JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

P. DUHEM

Sur la stabilité de l'équilibre d'une masse fluide dont les éléments sont soumis à leurs actions mutuelles

Journal de mathématiques pures et appliquées 5e série, tome 3 (1897), p. 151-193.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1897_5_3__151_0>

Sur la stabilité de l'équilibre d'une masse fluide dont les éléments sont soumis à leurs actions mutuelles;

PAR M. P. DUHEM.

---

§ 1. — Sur les équations générales de l'équilibre des fluides.

Nous avons établi, dans un précédent Travail ([1]), les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une masse fluide soit en équilibre stable; mais, dans cette étude, nous avons admis que toutes les forces exercées sur les divers éléments du fluide étaient des *forces extérieures;* nous avons supposé, en outre, que ces forces dérivaient d'une fonction potentielle dépendant des coordonnées du point où se trouve l'élément fluide considéré, mais point des propriétés de cet élément.

C'est là un cas infiniment particulier de l'Hydrostatique. Nous avons étudié ailleurs ([2]) un cas beaucoup plus général : c'est celui où deux éléments fluides, de masses dm et dm', exercent l'un sur l'autre des actions dont le potentiel est de la forme

$$\Psi(\rho, \rho', r)\, dm\, dm',$$

r étant la distance des deux masses élémentaires et ρ, ρ' leurs densités.

([1]) *Sur la stabilité de l'équilibre des corps flottants*, Chap. I. (*Journal de Mathématiques*, 5e série, t. I, p. 108.)

([2]) *Le potentiel thermodynamique et la pression hydrostatique.* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 3e série, t. X, p. 183.)

Dans ce cas, les *actions* mutuelles des deux masses élémentaires comprennent non seulement une *force* répulsive réciproque, dont la grandeur est

$$- \frac{\partial \Psi(\rho, \rho', r)}{\partial r} dm\, dm',$$

mais encore une *influence;* cette influence, qui tend à accroître la densité de l'élément dm sans tendre à déplacer le centre de gravité de cet élément, a pour grandeur

$$- \frac{\partial \Psi(\rho, \rho', r)}{\partial \rho} dm\, dm'.$$

La masse dm' est soumise à une influence analogue.

Ce type d'actions mutuelles est très étendu. Il comprend, en particulier, les actions newtoniennes; dans ce cas, la fonction Ψ ne dépend que de r, et point de ρ et de ρ'; les *actions* mutuelles de deux particules se réduisent à des *forces* réciproques et les *influences* sont supprimées; il comprend aussi l'action répulsive, insensible entre corps denses, mais sensible lorsqu'un des corps agissants est très raréfié, par laquelle M. Faye explique les diverses apparences de la queue des comètes; les actions moléculaires qu'invoque la théorie de la capillarité appartiennent vraisemblablement aussi à la catégorie d'actions pour lesquelles la fonction Ψ dépend véritablement de ρ et de ρ'.

Moyennant certaines hypothèses indispensables sur la manière dont la fonction $\Psi(\rho, \rho', r)$ et ses dérivées partielles se comportent pour les valeurs infiniment petites de r, hypothèses que nous ne voulons pas rappeler ici, il est possible de donner les conditions d'équilibre d'un fluide soumis à de semblables actions. Rappelons brièvement quelles sont ces conditions.

Le système, dont la température est supposée uniforme et constante, admet un potentiel thermodynamique interne qui est de la forme suivante :

$$(1) \qquad \mathcal{F} = \int \rho \zeta(\rho)\, dv + \frac{1}{2} \int\!\!\int \rho\rho' \Psi(\rho, \rho', r)\, dv\, dv',$$

chacune des intégrales s'étendant au volume entier du système. La fonction $\zeta(\rho)$ n'est déterminée qu'à une constante près; au contraire, la fonction $\Psi(\rho, \rho', r)$ est entièrement déterminée si on lui impose la condition de s'annuler pour les valeurs infinies de r.

Posons

$$V = \int \Psi(\rho, \rho', r)\rho' dv', \tag{2}$$

$$\mathcal{A} = -\int \frac{\partial}{\partial\rho}\Psi(\rho, \rho', r)\rho' dv', \tag{3}$$

$$\left\{\begin{aligned} X_i &= -\int \frac{\partial}{\partial r}\Psi(\rho, \rho', r)\frac{\partial r}{\partial x}\rho' dv', \\ Y_i &= -\int \frac{\partial}{\partial r}\Psi(\rho, \rho', r)\frac{\partial r}{\partial y}\rho' dv', \\ Z_i &= -\int \frac{\partial}{\partial r}\Psi(\rho, \rho', r)\frac{\partial r}{\partial z}\rho' dv'. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Ces cinq intégrales sont des fonctions finies de x, y, z; elles sont continues si les propriétés de la matière varient d'une manière continue au voisinage du point (x, y, z).

Les égalités (2), (3) et (4) donnent

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= -X_i - \mathcal{A}\frac{\partial\rho}{\partial x}, \\ \frac{\partial V}{\partial y} &= -Y_i - \mathcal{A}\frac{\partial\rho}{\partial y}, \\ \frac{\partial V}{\partial z} &= -Z_i - \mathcal{A}\frac{\partial\rho}{\partial z}. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Quant aux forces extérieures, nous supposerons que la masse élémentaire dm est soumise à une force extérieure dont les composantes sont

$$X_e dm, \quad Y_e dm, \quad Z_e dm,$$

avec

$$X_e = -\frac{\partial U}{\partial x}, \qquad Y_e = -\frac{\partial U}{\partial y}, \qquad Z_e = -\frac{\partial U}{\partial z}, \tag{6}$$

la fonction U dépendant des coordonnées x, y, z d'un point de l'élément dm, mais ne dépendant pas de la densité ρ de cet élément; au cas où l'action exercée par un corps extérieur ne vérifierait pas cette condition, on impliquerait ce corps à l'intérieur du système considéré : c'est d'ailleurs là un artifice dont le seul but est de simplifier les écritures; il serait aisé de s'en passer.

Les conditions d'équilibres du fluide sont les suivantes :

Il existe une fonction $\Pi(x, y, z)$, positive en tous les points de la masse fluide et variant d'une manière continue d'un point à l'autre, telle que l'on ait

$$(7) \qquad \rho[(X_i + X_e)\,dx + (Y_i + Y_e)\,dy + (Z_i + Z_e)\,dz] = d\Pi.$$

En chaque point de la surface qui termine le fluide est appliquée une pression normale, dirigée vers l'intérieur du fluide, et égale en grandeur à la valeur de Π en ce point.

En tout point pris à l'intérieur du fluide, on a l'égalité

$$(8) \qquad \rho^2 \frac{d\zeta(\rho)}{d\rho} = \Pi + \rho^2 \mathcal{A}.$$

De ces conditions nécessaires et suffisantes pour l'équilibre de la masse fluide, déduisons immédiatement quelques conséquences.

L'égalité (8) nous montre que, dans le cas général que nous étudions, *la densité en un point n'est plus fonction de la seule pression au même point;* une proposition, admise en général comme évidente par les auteurs qui se sont occupés d'Hydrostatique, se trouve ainsi restreinte au cas où la fonction Ψ ne dépend ni de ρ, ni de ρ', cas que nous nommerons *cas des actions newtoniennes.*

Posons

$$(9) \qquad \Omega = V + U.$$

Ω sera la fonction potentielle totale tant des actions extérieures que des actions intérieures. En vertu des égalités (5) et (6), nous aurons

$$(X_i + X_e)\,dx + (Y_i + Y_e)\,dy + (Z_i + Z_e)\,dz + \mathcal{A}\,d\rho + d\Omega = 0$$

ou bien

$$(10) \qquad \rho\,d\Omega + \mathcal{A}\,\rho\,d\rho + d\Pi = 0.$$

Cette égalité (10), vérifiée en tous les points du fluide, nous montre que les surfaces d'égale pression sont définies par l'équation

$$d\Omega + \mathcal{A}\, d\rho = 0. \tag{11}$$

Les surfaces d'égale pression ne sont pas surfaces d'égal niveau potentiel.

Posons

$$\Theta(\rho) = \zeta(\rho) + \rho \frac{d\zeta(\rho)}{d\rho}. \tag{12}$$

Comme la fonction $\zeta(\rho)$, la fonction $\Theta(\rho)$ sera définie seulement à une constante près. Les équations (8) et (10) nous montrent que l'on a, à l'intérieur du fluide,

$$\Omega - \rho\mathcal{A} + \Theta(\rho) = \text{const.} \tag{13}$$

Les surfaces d'égale densité vérifient donc l'égalité

$$\Omega - \rho\mathcal{A} = \text{const.} \tag{14}$$

Elles ne coïncident pas avec les surfaces d'égal niveau potentiel.

L'égalité (8) nous montre d'ailleurs que *les surfaces d'égale densité ne coïncident pas avec les surfaces d'égale pression.*

Ainsi, les trois familles de surfaces

$$\Omega = \text{const.}, \qquad \Pi = \text{const.}, \qquad \rho = \text{const.}$$

ne coïncident pas en général; elles ne se réduisent à une même famille de surfaces que dans le cas des actions newtoniennes, cas où l'on a l'identité

$$\mathcal{A} = 0.$$

§ 2. — Généralisation des résultats précédents.

Bien que les résultats précédents aient été établis dans des hypothèses très générales, il y a lieu de les étendre encore, afin de pouvoir traiter complètement certains des problèmes qui vont suivre.

En premier lieu, nous avons supposé qu'au sein d'un fluide continu, de température uniforme, les éléments ne pouvaient différer les uns des autres que par leur densité; mais il est des cas où cette supposition n'est pas vérifiée; par exemple, au sein d'une dissolution saline ou d'un mélange gazeux, les éléments peuvent différer les uns des autres, non seulement par leur densité, mais encore par leur concentration ou leur composition; s'il s'agit d'une dissolution d'un seul sel dans un seul menstrue, ou du mélange de deux gaz, cette concentration ou cette composition s'exprime au moyen d'une seule variable; il en faut un plus grand nombre dans le cas où l'on considère un mélange de plus de deux corps; pour ne pas introduire d'interminables équations, nous supposerons simplement que l'état de chaque élément fluide peut être défini par sa densité et par une seule autre variable s.

En second lieu, nous avons étudié une masse fluide continue; mais on peut avoir affaire à une masse fluide dont la nature change brusquement au passage d'une surface de discontinuité.

Traitons d'abord le cas où le système se compose d'un seul fluide continu; ce fluide continu, nous le supposerons formé de deux corps α, β; la masse élémentaire dm se composera d'une masse dm_α du corps α et d'une masse dm_β du corps β; nous poserons

$$s = \frac{dm_\beta}{dm_\alpha} \tag{15}$$

et nous dirons que s est la *concentration* en un point de la masse dm.

L'état de la masse dm dépend non seulement de sa densité ρ, mais encore de sa concentration s. Le système admet un potentiel thermodynamique interne de la forme

$$\mathfrak{F} = \int \rho\zeta(\rho, s)\,dv + \frac{1}{2}\int\int \rho\rho'\Psi(\rho, \rho', s, s', r)\,dv\,dv'. \tag{16}$$

Les diverses masses élémentaires du système sont soumises à des forces extérieures qui admettent pour potentiel la quantité

$$\mathcal{G} = \int \rho U\,dv, \tag{17}$$

où U désigne une fonction de x, y, z, finie, uniforme et continue dans tout l'espace occupé par le fluide.

Enfin, chaque élément dS de la surface déformable du fluide est soumis à une force dont les composantes sont

$$P_x dS, \quad P_y dS, \quad P_z dS.$$

Posons

$$V = \int \rho' \Psi(\rho, \rho', s, s', r)\, dv', \tag{18}$$

$$\left\{ \begin{aligned} X_i &= -\int \rho' \frac{\partial \Psi(\rho, \rho', s, s', r)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} dv', \\ Y_i &= -\int \rho' \frac{\partial \Psi(\rho, \rho', s, s', r)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} dv', \\ Z_i &= -\int \rho' \frac{\partial \Psi(\rho, \rho', s, s', r)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial z} dv', \end{aligned} \right. \tag{19}$$

$$\mathcal{R} = -\int \rho' \frac{\partial \Psi(\rho, \rho', s, s', r)}{\partial \rho} dv', \tag{20}$$

$$\mathcal{S} = -\int \rho' \frac{\partial \Psi(\rho, \rho', s, s', r)}{\partial s} dv', \tag{21}$$

$$X_e = -\frac{\partial U}{\partial x}, \qquad Y_e = -\frac{\partial U}{\partial y}, \qquad Z_e = -\frac{\partial U}{\partial z}. \tag{22}$$

Imaginons une modification infiniment petite du système; un point matériel ayant pour coordonnées x, y, z, au commencement de la modification, a pour coordonnées, à la fin de la modification,

$$x + Dy, \quad y + Dy, \quad z + Dz.$$

Sa densité, qui était ρ, est devenue $(\rho + D\rho)$; sa concentration, qui était s, est devenue $(s + Ds)$.

On en conclut sans peine qu'*au point fixe de l'espace* (x, y, z), la densité et la concentration, qui avaient pour valeurs ρ et s avant la modification, ont pour valeur, après la modification, $(\rho + \delta\rho)$ et

$(s + \delta s)$, $\delta\rho$ et δs étant donnés par les égalités

$$(23) \qquad \delta\rho = D\rho - \frac{\partial\rho}{\partial x}Dx - \frac{\partial\rho}{\partial y}Dy - \frac{\partial\rho}{\partial z}Dz,$$

$$(24) \qquad \delta s = Ds - \frac{\partial s}{\partial x}Dx - \frac{\partial s}{\partial y}Dy - \frac{\partial s}{\partial z}Dz.$$

Soient M_α, M_β les masses des corps α, β, que renferme le système; ces masses ont respectivement pour valeurs, en vertu de l'égalité (15) qui définit la concentration s,

$$(25) \qquad M_\alpha = \int \frac{1}{1+s}\rho\, dv,$$

$$(26) \qquad M_\beta = \int \frac{s}{1+s}\rho\, dv.$$

Ces masses doivent demeurer invariables par l'effet de la modification que le système éprouve, ce qu'expriment les deux égalités

$$(27) \quad \left\{ \begin{aligned} &\int \left[\frac{1}{1+s}\delta\rho - \frac{\rho}{(1+s)^2}\delta s\right] dv \\ &\quad + \mathbf{S}\, \frac{\rho}{1+s}[\cos(n_e, x)Dx + \cos(n_e, y)Dy + \cos(n_e, z)Dz]\, dS = 0, \end{aligned} \right.$$

$$(28) \quad \left\{ \begin{aligned} &\int \left[\frac{s}{1+s}\delta\rho + \frac{\rho}{(1+s)^2}\delta s\right] dv \\ &\quad + \mathbf{S}\, \frac{\rho s}{1+s}[\cos(n_e, x)Dx + \cos(n_e, y)Dy + \cos(n_e, z)Dz]\, dS = 0, \end{aligned} \right.$$

n_e étant la normale à l'élément dS vers l'extérieur du fluide.

Ces relations lient les variations $\delta\rho$, δs, de la densité et de la concentration en chaque point de l'espace occupé par le fluide et les composantes Dx, Dy, Dz du déplacement aux limites du fluide; ce sont les seules conditions auxquelles ces variations soient assujetties.

Dans la modification considérée, les forces appliquées à la surface déformable S effectuent un travail

$$(29) \qquad d\mathfrak{E} = \mathbf{S}(P_x Dx + P_y Dy + P_z Dz)\, dS.$$

Le potentiel $\mathcal{G}$ des forces extérieures éprouve une variation

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned} \delta\mathcal{G} &= \int \mathrm{U}\,\delta\rho\,dv \\ &+ \mathbf{S}\,\rho\,\mathrm{U}\left[\cos(n_e, x)\mathrm{D}x + \cos(n_e, y)\mathrm{D}y + \cos(n_e, z)\mathrm{D}z\right]d\mathrm{S}. \end{aligned}\right.$$

Le potentiel thermodynamique interne $\mathcal{F}$ éprouve une variation

$$(31)\quad \left\{\begin{aligned} \delta\mathcal{F} &= \int\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\zeta) + \mathrm{V} - \rho\mathcal{A}\right]\delta\rho\,dv + \int\rho\left(\frac{\partial\zeta}{\partial s} - s\right)\delta s\,dv \\ &+ \mathbf{S}\,\rho(\mathrm{V}+\zeta)\left[\cos(n_e, x)\mathrm{D}x + \cos(n_e, y)\mathrm{D}y + \cos(n_e, z)\mathrm{D}z\right]d\mathrm{S}. \end{aligned}\right.$$

Les conditions d'équilibre du système s'obtiendront en exprimant que l'on a

$$(32)\qquad \delta\mathcal{F} + \delta\mathcal{G} - d\mathfrak{C} = 0.$$

Cette égalité doit avoir lieu non pas quels que soient $\delta\rho$, δs, $\mathrm{D}x$, $\mathrm{D}y$, $\mathrm{D}z$, mais seulement lorsque ces quantités sont liées par les équations (27) et (28). Si donc on désigne par λ et μ deux constantes convenablement choisies, l'égalité suivante aura lieu, quels que soient $\delta\rho$, δs, $\mathrm{D}x$, $\mathrm{D}y$, $\mathrm{D}z$:

$$(33)\quad \left\{\begin{aligned} &\int\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\zeta) + \mathrm{V} + \mathrm{U} - \rho\mathcal{A} + \frac{\lambda+\mu s}{1+s}\right]\delta\rho\,dv \\ &+ \int\rho\left[\frac{\partial\zeta}{\partial s} - s - \frac{\lambda-\mu}{(1+s)^2}\right]\delta s\,dv \\ &+ \mathbf{S}\left[\rho\left(\mathrm{V}+\mathrm{U}+\zeta+\frac{\lambda+\mu s}{1+s}\right)\cos(n_e, x) - \mathrm{P}_x\right]\mathrm{D}x\,d\mathrm{S} \\ &+ \mathbf{S}\left[\rho\left(\mathrm{V}+\mathrm{U}+\zeta+\frac{\lambda+\mu s}{1+s}\right)\cos(n_e, y) - \mathrm{P}_y\right]\mathrm{D}y\,d\mathrm{S} \\ &+ \mathbf{S}\left[\rho\left(\mathrm{V}+\mathrm{U}+\zeta+\frac{\lambda+\mu s}{1+s}\right)\cos(n_e, z) - \mathrm{P}_z\right]\mathrm{D}z\,d\mathrm{S} = 0. \end{aligned}\right.$$

Ce résultat peut encore s'énoncer de la manière suivante :

1° *On a, en tout point de la surface déformable qui limite le* *fluide,*

$$
(34)\qquad \left\{
\begin{aligned}
P_x &= \rho\left(V + U + \zeta + \frac{\lambda + \mu s}{1+s}\right)\cos(n_e, x),\\
P_y &= \rho\left(V + U + \zeta + \frac{\lambda + \mu s}{1+s}\right)\cos(n_e, y),\\
P_z &= \rho\left(V + U + \zeta + \frac{\lambda + \mu s}{1+s}\right)\cos(n_e, z).
\end{aligned}
\right.
$$

2° *On a, en tout point de la masse fluide,*

$$
(35)\qquad \frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\zeta) + V + U - \rho\mathcal{A} + \frac{\lambda + \mu s}{1+s} = 0,
$$

$$
(36)\qquad \frac{\partial\zeta}{\partial s} - s - \frac{\lambda - \mu}{(1+s)^2} = 0.
$$

Ce sont les conditions nécessaires et suffisantes pour l'équilibre de la masse fluide.

Les conditions (34) peuvent encore s'énoncer ainsi :

La surface déformable du fluide est soumise à une pression normale, dirigée vers l'intérieur du fluide, dont la grandeur est donnée par la valeur que prend, à cette surface, la quantité

$$
(37)\qquad \Pi = -\rho\left(V + U + \zeta + \frac{\lambda + \mu s}{1+s}\right).
$$

Cette quantité prend le nom de *pression à l'intérieur du fluide*. Moyennant l'introduction de cette pression, l'égalité (35) peut encore s'écrire

$$
(38)\qquad \Pi + \rho^2\mathcal{A} - \rho^2\frac{\partial\zeta}{\partial\rho} = 0,
$$

égalité dans laquelle on reconnaît l'égalité (8), qui avait été établie pour un cas plus particulier.

Les égalités (35), (36), (37), (38) conduisent aisément à la proposition suivante :

Les surfaces équipotentielles, les surfaces d'égale pression, les *surfaces d'égale densité et les surfaces d'égale concentration forment, en général, quatre familles de surfaces distinctes; ces quatre familles n'en forment plus qu'une dans le cas où l'on a identiquement*

$$\mathcal{A} = 0, \qquad \mathcal{B} = 0, \tag{39}$$

c'est-à-dire dans le cas où la fonction Ψ est une simple fonction de r (cas des actions newtoniennes).

Occupons-nous maintenant du cas où le fluide considéré est formé de deux masses continues 1 et 2 séparées par une surface de discontinuité Σ. Le fluide 1 est formé par le mélange de deux corps α_1, β_1; le fluide 2 par le mélange de deux autres corps α_2, β_2; les concentrations s_1, s_2 seront définies par des égalités analogues à l'égalité (15).

Les corps α_1, β_1, α_2, β_2 ont des masses M_{α_1}, M_{β_1}, M_{α_2}, M_{β_2} qui doivent demeurer invariables en toute modification du système, ce qu'expriment les conditions

$$(40)\quad \left\{\begin{aligned} &\int\left[\frac{1}{1+s_1}\delta\rho_1 - \frac{\rho_1}{(1+s_1)^2}\delta s_1\right]dv \\ &\quad + \mathbf{S}\frac{\rho_1}{1+s_1}[\cos(n_e,x)\mathrm{D}x + \cos(n_e,y)\mathrm{D}y + \cos(n_e,z)\mathrm{D}z]\,dS_1 \\ &\quad - \mathbf{S}\frac{\rho_1}{1+s_1}[\cos(n_1,x)\mathrm{D}x + \cos(n_1,y)\mathrm{D}y + \cos(n_1,z)\mathrm{D}z]\,d\Sigma = 0, \end{aligned}\right.$$

$$(41)\quad \left\{\begin{aligned} &\int\left[\frac{s_1}{1+s_1}\delta\rho_1 + \frac{\rho_1}{(1+s_1)^2}\delta s_1\right]dv_1 \\ &\quad + \mathbf{S}\frac{\rho_1 s_1}{1+s_1}[\cos(n_e,x)\mathrm{D}x + \cos(n_e,y)\mathrm{D}y + \cos(n_e,z)\mathrm{D}z]\,dS_1 \\ &\quad - \mathbf{S}\frac{\rho_1 s_1}{1+s_1}[\cos(n_1,x)\mathrm{D}x + \cos(n_1,y)\mathrm{D}y + \cos(n_1,z)\mathrm{D}z]\,d\Sigma = 0 \end{aligned}\right.$$

et deux autres égalités qui diffèrent des précédentes en ce que l'indice 2 y remplace l'indice 1; nous les nommerons (40 *bis*) et (41 *bis*). En un point de la surface Σ, n_1 désigne la normale dirigée vers l'intérieur du fluide 1 et n_2 la normale dirigée vers l'intérieur du fluide 2.

Le travail des forces appliquées à la surface déformable se compose de deux termes semblables au second membre de l'égalité (29); l'un se rapporte à la surface S_1, l'autre à la surface S_2. Nous en désignerons l'expression par (29 *bis*).

La variation éprouvée par le potentiel des actions qui s'exercent sur les divers éléments de masse du fluide est donnée non plus par l'égalité (30), mais par l'égalité

$$(42)\quad \left\{\begin{aligned}
\delta\mathcal{G} = {} & \int U\,\delta\rho_1\,dv_1 + \int U\,\delta\rho_2\,dv_2 \\
& + \mathrm{S}\,\rho_1 U[\cos(n_e, x)Dx + \cos(n_e, y)Dy + \cos(n_e, z)Dz]\,dS_1 \\
& + \mathrm{S}\,\rho_2 U[\cos(n_e, x)Dx + \cos(n_e, y)Dy + \cos(n_e, z)Dz]\,dS_2 \\
& - \mathrm{S}\,\rho_1 U[\cos(n_1, x)Dx + \cos(n_1, y)Dy + \cos(n_1, z)Dz]\,d\Sigma \\
& - \mathrm{S}\,\rho_2 U[\cos(n_2, x)Dx + \cos(n_2, y)Dy + \cos(n_2, z)Dz]\,d\Sigma.
\end{aligned}\right.$$

La transformation qui, de l'égalité (30), sert à déduire l'égalité (42), permettra, de l'égalité (31), de déduire l'expression de $\delta\mathcal{F}$ applicable au cas qui nous occupe; il suffira d'écrire successivement deux termes semblables au second membre de l'égalité (31), en les affectant, l'un de l'indice 1, l'autre de l'indice 2, et d'y ajouter

$$-\mathrm{S}\,\rho_1(V_1+\zeta_1)[\cos(n_1, x)Dx + \cos(n_1, y)Dy + \cos(n_1, z)Dz]\,d\Sigma$$

$$-\mathrm{S}\,\rho_2(V_2+\zeta_2)[\cos(n_2, x)Dx + \cos(n_2, y)Dy + \cos(n_2, z)Dz]\,d\Sigma.$$

Nous désignerons par (31 *bis*) l'égalité ainsi obtenue.

Les conditions d'équilibre s'obtiendront en écrivant que l'on a

$$\partial\mathcal{F} + \partial\mathcal{G} - d\varpi = 0,$$

pour toute variation du fluide compatible avec les conditions (40), (40 *bis*) et (41 *bis*). Ces conditions seront les suivantes :

1° *Il existe deux constantes convenablement choisies* λ_1, μ_1, *telles* *que l'on ait, en tout point du fluide* 1,

$$(43)\qquad \frac{\partial}{\partial \rho_1}(\rho_1 \zeta_1) + V_1 + U - \rho_1 \mathcal{A}_1 + \frac{\lambda_1 + \mu_1 s_1}{1 + s_1} = 0,$$

$$(44)\qquad \frac{\partial \zeta_1}{\partial s_1} - \mathfrak{S}_1 - \frac{\lambda_1 - \mu_1}{(1 + s_1)^2} = 0.$$

En tout point de la surface S_1 *est appliquée une force normale, dirigée vers l'intérieur du fluide, et dont la grandeur égale la valeur prise au point considéré par la fonction*

$$(45)\qquad \Pi_1 = -\rho_1 \left(V_1 + U + \zeta_1 + \frac{\lambda_1 + \mu_1 s_1}{1 + s_1} \right).$$

2° *Il existe deux constantes convenablement choisies* λ_2, μ_2, *telles que l'on ait, en tout point du fluide* 2,

$$(43\ bis)\qquad \frac{\partial}{\partial \rho_2}(\rho_2 \zeta_2) + V_2 + U - \rho_2 \mathcal{A}_2 + \frac{\lambda_2 + \mu_2 s_2}{1 + s_2} = 0,$$

$$(44\ bis)\qquad \frac{\partial \zeta_2}{\partial s_2} - \mathfrak{S}_2 - \frac{\lambda_2 - \mu_2}{(1 + s_2)^2} = 0.$$

En tout point de la surface S_2 *est appliquée une force normale, dirigée vers l'intérieur du fluide, et dont la grandeur égale la valeur prise au point considéré par la fonction*

$$(45\ bis)\qquad \Pi_2 = -\rho_2 \left(V_2 + U + \zeta_2 + \frac{\lambda_2 + \mu_2 s_2}{1 + s_2} \right).$$

3° *En tout point de la surface de discontinuité* Σ *qui sépare les fluides* 1 *et* 2, *on a*

$$(46)\qquad \rho_1 \left(V_1 + U + \zeta_1 + \frac{\lambda_1 + \mu_1 s_1}{1 + s_1} \right) = \rho_2 \left(V_2 + U + \zeta_2 + \frac{\lambda_2 + \mu_2 s_2}{1 + s_2} \right).$$

En vertu des égalités (45) et (45 *bis*), l'égalité (46) peut encore s'écrire

$$(47)\qquad \Pi_1 = \Pi_2.$$

Les pressions Π_1, Π_2 sont *deux fonctions analytiques différentes*, définies, l'une à l'intérieur du fluide 1, l'autre à l'intérieur du fluide 2. Mais ces fonctions se soudent l'une à l'autre *sans discontinuité* au passage de la surface Σ.

On verrait sans peine qu'on se tromperait, en général, en énonçant une des propositions suivantes :

Le long de la surface Σ, la pression garde une valeur constante;

Les densités ρ_1, ρ_2 gardent des valeurs constantes;

Les concentrations s_1, s_2 gardent des valeurs constantes;

Les fonctions potentielles $(V_1 + U)$, $(V_2 + U)$ gardent des valeurs constantes.

Toutes ces propositions, fausses en général, deviennent vraies à la fois, lorsque l'on a les identités

$$V_1 = V_2,$$

$$\mathcal{A}_1 = 0, \qquad \mathcal{S}_1 = 0, \qquad \mathcal{A}_2 = 0, \qquad \mathcal{S}_2 = 0,$$

c'est-à-dire dans le cas des actions newtoniennes.

§ 3. — Stabilité de l'équilibre d'un fluide dont les éléments sont soumis à leurs actions mutuelles. Variation seconde du potentiel thermodynamique.

Supposons que les surfaces déformables des fluides 1 et 2 soient soumises à une même pression normale et uniforme P. Le travail de cette pression deviendra, en vertu de l'égalité (29 *bis*),

$$\begin{aligned} P\Big\{ & \int [\cos(n_e, x) Dx + \cos(n_e, y) Dy + \cos(n_e, z) Dz] \, dS_1 \\ & + \int [\cos(n_e, x) Dx + \cos(n_e, y) Dy + \cos(n_e, z) Dz] \, dS_2 \Big\} \end{aligned}$$

ou bien

$$- PDW,$$

en désignant par W le volume total du système, par DW l'accroissement que subit ce volume durant la modification du système.

Si la pression P *est maintenue constante*, ce travail dépend d'un potentiel

$$\mathfrak{H} = \mathrm{PW}, \tag{48}$$

et le système admet un potentiel thermodynamique total

$$\Phi = \mathfrak{F} + \mathfrak{G} + \mathfrak{H}. \tag{49}$$

Nous admettrons la proposition suivante, qui n'est qu'en partie démontrée :

Pour que le système soit en équilibre stable, il faut et il suffit que le potentiel thermodynamique total soit un minimum.

On exprimera donc que le système est en équilibre stable en écrivant que l'on a, à la fois,

$$\delta\Phi = 0, \tag{50}$$

$$\delta^2\Phi > 0, \tag{51}$$

pour toute modification du système compatible avec les liaisons.

Bornons-nous, pour le moment, à étudier le cas d'un *fluide continu*.

Dans ce cas, l'expression de $\delta\Phi$ peut se mettre sous la forme suivante :

$$(52)\quad \left\{ \begin{aligned} \delta\Phi = & \int \left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\zeta) + \mathrm{V} + \mathrm{U} - \rho\mathfrak{s}\right]\delta\rho\, dv \\ & + \int \left[\rho\frac{\partial\zeta}{\partial s} - \rho\mathfrak{s}\right]\delta s\, dv \\ & + \mathbf{S}[\rho(\mathrm{V} + \mathrm{U} + \zeta) + \mathrm{P}] \\ & \quad \times [\cos(n_e, x)\mathrm{D}x + \cos(n_e, y)\mathrm{D}y + \cos(n_e, z)\mathrm{D}z]\, d\mathrm{S}. \end{aligned} \right.$$

Il est très facile de voir que les équations d'équilibre, jointes aux conditions (27) et (28), rendent égal à o le second membre de cette égalité (52).

Soient, en un point (x, y, z) de l'espace, V la valeur au début de la modification de la fonction que désigne cette lettre, et $(V + \delta V)$ la valeur de cette fonction au même point à la fin de la modification.

En vertu des égalités (18), (20) et (21), nous pourrons écrire

$$
(53)\quad \left\{
\begin{aligned}
\delta V = &- \mathcal{A}\,\delta\rho - \mathfrak{s}\,\delta s \\
&+ \int\left(\Psi + \rho'\frac{\partial\Psi}{\partial\rho'}\right)\delta\rho'\,dv' + \int\rho'\frac{\partial\Psi}{\partial s'}\,\delta s'\,dv' \\
&+ \mathbf{S}\,\rho'\Psi\left[\cos(n'_e, x)\mathrm{D}x' + \cos(n'_e, y)\mathrm{D}y' + \cos(n'_e, z)\mathrm{D}z'\right]d\mathrm{S}',
\end{aligned}
\right.
$$

n'_e étant la normale à l'élément $d\mathrm{S}'$ de la surface S vers l'extérieur du fluide; ρ' la densité du fluide au voisinage de cet élément; $\mathrm{D}x'$, $\mathrm{D}y'$, $\mathrm{D}z'$ les composantes du déplacement d'un point de cet élément.

Nous aurons, de même,

$$
(54)\quad \left\{
\begin{aligned}
\delta(\rho\mathcal{A}) = &\left(\mathcal{A} + \rho\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial\rho}\right)\delta\rho + \rho\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial s}\,\delta s \\
&- \rho\int\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\rho} + \rho'\frac{\partial^2\Psi}{\partial\rho\,\partial\rho'}\right)\delta\rho'\,dv' - \rho\int\rho'\frac{\partial^2\Psi}{\partial\rho\,\partial s'}\,\delta s'\,dv' \\
&- \rho\,\mathbf{S}\,\rho'\frac{\partial\Psi}{\partial\rho}\left[\cos(n'_e, x)\mathrm{D}x' + \cos(n'_e, y)\mathrm{D}y' + \cos(n'_e, z)\mathrm{D}z'\right]d\mathrm{S}'.
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(55)\quad \left\{
\begin{aligned}
\delta(\rho\mathfrak{s}) = &\left(\mathfrak{s} + \rho\frac{\partial\mathfrak{s}}{\partial\rho}\right)\delta\rho + \rho\frac{\partial\mathfrak{s}}{\partial s}\,\delta s \\
&- \rho\int\left(\frac{\partial\Psi}{\partial s} + \rho'\frac{\partial^2\Psi}{\partial s\,\partial\rho'}\right)\delta\rho'\,dv' - \rho\int\rho'\frac{\partial^2\Psi}{\partial s\,\partial s'}\,\delta s'\,dv' \\
&- \rho\,\mathbf{S}\,\rho'\frac{\partial\Psi}{\partial s}\left[\cos(n'_e, x)\mathrm{D}x' + \cos(n'_e, y)\mathrm{D}y' + \cos(n'_e, z)\mathrm{D}z'\right]d\mathrm{S}'.
\end{aligned}
\right.
$$

Les égalités (53), (54) et (55) donnent une interprétation simple de la quantité

$$
\begin{aligned}
&\int[\delta V - \delta(\rho\mathcal{A})]\,\delta\rho\,dv - \int\delta(\rho\mathfrak{s})\,\delta s\,dv \\
&\quad + \mathbf{S}\,\rho\,\delta V\left[\cos(n_e, x)\mathrm{D}x + \cos(n_e, y)\mathrm{D}y + \cos(n_e, z)\mathrm{D}z\right]d\mathrm{S}.
\end{aligned}
$$

Considérons trois fluides fictifs a, b, c ayant tous trois, comme le classique fluide électrique, la propriété de pouvoir offrir, tantôt une densité positive, tantôt une densité négative.

Le fluide a est distribué dans tout l'espace occupé par le fluide réel et sa densité en chaque point est $\delta\rho$.

Le fluide b est distribué en chaque point de l'espace occupé par le fluide réel avec la densité $\rho\,\delta s$.

Le fluide c est distribué seulement à la surface qui limite le fluide réel, et sa densité superficielle est

$$\rho[\cos(n_e, x)\mathrm{D}x + \cos(n_e, y)\mathrm{D}y + \cos(n_e, z)\mathrm{D}z].$$

A une modification déterminée du fluide réel correspond une distribution bien déterminée des trois fluides fictifs.

Soient deux points M, M', pris dans le fluide réel ou à sa surface; soit r la distance MM'; soient ρ, ρ', s, s' les densités et les concentrations du fluide réel aux points M et M'.

Supposons que deux quantités q_a, q'_a du fluide a soient concentrées aux points M, M'; nous imaginerons que ces deux quantités exercent des actions mutuelles ayant pour potentiel

$$\left(\Psi + \rho\frac{\partial\Psi}{\partial\rho} + \rho'\frac{\partial\Psi}{\partial\rho'} + \rho\rho'\frac{\partial^2\Psi}{\partial\rho\,\partial\rho'}\right)q_a q'_a.$$

Supposons que deux quantités q_b, q'_b du fluide b soient concentrées aux points M, M'; nous imaginerons que ces deux quantités exercent des actions mutuelles ayant pour potentiel

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial s\,\partial s'}q_b q'_b.$$

Concentrons au point M une quantité q_a du fluide a, au point M' une quantité q'_b du fluide b; nous imaginerons que ces deux quantités exercent des actions mutuelles ayant pour potentiel

$$\left(\frac{\partial\Psi}{\partial s'} + \rho\frac{\partial^2\Psi}{\partial\rho\,\partial s'}\right)q_a q'_b.$$

Aux deux points M, M', concentrons deux quantités q_c, q'_c du fluide c; nous imaginerons que ces deux quantités exercent des actions mutuelles ayant pour potentiel

$$\Psi q_c q'_c.$$

Au point M, concentrons une quantité q_c du fluide c et au point M' une quantité q'_a du fluide a; nous admettrons que ces deux quantités exercent des actions mutuelles ayant pour potentiel

$$\left(\Psi + \rho' \frac{\partial \Psi}{\partial \rho'}\right) q_c q'_a.$$

Au point M, concentrons une quantité q_c du fluide c, et au point M' une quantité q'_b du fluide b; nous admettrons que ces deux quantités exercent des actions mutuelles ayant pour potentiel

$$\frac{\partial \Psi}{\partial s'} q_c q'_b.$$

Supposons que les rapports

$$\frac{1}{\Psi}\frac{\partial}{\partial \rho}\Psi(\rho, \rho', s, s', r), \qquad \frac{1}{\Psi}\frac{\partial}{\partial \rho'}\Psi(\rho, \rho', s, s', r),$$

$$\frac{1}{\Psi}\frac{\partial}{\partial s}\Psi(\rho, \rho', s, s', r), \qquad \frac{1}{\Psi}\frac{\partial}{\partial s'}\Psi(\rho, \rho', s, s', r),$$

$$\frac{1}{\Psi}\frac{\partial^2}{d\rho\,\partial \rho'}\Psi(\rho, \rho', s, s', r), \qquad \frac{1}{\Psi}\frac{\partial^2}{\partial s\,\partial s'}\Psi(\rho, \rho', s, s', r),$$

$$\frac{1}{\Psi}\frac{\partial^2}{\partial \rho\,\partial s'}\Psi(\rho, \rho', s, s', r)$$

ne croissent pas au delà de toutes limites lorsque r tend vers o; nous pourrons appliquer aux actions mutuelles que nous venons d'énumérer les théorèmes généraux que nous avons démontrés dans notre Mémoire *Sur le potentiel thermodynamique et la pression hydrostatique*.

Soit Y le potentiel de toutes ces actions mutuelles. Il est très facile de voir que l'on a

$$
(56)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\int [\delta V - \delta(\rho \mathcal{A})]\delta\rho\, dv - \int \delta(\rho s)\delta s\, dv \\
&+ \mathbf{S}\, \rho\, \delta V[\cos(n_e, x)\mathrm{D}x + \cos(n_e, y)\mathrm{D}y + \cos(n_e, z)\mathrm{D}z]\, dS \\
&= - \int \left[\left(2\mathcal{A} + \rho\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \rho}\right)(\delta\rho)^2 + \left(s + \rho\frac{\partial s}{\partial \rho} + \rho\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial s}\right)\delta\rho\,\delta s + \rho\frac{\partial s}{\partial s}(\delta s)^2\right] dv \\
&- \mathbf{S}\, \rho(\mathcal{A}\,\delta\rho + s\,\delta s)[\cos(n_e, x)\mathrm{D}x + \cos(n_e, y)\mathrm{D}y + \cos(n_e, z)\mathrm{D}z]\, dS \\
&+ 2\mathrm{Y}.
\end{aligned}
\right.
$$

Nous pouvons, désormais, former l'expression générale de $\delta^2\Phi$; remarquons que

$$
\begin{aligned}
\mathrm{D}(\rho V + \rho U + \rho\zeta) &= \rho\,\delta V + \left(V + U + \zeta + \rho\frac{\partial \zeta}{\partial \rho}\right)\delta\rho + \rho\frac{\partial \zeta}{\partial s}\delta s \\
&+ \left[\left(V + U + \zeta + \rho\frac{\partial \zeta}{\partial \rho} - \rho\mathcal{A}\right)\frac{\partial \rho}{\partial x} + \left(\rho\frac{\partial \zeta}{\partial s} - \rho s\right)\frac{\partial s}{\partial x} - \rho(X_i + X_e)\right]\mathrm{D}x \\
&+ \left[\left(V + U + \zeta + \rho\frac{\partial \zeta}{\partial \rho} - \rho\mathcal{A}\right)\frac{\partial \rho}{\partial y} + \left(\rho\frac{\partial \zeta}{\partial s} - \rho s\right)\frac{\partial s}{\partial y} - \rho(Y_i + Y_e)\right]\mathrm{D}y \\
&+ \left[\left(V + U + \zeta + \rho\frac{\partial \zeta}{\partial \rho} - \rho\mathcal{A}\right)\frac{\partial \rho}{\partial z} + \left(\rho\frac{\partial \zeta}{\partial s} - \rho s\right)\frac{\partial s}{\partial z} - \rho(Z_i + Z_e)\right]\mathrm{D}z
\end{aligned}
$$

et nous aurons, en tenant compte des égalités (23) et (24)

$$
\begin{aligned}
(57)\quad \delta^2\Phi = &\int \left(V + U + \zeta + \rho\frac{\partial \zeta}{\partial \rho} - \rho\mathcal{A}\right)\delta^2\rho\, dv && (1)\\
&+ \int \rho\left(\frac{\partial \zeta}{\partial s} - s\right)\delta^2 s\, dv && (2)\\
&+ \mathbf{S}\left[\left(V + U + \zeta + \rho\frac{\partial \zeta}{\partial \rho} - \rho\mathcal{A}\right)\delta\rho + \rho\left(\frac{\partial \zeta}{\partial s} - s\right)\delta s\right] \\
&\qquad \times [\cos(n_e, x)\mathrm{D}x + \cos(n_e, y)\mathrm{D}y + \cos(n_e, z)\mathrm{D}z]\, dS && (3)\\
&+ \mathbf{S}\left[\left(V + U + \zeta + \rho\frac{\partial \zeta}{\partial \rho} - \rho\mathcal{A}\right)\mathrm{D}\rho + \rho\left(\frac{\partial \zeta}{\partial s} - s\right)\mathrm{D}s\right] \\
&\qquad \times [\cos(n_e, x)\mathrm{D}x + \cos(n_e, y)\mathrm{D}y + \cos(n_e, z)\mathrm{D}z]\, dS && (4)\\
&+ \mathbf{S}\,[\rho(V + U + \zeta) + P] \\
&\qquad \times \mathrm{D}\{[\cos(n_e, x)\mathrm{D}x + \cos(n_e, y)\mathrm{D}y + \cos(n_e, z)\mathrm{D}z]\, dS\} && (5)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\int\Big[\Big(2\frac{\partial\zeta}{\partial\rho}+\rho\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho^2}-2\mathcal{A}-\rho\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial\rho}\Big)(\delta\rho)^2\\
&\qquad+\Big(2\frac{\partial\zeta}{\partial s}+2\rho\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho\,\partial s}-2\mathcal{B}-\rho\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial\rho}-\rho\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial s}\Big)\delta\rho\,\delta s\\
&\qquad\qquad+\Big(\rho\frac{\partial^2\zeta}{\partial s^2}-\rho\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial s}\Big)(\delta s)^2\Big]\,dv \qquad (6)\\
&-\mathbf{S}\,\rho\,[(X_i+X_e)\,Dx+(Y_i+Y_e)\,Dy+(Z_i+Z_e)\,Dz]\\
&\qquad\times[\cos(n_e,x)Dx+\cos(n_e,y)Dy+\cos(n_e,z)Dz]\,dS \qquad (7)\\
&+2Y. \qquad (8)
\end{aligned}
$$

Cette expression générale de $\delta^2\Phi$ se simplifie beaucoup lorsqu'on suppose que l'état initial du système est un état d'équilibre. Dans ce cas, en vertu des égalités (34), (35), (36), les termes (1), (2), (3), (4), (5), au second membre de l'égalité (57), peuvent s'écrire

$$
(58)\left\{
\begin{aligned}
&-\lambda\Big(\int\Big[\frac{\delta^2\rho}{1+s}-\frac{\rho\,\delta^2 s}{(1+s)^2}\Big]dv\\
&\quad+\mathbf{S}\Big[\frac{\delta\rho}{1+s}-\frac{\rho\,\delta s}{(1+s)^2}\Big][\cos(n_e,x)Dx+\cos(n_e,y)Dy+\cos(n_e,z)Dz]\,dS\\
&\quad+\mathbf{S}\Big[\frac{D\rho}{1+s}-\frac{\rho\,Ds}{(1+s)^2}\Big][\cos(n_e,x)Dx+\cos(n_e,y)Dy+\cos(n_e,z)Dz]\,dS\\
&\quad+\mathbf{S}\qquad\frac{\rho}{1+s}D\{[\cos(n_e,x)Dx+\cos(n_e,y)Dy+\cos(n_e,z)Dz]\,dS\}\Big),\\
&-\mu\Big(\int\Big[\frac{s\,\delta^2\rho}{1+s}+\frac{\rho\,\delta^2 s}{(1+s)^2}\Big]dv\\
&\quad+\mathbf{S}\Big[\frac{s\,\delta\rho}{1+s}+\frac{\rho\,\delta s}{(1+s)^2}\Big][\cos(n_e,x)Dx+\cos(n_e,y)Dy+\cos(n_e,z)Dz]\,dS\\
&\quad+\mathbf{S}\Big[\frac{s\,D\rho}{1+s}+\frac{\rho\,Ds}{(1+s)^2}\Big][\cos(n_e,x)Dx+\cos(n_e,y)Dy+\cos(n_e,z)Dz]\,dS\\
&\quad+\mathbf{S}\qquad\frac{\rho s}{1+s}D\{[\cos(n_e,x)Dx+\cos(n_e,y)Dy+\cos(n_e,z)Dz]\,dS\}\Big).
\end{aligned}\right.
$$

Mais, les égalités (27) et (28) devant être constamment vérifiées, les variations de leurs premiers membres doivent être égales à o, ce qui donne

$$
(59)\left\{
\begin{aligned}
&-\int \frac{2}{(1+s)^2}\left[\delta\rho\,\delta s - \frac{\rho}{1+s}(\delta s)^2\right] dv \\
&+\int \left[\frac{\delta^2\rho}{1+s} - \frac{\rho\,\delta^2 s}{(1+s)^2}\right] dv \\
&+\mathbf{S}\left[\frac{\delta\rho}{1+s} + \frac{\rho\,\delta s}{(1+s)^2}\right]\left[\cos(n_e,x)\,\mathrm{D}x + \cos(n_e,y)\,\mathrm{D}y + \cos(n_e,z)\,\mathrm{D}z\right] dS \\
&+\mathbf{S}\left[\frac{\mathrm{D}\rho}{1+s} - \frac{\rho\,\mathrm{D}s}{(1+s)^2}\right]\left[\cos(n_e,x)\,\mathrm{D}x + \cos(n_e,y)\,\mathrm{D}y + \cos(n_e,z)\,\mathrm{D}z\right] dS \\
&+\mathbf{S}\qquad \frac{\rho}{1+s}\,\mathrm{D}\left\{\left[\cos(n_e,x)\,\mathrm{D}x + \cos(n_e,y)\,\mathrm{D}y + \cos(n_e,z)\,\mathrm{D}z\right] dS\right\} = 0;
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(60)\left\{
\begin{aligned}
&\int \frac{2}{(1+s)^2}\left[\delta\rho\,\delta s - \frac{\rho}{1+s}(\delta s)^2\right] dv \\
&+\int \left[\frac{s\,\delta^2\rho}{1+s} + \frac{\rho\,\delta^2 s}{(1+s)^2}\right] dv \\
&+\mathbf{S}\left[\frac{s\,\delta\rho}{1+s} + \frac{\rho\,\delta s}{(1+s)^2}\right]\left[\cos(n_e,x)\,\mathrm{D}x + \cos(n_e,y)\,\mathrm{D}y + \cos(n_e,z)\,\mathrm{D}z\right] dS \\
&+\mathbf{S}\left[\frac{s\,\mathrm{D}\rho}{1+s} + \frac{\rho\,\mathrm{D}s}{(1+s)^2}\right]\left[\cos(n_e,x)\,\mathrm{D}x + \cos(n_e,y)\,\mathrm{D}y + \cos(n_e,z)\,\mathrm{D}z\right] dS \\
&+\mathbf{S}\qquad \frac{\rho s}{1+s}\,\mathrm{D}\left\{\left[\cos(n_e,x)\,\mathrm{D}x + \cos(n_e,y)\,\mathrm{D}y + \cos(n_e,z)\,\mathrm{D}z\right] dS\right\} = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Moyennant ces égalités (59) et (60), l'expression (58) peut s'écrire

$$
(61)\qquad \int\left[\frac{2(\mu-\lambda)}{(1+s)^2}\,\delta\rho\,\delta s + 2\rho\,\frac{\lambda-\mu}{(1+s)^3}(\delta s)^2\right] dv.
$$

Si dans l'égalité (57), nous remplaçons les cinq premiers termes du second membre par l'expression (61), nous aurons l'égalité

$$
(62)\left\{
\begin{aligned}
\delta^2\Phi = \int\Big\{&\left(2\frac{\partial\zeta}{\partial\rho} + \rho\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho^2} - 2\mathcal{B} - \rho\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial\rho}\right)(\delta\rho)^2 \\
&+\left[\frac{\partial\zeta}{\partial s} + 2\rho\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho\,\partial s} - \mathcal{S} - \rho\frac{\partial\mathcal{S}}{\partial\rho} - \rho\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial s} - \frac{2(\lambda-\mu)}{(1+s)^2}\right]\delta\rho\,\delta s \\
&\qquad+\rho\left[\frac{\partial^2\zeta}{\partial s^2} - \frac{\partial\mathcal{S}}{\partial s} + \frac{2(\lambda-\mu)}{(1+s)^2}\right](\delta s)^2\Big\} dv \qquad (1) \\
-\mathbf{S}\,\rho\,&\left[(\mathrm{X}_i+\mathrm{X}_e)\,\mathrm{D}x + (\mathrm{Y}_i+\mathrm{Y}_e)\,\mathrm{D}y + (\mathrm{Z}_i+\mathrm{Z}_e)\,\mathrm{D}z\right] \\
&\times\left[\cos(n_e,x)\mathrm{D}x + \cos(n_e,y)\mathrm{D}y + \cos(n_e,z)\mathrm{D}z\right] dS \qquad (2) \\
+\,2\mathrm{Y},& \qquad (3)
\end{aligned}
\right.
$$

qui représente la variation seconde du potentiel thermodynamique du système dans le cas où l'état initial du système est un état d'équilibre.

Le terme (2) peut se mettre sous une forme un peu différente.

L'équation (7), appliquée à la surface S, le long de laquelle la pression garde une valeur constante, nous apprend que le segment dont les composantes sont

$$(X_i + X_e), \quad (Y_i + Y_e), \quad (Z_i + Z_e)$$

est normal à la surface S. Soit N ce vecteur, compté positivement dans le sens qui pénètre vers l'intérieur du fluide. On aura

$$\begin{aligned} X_i + X_e &= -\,N\cos(n_e, x), \\ Y_i + Y_e &= -\,N\cos(n_e, y), \\ Z_i + Z_e &= -\,N\cos(n_e, z), \end{aligned}$$

et le terme (2), au second membre de l'égalité (62), pourra s'écrire

$$+ \mathbf{S}\, \rho N [\cos(n_e, x) Dx + \cos(n_e, y) Dy + \cos(n_e, z) Dz]^2 dS. \qquad (2\,bis)$$

Dans le cas où nous avons affaire non plus à un fluide continu, mais à deux fluides 1 et 2, séparés par une surface de discontinuité Σ, l'expression de $\delta^2\Phi$ prend une forme plus compliquée.

Il nous faut tout d'abord, dans ce cas, écrire les termes (1) et (2) en affectant de l'indice 1 les quantités qui y figurent, puis deux termes semblables où l'indice 2 remplace l'indice 1; ensuite, nous devons introduire un nouveau terme, qui va nous arrêter un instant.

Soient M_1, M_2 deux points infiniment voisins situés l'un au sein du fluide 1, l'autre au sein du fluide 2. Désignons par X_1, Y_1, Z_1 les valeurs de $(X_i + X_e)$, $(Y_i + Y_e)$, $(Z_i + Z_e)$ au point M_1; désignons par X_2, Y_2, Z_2 les valeurs des mêmes quantités au point M_2; le terme en question pourra s'écrire

$$\begin{aligned} + \mathbf{S}\, & [(\rho_1 X_1 - \rho_2 X_2) Dx + (\rho_1 Y_1 - \rho_2 Y_2) Dy + (\rho_1 Z_1 - \rho_2 Z_2) Dz] \\ & \times [\cos(n_1, x) Dx + \cos(n_1, y) Dy + \cos(n_1, z) Dz]\, dS. \qquad (4) \end{aligned}$$

Enfin le terme Y subira des modifications analogues à celles que nous venons d'indiquer; il est inutile de les étudier en détail.

Le terme (4) peut se transformer.

Le long de la surface Σ, on a

$$\Pi_1 = \Pi_2$$

et, par conséquent, pour tout déplacement effectué sur la surface Σ,

$$d\Pi_1 - d\Pi_2 = 0$$

ou bien, en vertu de l'égalité (7),

$$(\rho_1 X_1 - \rho_2 X_2)\,dx + (\rho_1 Y_1 - \rho_2 Y_2)\,dy + (\rho_1 Z_1 - \rho_2 Z_2)\,dz = 0.$$

Cette égalité nous apprend que le segment qui a pour composantes

$$\begin{gathered} \rho_1 X_1 - \rho_2 X_2, \\ \rho_1 Y_1 - \rho_2 Y_2, \\ \rho_1 Z_1 - \rho_2 Z_2, \end{gathered}$$

est normal à la surface Σ.

Soit N_1 la projection, sur la normale n_1, du segment dont les composantes sont X_1, Y_1, Z_1 ; soit N_2 la projection, sur la normale n_2, du segment dont les composantes sont X_2, Y_2, Z_2; la projection du même segment sur la normale n_1 sera $-N_2$. Nous aurons donc

$$\begin{aligned} \rho_1 X_1 - \rho_2 X_2 &= (\rho_1 N_1 + \rho_2 N_2)\cos(n_1, x), \\ \rho_1 Y_1 - \rho_2 Y_2 &= (\rho_1 N_1 + \rho_2 N_2)\cos(n_1, y), \\ \rho_1 Z_1 - \rho_2 Z_2 &= (\rho_1 N_1 + \rho_2 N_2)\cos(n_1, z) \end{aligned}$$

et le terme (4) pourra s'écrire

$$\begin{aligned} + \mathbf{S}(\rho_1 N_1 + \rho_2 N_2)\,[\cos(n_1, x)\,\mathrm{D}x &+ \cos(n_1, y)\,\mathrm{D}y \\ &+ \cos(n_1, z)\,\mathrm{D}z]^2\,d\mathrm{S}. \qquad (4\ bis) \end{aligned}$$

§ 4. — Stabilité de l'équilibre d'un fluide dont les éléments sont soumis à leurs actions mutuelles. — Conditions nécessaires.

Pour que l'équilibre du système soit stable, il faut et il suffit que l'on ait

$$\delta^2\Phi > 0, \tag{51}$$

$\delta^2\Phi$ étant donné par l'égalité (62), pour toute modification du fluide qui satisfait aux conditions (40) et (41).

Nous nous contenterons d'indiquer certaines conditions qui doivent être nécessairement remplies pour qu'il en soit ainsi; quant à l'énumération de toutes les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il en soit ainsi, elle se heurte à d'extrêmes difficultés; c'est seulement dans certains cas particuliers que ces difficultés peuvent être surmontées; nous rencontrerons plus loin un de ces cas.

Première condition nécessaire. — *La forme quadratique*

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{T} = &\left(2\frac{\partial\zeta}{\partial\rho} + \rho\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho^2} - 2\mathcal{A} - \rho\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial\rho}\right)\mathrm{A}^2 \\ &+ \left[2\frac{\partial\zeta}{\partial s} + 2\rho\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho\,\partial s} - 2\mathcal{S} - \rho\frac{\partial\mathcal{S}}{\partial\rho} - \rho\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial s} - \frac{2(\lambda-\mu)}{(1+s)^2}\right]\mathrm{AB} \\ &+ \rho\left[\frac{\partial^2\zeta}{\partial s^2} - \frac{\partial\mathcal{S}}{\partial s} + \frac{2(\lambda-\mu)}{(1+s)^3}\right]\mathrm{B}^2 \end{aligned}\right. \tag{63}$$

ne doit, en aucun point M *du volume occupé par le fluide et pour aucun système de valeurs des variables* A *et* B, *prendre une valeur négative.*

Supposons, en effet, qu'au point M, pour un certain système de valeurs A, B des variables A et B, la forme (63) prenne une valeur négative et montrons qu'il sera possible alors de faire prendre à $\delta^2\Phi$ une valeur négative.

Entourons le point M d'une surface fermée σ entourant le volume w.

Il est clair que l'on peut, d'une infinité de manières, déterminer une fonction u qui satisfasse aux conditions suivantes :

1° La fonction u est uniforme, finie et continue à l'intérieur du domaine ϖ;

2° Elle est égale à o en tout point de la surface σ;

3° Elle vérifie les égalités

$$\int_{\varpi}\left[\frac{1}{1+s} - \frac{\rho}{(1+s)^2}\right] u\,d\varpi = 0, \tag{64}$$

$$\int_{\varpi}\left[\frac{s}{1+s} + \frac{\rho}{(1+s)^2}\right] u\,d\varpi = 0; \tag{65}$$

4° Lorsque la surface σ se contracte autour du point M par une suite déterminée de formes, le rapport

$$R = \frac{1}{\varpi}\int_{\varpi} T u^2\,d\varpi \tag{66}$$

tend vers une limite finie différente de o.

A et B demeurant constants, T varie d'une manière continue d'un point à l'autre du fluide continu; T étant négatif au point M, par hypothèse, on peut prendre le volume ϖ assez petit pour que T soit négatif en tout point de ce volume; R sera alors assurément négatif.

A l'intérieur de l'espace ϖ, distribuons deux fluides fictifs, i et j, le premier, i, de densité Au, le second, j, de densité Bu.

Imaginons que les actions mutuelles de deux masses q_i, q'_i, du fluide i, admettent pour potentiel

$$\left(\Psi + \rho\frac{\partial\Psi}{\partial\rho} + \rho'\frac{\partial\Psi}{\partial\rho'} + \rho\rho'\frac{\partial^2\Psi}{\partial\rho\,\partial\rho'}\right) q_i q'_i;$$

que les actions mutuelles de deux masses q_j, q'_j, du fluide j, admettent pour potentiel

$$\rho\rho'\frac{\partial^2\Psi}{\partial s\,\partial s'} q_j q'_j;$$

qu'une masse q_i du fluide i et une masse q'_j, du fluide j, exercent l'une sur l'autre des actions mutuelles admettant pour potentiel

$$\left(\rho' \frac{\partial \Psi}{\partial s'} + \rho\rho' \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \rho \, \partial s'}\right) q_i q'_j.$$

Soit $\mathfrak{F}$ le potentiel de toutes ces actions fictives.

En vertu des hypothèses faites sur la fonction Ψ et ses dérivées partielles, lorsque la surface σ se contracte autour du point M, le rapport $\frac{\mathfrak{F}}{\varpi^2}$ ne croît pas au delà de toute limite, en sorte que le rapport $\frac{\mathfrak{F}}{\varpi}$ tend vers zéro.

Cela posé, considérons la quantité

$$(67) \qquad \varphi = \int_{\varpi} \mathrm{T} u^2 d\varpi + 2\mathfrak{F},$$

qui peut s'écrire, en vertu de l'égalité (66),

$$\varphi = \varpi\left(\mathrm{R} + \frac{2\mathfrak{F}}{\varpi}\right).$$

Lorsque le volume ϖ tend vers zéro par une suite de formes bien déterminées, R tend vers une limite finie et négative, tandis que $\frac{\mathfrak{F}}{\varpi}$ tend vers zéro. Nous pouvons donc assurément prendre le volume ϖ assez petit pour que φ soit négatif.

Cela posé, considérons une modification du fluide définie de la manière suivante :

1° En tout point de l'espace extérieur à la surface σ ou de cette surface même, on a

$$\mathrm{D}x = 0, \qquad \mathrm{D}y = 0, \qquad \mathrm{D}z = 0, \qquad \mathrm{D}s = 0, \qquad \mathrm{D}\rho = 0$$

et, par conséquent,

$$\delta\rho = 0, \qquad \delta s = 0.$$

2° En tout point du domaine ϖ, on a

$$\delta\rho = u\,\delta t, \qquad \delta s = u\,\delta t,$$

δt étant une quantité infiniment petite indépendante de x, y, z.

En vertu des conditions (64) et (65), cette modification vérifie les égalités (27) et (28); c'est donc une modification virtuelle acceptable. Dans une telle modification, on a évidemment

$$\delta^2\Phi = \varphi(\delta l)^2,$$

en sorte que $\delta^2\Phi$ est négatif. Par là, la proposition énoncée est démontrée.

Deuxième condition nécessaire. — *La quantité* N *n'est négative en aucun point de la surface* S *qui limite le fluide.*

Supposons, en effet, que la quantité N prenne une valeur négative en un point M de la surface déformable S du fluide; nous allons voir que l'on pourrait imposer au fluide une modification qui ferait prendre à $\delta^2\Phi$ une valeur négative.

Autour du point M, traçons sur la surface S une aire σ; déterminons une fonction u, variable d'un point à l'autre de l'aire σ, et satisfaisant aux conditions suivantes :

1° Elle est uniforme, finie et continue en tout point de l'aire σ;

2° Elle s'annule tout le long du contour de l'aire σ;

3° Elle vérifie les conditions

$$\mathrm{S}_\sigma \frac{\rho}{1+s} u\, d\sigma = 0, \tag{68}$$

$$\mathrm{S}_\sigma \frac{\rho s}{1+s} u\, d\sigma = 0. \tag{69}$$

4° Lorsque le contour de l'aire σ se contracte pour venir s'évanouir au point M par une suite bien déterminée de formes, le rapport

$$\mathrm{R} = \frac{1}{\sigma} \mathrm{S}_\sigma \rho \mathrm{N} u^2 d\sigma \tag{70}$$

tend vers une limite finie différente de zéro.

La quantité N est, par hypothèse, négative au point M. Si la surface S a une courbure finie au voisinage du point M, la quantité N varie d'une manière continue au voisinage de ce point; on peut donc prendre l'aire σ assez petite pour que N soit négatif en tout point de cette aire; R sera alors assurément négatif.

Sur l'aire σ, distribuons un fluide fictif ayant pour densité *superficielle,* en chaque point de l'aire, la valeur correspondante de u; imaginons que deux quantités q, q' de ce fluide fictif exercent des actions mutuelles admettant pour potentiel

$$\Psi qq'.$$

Formons le potentiel $\mathfrak{T}$ des actions mutuelles de la distribution fictive répandue sur l'aire σ.

En vertu des hypothèses faites sur la fonction Ψ, lorsque la surface σ tend à s'évanouir au point M, le rapport $\frac{\mathfrak{T}}{\sigma^2}$ ne croît pas au delà de toute limite, en sorte que le rapport $\frac{\mathfrak{T}}{\sigma}$ tend vers zéro.

Cela posé, considérons la quantité

$$\varphi = \mathrm{S}_\sigma \rho \mathrm{N} u^2 d\sigma + 2\mathfrak{T}, \tag{71}$$

que l'on peut écrire, en vertu de l'égalité (70),

$$\varphi = \sigma\left(\mathrm{R} + 2\frac{\mathfrak{T}}{\sigma}\right).$$

Lorsque l'aire σ tend vers zéro par une suite de formes bien déterminées, R tend vers une limite finie et négative, tandis que $\frac{\mathfrak{T}}{\sigma}$ tend vers zéro; on peut donc prendre l'aire σ assez petite pour que φ soit assurément négatif.

Prenons une telle aire σ et imposons au fluide la modification suivante :

1° En tout point intérieur à la masse fluide, on a

$$\delta\rho = 0, \qquad \delta s = 0;$$

2° En tout point de la surface S extérieur à σ ou situé sur le contour de l'aire σ, on a

$$\mathrm{D}x = 0, \qquad \mathrm{D}y = 0, \qquad \mathrm{D}z = 0;$$

3° $\mathrm{D}x$, $\mathrm{D}y$, $\mathrm{D}z$ varient d'une manière continue à l'intérieur de l'aire σ, et l'on a

$$\cos(n_e, x)\mathrm{D}x + \cos(n_e, y)\mathrm{D}y + \cos(n_e, z)\mathrm{D}z = u\,\delta t,$$

δt étant une quantité infiniment petite qui a la même valeur en tous les points de l'aire σ.

Nous aurons ainsi défini une modification virtuelle acceptable du fluide, car, en vertu des égalités (68) et (69), les conditions (27) et (28) seront remplies. Or, dans cette modification, on aura

$$\delta^2\Phi = \varphi(\delta t)^2,$$

en sorte que $\delta^2\Phi$ sera négatif, ce qui démontre la proposition énoncée.

Troisième condition nécessaire. — *Si la masse fluide est formée de deux fluides distincts* 1 *et* 2, *séparés par une surface de discontinuité* Σ, *la quantité* $(\rho_1 \mathrm{N}_1 + \rho_2 \mathrm{N}_2)$ *ne doit être négative en aucun point de la surface.*

Cette proposition se démontre comme la précédente.

§ 5. — Conséquence de la première condition nécessaire.

Nous avons, en vertu des égalités (22),

$$d\mathrm{U} = -(\mathrm{X}_e dx + \mathrm{Y}_e dy + \mathrm{Z}_e dz).$$

Les égalités (18), (19), (20), (21) nous donnent

$$d\mathrm{V} = -(\mathrm{X}_i dx + \mathrm{Y}_i dy + \mathrm{Z}_i dz + \mathcal{A}\, d\rho + \mathcal{S}\, ds).$$

L'égalité (20) nous donne

$$d\mathcal{A} = -d\rho \int \rho' \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \rho^2} dv' - ds \int \rho' \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \rho\, \partial s} dv'$$
$$- dx \int \rho' \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \rho\, \partial r} \frac{\partial r}{\partial x} dv' - dy \int \rho' \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \rho\, \partial r} \frac{\partial r}{\partial y} dv' - dz \int \rho' \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \rho\, \partial r} \frac{\partial r}{\partial z} dv',$$

ou bien, en vertu des égalités (19), (20), (21),

$$d\mathcal{A} = \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial s} ds + \frac{\partial X_i}{\partial \rho} dx + \frac{\partial Y_i}{\partial \rho} dy + \frac{\partial Z_i}{\partial \rho} dz.$$

On trouverait de même

$$d\mathcal{S} = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial s} ds + \frac{\partial X_i}{\partial s} dx + \frac{\partial Y_i}{\partial s} dy + \frac{\partial Z_i}{\partial s} ds.$$

Considérons l'égalité (35), vérifiée en tout point du fluide, et différentions-la en tenant compte des égalités précédentes et des identités

$$\frac{\partial X_e}{\partial \rho} = 0, \qquad \frac{\partial Y_e}{\partial \rho} = 0, \qquad \frac{\partial Z_e}{\partial \rho} = 0.$$

Nous trouvons

$$(72)\quad \left\{ \begin{aligned} &\left(2\frac{\partial \zeta}{\partial \rho} + \rho\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho^2} - 2\mathcal{A} - \rho\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \rho}\right) d\rho \\ &\quad + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial s} + \rho\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho\, \partial s} - \mathcal{S} - \rho\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial s} - \frac{\lambda - \mu}{(1+s)^2}\right) ds \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial \rho}[\rho(X_i + X_e)]dx \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial \rho}[\rho(Y_i + Y_e)dy] - \frac{\partial}{\partial \rho}[\rho(Z_i + Z_e)dz] = 0. \end{aligned} \right.$$

Multiplions par ρ les deux membres de l'égalité (36), vérifiée en tous les points du fluide, et différentions-la, en tenant compte des égalités précédentes et des identités

$$\frac{\partial X_e}{\partial s} = 0, \qquad \frac{\partial Y_e}{\partial s} = 0, \qquad \frac{\partial Z_e}{\partial s} = 0.$$

Nous trouvons

$$(73)\quad \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{\partial \zeta}{\partial s} + \rho\frac{\partial^2 \zeta}{\partial s\, \partial \rho} - \mathcal{S} - \rho\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \rho} - \frac{\lambda - \mu}{(1+s)^2}\right) d\rho \\ &\quad + \left[\rho\frac{\partial^2 \zeta}{\partial s^2} - \rho\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial s} + \frac{2\rho(\lambda - \mu)}{(1+s)^3}\right] ds - \frac{\partial}{\partial s}[\rho(X_i + X_e)]dx \\ &\qquad - \frac{\partial}{\partial s}[\rho(Y_i + Y_e)dy] - \frac{\partial}{\partial s}[\rho(Z_i + Z_e)dz] = 0. \end{aligned} \right.$$

Multiplions les deux membres de l'égalité (72) par $d\rho$, les deux membres de l'égalité (73) par ds, et ajoutons membre à membre les résultats obtenus; nous trouverons une égalité que nous pourrons écrire

$$(74)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(2\frac{\partial\zeta}{\partial\rho}+\rho\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho^2}-2\mathcal{A}-\rho\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial\rho}\right)(d\rho)^2\\ &+\left[2\frac{\partial\zeta}{\partial s}+2\rho\frac{\partial^2\zeta}{\partial s\,\partial\rho}-2\mathcal{S}-\rho\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial s}-s\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial\rho}-\frac{2(\lambda-\mu)}{(1+s)^2}\right]d\rho\,ds\\ &+\left[\rho\frac{\partial^2\zeta}{\partial s^2}-\frac{\partial\mathcal{S}}{\partial s}+\frac{2(\lambda-\mu)}{(1+s)^3}\right](ds)^2\\ =\;&\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho(X_i+X_e))d\rho+\frac{\partial}{\partial s}(\rho(X_i+X_e))ds\right]dx\\ &+\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho(Y_i+Y_e))d\rho+\frac{\partial}{\partial s}(\rho(Y_i+Y_e))ds\right]dy\\ &+\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho(Z_i+Z_e))d\rho+\frac{\partial}{\partial s}(\rho(Z_i+Z_e))ds\right]dz. \end{aligned}\right.$$

La première condition nécessaire, démontrée au paragraphe précédent, nous montre alors que l'on aura, pour tout segment infiniment petit tracé à l'intérieur du fluide,

$$(75)\quad \left\{\begin{aligned} &\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho(X_i+X_e))d\rho+\frac{\partial}{\partial s}(\rho(X_i+X_e))ds\right]dx\\ &+\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho(Y_i+Y_e))d\rho+\frac{\partial}{\partial s}(\rho(Y_i+Y_e))ds\right]dy\\ &+\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho(Z_i+Z_e))d\rho+\frac{\partial}{\partial s}(\rho(Z_i+Z_e))ds\right]dz \geqq 0. \end{aligned}\right.$$

Cette conséquence de notre première condition permettrait, on le voit sans peine, de retrouver la troisième condition en regardant les fluides 1 et 2, non plus comme séparés par une surface géométrique, mais comme reliés l'un à l'autre par une couche de passage continue et extrêmement mince.

§ 6. — Cas des actions newtoniennes.

Nous avons donné, dans notre Mémoire *Sur le potentiel thermodynamique et la pression hydrostatique*, le nom d'*actions newtoniennes* aux actions pour lesquelles la fonction Ψ dépend de la seule variable r.

Pour de telles actions, on a

$$
(76)\qquad \left\{\begin{array}{ll}
\mathcal{A} = 0, & \mathcal{S} = 0, \\[4pt]
\dfrac{\partial X_i}{\partial \rho} = 0, & \dfrac{\partial X_i}{\partial s} = 0, \\[8pt]
\dfrac{\partial Y_i}{\partial \rho} = 0, & \dfrac{\partial Y_i}{\partial s} = 0, \\[8pt]
\dfrac{\partial Z_i}{\partial \rho} = 0, & \dfrac{\partial Z_i}{\partial s} = 0.
\end{array}\right.
$$

Voyons ce que deviennent, pour de telles actions, nos diverses conditions nécessaires pour la stabilité de l'équilibre.

La deuxième condition, par laquelle nous commencerons, ne change pas de forme ; *en aucun des points de la surface qui limite le fluide, la force, tant intérieure qu'extérieure, appliquée à un élément de masse du fluide, ne peut être dirigée vers l'extérieur du fluide.*

La troisième condition se simplifie si l'on observe que, dans le cas des actions newtoniennes, les quantités $(X_i + X_e)$, $(Y_i + Y_e)$, $(Z_i + Z_e)$ varient d'une manière continue lorsque l'on traverse la surface de contact de deux fluides différents 1 et 2. On aura, dès lors,

$$N_1 + N_2 = 0,$$

et la troisième condition exigera que l'on ait, en tout point de la surface Σ,

$$(\rho_1 - \rho_2) N_1 \geqq 0.$$

A la surface de contact de deux fluides différents, la force, tant intérieure qu'extérieure, ne peut jamais être dirigée du fluide le plus dense vers le fluide le moins dense.

La première condition prendra simplement, en vertu des égalités (76), la forme suivante :

La forme quadratique en A, B

$$(77)\quad \left\{\begin{aligned} T = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial\zeta}{\partial\rho}\right)A^2 + 2\left[\frac{\partial\zeta}{\partial s} + \rho\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho\,\partial s} - \frac{\lambda-\mu}{(1+s)^2}\right]AB \\ + \rho\left[\frac{\partial^2\zeta}{\partial s^2} + \frac{2(\lambda-\mu)}{(1+s)^3}\right]B^2 \end{aligned}\right.$$

ne peut jamais être négative en aucun point du fluide, et pour aucun système de valeurs de A, B.

De cette condition on peut déduire une série de conséquences.

L'une de ces conséquences est la forme particulière prise, dans ce cas, par la condition (75) qui devient, en vertu des égalités (76),

$$(78)\qquad [(X_i + X_e)dx + (Y_i + Y_e)dy + (Z_i + Z_e)dz]d\rho \geqq 0.$$

Cette inégalité (78), on le voit sans peine, peut s'énoncer ainsi : *Si la direction qui va du point* M *au point voisin* M′ *fait un angle aigu avec la direction de la force, tant extérieure qu'intérieure, la densité ne peut être moindre au point* M′ *qu'au point* M ; *elle ne peut être plus grande au point* M′ *qu'au point* M, *si la direction* MM′ *fait un angle obtus avec la direction de la force.* On sait d'ailleurs qu'elle est la même au point M et au point M′, si la direction MM′ fait un angle droit avec la direction de la force.

On peut appliquer cet énoncé même au cas où les points M, M′ sont séparés par une surface de discontinuité ; il renferme alors la deuxième condition et la troisième condition, nécessaires pour la stabilité.

Pour que la forme (77) ne puisse devenir négative pour aucun système de valeurs de A et de B, il faut que l'on ait les inégalités

$$(79)\qquad \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial\zeta}{\partial\rho}\right) \geqq 0,$$

$$(80)\qquad \frac{\partial^2\zeta}{\partial s^2} + \frac{2(\lambda-\mu)}{(1+s)^3} \geqq 0,$$

$$(81)\quad \Delta = \left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial\zeta}{\partial\rho}\right)\right]\left[\frac{\partial^2\zeta}{\partial s^2} + \frac{2(\lambda-\mu)}{(1+s)^3}\right] - \left[\frac{\partial\zeta}{\partial s} + \rho\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho\,\partial s} - \frac{\lambda-\mu}{(1+s)^2}\right]^2 \geqq 0.$$

Ces diverses inégalités conduisent à des propositions intéressantes.

On a, en effet, en tout point de la masse fluide, en vertu des égalités (38) et (76),

$$\rho^2 \frac{\partial \zeta}{\partial \rho} = \Pi. \tag{82}$$

Cette égalité détermine la densité ρ en un point du fluide lorsqu'on connaît en ce point la pression Π et la concentration s. Supposons que la concentration s demeurant constante, la pression Π augmente de $d\Pi$; l'égalité (82), différentiée, donne

$$\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho^2 \frac{\partial \zeta}{\partial \rho}\right) d\rho = d\Pi.$$

Jointe à la condition (79), cette égalité nous apprend que, *lorsque la pression croît en un point du fluide sans que la concentration en ce point éprouve aucun changement, la densité en ce point ne peut diminuer.*

Supposons maintenant que, Π étant maintenu constant, s varie de ds : l'égalité (82) nous donne

$$\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho^2 \frac{\partial \zeta}{\partial \rho}\right) d\rho + \rho^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho\, \partial s} ds = 0.$$

Lorsque la pression en un point d'un fluide est maintenue constante, un accroissement de la concentration en ce point produit une variation de la densité dont le signe est celui de $-\dfrac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho\, \partial s}$.

En tout point d'un fluide, on a les égalités

$$\zeta + \rho \frac{\partial \zeta}{\partial \rho} + V + U + \frac{\lambda + \mu s}{1 + s} = 0, \tag{35}$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial s} - \frac{\lambda - \mu}{(1 + s)^2} = 0. \tag{36}$$

Ces égalités, différentiées, donnent

$$\left(2 \frac{\partial \zeta}{\partial \rho} + \rho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho^2}\right) d\rho + \left[\frac{\partial \zeta}{\partial s} + \rho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho\, \partial s} - \frac{\lambda - \mu}{(1 + s)^2}\right] ds = X dx + Y dy + Z dz.$$

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial s\, \partial \rho} d\rho + \left[\frac{\partial^2 \zeta}{\partial s^2} + \frac{2(\lambda - \mu)}{(1 + s)^3}\right] ds = 0,$$

en posant, pour abréger,

$$X = X_i + X_e, \qquad Y = Y_i + Y_e, \qquad Z = Z_i + Z_e.$$

Résolvons ces équations par rapport à $d\rho$, ds, en tenant compte de l'égalité (36); nous trouvons sans peine

$$(83) \qquad d\rho = \frac{\dfrac{\partial^2 \zeta}{\partial s^2} + \dfrac{2(\lambda - \mu)}{(1+s)^3}}{\Delta}(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz),$$

$$(84) \qquad ds = -\frac{\rho\,\dfrac{\partial^2 \zeta}{\partial s\,\partial \rho}}{\Delta}(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz).$$

En tenant compte de la condition (80), l'égalité (83) nous redonne cette proposition, que nous avons déjà trouvée autrement :

Le long d'un chemin élémentaire faisant un angle aigu avec la direction de la force, la densité ne peut être décroissante.

L'égalité (84), jointe à la proposition que nous avions précédemment obtenue, conduit à une nouvelle proposition :

Si, sous pression constante, un accroissement de concentration du fluide entraîne une augmentation de densité, la concentration ne peut être que croissante le long d'un chemin élémentaire faisant un angle aigu avec la direction de la force; l'inverse a lieu si, sous pression constante, un accroissement de concentration du fluide est accompagné d'une diminution de densité.

§ 7. — Fluides dont les divers éléments se repoussent ou s'attirent en raison inverse du carré de leur distance mutuelle.

Considérons maintenant un fluide dont les divers éléments *se repoussent* en raison inverse du carré de leur mutuelle distance; nous aurons alors

$$(85) \qquad \Psi = \frac{\varepsilon}{r},$$

ε étant une constante positive. Cette détermination de la fonction Ψ entraîne, en vertu de théorèmes connus, la conséquence suivante : Dans l'expression de $\delta^2\Phi$, donnée par l'égalité (62), *la quantité que nous avons désignée par* Y *est essentiellement positive*. De là, on déduit sans peine cette proposition :

Les conditions que nous avons indiquées comme nécessaires pour la stabilité de l'équilibre d'un fluide deviennent en même temps suffisantes dans le cas où les actions mutuelles de deux éléments quelconques du fluide se réduisent à une force répulsive inversement proportionnelle au carré de la distance des éléments.

Il n'en est plus de même lorsque l'action inverse au carré de la distance mutuelle qui s'exerce entre deux éléments fluides est une action *attractive*. On a, dans ce cas,

$$\Psi = -\frac{f}{r}, \tag{86}$$

f étant une constante positive. Un théorème connu nous apprend que, dans ce cas, *la quantité que nous avons désignée par* Y *est essentiellement négative*.

Ce caractère de la quantité Y ne nous fournit pas les conditions qui suffisent à assurer la stabilité de l'équilibre du fluide; mais il nous permet de compléter les conditions nécessaires déjà trouvées par les additions suivantes :

1° *Il ne peut exister deux fonctions continues* $A(x, y, z)$, $B(x, y, z)$, *dont l'une au moins diffère de zéro, telles que l'expression*

$$\left(2\frac{\partial\zeta}{\partial\rho} + \rho\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho^2}\right)[A(x,y,z)]^2 + \rho\left[\frac{\partial^2\zeta}{\partial s^2} + \frac{2(\lambda-\mu)}{(1+s)^3}\right][B(x,y,z)]^2$$
$$+ 2\left[\frac{\partial\zeta}{\partial s} + \rho\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho\,\partial s} - \frac{\lambda-\mu}{(1+s)^2}\right]A(x,y,z)\,B(x,y,z)$$

soit égale à zéro en tous les points d'un volume fini faisant partie de la masse fluide.

2° *La quantité* N *ne peut être égale à zéro en tous les points d'une aire d'étendue finie tracée à la surface qui limite le fluide.*

3° *La quantité* $(\rho_1 N_1 + \rho_2 N_2)$ *ne peut être égale à zéro en tous les points d'une aire d'étendue finie tracée à la surface de séparation de deux fluides* 1 *et* 2.

Entre les deux cas que nous venons de traiter se trouve le cas où les éléments qui composent le fluide n'exercent l'un sur l'autre *aucune action;* dans ce cas, *la quantité* Y *est égale à zéro* et nous pouvons énoncer la proposition suivante :

Lorsque les éléments qui composent le fluide sont sans action les uns sur les autres, les conditions nécessaires pour la stabilité de l'équilibre doivent être complétées comme nous venons de l'indiquer pour le cas où les éléments s'attirent en raison inverse du carré de leur distance mutuelle, et elles deviennent alors conditions suffisantes.

C'est le résultat auquel nous étions parvenus directement en d'autres publications ([1]).

Traçons une surface fermée σ, enfermant un volume ϖ contenant tout ou partie du fluide. Soit ν la normale à la surface σ vers l'extérieur du volume ϖ; on sait que l'on a identiquement

$$(87)\qquad \mathrm{S}_\sigma \frac{\partial(\mathrm{U}+\mathrm{V})}{\partial\nu}\,d\sigma = \int_\varpi \Delta(\mathrm{U}+\mathrm{V})\,d\varpi.$$

Appliquons d'abord cette égalité au cas d'un fluide dont les divers éléments se repoussent les uns les autres en raison inverse du carré de leur distance mutuelle et sont attirés ou repoussés en raison inverse du carré de la distance par des masses extérieures. L'égalité (85) nous donnera

$$\Delta \mathrm{U} = 0, \qquad \Delta \mathrm{V} = -4\pi\varepsilon\rho.$$

L'égalité (87) deviendra

$$\mathrm{S}_\sigma \frac{\partial(\mathrm{U}+\mathrm{V})}{\partial\nu}\,d\sigma = -4\pi\varepsilon\int_\varpi \rho\,d\varpi.$$

([1]) *Sur la stabilité de l'équilibre des corps flottants* (*Journal de Mathématiques*, 5e série, t. I, p. 91). — *Dissolutions et mélanges;* 1er Mémoire : *L'équilibre et le mouvement des fluides mélangés* (*Travaux et Mémoires des Facultés de Lille*, t. III.B).

Le second membre étant à coup sûr négatif, il en est de même du premier; il y a donc assurément des points de la surface σ où $\frac{\partial(U+V)}{\partial\nu}$ est négatif. En ces points, on a

$$(X_i+X_e)\cos(\nu,x)+(Y_i+Y_e)\cos(\nu,y)+(Z_i+Z_e)\cos(\nu,z)>0;$$

en ces points, la force tant extérieure qu'intérieure fait un angle aigu avec la normale ν. Dès lors, nous pouvons énoncer la proposition suivante :

Un fluide dont les divers éléments se repoussent en raison inverse du carré de la distance est soumis à l'action de masses extérieures qui attirent ou repoussent ces mêmes éléments en raison inverse du carré de la distance; ce fluide est en équilibre stable; traçons une surface fermée renfermant ce fluide en totalité ou en partie. Il existe sur cette surface des points tels que si l'on s'éloigne d'un tel point suivant la normale à la surface et vers l'extérieur de la surface, on rencontre, après un trajet infiniment petit, un fluide au moins aussi dense que celui qui se trouvait au point que l'on a quitté.

De cette proposition se déduisent les conséquences suivantes :

Si, dans un tel fluide, on trace une surface d'égale densité σ qui soit fermée, toute surface d'égale densité σ', tracée à l'intérieur de la surface σ, correspond à une densité au plus égale à celle que l'on rencontre sur la surface σ; toute surface d'égale densité σ'', contenant à son intérieur la surface σ, correspond à une densité au moins égale à celle que l'on rencontre sur la surface σ.

Le fluide que nous étudions ne peut être en équilibre stable s'il est limité par une surface libre fermée.

Considérons, maintenant, *un fluide dont les divers éléments s'attirent en raison inverse du carré de la distance et sont attirés ou repoussés en raison inverse du carré de la distance par des masses* *extérieures*. Nous aurons, en vertu de l'égalité (86),

$$\Delta U = 0, \qquad \Delta V = 4\pi f \rho,$$

et l'égalité (87) deviendra

$$\mathrm{S}_\sigma \frac{\partial(V+U)}{\partial \nu} d\sigma = 4\pi f \int_\varpi \rho \, d\varpi.$$

Le second membre étant assurément positif, il en sera de même du premier, et nous obtiendrons des *résultats inverses de ceux que nous venons d'énoncer*.

§ 8. — Masse fluide, animée d'un mouvement de rotation uniforme et dont les divers éléments s'attirent en raison inverse du carré de la distance.

Imaginons une masse fluide dont les éléments s'attirent en raison inverse du carré de la distance mutuelle, et sont attirés suivant la même loi par des masses fixes; supposons en outre que cette masse fluide soit animée d'un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe donné. On sait combien il est difficile de déterminer la figure d'équilibre de cette masse et d'établir les conditions dans lesquelles cet équilibre est stable. Nous ne prétendons pas ici résoudre ce problème dans des cas nouveaux; nous voulons seulement apporter la démonstration de quelques propositions que l'on a toujours regardées comme certaines.

Prenons l'axe de rotation pour axe des z. Soit ω la vitesse angulaire de rotation. On sait que, pour obtenir l'équilibre relatif de la masse fluide, il suffit de chercher l'état d'équilibre absolu qu'elle prendrait sous l'action des forces qui la sollicitent réellement et de forces fictives (forces centrifuges) admettant pour fonction potentielle

$$W = -\frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2). \tag{88}$$

Les considérations précédemment exposées touchant l'équilibre des fluides s'appliquent donc à ce cas.

Touchant la *stabilité* de cet équilibre relatif, nous nous bornerons à rappeler le résultat suivant, dû à MM. W. Thomson et Tait :

Soit un système soumis à des forces ayant pour potentiel Ω; *ce système est en équilibre relatif, et sa force vive est* $\mathfrak{T}$. SI L'ON SUPPOSE EN CE SYSTÈME DES RÉSISTANCES PASSIVES, *pour que l'équilibre relatif soit stable, il faut et il suffit que la quantité* $(\Omega + \mathfrak{T})$ *soit un minimum.*

Dans le cas général, où nous nous sommes placés, où le système renferme des fluides compressibles, ce n'est plus à la Mécanique, mais à la Thermodynamique qu'il faut faire appel pour traiter de l'équilibre et du mouvement de ce système. La proposition de MM. Thomson et Tait devra alors être remplacée par la suivante :

Pour que l'équilibre relatif d'un système QUI OFFRE DES RÉSISTANCES PASSIVES *soit stable, il faut et il suffit que la somme* $(\Phi + \mathfrak{T})$ *de son potentiel thermodynamique et de sa force vive soit minimum.*

On démontrera sans peine que cette condition est suffisante en s'appuyant sur les principes que nous avons posés ailleurs [1] et en imitant les raisonnements donnés par Lejeune-Dirichlet dans le cas de l'équilibre absolu. Quant à la nécessité de la condition, *pour un système qui ne dépend que d'un nombre limité de paramètres variables,* elle se déduira de l'étude des petits mouvements du système, selon la méthode appliquée par Lagrange à l'équilibre absolu et par MM. Thomson et Tait à l'équilibre relatif. La démonstration ne pourra s'étendre au cas de systèmes dépendant d'un nombre illimité de paramètres variables sans postulat spécial; on pourra répéter à cet égard ce que nous avons dit au sujet de l'équilibre absolu, au début de notre Mémoire *sur la stabilité de l'équilibre d'un corps flottant.*

Admettons dorénavant que le minimum de $(\Phi + \mathfrak{T})$ soit la condition nécessaire et suffisante pour la stabilité de l'équilibre relatif d'un

---

[1] *Commentaires aux principes de la Thermodynamique,* 3e partie, Chapitre IV, § 2 (*Journal de Mathématiques,* 4e série, t. X, p. 263).

système qui offre des résistances passives, ou, selon la dénomination adoptée par M. Poincaré (¹), pour la *stabilité séculaire* du système.

M. Poincaré, en étudiant la stabilité relative des figures ellipsoïdales d'équilibre d'une masse fluide homogène animée d'un mouvement de rotation, n'a pas cherché d'une manière absolument générale les conditions nécessaires et suffisantes pour que la somme $(\Omega + \mathfrak{T})$ soit minimum; au § 9 de son Mémoire, il traite seulement le cas où le mouvement troublé du système est encore un mouvement uniforme de rotation, de *même vitesse angulaire* ω, *autour du même axe* OZ; au § 10, le cas où le mouvement troublé correspond à un *même moment de quantité de mouvement par rapport à l'axe* OZ que le mouvement initial, ce qui suppose que les forces perturbatrices avaient un moment nul par rapport à l'axe OZ. C'est dans le premier de ces deux cas que nous nous supposerons placé; cette restriction est sans inconvénient pour l'objet que nous nous proposons; les conditions qui, dans ce cas restreint, sont nécessaires pour le minimum de $(\Phi + \mathfrak{T})$, demeurent nécessaires dans le cas général.

Dès lors, *les conditions nécessaires pour la stabilité de l'équilibre absolu d'une masse fluide dont les éléments s'attirent en raison inverse du carré de la distance* (conditions énoncées au § 7) *demeurent nécessaires pour la stabilité séculaire de la même masse animée d'un mouvement de rotation uniforme, pourvu que l'on ajoute aux quantités* $(X_i + X_e)$, $(Y_i + Y_e)$, $(Z_i + Z_e)$ *les composantes* X_c, Y_c, Z_c *de la force centrifuge.*

D'après l'égalité (88), on a

$$X_c = \omega^2 x, \qquad Y_c = \omega^2 y, \qquad Z_c = 0. \tag{89}$$

L'identité (87), appliquée au cas actuel, devient

$$\mathrm{S}\,\frac{\partial(U+V+W)}{\partial\nu}\,d\sigma = \int_{w} \Delta(U+V+W)\,dw. \tag{90}$$

(¹) H. Poincaré, *Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation* (*Acta mathematica*, t. VII, p. 259; 1885).

En vertu des égalités (86) et (88), on a

$$\Delta U = 0, \qquad \Delta V = 4\pi f \rho, \qquad \Delta W = -2\omega^2.$$

Soient $\mu = \int \rho \, d\varpi$ la masse contenue dans la surface σ et $\varpi = \int_\varpi d\varpi$ le volume qu'enferme cette surface. L'égalité (90) deviendra

$$(91) \qquad \mathbf{S}_\sigma \frac{\partial(U+V+W)}{\partial\nu} d\sigma = 2(2\pi f \mu - \varpi\omega^2).$$

En raisonnant sur cette égalité comme nous l'avons fait au § 7 sur des égalités analogues, nous arrivons aux conséquences suivantes :

Traçons une surface fermée σ englobant un volume ϖ et contenant une masse μ du fluide.

Si l'on a $\omega^2 < \frac{2\pi f \mu}{\varpi}$, il est des points M *sur la surface σ tels que si l'on s'éloigne de l'un de ces points en pénétrant à l'intérieur du volume ϖ, on ne rencontre pas de masse fluide moins dense que celle qui se trouvait au point* M.

Si l'on a $\omega^2 > \frac{2\pi f \mu}{\varpi}$, il est des points M *sur la surface σ tels que si l'on s'éloigne de l'un de ces points en pénétrant à l'intérieur du volume ϖ, on ne rencontre pas de masse fluide plus dense que celle qui se trouvait au point* M.

Appliquons cette proposition à une surface entourant la surface limite du fluide et infiniment voisine de celle-ci ; nous en conclurons qu'*une masse fluide terminée par une surface libre ne peut posséder la stabilité séculaire si l'on a*

$$\omega^2 > \frac{2\pi f \mathfrak{M}}{\mathfrak{W}},$$

$\mathfrak{M}$ *étant la masse totale du fluide et* $\mathfrak{W}$ *son volume.*

M. Poincaré avait montré [1] que, dans ce cas, la résultante des

---

[1] H. Poincaré, *Bulletin astronomique*, t. II, p. 117. — Tisserand, *Traité de Mécanique céleste*, t. II, p. 108.

forces intérieure, extérieure et centrifuge est, en certains points de la surface limite du fluide, dirigée vers l'extérieur; il en avait conclu que la masse ne pouvait être en équilibre stable; notre analyse démontre un intermédiaire que M. Poincaré regardait comme évident.

Supposons la vitesse angulaire de rotation ω assez faible pour que l'on ait assurément, en tout point de la masse fluide,

$$\omega^2 < 2\pi f \rho. \tag{92}$$

On aura alors, quelle que soit la surface σ,

$$\omega^2 < \frac{2\pi f \mu}{w}$$

et l'on pourra énoncer les théorèmes suivants :

Si l'on trace, dans une région continue de la masse fluide, une surface fermée en tous les points de laquelle la densité du fluide ait la même valeur, en tous les points intérieurs à cette surface la densité a une valeur au moins égale à celle qu'elle prend sur la surface.

Si une surface fermée sépare deux fluides continus différents, le fluide le plus dense est intérieur à la surface.

Ces propositions ont toujours été regardées comme certaines par les auteurs qui, depuis Clairaut, ont traité de la figure des planètes, bien qu'elles n'aient, à notre connaissance, reçu aucune démonstration.