

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

RAOUL BRICARD

Mémoire sur la théorie de l'octaèdre articulé

Journal de mathématiques pures et appliquées 5^e série, tome 3 (1897), p. 113-148.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1897_5_3__113_0

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

Mémoire sur la théorie de l'octaèdre articulé ;

PAR M. RAOUL BRICARD.

I.

M. C. Stephanos a posé, dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens* ⁽¹⁾, la question suivante :

« Existe-t-il des polyèdres à faces invariables susceptibles d'une infinité de transformations avec altération seulement des angles solides et des dièdres ? »

J'ai fait connaître dans le même Recueil ⁽²⁾ un octaèdre concave particulier possédant la propriété dont il s'agit. Cauchy, d'autre part, a démontré ⁽³⁾ qu'il n'existe pas de polyèdre *convexe* déformable dans les conditions prescrites.

Je me propose dans le présent Mémoire d'étendre le résultat rappelé ci-dessus, en résolvant dans sa généralité le problème de M. Stéphanos pour les octaèdres à faces triangulaires.

D'après le théorème de Cauchy, tous les octaèdres dont j'établirai la déformabilité seront nécessairement concaves, en entendant par là qu'ils possèdent des angles dièdres rentrants, ou bien des faces qui

⁽¹⁾ T. I, p. 228.

⁽²⁾ T. II, p. 243.

⁽³⁾ *Journal de l'École Polytechnique*, XVI^e Cahier; 1813. (*Deuxième Mémoire sur les polygones et les polyèdres.*)

s'entrecroisent, à la manière des faces des polyèdres d'espèces supérieures.

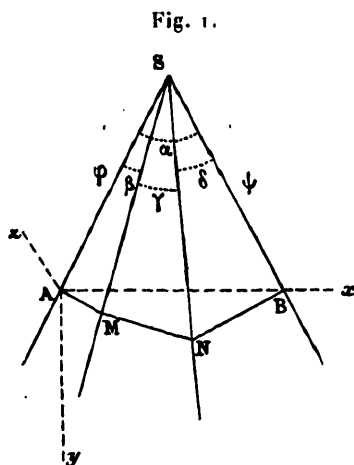
II.

Je commencerai par établir quelques propriétés relatives à la déformation d'un *angle tétraèdre* dont les quatre faces restent invariables, déformation analogue à celle du quadrilatère articulé dans le plan.

Soit (*fig. 1*) l'angle tétraèdre SABNM, articulé suivant ses quatre arêtes, et ayant pour faces de grandeurs invariables

$$ASB = \alpha, \quad ASM = \beta, \quad MSN = \gamma, \quad NSB = \delta \quad (0 < \alpha, \beta, \gamma, \delta < \pi),$$

cherchons la relation qui relie, pendant la déformation dont cet angle solide est évidemment susceptible, les dièdres SA = φ et SB = ψ .



On peut supposer que la face ASB conserve une position fixe. Nous rapporterons dès lors le système à trois axes de coordonnées rectangulaires, définis ainsi qu'il suit : l'origine sera placée en un point A de l'arête SA, tel que SA = 1. Les axes Ax et Ay seront respectivement parallèles aux bissectrices extérieure et intérieure de l'angle ASB, et dirigés de manière que le point S ait une ordonnée négative, et le point B une abscisse positive. Le sens des z positifs pourra être pris arbitrairement.

Ces axes étant ainsi choisis, les points M et N, appartenant aux arêtes SM et SN, et tels que les angles SAM, SBN soient droits, ont respectivement pour coordonnées

$$\mathbf{M} \begin{cases} x_1 = \operatorname{tang} \beta \cos \frac{\alpha}{2} \cos \varphi, \\ y_1 = \operatorname{tang} \beta \sin \frac{\alpha}{2} \cos \varphi, \\ z_1 = \operatorname{tang} \beta \sin \varphi, \end{cases} \quad \mathbf{N} \begin{cases} x_2 = 2 \sin \frac{\alpha}{2} - \operatorname{tang} \delta \cos \frac{\alpha}{2} \cos \psi, \\ y_2 = \operatorname{tang} \delta \sin \frac{\alpha}{2} \cos \psi, \\ z_2 = \operatorname{tang} \delta \sin \psi. \end{cases}$$

Égalons la valeur de \overline{MN}^2 qui résulte de ces expressions à celle que fournit la considération du triangle SMN, il vient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\cos^2 \beta} + \frac{1}{\cos^2 \delta} - \frac{2 \cos \gamma}{\cos \beta \cos \delta} \\ &= \left(\operatorname{tang} \beta \cos \frac{\alpha}{2} \cos \varphi + \operatorname{tang} \delta \cos \frac{\alpha}{2} \cos \psi - 2 \sin \frac{\alpha}{2} \right)^2 \\ &+ \left(\operatorname{tang} \beta \sin \frac{\alpha}{2} \cos \varphi - \operatorname{tang} \delta \sin \frac{\alpha}{2} \cos \psi \right)^2 \\ &+ (\operatorname{tang} \beta \sin \varphi - \operatorname{tang} \delta \sin \psi)^2, \end{aligned}$$

et, après réductions,

$$\begin{aligned} & \sin \beta \sin \delta \cos \alpha \cos \varphi \cos \psi - \sin \beta \sin \delta \sin \varphi \sin \psi \\ & - \sin \alpha \sin \beta \cos \delta \cos \varphi - \sin \alpha \sin \delta \cos \beta \cos \psi \\ & + \cos \gamma - \cos \alpha \cos \beta \cos \delta = 0. \end{aligned}$$

Introduisons à présent les variables

$$t = \operatorname{tang} \frac{\varphi}{2} \quad \text{et} \quad u = \operatorname{tang} \frac{\psi}{2}.$$

On a

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{1-t^2}{1+t^2}, & \sin \varphi &= \frac{2t}{1+t^2}, \\ \cos \psi &= \frac{1-u^2}{1+u^2}, & \sin \psi &= \frac{2u}{1+u^2}. \end{aligned}$$

Nous parviendrons ainsi à la relation, que j'appellerai *équation de*

l'angle tétraèdre,

$$(1) \quad At^2u^2 + Bt^2 + 2Ctu + Du^2 + E = 0,$$

en posant

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} A = \sin\beta \sin\delta \cos\alpha + \sin\beta \cos\delta \sin\alpha + \sin\delta \cos\beta \sin\alpha \\ \quad - \cos\alpha \cos\beta \cos\delta + \cos\gamma \\ \quad = \cos\gamma - \cos(\alpha + \beta + \delta), \\ B = -\sin\beta \sin\delta \cos\alpha + \sin\beta \cos\delta \sin\alpha - \sin\delta \cos\beta \sin\alpha \\ \quad - \cos\alpha \cos\beta \cos\delta + \cos\gamma \\ \quad = \cos\gamma - \cos(\alpha + \beta - \delta), \\ C = -2\sin\beta \sin\delta, \\ D = -\sin\beta \sin\delta \cos\alpha - \sin\beta \cos\delta \sin\alpha + \sin\delta \cos\beta \sin\alpha \\ \quad - \cos\alpha \cos\beta \cos\delta + \cos\gamma \\ \quad = \cos\gamma - \cos(\alpha - \beta + \delta), \\ E = \sin\beta \sin\delta \cos\alpha - \sin\beta \cos\delta \sin\alpha - \sin\delta \cos\beta \sin\alpha \\ \quad - \cos\alpha \cos\beta \cos\delta + \cos\gamma \\ \quad = \cos\gamma - \cos(\alpha - \beta - \delta). \end{array} \right.$$

Il était facile de prévoir la forme de la relation (1).

En effet, à une valeur déterminée de $t = \tan\frac{\varphi}{2}$ correspond une position unique de la face ASM, l'angle φ étant alors déterminé à un multiple près de 2π . Cette face étant ainsi fixée, la construction de l'angle tétraèdre peut être achevée de deux manières : il existe en effet deux positions de la droite SN, symétriques par rapport au plan BSM et telles que l'on ait

$$\text{angle MSN} = \gamma, \quad \text{angle BSN} = \delta.$$

A chaque position de la face BSN correspond une seule valeur de la variable u . Ainsi la relation qui relie t et u doit être du second degré par rapport à u .

Pour la même raison, elle doit être du second degré par rapport à t . Enfin il est visible que si cette relation est satisfaite par les valeurs t, u , elle l'est également par les valeurs $-t$ et $-u$. Elle est donc nécessairement de la forme (1).

Cas de décomposition de l'équation (1). — Nous venons de voir qu'à une valeur de t correspondent deux valeurs de u . Il est utile de rechercher dans quel cas la relation (1) se décompose, de manière que ces valeurs de u soient fonctions rationnelles de t .

Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que le polynome

$$C^2 t^2 - (At^2 + D)(Bt^2 + E) = -ABt^4 + (C^2 - AE - BD)t^2 - DE,$$

qui figure sous le radical entrant dans l'expression de u en fonction de t , soit un carré parfait. Or cela peut arriver de deux manières.

1° On a

$$(C^2 - AE - BD)^2 - 4ABDE = 0.$$

On trouve, par un calcul qui ne présente pas de difficultés, que le premier membre de cette égalité se réduit à l'expression

$$16 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta \sin^2 \gamma \sin^2 \delta.$$

Cette condition ne pourrait donc être remplie que si l'un des angles $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ se réduisait à 0 ou à π , ce qui est impossible.

Il semblerait tout d'abord que ce cas se présente quand le sommet S s'éloignant à l'infini, l'angle tétraèdre dégénère en un faisceau prismatique. Mais alors il faut observer que les valeurs des coefficients A, B, C, D, E, se réduisent toutes à 0, et les raisonnements précédents ne s'appliquent plus. Toute section droite du faisceau prismatique est un quadrilatère plan articulé, dont la déformation est régie par une équation de même forme que l'équation (1) :

$$A' t^2 u^2 + B' t^2 + 2C' tu + D' u^2 + E'.$$

Les coefficients A', B', C', D', E' ont, en fonction des côtés a, b, c, d du quadrilatère, des expressions qu'on tirera aisément des valeurs

de A, B, C, D, E, en faisant tendre, dans ces dernières, les angles α , β , γ , δ vers zéro, de manière qu'on ait

$$\frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{b} = \frac{\gamma}{c} = \frac{\delta}{d}.$$

On verra alors que la condition

$$(C'^2 - A'E' - B'D')^2 - 4A'B'D'E' = 0$$

entraînerait l'égalité impossible

$$abcd = 0.$$

2° On a

$$AB = 0 \quad \text{avec} \quad DE = 0.$$

Ces relations entraînent l'un des groupes suivants d'égalités :

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{ll} B = 0, & E = 0, \\ A = 0, & D = 0, \\ B = 0, & D = 0, \\ A = 0, & E = 0. \end{array} \right.$$

Considérons par exemple les égalités

$$A = 0, \quad D = 0.$$

Il en résulte : soit

$$\gamma = \alpha + \beta + \delta + 2k\pi \quad \text{avec} \quad \gamma = \alpha - \beta + \delta + 2k'\pi,$$

soit

$$\gamma = \alpha + \beta + \delta + 2k\pi \quad \text{avec} \quad \gamma = -\alpha + \beta - \delta + 2k'\pi,$$

soit

$$\gamma = -\alpha - \beta - \delta + 2k\pi \quad \text{avec} \quad \gamma = \alpha - \beta + \delta + 2k'\pi,$$

soit

$$\gamma = -\alpha - \beta - \delta + 2k\pi \quad \text{avec} \quad \gamma = -\alpha + \beta - \delta + 2k'\pi.$$

Le premier couple de relations est incompatible avec les hypothèses faites sur la grandeur des angles $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. On en tire, en effet,

$$\beta + (k - k')\pi = 0,$$

ce qui est impossible.

En examinant les autres couples, on voit que seul le troisième est admissible et qu'il a pour conséquences nécessaires

$$\alpha + \delta = \pi, \quad \beta + \gamma = \pi.$$

On raisonnera de même sur les autres égalités (3). Je les écris de nouveau, en mettant à côté de chacune d'elles la relation qu'elle entraîne entre les faces de l'angle tétraèdre :

$$\begin{array}{llll} B = 0, & E = 0, & \delta = \alpha, & \gamma = \beta, \\ A = 0, & D = 0, & \delta = \pi - \alpha, & \gamma = \pi - \beta, \\ B = 0, & D = 0, & \delta = \beta, & \gamma = \alpha, \\ A = 0, & E = 0, & \delta = \pi - \beta, & \gamma = \pi - \alpha. \end{array}$$

Nous sommes ainsi amenés à reconnaître deux cas de décomposition de l'équation (1) :

1° L'angle tétraèdre a ses faces adjacentes égales ou supplémentaires deux à deux. Son équation se réduit à

$$At^2u + 2Ct + Du = 0,$$

ou

$$Bt^2 + 2Ctu + E = 0$$

(en supprimant dans la première le facteur

$$u = 0$$

qui correspond au cas sans intérêt où les faces adjacentes de l'angle tétraèdre restent deux à deux en coïncidence pendant la déformation).

Je dirai qu'un angle tétraèdre de cette nature est *rhomboïde*.

2° L'angle tétraèdre a ses faces opposées égales ou supplémentaires

deux à deux. Son équation est alors

$$At^2u^2 + 2Ctu + E = 0$$

ou

$$Bt^2 + 2Ctu + Du^2 = 0.$$

Ces équations s'écrivent respectivement, en ayant égard aux valeurs de leurs coefficients,

$$[\cos \alpha - \cos(\alpha + 2\beta)]t^2u^2 - 4\sin^2\beta tu + \cos \alpha - \cos(\alpha - 2\beta) = 0,$$

ou

$$\sin(\alpha + \beta)t^2u^2 - 2\sin\beta tu - \sin(\alpha - \beta) = 0$$

et

$$[\cos(\alpha + 2\beta) - \cos \alpha]t^2 - 2\sin^2\beta tu + [\cos(\alpha - 2\beta) - \cos \alpha]u^2 = 0,$$

ou

$$\sin(\alpha + \beta)t^2 + 2\sin\beta tu - \sin(\alpha - \beta)u^2 = 0.$$

Elles se décomposent, la première en

$$(4) \quad tu = \frac{\sin\beta + \sin\alpha}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{\cos\frac{\alpha - \beta}{2}}{\cos\frac{\alpha + \beta}{2}},$$

et

$$(4') \quad tu = \frac{\sin\beta - \sin\alpha}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{\sin\frac{\beta - \alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha + \beta}{2}};$$

la seconde, en

$$(5) \quad \frac{t}{u} = \frac{-\sin\beta + \sin\alpha}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{\sin\frac{\alpha - \beta}{2}}{\sin\frac{\alpha + \beta}{2}}$$

et

$$(5') \quad \frac{t}{u} = \frac{-\sin\beta - \sin\alpha}{\sin(\alpha + \beta)} = -\frac{\cos\frac{\alpha - \beta}{2}}{\cos\frac{\alpha + \beta}{2}}.$$

Il n'est pas inutile de résumer la discussion précédente : on peut distinguer trois espèces d'angles tétraèdres articulés :

1° L'angle tétraèdre *général* dont les faces n'ont pas de relations particulières. Son équation est irréductible, de sorte qu'à chaque valeur d'une des variables t, u correspondent deux valeurs de l'autre variable, qui ne sont pas fonctions rationnelles de la première;

2° L'angle tétraèdre *rhombolde*. A une valeur de t correspond une seule valeur de u , qui en est fonction rationnelle, mais la réciproque n'est pas vraie;

3° L'angle tétraèdre à faces opposées *égales ou supplémentaires deux à deux*. A une valeur de t correspond une seule valeur de u , et réciproquement.

III.

L'équation (1) contenant quatre paramètres arbitraires, toute équation de la même forme

$$At^2u^2 + Bt^2 + 2Ctu + Du^2 + E = 0$$

peut être considérée comme définissant la déformation d'un angle tétraèdre articulé.

Les éléments de cet angle tétraèdre sont donnés par les relations

$$\begin{aligned} \frac{\cos \gamma - \cos(\alpha + \beta + \delta)}{A} &= \frac{\cos \gamma - \cos(\alpha + \beta - \delta)}{B} = \frac{-2 \sin \beta \sin \delta}{C} \\ &= \frac{\cos \gamma - \cos(\alpha - \beta + \delta)}{D} = \frac{\cos \gamma - \cos(\alpha - \beta - \delta)}{E}, \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned} \frac{-2 \sin \beta \sin \delta}{C} &= \frac{4 \sin \beta \sin \delta \cos \alpha}{A - B - D + E} = \frac{4 \sin \delta \cos \beta \sin \alpha}{A - B + D - E} \\ &= \frac{4 \sin \beta \cos \delta \sin \alpha}{A + B - D - E} = \frac{4(\cos \gamma - \cos \alpha \cos \beta \cos \delta)}{A + B + D + E}. \end{aligned}$$

On a, par suite :

$$(6) \left\{ \begin{array}{l} \cos \alpha = -\frac{A - B - D + E}{2C}, \quad \text{tang } \beta = \frac{-2C \sin \alpha}{A - B + D - E}, \\ \text{tang } \delta = \frac{-2C \sin \alpha}{A + B - D - E}, \\ \cos \gamma = \cos \alpha \cos \beta \cos \delta - \frac{A + B + D + E}{2C} \sin \beta \sin \delta, \end{array} \right.$$

formules qui permettent de calculer successivement les angles α , β , δ , γ . Il faut, bien entendu, que certaines conditions de réalité soient satisfaites; elles sont fort compliquées et il serait sans intérêt de les écrire.

Comme on peut supposer

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta < \pi,$$

les formules précédentes définissent seulement *deux* systèmes de valeurs pour ces angles (en écartant le deuxième cas de décomposition auquel je reviendrai tout à l'heure). On voit immédiatement que si l'un des systèmes est formé des valeurs

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta,$$

celles de l'autre système sont

$$\alpha, \pi - \beta, \gamma, \pi - \delta.$$

Il résulte de là un théorème qui nous sera fort utile dans la suite :

Si deux angles tétraèdres articulés T et T₁ peuvent se déformer de telle manière que deux dièdres adjacents de T soient constamment égaux ou supplémentaires à deux dièdres adjacents de T₁, ces angles tétraèdres ont leurs faces deux à deux égales ou supplémentaires.

Conservons les notations précédentes pour les éléments de l'angle tétraèdre T et désignons les éléments correspondants de T₁ par les mêmes lettres affectées d'un indice. Le théorème présente trois cas qui s'établissent tous de la même manière.

Supposons, par exemple, que l'on ait constamment

$$\varphi = \varphi_1, \quad \psi = \pi - \psi_1,$$

d'où

$$t_1 = t, \quad u_1 = \frac{1}{u}.$$

On a, pendant la déformation de T_1 , la relation

$$A_1 t_1^2 u_1^2 + B_1 t_1^2 + 2C_1 t_1 u_1 + D_1 u_1^2 + E_1 = 0.$$

Si l'on y remplace t_1 et u_1 respectivement par t et $\frac{1}{u}$, il vient

$$A_1 \frac{t^2}{u^2} + B_1 t^2 + 2C_1 \frac{t}{u} + D_1 \frac{1}{u^2} + E_1 = 0,$$

ou

$$B_1 t^2 u^2 + A_1 t^2 + 2C_1 tu + E_1 u^2 + D_1 = 0.$$

Cette relation doit être identique à (1). On a donc

$$\frac{B_1}{A} = \frac{A_1}{B} = \frac{C_1}{C} = \frac{E_1}{D} = \frac{D_1}{E}.$$

Appliquons alors les formules (6) à l'angle tétraèdre T_1 . On trouve

$$\alpha_1 = \pi - \alpha, \quad \beta_1 = \beta \quad \text{ou} \quad \pi - \beta, \quad \delta_1 = \pi - \delta \quad \text{ou} \quad \delta, \quad \gamma_1 = \gamma,$$

ce qui rentre bien dans le théorème énoncé.

Cette proposition est encore vraie quand les angles tétraèdres T et T_1 sont rhomboïdes, mais elle cesse de l'être quand ils ont chacun leurs faces opposées égales ou supplémentaires deux à deux. Il existe en effet une infinité de tels angles tétraèdres dont la déformation est régie par une même équation

$$tu = k \quad \text{ou} \quad \frac{t}{u} = k'.$$

Si α et β désignent deux faces adjacentes d'un angle tétraèdre satis-

faisant à la première condition par exemple, on doit avoir

$$\frac{\cos \frac{\beta - \alpha}{2}}{\cos \frac{\beta + \alpha}{2}} = k \quad \text{ou bien} \quad \frac{\sin \frac{\beta - \alpha}{2}}{\sin \frac{\beta + \alpha}{2}} = k,$$

d'où

$$\operatorname{tang} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tang} \frac{\beta}{2} = \frac{k-1}{k+1} \quad \text{ou bien} \quad \frac{\operatorname{tang} \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tang} \frac{\beta}{2}} = \frac{1-k}{k+1},$$

égalités dont chacune a lieu pour une infinité de valeurs de α et de β .

IV.

Pour compléter ces généralités, j'établirai encore la propriété suivante de l'angle tétraèdre articulé, analogue à une propriété bien connue du quadrilatère articulé.

Quand un angle tétraèdre articulé se déforme, il existe une relation linéaire entre les cosinus de deux dièdres opposés.

En effet, en conservant les notations précédentes et en désignant en outre par θ le dièdre ON, on a, par la formule fondamentale de la Trigonométrie sphérique,

$$\begin{aligned} \cos \text{BOM} &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos \varphi \\ &= \cos \gamma \cos \delta + \sin \gamma \sin \delta \cos \theta, \end{aligned}$$

c'est-à-dire une relation de la forme

$$A \cos \varphi + B \cos \theta + C = 0.$$

Quand l'angle tétraèdre présente l'un quelconque des cas de décomposition signalés, cette relation se réduit à

$$\cos \varphi = \cos \theta,$$

d'où

$$\varphi = \theta,$$

si l'on n'admet pour les dièdres de l'angle tétraèdre que des valeurs comprises entre 0 et π . Réciproquement, si un angle tétraèdre articulé se déforme de telle manière que deux dièdres opposés restent constamment égaux, cet angle tétraèdre est rhomboïde ou a ses faces opposées égales ou supplémentaires deux à deux. En effet, on a alors les relations

$$\cos \alpha \cos \beta = \cos \gamma \cos \delta,$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \sin \gamma \sin \delta,$$

d'où

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\gamma \pm \delta)$$

et

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\gamma - \delta),$$

équations qui admettent les quatre systèmes de solutions

$$\begin{array}{llll} \gamma = \alpha, & \delta = \beta; & \gamma = \beta, & \delta = \alpha; \\ \gamma = \pi - \alpha, & \delta = \pi - \beta; & \gamma = \pi - \beta, & \delta = \pi - \alpha. \end{array}$$

V.

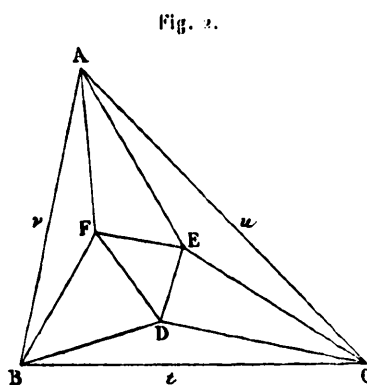
Nous pouvons maintenant aborder la recherche des conditions de déformabilité d'un octaèdre à faces triangulaires, dont les arêtes sont de longueurs invariables.

Il faut d'abord montrer qu'un tel octaèdre, même concave, est rigide en général; cela résulte du théorème de Legendre d'après lequel le nombre des conditions nécessaires pour déterminer un polyèdre est précisément égal au nombre de ses arêtes. En effet, la démonstration de ce théorème repose tout entière sur le fait que le polyèdre satisfait à la relation d'Euler (ou de Descartes), et ne dépend nullement de sa convexité ou de sa concavité. Or, un octaèdre à faces triangulaires satisfait bien à cette relation, quelle que soit la disposition de ses faces.

Un octaèdre dont on se donne les arêtes est donc, *en général*, complètement déterminé, c'est-à-dire indéformable. Notre but est de reconnaître, si dans certains cas, par suite de relations particulières

existant entre les arêtes, cette détermination peut cesser d'avoir lieu. Alors l'octaèdre sera déformable.

Supposons qu'il en soit ainsi pour l'octaèdre $ABCDEF$ (*fig. 2*). On voit d'abord que les douze dièdres de cet octaèdre sont nécessai-



rement tous variables, quand on lui fait subir la déformation dont il est susceptible.

Admettons en effet que, pendant la déformation de l'octaèdre, l'un de ses dièdres, AB par exemple, reste de grandeur constante. L'angle tétraèdre formé par les quatre faces ayant le point A comme sommet commun sera tout entier rigide, l'un de ses dièdres étant invariable. La considération des angles tétraèdres ayant leurs sommets en F, E, D montre alors que tous les dièdres de l'octaèdre seront de grandeur constante, ce qui est contraire à l'hypothèse.

L'octaèdre présente donc six angles tétraèdres qui tous se déforment avec conservation de leurs faces. Il faut distinguer trois cas, suivant que ces angles tétraèdres sont *généraux* (au sens donné § II à ce mot), *rhomboides* ou bien à *faces opposées égales ou supplémentaires deux à deux*.

VI.

Examinons d'abord le premier cas. Parmi les six angles tétraèdres, envisageons ceux qui ont leurs sommets en A, B, C . Leurs déformations sont régies par trois équations semblables à l'équation (1) et

indécomposables :

$$(7) \quad A t^2 u^2 + B t^2 + 2C tu + D u^2 + E = 0,$$

$$(8) \quad A' t^2 v^2 + B' t^2 + 2C' tv + D' v^2 + E' = 0,$$

$$(9) \quad A'' u^2 v^2 + B'' u^2 + 2C'' uv + D'' v^2 + E'' = 0,$$

en désignant par t, u, v les tangentes des demi-dièdres BC, CA, AB, et par A, B, ..., E'' des constantes qui dépendent des faces des trois angles tétraèdres et, par suite, des arêtes de l'octaèdre.

Les équations précédentes doivent être satisfaites par une infinité de systèmes de valeurs données à t, u et v . Par conséquent, les équations (8) et (9), en v , doivent avoir *une* ou *deux* racines communes pour une infinité de systèmes de valeurs de t et de u satisfaisant à l'équation (7).

Or il est impossible que les équations (8) et (9) aient constamment leurs deux racines communes : en effet, s'il en était ainsi, on aurait

$$\frac{A' t^2 + D'}{A'' u^2 + D''} = \frac{C' t}{C'' u} = \frac{B' t^2 + E'}{B'' u^2 + E''},$$

d'où l'on tire deux équations du troisième degré en t et u , qui devraient avoir, avec l'équation (7), une infinité de solutions communes; or ceci est impossible, puisque cette dernière est supposée indécomposable.

Ainsi les équations (8) et (9) ont, en général, une seule racine commune en v . Cette racine est donc exprimable en fonction rationnelle des coefficients de ces équations et, par suite, de t et de u . Or, on tire des équations (7) et (8)

$$u = \frac{-Ct \pm \sqrt{F(t)}}{At^2 + D},$$

$$v = \frac{-C't \pm \sqrt{F_1(t)}}{A't^2 + D'},$$

en posant

$$F(t) = C^2 t^2 - (A t^2 + D)(B t^2 + E),$$

$$F_1(t) = C'^2 t^2 - (A' t^2 + D')(B' t^2 + E'),$$

et en choisissant convenablement les signes placés devant les radicaux.

On a donc

$$\frac{-C't \pm \sqrt{F_1(t)}}{A't^2 + D'} = \varphi \left[\frac{-Ct \pm \sqrt{F(t)}}{At^2 + D} \right],$$

$\varphi(x, y)$ désignant une fonction rationnelle.

Le second membre de cette relation peut se mettre sous la forme

$$\frac{L + M\sqrt{F(t)}}{N},$$

L, M, N étant des polynomes en t . On arrive finalement à l'identité

$$P\sqrt{F(t)} + Q\sqrt{F_1(t)} + R = 0,$$

où P, Q, R sont encore des polynomes en t . On tire de là

$$F(t)F_1(t) = \left[\frac{R^2 - P^2F(t) - Q^2F_1(t)}{2PQ} \right]^2.$$

Le produit des polynomes $F(t)$ et $F_1(t)$ doit donc être le carré d'une fonction rationnelle et, par suite, d'un polynome en t . Il en résulte que $F(t)$ et $F_1(t)$ sont identiques à un facteur constant près.

En effet, $F(t)$ et $F_1(t)$ sont deux polynomes bicarrés, qui ne sont pas carrés parfaits, sans quoi les équations (7) et (8) seraient réductibles, contrairement à l'hypothèse faite. On peut donc poser

$$\begin{aligned} F(t) &= -AB(t - \lambda)(t + \lambda)(t - \mu)(t + \mu), & \lambda \neq \mu, \\ F_1(t) &= -A'B'(t - \lambda')(t + \lambda')(t - \mu')(t + \mu'), & \lambda' \neq \mu'. \end{aligned}$$

et leur produit ne peut être carré parfait que si l'on a

$$\lambda = \pm \lambda', \quad \mu = \pm \mu',$$

ou bien

$$\lambda = \pm \mu', \quad \mu = \pm \lambda',$$

ce qui justifie l'assertion énoncée. Nous en tirons cette conséquence importante :

Les équations (7) et (8), respectivement en u et v , ont leurs racines égales pour les mêmes valeurs de t .

Je pourrais poursuivre l'étude algébrique du système (7), (8), (9),

dont la considération doit seule suffire, comme on le voit aisément, à donner les conditions de déformabilité de l'octaèdre. Mais on serait ainsi engagé dans des calculs à peu près inextricables, en raison de la manière compliquée dont les éléments de l'octaèdre entrent dans les coefficients A, B, C, \dots . Aussi vais-je prendre une autre voie. Je signalerai toutefois le théorème suivant, parce qu'il peut trouver son application dans d'autres recherches :

Pour que les équations (7), (8), (9) aient une infinité de solutions communes, il faut et il suffit qu'elles résultent de l'élimination successive de t, u, v , entre les 2 équations

$$\begin{aligned} tuv + mvt + ntu + p &= 0, \\ l't + m'u + n'v + p'tuv &= 0, \end{aligned}$$

où $l, m, n, p, l', m', n', p'$ sont des coefficients arbitraires.

Revenons donc à la considération de l'octaèdre ABCDEF et interprétons géométriquement le dernier résultat obtenu.

Quand t prend une valeur telle que l'équation (7) en u ait ses racines égales, le dièdre CE devient évidemment égal à 0 ou à π . De même, quand l'équation (8) en v a ses racines égales, le dièdre BF devient égal à 0 ou à π . Ainsi les dièdres CE et BF sont tels que si l'un d'eux devient égal à 0 ou à π , l'autre prend en même temps l'une de ces valeurs.

Or, pendant la déformation de l'octaèdre, il existe une relation linéaire entre les cosinus de ces deux dièdres. On a en effet (§ IV) une relation linéaire entre le cosinus de chacun de ces dièdres et celui du dièdre BC, qui leur est opposé dans les angles tétraèdres articulés ayant leurs sommets respectivement en C et en B

$$\begin{aligned} l \cos CE + m \cos BC + n &= 0, \\ l' \cos BF + m' \cos BC + n' &= 0, \end{aligned}$$

d'où l'on tire bien une relation

$$(10) \quad l'' \cos CE + m'' \cos BF + n'' = 0,$$

l'', m'', n'' étant des coefficients constants.

Faisons successivement, dans cette relation, le dièdre CE égal à 0 et à π . Le dièdre BF, avons-nous dit, prendra à chaque fois l'une des mêmes valeurs ; il ne peut prendre deux fois la valeur 0 ou la valeur π , car on aurait alors

$$\begin{aligned} l'' \pm m'' + n'' &= 0, \\ -l'' \pm m'' + n'' &= 0, \end{aligned}$$

m'' ayant le même signe dans chaque premier membre et, par suite,

$$l'' = 0, \quad m'' = \pm n''.$$

La relation (10) se réduirait donc à

$$\cos BF = \pm 1,$$

ce qui est impossible, puisque tous les dièdres de l'octaèdre sont variables. Le dièdre BF doit donc prendre une fois la valeur 0 et une fois la valeur π , dans le même ordre que le dièdre CE ou dans l'ordre inverse. On a donc

$$\begin{aligned} l'' \pm m'' + n'' &= 0, \\ -l'' \mp m'' + n'' &= 0, \end{aligned}$$

avec correspondance des signes de m'' dans les deux premiers membres. On tire de là

$$n'' = 0, \quad l'' = \pm m'',$$

et la relation (10) devient

$$\cos CE = \pm \cos BF.$$

Ainsi, pendant la déformation de l'octaèdre, *les dièdres CE et BF sont constamment égaux ou supplémentaires.*

Nous pouvons faire le même raisonnement en considérant trois angles tétraèdres ayant pour sommets ceux d'une face autre que ABC. Comme tous ces angles tétraèdres sont supposés généraux, la conclusion sera la même, et nous pouvons dire :

Pendant la déformation de l'octaèdre, ses dièdres opposés restent deux à deux égaux ou supplémentaires.

Envisageons alors deux angles tétraèdres opposés, par exemple ceux ayant leurs sommets respectivement en A et D. Ils doivent se déformer de telle manière que leurs dièdres soient deux à deux constamment égaux ou supplémentaires. D'après le théorème du § III, cela exige que leurs faces soient deux à deux égales ou supplémentaires. Il en est de même pour les faces des trois autres couples d'angles tétraèdres opposés que présente l'octaèdre.

Il est facile de voir que, seule, l'égalité des faces correspondantes est admissible. Considérons, en effet, deux faces opposées de l'octaèdre, ABC et DEF par exemple. On a, d'après ce qui précède,

$$\begin{array}{lcl} A = D & \text{ou} & A + D = \pi, \\ B = E & \text{ou} & B + E = \pi, \\ C = F & \text{ou} & C + F = \pi, \end{array}$$

et, comme on le montre en Géométrie élémentaire pour établir la similitude de deux triangles ayant leurs côtés deux à deux parallèles ou perpendiculaires, les égalités écrites en tête de chaque ligne peuvent seules avoir lieu.

L'octaèdre est donc tel que ses faces opposées deux à deux sont des triangles semblables, les côtés homologues étant toujours des arêtes opposées. On a, par suite, la série d'égalités

$$\begin{array}{lcl} \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}, & \frac{CA}{FD} = \frac{AE}{DB} = \frac{EC}{BF}, \\ \frac{EC}{BF} = \frac{CD}{FA} = \frac{DE}{AB}, & \frac{CD}{FA} = \frac{DB}{AE} = \frac{BC}{EF}, \end{array}$$

d'où l'on tire

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{lll} AB = DE, & BC = EF, & CA = FD, \\ AE = BD, & BF = CE, & CD = AF. \end{array} \right.$$

Ainsi l'octaèdre a ses arêtes opposées deux à deux égales.

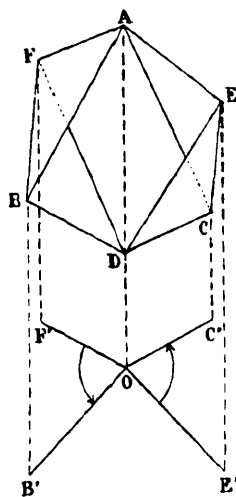
Je vais maintenant montrer que ces relations suffisent à assurer la déformabilité de l'octaèdre (ce qui ne résulte pas de l'analyse précédente), si l'on suppose en outre remplies certaines conditions relatives à la situation respective des faces. Il existe, en effet, des octaèdres convexes dont les arêtes opposées deux à deux sont égales, et qui, d'après le théorème de Cauchy, ne peuvent être déformables.

VII.

Considérons à cet effet un système de quatre triangles invariables AFB, DFB, ACE, DCE (*fig. 3*), articulés aux points A et D et suivant les droites BF et CE. On suppose

$$AF = DC, \quad AB = DE, \quad DB = AE, \quad DF = AC, \quad BF = CE.$$

Fig. 3.



La figure formée par les deux derniers triangles est évidemment superposable ou bien à la figure formée par les deux premiers, ou bien à celle qui est symétrique à cette dernière par rapport à un plan quelconque. Cela fait deux cas à examiner.

Supposons d'abord que les deux systèmes de triangles forment des figures superposables. Alors les quatre plans ADF , ADB , ADE , ADC se projettent, sur un plan perpendiculaire à AD , respectivement suivant les droites OF' , OB' , OE' , OC' ; telles que les angles $F'OB'$, $F'OC'$ soient égaux et que le même sens de rotation amène OF' en coïncidence avec OB' , OE' en coïncidence avec OC' . On a donc

$$\text{angle } F'OE' = \text{angle } B'OC'.$$

Il résulte de là que les deux trièdres $A(FDE)$ et $D(CAB)$, qui ont la même orientation, sont égaux comme ayant un dièdre égal compris entre deux faces égales chacune à chacune. En effet, l'égalité précédente exprime celle des dièdres de ces trièdres qui ont AD pour arête commune. On a, d'autre part,

$$\begin{aligned} \text{angle } FAD &= \text{angle } CDA, \\ \text{angle } DAE &= \text{angle } ADB. \end{aligned}$$

On conclut de là à l'égalité des angles FAE , CDB . Les deux triangles FAE , BDC sont donc égaux, et l'on a

$$FE = BC.$$

Cette égalité a lieu pendant toutes les déformations dont est susceptible notre système de triangles, à la condition, je le répète, que l'ensemble des deux derniers soit constamment superposable à celui des deux premiers.

Or, cette déformation est telle que la détermination complète du système dépend de deux paramètres (pour lesquels on peut prendre par exemple la distance AD et l'angle $F'OE'$). Elle est donc encore possible si l'on assujettit le système à cette condition supplémentaire que la distance EF reste constante : il en sera alors de même de la distance BC .

L'ensemble de la figure présentera huit triangles invariables, constituant un octaèdre déformable dont les arêtes opposées sont égales deux à deux.

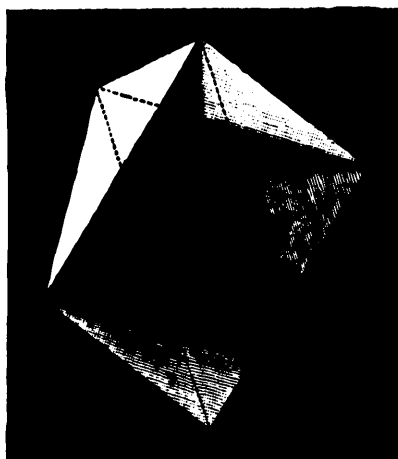
Cet octaèdre admet un axe de symétrie : menons, en effet, dans le

plan bissecteur du dièdre projeté en $B'OE'$, une droite L , perpendiculaire à AD et passant par le milieu de cette droite. Il est clair que les points A, B, F sont respectivement symétriques des points D, E, C , par rapport à L . On peut donc amener l'octaèdre en coïncidence avec lui-même en le faisant tourner de deux angles droits autour de L . On voit aussi que les trois diagonales de l'octaèdre sont perpendiculaires à la même droite L qui les partage chacune en deux parties égales ⁽¹⁾.

On peut réaliser un semblable octaèdre au moyen de triangles en carton ou en bois mince convenablement découpés, assemblés par des charnières en papier gommé. Il est nécessaire de laisser vides les faces ABC, DEF , qui ne sont réalisées que par leur contour.

Le modèle ainsi obtenu est représenté *fig. 4*.

Fig. 4.



Octaèdre dont les arêtes opposées sont égales deux à deux.
Les faces sont $ABC, DEF, BCD, CAE, ABF, AEF, BFD, CDE$.

Si, maintenant, revenant à la *fig. 3*, on suppose la figure formée par les deux triangles ACE, DCE , superposable à la figure symétrique de celle formée par les deux triangles AFB, DFB , on reconnaîtra, par un raisonnement tout semblable au précédent que, si la distance EF reste constante, la distance BC est nécessairement variable : l'octaèdre $ABCDEF$ ne peut être déformable.

⁽¹⁾ Ces remarques intéressantes m'ont été communiquées par M. Mannheim.

Ainsi se trouve légitimée l'assertion faite à la fin du § VI. On voit en outre que les relations (11) ne sont pas indépendantes, mais que l'une d'elles résulte des cinq autres.

VIII.

Je passe au cas où l'un au moins des angles tétraèdres est rhomboïde, sans qu'un seul d'entre eux ait ses faces opposées égales ou supplémentaires deux à deux. Supposons que l'angle tétraèdre C présente cette particularité, c'est-à-dire que l'on ait, par exemple :

$$\text{angle BCD} = \text{angle DCE}, \quad \text{angle BCA} = \text{angle ACE}.$$

Le système (7), (8), (9) devient alors

$$(7') \quad A t^2 u + 2Ct + Du = 0,$$

$$(8') \quad A' t^2 v^2 + B' t^2 + 2C' tv + D' v^2 + E' = 0,$$

$$(9') \quad A'' u^2 v^2 + B'' u^2 + 2C'' uv + D'' v^2 + E'' = 0.$$

Nous pouvons raisonner comme précédemment : les équations (8') et (9') peuvent avoir constamment leurs deux racines en v communes, ou bien n'avoir en commun qu'une seule de ces racines.

Je montrerai tout à l'heure que la première hypothèse est inadmissible. Les équations (8') et (9') ont donc une seule racine commune en v ; cette racine est fonction rationnelle de t et u , et par suite de t , et l'équation (8') se réduit nécessairement à l'une des formes

$$A' t^2 v + 2C' t + D' v = 0, \quad B' t^2 + 2C' tv + E' = 0.$$

En d'autres termes, l'angle tétraèdre B est rhomboïde, et l'on a

$$\text{dièdre BF} = \text{dièdre BC} = \text{dièdre CE}.$$

Il en résulte encore que les équations (7') et (9'), respectivement en t et en v , ont leurs racines égales pour les mêmes valeurs de u . On en conclut que les dièdres CD et AF sont constamment égaux ou

supplémentaires. Il en est de même pour les dièdres BD, AE. En continuant ainsi, on verra que les couples de dièdres opposés de l'octaèdre possèdent tous la même propriété.

Les conclusions du § VI ne sont donc pas modifiées.

Il reste à voir que les équations (8') et (9') ne peuvent avoir constamment leurs deux racines en v communes.

En effet, s'il en est ainsi, on doit avoir

$$\frac{A't^2 + D'}{A''u^2 + D''} = \frac{C't}{C''u} = \frac{B't^2 + E'}{B''u^2 + E''}$$

ou

$$A'C''t^2u - C'A''tu^2 - C'D''t + D'C''u = 0,$$

$$B'C''t^2u - C'B''tu^2 - C'E''t + E'C''u = 0.$$

Ces dernières équations doivent être identiques à l'équation (7').

On a donc

$$C'A'' = 0, \quad C'B'' = 0;$$

d'où

$$C' = 0 \quad \text{ou bien} \quad A'' = 0, \quad B'' = 0.$$

Or, si l'on a

$$C' = 0,$$

il résulte de la discussion du § II que l'équation (8') a nécessairement l'une des deux formes

$$A't^2 + E' = 0, \quad B't^2 + D't^2 = 0.$$

L'angle tétraèdre B aurait donc ses faces opposées égales ou supplémentaires deux à deux, et nous avons exclu, dans l'examen de ce cas, la présence de pareils angles tétraèdres.

On a donc

$$A'' = 0, \quad B'' = 0,$$

et l'équation (9') se réduit à

$$2C''uv + D''v^2 + E'' = 0.$$

L'angle tétraèdre A est rhomboïde (§ II), et l'on a

$$\begin{aligned} \text{angle EAC} &= \pi - \text{angle BAC}, & \text{angle FAE} &= \pi - \text{angle BAF}, \\ \text{dièdre AE} &= \text{dièdre AB}. \end{aligned}$$

Comme on a aussi

$$\text{dièdre CE} = \text{dièdre CB},$$

les deux angles tétraèdres ayant leurs sommets en B et E doivent se déformer de manière que deux dièdres adjacents de l'un soient constamment égaux, respectivement, à deux dièdres adjacents du second angle tétraèdre. Il faut donc (§ III) que leurs faces soient deux à deux égales ou supplémentaires. On a aussi

$$\begin{aligned} \text{dièdre FE} &= \text{dièdre FB}, \\ \text{dièdre DE} &= \text{dièdre DB}. \end{aligned}$$

Les angles tétraèdres F et D sont donc rhomboïdes.

En réunissant ces résultats, on voit que les triangles

$$\begin{aligned} \text{AFE} &\text{ et } \text{AFB}, \\ \text{ACB} &\text{ et } \text{ACE}, \\ \text{BFD} &\text{ et } \text{EFD}, \\ \text{BCD} &\text{ et } \text{ECD} \end{aligned}$$

ont, deux à deux, leurs angles égaux ou supplémentaires. L'égalité seule est possible. On a en particulier

$$\begin{aligned} \text{angle BAF} &= \text{angle EAF}, \\ \text{angle BAC} &= \text{angle EAC}. \end{aligned}$$

Nous avons reconnu d'autre part que ces angles, faces de l'angle tétraèdre A, sont deux à deux supplémentaires. Ils ne peuvent donc être, tous, égaux qu'à $\frac{\pi}{2}$, ce qui est visiblement impossible.

IX.

Il reste à examiner le cas où l'un des angles tétraèdres au moins a ses faces opposées égales ou supplémentaires deux à deux.

Supposons qu'il en soit ainsi pour l'angle tétraèdre C. Les variables t et u satisfont à l'une des relations

$$tu = k, \quad \frac{t}{u} = k.$$

J'admettrai l'existence de la première, le raisonnement étant le même dans le second cas. Cela posé, il faut examiner deux hypothèses différentes :

1^o Aucun des angles tétraèdres dont les sommets se trouvent aux extrémités des arêtes issues de C n'a ses faces opposées égales ou supplémentaires deux à deux.

2^o L'un de ces angles tétraèdres présente cette particularité.

Dans le premier cas, les angles tétraèdres A et B sont généraux ou rhomboïdes. Supposons-les généraux, par exemple. Le système des relations entre t , u , c est alors

$$(7'') \quad tu = k,$$

$$(8'') \quad A't^2c^2 + B't^2 + 2C'tc + D'c^2 + E' = 0,$$

$$(9'') \quad A''u^2c^2 + B''u^2 + 2C''uc + D''c^2 + E'' = 0.$$

L'équation (8'') en t et l'équation (9'') en u ont leurs racines égales pour les mêmes valeurs de c : on en conclut que les dièdres AE et BD sont constamment égaux ou supplémentaires.

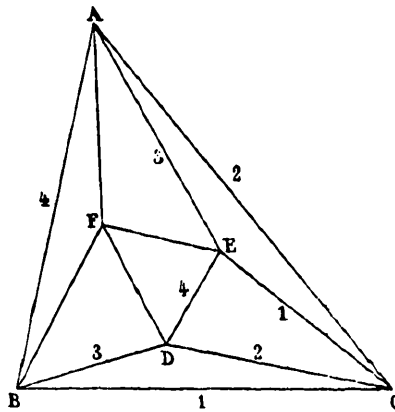
La considération simultanée des angles tétraèdres A, C, E montre de même que les dièdres AB, DE sont constamment égaux ou supplémentaires. On peut donc construire la *fig.* 5, où les dièdres affectés du même chiffre présentent cette relation (les dièdres 1 et les dièdres 2 à cause de la nature de l'angle tétraèdre C).

Si l'on applique alors aux angles tétraèdres A et D d'une part,

B E de l'autre, le théorème qui a déjà été utilisé plusieurs fois, on voit :

1° Que les dièdres FA et FD, d'une part, FB et FE, de l'autre, sont constamment égaux, et que l'angle tétraèdre F a, par suite, ses faces opposées égales ou supplémentaires deux à deux ;

Fig. 5.



2° Que les faces de l'octaèdre se répartissent en quatre couples de triangles ayant leurs angles égaux deux à deux :

$$\begin{aligned} & AFE \text{ et } DFB, \\ & AFB \text{ et } DFE, \\ & AEC \text{ et } DBC, \\ & ABC \text{ et } DEC. \end{aligned}$$

Pour chaque couple les sommets homologues sont écrits dans le même ordre. On a donc la série d'égalités

$$\begin{aligned} \frac{AF}{DF} = \frac{FE}{FB} = \frac{EA}{BD}, & \quad \frac{AF}{DF} = \frac{FB}{FE} = \frac{BA}{ED}, \\ \frac{AE}{DB} = \frac{EC}{BC} = \frac{CA}{CD}, & \quad \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EC} = \frac{CA}{CD}, \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{lll} FA = FD, & FE = FB, & CA = CD, \\ CB = CE, & AE = DB, & AB = DE. \end{array} \right.$$

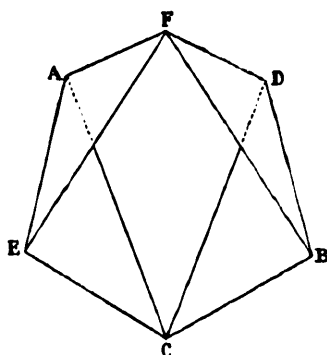
Ainsi les arêtes de l'octaèdre doivent encore être égales deux à deux, mais les arêtes égales ne sont pas toutes opposées deux à deux, ce qui distingue les conditions (12) des conditions (11).

X.

Il faut maintenant montrer que tout octaèdre dont les arêtes satisfont aux relations (12) est déformable, lorsque de plus certaines conditions, relatives aux dispositions des faces, sont remplies.

Pour cela, considérons (*fig. 6*) le système de quatre triangles

Fig. 6.



rigides FAE, CAE, FDB, CDB, articulés aux points F, C, et suivant les droites AE, BD. On suppose les égalités

$$FA = FD, \quad FE = FB, \quad CA = CD, \quad CE = CB, \quad AE = DB.$$

Le système des deux derniers triangles est superposable à celui des deux premiers, ou bien il lui est symétrique par rapport à un certain plan passant par FC.

Dans le premier cas on verra, par des raisonnements analogues à ceux du § VII, que l'on ne peut avoir constamment $AB = DE$. L'octaèdre constitué en reliant les points A et B d'une part, D et E de l'autre, ne satisfaisant pas à toutes les relations (12) et ne satisfaisant pas non plus aux relations (11), ne peut être déformable.

Au contraire, si les deux systèmes de triangles sont symétriques, il

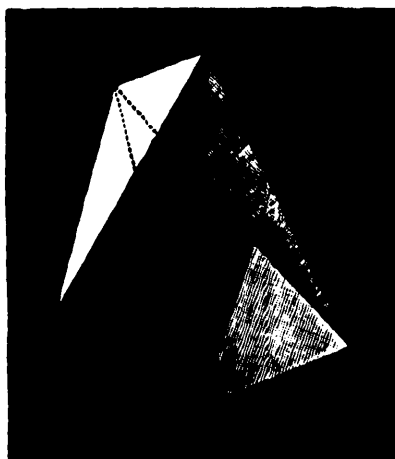
est évident que, quelle que soit leur position respective, on a toujours

$$AB = DE.$$

Le raisonnement s'achèvera comme au § VII, et l'on aura établi que les relations (12), de même que les relations (11), suffisent, sous la restriction indiquée, à assurer la déformabilité d'un octaèdre.

Ce deuxième octaèdre peut être réalisé comme le premier, en lais-

Fig. 7.



Octaèdre possédant un plan de symétrie passant par deux sommets opposés.
Les faces sont ABC, DEF, BCD, CAE, ABF, AEF, BFD, CDE.

sant vides les faces ABC et DEF. Le modèle ainsi obtenu est représenté *fig. 7*.

XI.

J'arrive enfin au cas où deux angles tétraèdres ayant leurs sommets adjacents, l'angle tétraèdre C et l'angle tétraèdre B, par exemple, ont chacun leurs faces opposées égales ou supplémentaires deux à deux.

On voit tout d'abord qu'il doit en être de même pour tous les angles tétraèdres de l'octaèdre.

En effet, des relations

$$tu \quad \text{ou} \quad \frac{t}{u} = k,$$

$$tv \quad \text{ou} \quad \frac{t}{v} = k',$$

on tire

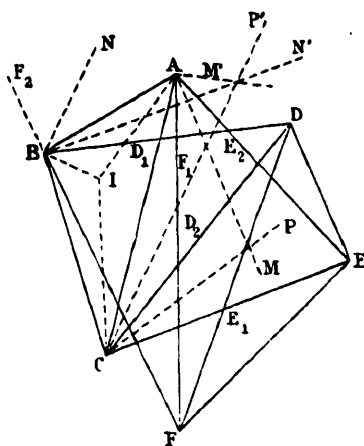
$$\frac{u}{v} \quad \text{ou} \quad uv = k'',$$

ce qui établit la proposition pour l'angle tétraèdre A ; on l'établira de même pour les angles tétraèdres D, E, F.

Si donc le dièdre BC devient égal à 0 ou à π , l devenant nul ou infini, les variables u , v sont aussi nulles ou infinies, et les dièdres AC, AB, égaux à 0 ou à π . Il en est de même pour tous les autres dièdres. En d'autres termes, l'octaèdre peut être complètement aplati sur la face ABC.

Représentons-le dans cette position. Il peut se présenter plusieurs cas de figure pour lesquels le raisonnement est à peu près identique.

Fig. 8.



Je supposerai, par exemple, que la disposition est celle de la *fig.* 8.

On a

$$\text{angle FAE} = \text{angle BAC.}$$

$$\text{angle DCE} = \text{angle ACB,}$$

$$\text{angle DBF} = \pi - \text{angle ABC.}$$

Pendant la déformation de l'octaèdre, on peut avoir divers systèmes

de relations entre t, u, v . Soit, par exemple (§ II),

$$uv = \frac{\cos \frac{BAF - BAC}{2}}{\cos \frac{BAF + BAC}{2}},$$

$$\frac{t}{v} = \frac{\sin \frac{ABC - DBC}{2}}{\sin \frac{ABC + DBC}{2}},$$

$$tu = \frac{\sin \frac{DCB - ACB}{2}}{\sin \frac{DCB + ACB}{2}}.$$

Ces équations doivent être satisfaites par une infinité de systèmes de valeurs de t, u, v . On a donc

$$(13) \quad \frac{\cos \frac{BAF - BAC}{2}}{\cos \frac{BAF + BAC}{2}} \frac{\sin \frac{ABC - DBC}{2}}{\sin \frac{ABC + DBC}{2}} \frac{\sin \frac{DCB + ACB}{2}}{\sin \frac{DCB - ACB}{2}} = 1.$$

Telle est la condition nécessaire et suffisante pour que l'octaèdre ABCDEF soit déformable.

Pour donner à cette condition une forme géométrique, menons les bissectrices intérieures du triangle ABC : AI, BI, CI. Menons encore les droites AM, CP, BN, les deux premières, bissectrices *intérieures* des angles EAF, DCE, la troisième, bissectrice *extérieure* de l'angle FBD. Soient enfin AM' la bissectrice *extérieure* de l'angle IAM, BN' et CP' les bissectrices *intérieures* des angles IBN, ICP. On a :

$$\frac{\cos \frac{BAF - BAC}{2}}{\cos \frac{BAF + BAC}{2}} = \frac{\cos \left(\frac{IAM}{2} - IAC \right)}{\cos \left(\frac{IAM}{2} + BAI \right)} = \frac{\cos \left(IAM' - \frac{\pi}{2} - IAC \right)}{\cos \left(IAM' - \frac{\pi}{2} + BAI \right)}$$

$$= \frac{\sin (IAM' - IAC)}{\sin (IAM' + BAI)} = \frac{\sin CAM'}{\sin BAM'},$$

$$\frac{\sin \frac{ABC - DBC}{2}}{\sin \frac{ABC + DBC}{2}} = \frac{\sin \left(IBA - \frac{IBN}{2} \right)}{\sin \left(CBI + \frac{IBN}{2} \right)} = \frac{\sin (IBA - IBN')}{\sin (CBI - IBN')} = \frac{\sin N'BA}{\sin CBN'}$$

$$\frac{\sin \frac{DCB + ACB}{2}}{\sin \frac{DCB - ACB}{2}} = \frac{\sin \left(\frac{PCI}{2} + ICB \right)}{\sin \left(\frac{PCI}{2} - ACl \right)} = \frac{\sin (P'CI + ICB)}{\sin (P'CI - ACl)} = \frac{\sin P'CB}{\sin P'CA}$$

La relation (13) devient donc

$$\frac{\sin CAM'}{\sin BAM'} \frac{\sin N'BA}{\sin CBN'} \frac{\sin P'CB}{\sin P'CA} = 1;$$

d'où l'on conclut, en vertu d'un théorème bien connu, que les droites AM' , BN' , CP' sont concourantes.

J'ai fait une hypothèse particulière sur la forme des relations qui existent entre t , u , v . Il est clair que, dans tous les autres cas, on arrivera à un résultat analogue, et l'on peut énoncer comme il suit la règle générale de construction d'un octaèdre articulé dont tous les angles tétraèdres ont leurs faces opposées deux à deux égales ou supplémentaires.

On construit un triangle ABC quelconque, dont les bissectrices intérieures sont les droites AI, BI, CI, et des sommets de ce triangle on mène trois droites concourantes quelconques AM' , BN' , CP' . On trace les droites AM, BN, CP, symétriques des droites AI, BI, CI, respectivement par rapport aux droites AM' , BN' , CP' .

On construit ensuite les angles F_1AE_2 , D_1BF_2 , E_1CD_2 , obtenus en faisant tourner dans leur plan les angles BAC, CBA, ACB, autour de leurs sommets et d'angles égaux en grandeur et en signe respectivement à IAM, IBN, ICP. Soient D, E, F les points de rencontre respectifs des droites (prolongées s'il le faut au delà des sommets du triangle) BD₁ et CD₂, CE₁ et AE₂, AF₁ et BF₂.

En supposant réalisés les triangles ABC, BCD, CAE, ABF, AEF, BFD, CDE, DEF, articulés deux à deux suivant leurs côtés communs, ces triangles sont les faces d'un octaèdre déformable.

On peut éprouver certaines difficultés dans la construction d'un modèle de ce dernier octaèdre : quelles faces faut-il laisser vides ? de quel côté doit être tournée la concavité de chaque dièdre ? Ce sont des problèmes qu'on ne pourra résoudre dans chaque cas particulier que par l'examen attentif des relations entre t , u , v et des signes qu'elles imposent à chaque variable. Il serait beaucoup trop long d'exposer ici ces raisonnements minutieux. Je me contenterai d'indiquer comment doit se faire la construction de l'octaèdre de la *fig. 8*.

Je l'ai représenté (*fig. 9*) dans la même position que dans la figure précédente ; les faces AEC, DBF sont vides. Le dièdre AF a sa conca-

Fig. 9.

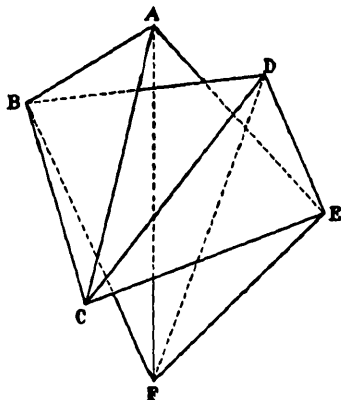
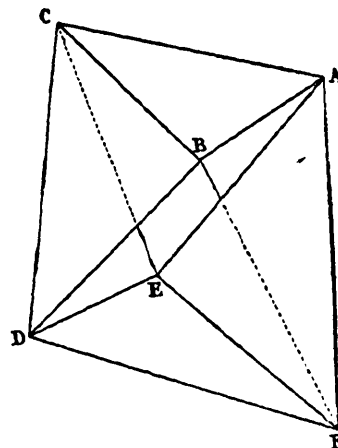


Fig. 10.



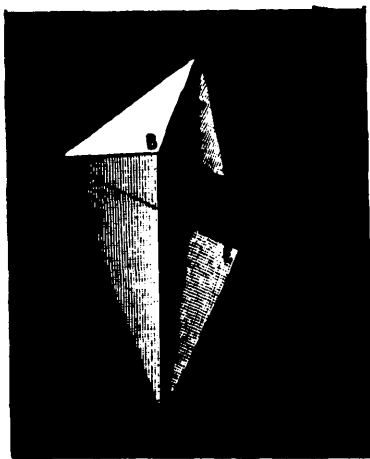
vitité tournée en avant du plan de la figure ; celle du dièdre DC est tournée en arrière.

Les lignes tracées en pointillé indiquent sans ambiguïté dans quel ordre sont superposées les faces : en particulier, la face DEF est en arrière de la face AEF.

Quand on déforme cet octaèdre, en laissant dans le plan de la figure la face ABF, les sommets D, E, C se déplacent en avant de ce plan, et en poursuivant la déformation on arrive à une nouvelle position d'aplatissement représentée (*fig. 10*). La *fig. 11* représente une position intermédiaire.

Si le lecteur veut bien prendre la peine de construire ce modèle, en

Fig. 11.



Octaèdre dont tous les angles tétraèdres ont leurs faces opposées égales
ou supplémentaires deux à deux.
Les faces sont ABC, DEF, BCD, CAE, ABF, AEF, BFD, CDE.

suivant les indications précédentes, il devra, je le répète, conserver à peu près exactement les proportions de la figure.

XII.

En résumé, l'étude précédente a fait reconnaître qu'il existe *trois* types d'octaèdres articulés à faces invariables. Tous ces polyèdres sont concaves ou, pour parler d'une façon plus précise, possèdent certaines faces qui s'entrecroisent.

Les octaèdres du type I et ceux du type II sont susceptibles de définitions simples : les premiers possèdent un axe de symétrie et, par suite, sont tels que la figure formée par quatre de leurs faces ayant un sommet commun est superposable à la figure formée par les quatre autres faces ; ceux du type II possèdent un plan de symétrie, passant par deux sommets opposés. (Ces définitions ne sont pas *absolument* suffisantes, mais on ne pourrait les compléter qu'au prix de bien des

longueurs, et je pense que l'examen des *fig.* 4 et 7 rend cela inutile.)

Quant aux octaèdres du type III, on a vu que leur définition est plus compliquée ; leur déformabilité est loin d'être aussi intuitive que celle des premiers, et en ce sens ils doivent être considérés comme les plus intéressants.

Je ferai encore remarquer que le problème que j'ai traité est identique aux deux problèmes suivants :

1° *Quels sont les hexagones gauches déformables avec conservation de leurs côtés et de leurs angles ?*

Si, en effet, un hexagone gauche est déformable dans ces conditions, les droites qui joignent ses sommets de deux en deux sont de longueurs constantes et les huit triangles formés par ces droites et par les côtés de l'hexagone sont les faces d'un octaèdre déformable avec conservation de ses arêtes.

Un octaèdre déformable présente, réciproquement, *quatre* de ces hexagones. Ce sont (*fig.* 4, 7 ou 10) les hexagones

ABCDEF,
ABFDEC,
AECDBF,
AEFDBC.

2° *Dans quel cas un système de six plans 1, 2, 3, 4, 5, 6, dont chacun est articulé avec le précédent suivant une droite servant de charnière, le plan 6 étant articulé avec les plans 1 et 5, est-il susceptible de déformation ?*

En effet, les droites suivant lesquelles sont articulés ces plans forment un hexagone déformable avec conservation de ses côtés et de ses angles.

Les faces pleines de l'un des octaèdres des *fig.* 4, 7, 11 constituent un pareil système.

XIII.

Il n'est pas sans intérêt de faire remarquer l'analogie que présente la théorie de l'octaèdre articulé avec celle des systèmes de quadrilatères articulés étudiés par MM. Hart et Kempe dans des cas particuliers et par M. Darboux dans le cas général. L'un des problèmes traités par ces géomètres est, en effet, le suivant : trois quadrilatères plans articulés $ABCD$, $AEFG$, $BEHI$ étant disposés comme l'indique la

Fig. 12.

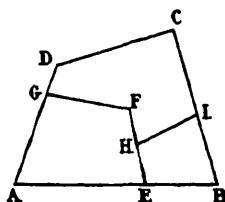


fig. 12, dans quel cas leur système, rigide en général, est-il susceptible de déformation ?

Si l'on désigne par t , u , v les tangentes des moitiés des angles BAD , ABC , BEH , il existe entre ces quantités trois relations qui ont la même forme que les relations (7), (8), (9) et qui doivent avoir une infinité de solutions. C'est le même problème qui s'est présenté dans la théorie de l'octaèdre articulé (¹).

(¹) Les modèles des trois octaèdres, construits avec des feuilles minces de carton, ont été offerts aux Collections de l'École polytechnique.

