  les demi-axes de l'ellipsoïde et  $m$  le point extérieur.

Cet ellipsoïde se décompose en couches infiniment minces à surfaces homothétiques à l'ellipsoïde extérieur ; désignons par  $\alpha, \beta, \gamma$  les demi-axes d'une quelconque de ces couches.

Par  $m$ , faisons passer une couche homofocale à chacune des précédentes ; soient  $\alpha' \beta' \gamma'$  les demi-axes ;  $mn = e$  l'épaisseur de cette couche en  $m$  et  $OQ = P'$  la distance du centre  $O$  de l'ellipsoïde au plan tangent en  $m$ ,  $i$  le point d'intersection du rayon  $Om$  avec la surface intérieure de la couche passant par  $m$ .

Les deux triangles  $min$  et  $OQm$  donnent

$$e = \frac{OQ \cdot \overline{mi}}{Om} = \frac{P' d_{\gamma'}}{\gamma'}$$

Prenant  $\frac{\gamma}{\gamma'} = u$  comme variable et désignant par  $X, Y, Z$  les composantes de l'attraction, on sait qu'on peut leur donner la forme sui-

vante (1) :

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} X &= -3Mm \frac{x}{c^3} \int_0^{\frac{c}{a}} \frac{u^2 du}{(1+l^2 u^2)^{\frac{1}{2}} (1+l'^2 u^2)^{\frac{3}{2}}}, \\ Y &= -3Mm \frac{y}{c^3} \int_0^{\frac{c}{a}} \frac{u^2 du}{(1+l^2 u^2)^{\frac{1}{2}} (1+l'^2 u^2)^{\frac{3}{2}}}, \\ Z &= -3Mm \frac{z}{c^3} \int_0^{\frac{c}{a}} \frac{u^2 du}{(1+l^2 u^2)^{\frac{1}{2}} (1+l'^2 u^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned} \right.$$

Ces formules se réduisent à

$$X = -3Mm \frac{x}{c^3} \frac{d.l'F}{dl'}, \quad Y = -3Mm \frac{y}{c^3} \frac{d.lF}{dl}, \quad Z = -3Mm \frac{z}{c^3} .l'F,$$

F représentant l'intégrale

$$(2) \quad F = \int_0^{\frac{c}{a}} \frac{u^2 du}{(1+l^2 u^2)^{\frac{1}{2}} (1+l'^2 u^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Je me propose de rechercher la valeur de F. A cet effet, je pose

$$l'u = t,$$

d'où

$$du = \frac{1}{l'} dt, \quad lu = \frac{l}{l'} t = \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}} t = ht;$$

h est réel et plus petit que 1, car dans l'ellipsoïde, on peut toujours supposer  $a > b > c$ .

Cette variable auxiliaire transforme l'expression de F qui devient

$$(3) \quad F = \frac{1}{l'^3} \int_0^{\frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{c}} \frac{t^2 dt}{\sqrt{(1+t^2)(1+h^2 t^2)}}.$$

(1) Voir, par exemple, M. H. RESAL, *Mécanique céleste*, 2<sup>e</sup> édition, p. 198.

Je fais la substitution

$$(4) \quad t = \frac{\lambda(\nu)}{\mu(\nu)} \quad (1),$$

d'où

$$dt = \frac{\lambda'(\nu)\mu(\nu) - \mu'(\nu)\lambda(\nu)}{\mu^2(\nu)} d\nu = \frac{\mu^2(\nu)\nu(\nu) + \lambda^2(\nu)\nu(\nu)}{\mu^2(\nu)} d\nu = \frac{\nu(\nu)}{\mu^2(\nu)} d\nu.$$

Comme (4) conduit à  $\mu^2(\nu) = \frac{1}{1+t^2}$  et  $\nu(\nu) = \sqrt{\frac{1+k'^2 t^2}{1+t^2}}$ , il vient

$$dt = \sqrt{(1+t^2)(1+k'^2 t^2)} d\nu \quad \text{ou} \quad d\nu = \frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)(1+k'^2 t^2)}}.$$

En comparant cette formule à (3), je remarque qu'on obtient, pour le module complémentaire,  $k' = h = \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}$ ;  $k$  vaut  $\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}$ .

L'intégrale (3) prend la forme

$$(5) \quad F = \frac{1}{l'^3} \int_0^{e'} \frac{\lambda^2(\nu)}{\mu^2(\nu)} d\nu.$$

La fonction  $\frac{\lambda^2(\nu)}{\mu^2(\nu)}$  a pour périodes  $\omega$  et  $\omega'$  et possède, dans le parallélogramme des demi-périodes, un seul pôle double  $\nu = \frac{\omega}{2}$ ; la formule connue de M. Hermite

$$\frac{\lambda^2(\nu)}{\mu^2(\nu)} = \frac{1}{k'^2} \left[ \frac{\theta_2''(\nu)}{\theta_2(\nu)} - D^2 \log \theta_2(\nu) \right]$$

( $k'$  étant égal à  $\frac{l}{l'}$ ) permet d'écrire, après intégration,

$$(6) \quad F = \frac{1}{l^2 l'} \left[ \frac{\theta_2''(\nu)}{\theta_2(\nu)} \nu - D \log \theta_2(\nu) \right].$$

La composante  $Z$  est donc déterminée en fonction de  $\theta_2$ .

(1) Les notations  $\lambda, \mu, \nu; \theta, \theta_1, \theta_2, \theta_3$  sont celles de Briot et Bouquet.

Pour obtenir Y, il faut dériver le produit  $lF$  par rapport à  $l$ , avec cette remarque que  $\nu$  est indépendant de  $l$  puisque  $\frac{\lambda(\nu)}{\mu(\nu)} = l'u$ .

Quant à X, comme F est symétrique en  $l$  et  $l'$ , je suivrai la même règle pour déterminer sa valeur; à la limite supérieure, on aura

$$\frac{\lambda(\nu)}{\mu(\nu)} = \frac{\sqrt{b^2 - c^2}}{c'}.$$

En remplaçant  $l$  et  $l'$  par  $\frac{(b^2 - c^2)^{\frac{1}{2}}}{c}$  et  $\frac{(a^2 - c^2)^{\frac{1}{2}}}{c}$ , il vient les formules suivantes :

$$(7) \left\{ \begin{array}{l} X = \frac{3Mmx}{(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)^{\frac{1}{2}}} \left[ \frac{\theta_2''(0)}{\theta_2(0)} \nu - D \log \theta_2(\nu) \right]_{\nu=0}^{\frac{\lambda(\nu)}{\mu(\nu)} = \frac{\sqrt{b^2 - c^2}}{c'}}, \\ Y = \frac{3Mm\gamma}{(a^2 - c^2)^{\frac{1}{2}}(b^2 - c^2)} \left[ \frac{\theta_2''(0)}{\theta_2(0)} \nu - D \log \theta_2(\nu) \right]_{\nu=0}^{\frac{\lambda(\nu)}{\mu(\nu)} = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{c'}}, \\ Z = - \frac{3Mmz}{(a^2 - c^2)^{\frac{1}{2}}(b^2 - c^2)} \left[ \frac{\theta_2''(0)}{\theta_2(0)} \nu - D \log \theta_2(\nu) \right]_{\nu=0}^{\frac{\lambda(\nu)}{\mu(\nu)} = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{c'}}. \end{array} \right.$$

2. Il est évident qu'on peut obtenir directement X et Y. Si l'on reprend la formule que suppose le calcul précédent  $e = \frac{OQ \cdot \overline{mi}}{Om}$ , et qu'au lieu d'égaliser cette quantité  $e$  à  $\frac{P'd\gamma'}{\gamma'}$ , on l'égalise à  $\frac{P'dx'}{x'}$ , alors, en prenant comme variable  $\frac{x}{a'} = u_3$ , des calculs semblables à ceux qui ont fourni Z (1) conduisent à

$$(8) \quad X = -3Mm \frac{x}{a^3} \int_0^{\frac{x}{a'}} \frac{u_3^2 du_3}{\left(1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} u_3^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{a^2 - c^2}{a^2} u_3^2\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

(1) Resal, déjà cité, p. 196.

En vue de l'intégration, soit

$$\frac{a^2 - c^2}{a^2} u_3^2 = t_3^2,$$

d'où

$$du_3 = \frac{a}{(a^2 - c^2)^{\frac{1}{2}}} dt_3, \quad \frac{a^2 - b^2}{a^2} u_3^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2} t_3^2 = k^2 t_3^2,$$

$k^2$  ayant la même valeur que précédemment.

En ayant égard à ces valeurs, je puis écrire (8) sous la forme

$$(9) \quad X = -3Mm \frac{x}{(a^2 - c^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{\frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a}} \frac{t_3^2 dt_3}{(1 - t_3^2)^{\frac{1}{2}} (1 - k^2 t_3^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Si  $t_3 = \lambda(\nu_3)$ , cette expression devient

$$(10) \quad X = \frac{-3Mm x}{(a^2 - c^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{\frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a}} \lambda^2(\nu_3) d\nu_3.$$

Or, dans le parallélogramme des demi-périodes, la fonction doublement périodique  $\lambda^2(\nu_3)$  possède un pôle double  $\frac{\omega'}{2}$ ; en vertu du théorème de M. Hermite, on a

$$\lambda^2(\nu_3) = \frac{1}{k^2} \left[ \frac{\theta''(0)}{\theta(0)} - D^2 \log \theta(\nu) \right].$$

Conséquemment, en intégrant et remplaçant  $k^2$  par  $\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}$ ,

$$(11) \quad X = -\frac{3Mx}{(a^2 - c^2)^{\frac{1}{2}} (a^2 - b^2)} \left[ \frac{\theta''(0)}{\theta(0)} \nu_3 - D \log \theta(\nu_3) \right]_{\nu_3=0}^{\lambda^{-1}(\nu_3) = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a}}.$$

Pour calculer Y, je choisis comme variable  $\frac{\beta}{\beta'}$  =  $u_2$ ; ainsi

$$(12) \quad Y = -\frac{3Mm y}{b^3} \int_0^{\frac{b}{\beta'}} \frac{u_2^2 du_2}{\left(1 + \frac{a^2 - b^2}{b^2} u_2^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{b^2 - c^2}{b^2} u_2^2\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Posons encore  $\frac{a^2 - c^2}{b^2} u_2^2 = t_2^2$ ; il en résulte

$$\begin{aligned} du_2 &= \frac{b}{(a^2 - c^2)^{\frac{1}{2}}} dt_2, \\ \frac{a^2 - b^2}{b^2} u_2^2 &= \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2} t_2^2 = k^2 t_2^2, \\ \frac{b^2 - c^2}{b^2} u_2^2 &= \frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2} t_2^2 = k'^2 t_2^2, \end{aligned}$$

d'où

$$(12') \quad Y = \frac{-3Mm\gamma}{(a^2 - c^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{\frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{b'}} \frac{t_2^2 dt_2}{(1 + k^2 t_2^2)^{\frac{1}{2}} (1 - k'^2 t_2^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

En faisant  $t_2 = \frac{\lambda(\nu_2)}{\nu(\nu_2)}$ , par des calculs analogues à ceux qui ont servi dans la recherche de  $Z$ , on obtient

$$\begin{aligned} d\nu_2 &= \frac{dt_2}{(1 + k^2 t_2^2)^{\frac{1}{2}} (1 - k'^2 t_2^2)^{\frac{1}{2}}}, \\ Y &= - \frac{3Mm\gamma}{(a^2 - c^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{\frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{b'}} \frac{\lambda^2(\nu_2)}{\nu^2(\nu_2)} d\nu_2. \end{aligned}$$

La décomposition de  $\frac{\lambda^2(\nu_2)}{\nu^2(\nu_2)}$  se fait en remarquant que le pôle double est  $\frac{\omega + \omega'}{2}$  et que, par suite,

$$\frac{\lambda^2(\nu_2)}{\nu^2(\nu_2)} = - \frac{1}{k^2 k'^2} \left[ \frac{\theta_3''(0)}{\theta_3(0)} - D^2 \log \theta_3(\nu_2) \right],$$

d'où

$$(13) \quad Y = \frac{3Mm\gamma(a^2 - c^2)^{\frac{1}{2}}}{(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)} \left[ \frac{\theta_3''(0)}{\theta_3(0)} \nu_2 - D \log \theta_3(\nu_2) \right]_{\nu_2=0}^{\frac{\lambda(\nu_2)}{\nu(\nu_2)} = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{b'}}.$$

Les variables  $\nu_1, \nu_2, \nu_3$  sont égales aux limites d'intégration; aux limites inférieures, elles sont nulles toutes trois; aux limites supé-

riques, on a

$$\lambda(\nu_3) = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a'},$$

$$\frac{\lambda(\nu_2)}{\nu(\nu_2)} = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{b'},$$

$$\frac{\lambda(\nu)}{\mu(\nu)} = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{c'}.$$

et ces trois formules se ramènent aux trois suivantes :

$$\lambda(\nu_3) = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a'}, \quad \lambda(\nu_2) = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{\sqrt{a^2 - b^2 + b'^2}}, \quad \lambda(\nu) = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{\sqrt{a^2 - c^2 + c'^2}},$$

qui sont égales à cause de la relation

$$a'^2 - a^2 = b'^2 - b^2 = c'^2 - c^2.$$

On peut rapprocher ces nouvelles formes de X et Y de celle de Z et les écrire comme suit :

$$(14) \left\{ \begin{aligned} X &= \frac{3 M m x}{(a^2 - c^2)(a^2 - b^2)} \left[ - \frac{\theta'_1(0)}{\theta_1(0)} \nu \sqrt{a^2 - c^2} + \sqrt{a^2 - c^2} D \log \theta_1(\nu) \right]_{\nu=0}^{\lambda(\nu) = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a'}}, \\ Y &= \frac{3 M m y}{(b^2 - a^2)(b^2 - c^2)} \left[ - \frac{\theta'_2(0)}{\theta_2(0)} \nu \sqrt{a^2 - c^2} + \sqrt{a^2 - c^2} D \log \theta_2(\nu) \right]_{\nu=0}^{\lambda(\nu) = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a'}}, \\ Z &= \frac{3 M m z}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)} \left[ - \frac{\theta'_3(0)}{\theta_3(0)} \nu \sqrt{a^2 - c^2} + \sqrt{a^2 - c^2} D \log \theta_3(\nu) \right]_{\nu=0}^{\lambda(\nu) = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a'}}. \end{aligned} \right.$$

## II. — Intégration par les signes $\rho$ et $\zeta$ .

Dans le calcul suivant, les fonctions de M. Weierstrass ont été utilisées pour exprimer la valeur des intégrales précédentes.

Partant de

$$X = - \frac{3 M m x}{a^3} \int_0^{\frac{a}{a'}} \frac{u^2 du}{\left(1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} u^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{a^2 - c^2}{a^2} u^2\right)^{\frac{1}{2}}},$$



je pose

$$\frac{u^2}{a^2} = \frac{1}{p\nu - e_3},$$

d'où

$$du = -\frac{1}{2} \frac{ap'\nu d\nu}{(p\nu - e_3)^{\frac{3}{2}}},$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} X &= \frac{3Mmx}{a^2} \int_0^{a^2} \frac{a^2}{p\nu - e_3} \times \frac{1}{\left(1 - \frac{a^2 - b^2}{p\nu - e_3}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{a^2 - c^2}{p\nu - e_3}\right)^{\frac{1}{2}}} \times \frac{ap'\nu d\nu}{2(p\nu - e_3)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{3Mmx}{2} \int_0^{a^2} \frac{1}{(p\nu - e_3 - a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}} (p\nu - e_3 + c^2 - a^2)^{\frac{1}{2}} (p\nu - e_3)^{\frac{3}{2}}} p'\nu d\nu. \end{aligned}$$

La théorie de  $p$  conduit à poser

$$e_3 + a^2 - c^2 = e_1, \quad e_3 + a^2 - b^2 = e_2,$$

puisque

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0, \quad e_3 = \frac{1}{3}(b^2 + c^2 - 2a^2).$$

En remarquant que  $p'\nu = -2\sqrt{(p\nu - e_1)(p\nu - e_2)(p\nu - e_3)}$ ,  
X deviendra

$$(15) \quad X = -3Mmx \int_0^{a^2} \frac{d\nu}{p\nu - e_3}.$$

Cette expression s'intègre en appliquant la formule

$$p(\nu + \omega_3) - e_3 = \frac{(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)}{p\nu - e_3};$$

alors

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} X = -\frac{3Mmx}{(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)} \int_0^{a^2} [p(\nu + \omega_3) - e_3] d\nu, \\ \text{ou} \\ X = \frac{3Mmx}{(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)} [\zeta(\nu + \omega_3) - \eta_3 + e_3\nu], \\ \text{ou encore} \\ X = \frac{3Mmx}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)} [\zeta(\nu + \omega_3) - \eta_3 + e_3\nu] \end{array} \right.$$

( $\nu$  est défini par  $p\nu - e_3 = d'^2$ ).

Y et Z prennent des formes analogues, en posant  $\frac{u^2}{b^2} = \frac{1}{p'v - e_2}$  pour le calcul de Y, et  $\frac{u^2}{c^2} = \frac{1}{p'v - e_1}$  pour celui de Z.

L'expression (16) de X ainsi que celles de Y et Z concordent avec celles que je déduis d'une formule donnée par Halphen (1).

P désignant le potentiel d'un ellipsoïde homogène sur un point extérieur;  $a_1, a_2, a_3$  les carrés des demi-axes de l'ellipsoïde;  $\alpha, \beta, \gamma$  l'un des trois nombres 1, 2, 3, on a

$$(17) \quad P = 2\pi\sqrt{a_1 a_2 a_3} \left\{ u + \sum_{\alpha} \frac{x_{\alpha}^2}{(a_{\alpha} - a_{\beta})(a_{\alpha} - a_{\gamma})} [\zeta(u + \omega_{\alpha}) - \eta_{\alpha} + e_2 u] \right\},$$

la transcendante  $u$  est définie par

$$pu = \frac{1}{3}(a_1 + a_2 + a_3) - r_1,$$

$r_1$  étant la racine négative de  $\sum_{\alpha} \frac{x_{\alpha}^2}{a_{\alpha} - s} = 1$ .

Je dérive (17) par rapport à  $x_{\alpha}$  et j'obtiens

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dP}{dx_{\alpha}} &= 2\pi\sqrt{a_1 a_2 a_3} \left\{ \frac{du}{dx_{\alpha}} + \frac{2x_{\alpha}}{(a_{\alpha} - a_{\beta})(a_{\alpha} - a_{\gamma})} [\zeta(u + \omega_{\alpha}) - \eta_{\alpha} + e_2 u] \right. \\ &\quad \left. + \frac{du}{dx_{\alpha}} \sum_{\alpha} \frac{x_{\alpha}^2}{(a_{\alpha} - a_{\beta})(a_{\alpha} - a_{\gamma})} [-p(u + \omega_{\alpha}) + e_2] \right\}. \end{aligned} \right.$$

Cette valeur se simplifie, car, en remplaçant  $p(u + \omega_{\alpha}) - e_2$  par  $\frac{(e_2 - e_{\beta})(e_{\alpha} - e_{\gamma})}{pu - e_{\alpha}}$  dans la troisième partie de la somme entre accolades, il vient

$$\begin{aligned} & - \frac{du}{dx_{\alpha}} \sum_{\alpha} \frac{x_{\alpha}^2}{(e_2 - e_{\beta})(e_{\alpha} - e_{\gamma})} [p(u + \omega_{\alpha}) - e_2] \\ & = - \frac{du}{dx_{\alpha}} \sum_{\alpha} \frac{x_{\alpha}^2}{pu - e_{\alpha}} = - \frac{du}{dx_{\alpha}}, \end{aligned}$$

puisque  $\sum_{\alpha} \frac{x_{\alpha}^2}{pu - e_{\alpha}} = 1$  et que  $(a_{\alpha} - a_{\beta})(a_{\alpha} - a_{\gamma}) = (e_2 - e_{\beta})(e_{\alpha} - e_{\gamma})$ .

(1) HALPHEN, *Traité des fonctions elliptiques*, 2<sup>e</sup> Partie, p. 492.

Cette valeur étant reportée dans (18), on conclut

$$(19) \quad \begin{cases} \frac{dP}{dx_x} = \frac{4\pi\sqrt{a_1 a_2 a_3}}{(a_x - a_\beta)(a_x - a_\gamma)} [\zeta(u + \omega_x) - \eta_x + e_x u] \\ = \frac{3M \cdot x_x}{(a_x - a_\beta)(a_x - a_\gamma)} [\zeta(u + \omega_x) - \eta_x + e_x u]. \end{cases}$$

M est la masse de l'ellipsoïde.

NOTE. — P a été obtenu par la considération de l'équation des potentiels avec les arguments elliptiques; je vais établir directement cette question.

On sait que, si  $x_x$  est une coordonnée rectiligne,  $T = f(x_x)$  satisfait à l'équation des potentiels, si  $\sum_x \frac{d^2 T}{dx_x^2} = 0$ . Mais,  $x_x$  étant fonction des arguments  $u, v, w$ , cette égalité se transforme en

$$(1) \quad \sum_x \left[ \frac{d^2 T}{du^2} \left( \frac{du}{dx_x} \right)^2 + 2 \frac{d^2 T}{du dv} \frac{du}{dx_x} \frac{dv}{dx_x} + \dots + \frac{dT}{dx_x} \frac{d^2 u}{dx_x^2} + \dots \right] = 0.$$

Il faut calculer séparément  $\left( \frac{du}{dx_x} \right)^2$ ,  $\frac{du}{dx_x} \frac{dv}{dx_x}$ ,  $\frac{d^2 u}{dx_x^2}$ , s'appuyant sur

$$(2) \quad x_x^2 = \frac{(pu - e_x)(pv - e_x)(pw - e_x)}{(e_x - e_\beta)(e_x - e_\gamma)}.$$

Comme la quantité  $\sum_x \frac{x_x^2}{(pu - e_x)^2}$  entre dans ces expressions, j'en cherche la valeur. De (2), je tire

$$(3) \quad \begin{cases} \sum_x \frac{x_x^2}{(pu - e_x)^2} = \sum_x \frac{(e_x - pv)(e_x - pw)}{(e_x - e_\beta)(e_x - e_\gamma)} \times \frac{1}{pu - e_x} \\ = \frac{(pv - pw)(pw - pv)}{(pu - e_x)(pu - e_\beta)(pu - e_\gamma)} = \frac{4(pu - pv)(pu - pw)}{p'u^2}. \end{cases}$$

L'équation  $\sum_x \frac{x_x^2}{pu - e_x} = 1$ , dérivée par rapport à  $x_x$ , donne

$$(3') \quad \frac{2x_x}{pu - e_x} - p'u \frac{du}{dx_x} \sum_x \frac{x_x^2}{(pu - e_x)^2} = 0$$

qui s'écrit, en vertu de (3),

$$(4) \quad \frac{du}{dx_\alpha} = \frac{x_\alpha p' u}{2(pu - e_\alpha)(pu - pv)(pu - pw)}$$

Donc,

$$\sum_\alpha \left( \frac{du}{dx_\alpha} \right)^2 = \sum_\alpha \frac{x_\alpha^2}{(pu - e_\alpha)^2} \times \frac{p' u^2}{4(pu - pv)(pu - pw)^2}$$

A cause de (3), il vient

$$(5) \quad \sum_\alpha \left( \frac{du}{dx_\alpha} \right)^2 = \frac{1}{(pu - pv)(pu - pw)}$$

Je reprends la formule (4) pour la multiplier par la valeur analogue  $\frac{dv}{dx_\alpha}$ , et j'étends le produit aux  $x_\alpha$ .

$$\sum_\alpha \frac{du}{dx_\alpha} \frac{dv}{dx_\alpha} = \sum_\alpha \frac{x_\alpha^2}{(pu - e_\alpha)(pv - e_\alpha)} \frac{p' u p' v}{4(pu - pv)^2 (pu - pw)(pv - pw)}$$

Mais  $\sum_\alpha \frac{x_\alpha^2}{(pu - e_\alpha)(pv - e_\alpha)} = 0$ ; donc

$$(6) \quad \sum_\alpha \frac{du}{dx_\alpha} \frac{dv}{dx_\alpha} = 0.$$

Je dérive l'équation (3') une seconde fois par rapport à  $x_\alpha$ , et j'obtiens

$$\begin{aligned} \frac{2}{pu - e_\alpha} - \frac{4x_\alpha p' u}{(pu - e_\alpha)^2} \frac{du}{dx_\alpha} - p'' u \left( \frac{du}{dx_\alpha} \right)^2 \sum_\alpha \frac{x_\alpha^2}{(pu - e_\alpha)^2} \\ + 2 p' u^2 \left( \frac{du}{dx_\alpha} \right)^2 \sum_\alpha \frac{x_\alpha^2}{(pu - e_\alpha)^3} \\ - p' u \frac{d^2 u}{dx_\alpha^2} \sum_\alpha \frac{x_\alpha^2}{(pu - e_\alpha)^2} = 0. \end{aligned}$$

Dans la somme relative à  $x_\alpha$ , le premier et le troisième terme s'annuleront; en effet, le troisième terme, déduit des valeurs précédentes, est égal à  $-\frac{4p'' u}{p' u}$ ;

premier terme vaut  $+\frac{4p'' u}{p' u}$ , car

$$p'' u = 4(pu - e_\alpha)(pu - e_\beta)(pu - e_\gamma)$$

et

$$p''u = 2[(pu - e_\alpha)(pu - e_\beta) + \dots].$$

Le deuxième et le quatrième terme se réduisent à 0 également; en effet, si je substitue à  $\frac{du}{dx_\alpha}$  sa valeur donnée par (4), le deuxième terme devient

$$-\frac{4x_\alpha p' u}{(pu - e_\alpha)^2} \frac{du}{dx_\alpha} = -\frac{2x_\alpha^2 p' u^2}{(pu - e_\alpha)^2 (pu - p\nu)(pu - p\nu')},$$

et en sommant, on obtient

$$\frac{-2p'u^2}{(pu - p\nu)(pu - p\nu')} \sum_x \frac{x_\alpha^2}{(pu - e_\alpha)^3},$$

et à cause de (5)

$$-2p'u^2 \sum_x \left(\frac{du}{dx_\alpha}\right)^2 \sum_x \frac{x_\alpha^2}{(pu - e_\alpha)^3},$$

qui est bien égal et de signe contraire au quatrième terme qui figurera dans la somme.

Finalement,

$$\sum_x \frac{d^2 u}{dx_\alpha^2} = 0,$$

et (1) se transforme en

$$\frac{d^2 T}{du^2} (p\nu - p\nu') + \frac{d^2 T}{dv^2} (p\nu - pu) + \frac{d^2 T}{dv'^2} (pu - p\nu) = 0,$$

qui est l'équation des potentiels.

