JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

DUPORT

Mémoire sur les équations différentielles

Journal de mathématiques pures et appliquées 5e série, tome 3 (1897), p. 17-80.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1897_5_3__17_0>

Mémoire sur les équations différentielles;

Par M. DUPORT,

Professeur à la Faculté des Sciences de Dijon.

Introduction.

Le point de départ de mes recherches sur les équations différentielles et aux dérivées partielles a été de trouver des expressions pour les fonctions y et z d'une variable x satisfaisant à une équation de la forme

$$f(x, y, z, y', z') = 0, \tag{1}$$

renfermant une fonction arbitraire et ses dérivées.

Ce problème est fort élégamment résolu dans le Mémoire devenu classique de M. Darboux : *Sur les solutions singulières des équations aux dérivées partielles du premier ordre*. La solution en est tirée de la Géométrie. Pour traiter la même question analytiquement, j'ai dû tourner la question et substituer par l'introduction d'une nouvelle fonction un système linéaire à l'équation (1). En posant par exemple $z' = u$, l'équation (1) peut être remplacée par le système

$$z' = u,$$
$$y' = \varphi(x, y, z, u),$$

qui est un cas particulier du système différentiel

$$A\,dx + B\,dy + C\,dz + D\,du = 0,$$
$$A'\,dx + B'\,dy + C'\,dz + D'\,du = 0,$$

x, y, z, u étant des fonctions d'une variable et $A, B, C, D, A', B', C', D'$ des fonctions arbitraires de x, y, z, u. Ces fonctions x, y, z, u peuvent s'exprimer au moyen d'une variable convenablement choisie, d'une fonction arbitraire de cette variable et de ses dérivées premières et secondes. Cette question a fait l'objet d'un Mémoire que j'ai publié dans la *Revue bourguignonne de l'enseignement supérieur*, t. III, n° 3.

J'ai été ainsi conduit à l'étude des systèmes formés de plusieurs équations de Pfaff, quel que soit le nombre des variables indépendantes. Cette question n'a pas encore été traitée à ma connaissance. Le seul Mémoire qui s'en rapproche est celui de M. Darboux, publié dans le *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. VI, sur les formes réduites de l'équation de Pfaff. Dans la première Partie de ce Mémoire, l'étude de l'équation de Pfaff est faite à l'aide d'une identité remarquable de la manière la plus simple; dans la seconde, M. Darboux considère plusieurs équations de Pfaff et obtient des fonctions des coefficients de ces équations qui sont des invariants pour un changement quelconque de variables.

Je me suis, au contraire, occupé de la recherche des solutions du système formé par plusieurs équations de Pfaff, quel que soit le nombre des variables arbitraires. Selon ce nombre, tantôt les équations obtenues ne possèdent de solutions que dans des cas particuliers, tantôt on a des systèmes de solutions renfermant des éléments arbitraires dépendant d'un nombre plus ou moins grand de variables; mais il y a toujours des liens très étroits entre les systèmes déduits des mêmes équations de Pfaff. J'ai mis ces résultats en lumière dans un second Mémoire publié dans la *Revue bourguignonne de l'enseignement supérieur*, t. V, n° 1, où j'ai étudié tous les systèmes de plusieurs équations de Pfaff lorsque le nombre total des variables dépendantes et indépendantes ne dépasse pas cinq.

Dans le Mémoire actuel, je m'occupe de l'étude de deux équations de Pfaff dans le cas où le nombre total des variables est de six, c'est-à-dire du système

$$\left.\begin{aligned}\Sigma a_i\,dx_i=0\\ \Sigma b_i\,dx_i=0\end{aligned}\right\}\qquad (i=1,\ldots,6).$$

Je donne une classification complète de tous les cas qui peuvent se présenter au point de vue de l'intégration des systèmes obtenus, quel que soit le nombre des variables arbitraires. J'y ai fait le plus grand usage du Mémoire précédemment cité de M. Darboux.

Dans le cas où le nombre des variables indépendantes est de deux, on a alors quatre équations renfermant quatre fonctions inconnues. Ce cas est de beaucoup le plus intéressant. Il forme une transition entre les équations différentielles du premier ordre et celles du second ordre. Les solutions dépendent de deux fonctions arbitraires d'une variable. J'ai notamment trouvé deux cas où l'on peut obtenir, à l'aide de l'intégration d'équations différentielles à une seule variable indépendante, des solutions du système proposé renfermant une fonction arbitraire, sans que l'on puisse obtenir pour cela la solution générale du système. Ces cas me paraissent nouveaux et de nature à intéresser les géomètres.

Je ne puis terminer ce résumé rapide sans dire que les transformations que je fais, les méthodes que je suis, se rapprochent beaucoup de celles qui ont été employées par M. Sophus Lie dans ses beaux travaux sur les équations aux dérivées partielles du premier ordre [1].

---

1. Je me propose d'étudier dans ce Mémoire les deux équations différentielles

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} a_1dx_1+a_2dx_2+a_3dx_3+a_4dx_4+a_5dx_5+a_6dx_6=0,\\ b_1dx_1+b_2dx_2+b_3dx_3+b_4dx_4+b_5dx_5+b_6dx_6=0,\end{aligned}\right.$$

les quantités a et b étant des fonctions quelconques des quantités x.

---

(1) Les résultats démontrés dans ce Mémoire ont été publiés, dès 1895, dans une courte Note qui a paru dans la *Revue bourguignonne de l'enseignement supérieur*, t. V, n° 2.

Les solutions de ces équations, quel que soit le nombre des variables indépendantes, résulteront des différentes formes auxquelles on peut réduire ce système.

Je vais énumérer ces formes. Les quantités $y_1, y_2, \ldots, y_6$ seront des fonctions des quantités x qui peuvent être prises pour nouvelles variables; les quantités c désigneront des fonctions de $y_1, y_2, \ldots, y_6$; H et K deux fonctions de $y_1, \ldots, y_5$. Ces formes sont les suivantes :

I.	$dy_1 = 0,$	$dy_2 = 0,$
II.	$dy_1 = 0,$	$dy_3 - y_4 dy_2 = 0,$
III.	$dy_2 - y_3 dy_1 = 0,$	$dy_3 - y_4 dy_1 = 0,$
IV.	$dy_2 - y_3 dy_1 = 0,$	$dy_4 - y_5 dy_1 = 0,$
V.	$dy_2 - y_3 dy_1 = 0,$	$dy_3 - \mathrm{H}\, dy_1 - \mathrm{K}\, dy_4 = 0,$
VI.	$dy_1 = 0,$	$dy_4 - y_5 dy_2 - y_6 dy_3 = 0,$
VII.	$dy_2 - y_3 dy_1 = 0,$	$dy_5 - y_6 dy_4 = 0,$
VIII.	$dy_2 - y_3 dy_1 = 0,$	$c_1 dy_1 + c_3 dy_3 + c_4 dy_4 + c_5 dy_5 = 0.$
IX.	$dy_3 - y_4 dy_1 - y_5 dy_2 = 0,$	$c_1 dy_1 + c_2 dy_2 + c_4 dy_4 + c_5 dy_5 = 0.$

Je désignerai par

$$g_1, \quad g_2, \quad g_3, \quad g_4, \quad g_5, \quad g_6$$

des fonctions quelconques des quantités x, et je poserai

$$\frac{dg_i}{dx_j} - \frac{dg_j}{dx_i} = g_{ij},$$

$$g_i g_{jk} + g_j g_{ki} + g_k g_{ij} = g_{ijk},$$

$$b_i a_{jkl} - b_j a_{kli} + b_k a_{lij} - b_l a_{ijk} = \mathrm{L}_{ijkl},$$

$$a_i b_{jkl} - a_j b_{kli} + a_k b_{lij} - a_l b_{ijk} = \mathrm{M}_{ijkl},$$

les indices i, j, k, l ayant les valeurs de quatre des six premiers nombres.

2. Je commencerai par ramener dans le cas général le système (1) à une forme plus simple.

Posons pour cela les équations

$$(2)\qquad a=\lambda_1\frac{dF_1}{dx}+\lambda_2\frac{dF_2}{dx}+\lambda_3\frac{dF_3}{dx}+\lambda_4\frac{dF_4}{dx}+\lambda_5\frac{dF_5}{dx},$$

$$(3)\qquad b=\mu_1\frac{dF_1}{dx}+\mu_2\frac{dF_2}{dx}+\mu_3\frac{dF_3}{dx}+\mu_4\frac{dF_4}{dx}+\mu_5\frac{dF_5}{dx}.$$

Soit maintenant

$$\Delta_1\frac{dF}{dx_1}+\Delta_2\frac{dF}{dx_2}+\Delta_3\frac{dF}{dx_3}+\Delta_4\frac{dF}{dx_4}+\Delta_5\frac{dF}{dx_5}+\Delta_6\frac{dF}{dx_6}=0$$

une équation aux dérivées partielles du premier ordre, admettant comme solutions F_1, F_2, F_3, F_4, F_5.

On aura les deux relations

$$(4)\qquad a_1\Delta_1+a_2\Delta_2+a_3\Delta_3+a_4\Delta_4+a_5\Delta_5+a_6\Delta_6=0,$$

$$(5)\qquad b_1\Delta_1+b_2\Delta_2+b_3\Delta_3+b_4\Delta_4+b_5\Delta_5+b_6\Delta_6=0.$$

De l'une des équations (2) l'on tire

$$\begin{aligned}\Delta_1\frac{da}{dx_1}&+\Delta_2\frac{da}{dx_2}+\Delta_3\frac{da}{dx_3}+\Delta_4\frac{da}{dx_4}+\Delta_5\frac{da}{dx_5}+\Delta_6\frac{da}{dx_6}\\&=\Delta(\lambda_1)\frac{dF_1}{dx}+\Delta(\lambda_2)\frac{dF_2}{dx}+\Delta(\lambda_3)\frac{dF_3}{dx}+\Delta(\lambda_4)\frac{dF_4}{dx}+\Delta(\lambda_5)\frac{dF_5}{dx}\\&\quad+\lambda_1\Delta\left(\frac{dF_1}{dx}\right)+\lambda_2\Delta\left(\frac{dF_2}{dx}\right)+\lambda_3\Delta\left(\frac{dF_3}{dx}\right)+\lambda_4\Delta\left(\frac{dF_4}{dx}\right)+\lambda_5\Delta\left(\frac{dF_5}{dx}\right).\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}\Delta\left(\frac{dF}{dx}\right)&=\Delta_1\frac{d^2F}{dx\,dx_1}+\Delta_2\frac{d^2F}{dx\,dx_2}+\Delta_3\frac{d^2F}{dx\,dx_3}+\Delta_4\frac{d^2F}{dx\,dx_4}+\Delta_5\frac{d^2F}{dx\,dx_5}+\Delta_6\frac{d^2F}{dx\,dx_6}\\&=-\frac{d\Delta_1}{dx}\frac{dF}{dx_1}-\frac{d\Delta_2}{dx}\frac{dF}{dx_2}-\frac{d\Delta_3}{dx}\frac{dF}{dx_3}-\frac{d\Delta_4}{dx}\frac{dF}{dx_4}-\frac{d\Delta_5}{dx}\frac{dF}{dx_5}-\frac{d\Delta_6}{dx}\frac{dF}{dx_6}.\end{aligned}$$

On aura donc

$$\begin{aligned}\lambda_1\Delta\left(\frac{dF_1}{dx}\right)&+\lambda_2\Delta\left(\frac{dF_2}{dx}\right)+\lambda_3\Delta\left(\frac{dF_3}{dx}\right)+\lambda_4\Delta\left(\frac{dF_4}{dx}\right)+\lambda_5\Delta\left(\frac{dF_5}{dx}\right)\\&=-a_1\frac{d\Delta_1}{dx}-a_2\frac{d\Delta_2}{dx}-a_3\frac{d\Delta_3}{dx}-a_4\frac{d\Delta_4}{dx}-a_5\frac{d\Delta_5}{dx}-a_6\frac{d\Delta_6}{dx}\\&=\Delta_1\frac{da_1}{dx}+\Delta_2\frac{da_2}{dx}+\Delta_3\frac{da_3}{dx}+\Delta_4\frac{da_4}{dx}+\Delta_5\frac{da_5}{dx}+\Delta_6\frac{da_6}{dx},\end{aligned}$$

en vertu de l'équation (4). Donc on aura finalement l'équation

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &\Delta_1 a_{i1} + \Delta_2 a_{i2} + \Delta_3 a_{i3} + \Delta_4 a_{i4} + \Delta_5 a_{i5} + \Delta_6 a_{i6} \\ &\quad = \Delta(\lambda_1)\frac{dF_1}{dx_i} + \Delta(\lambda_2)\frac{dF_2}{dx_i} \\ &\qquad + \Delta(\lambda_3)\frac{dF_3}{dx_i} + \Delta(\lambda_4)\frac{dF_4}{dx_i} + \Delta(\lambda_5)\frac{dF_5}{dx_i}, \end{aligned}\right.$$

où i prend les valeurs successives 1, 2, ..., 6.

On aura de même

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &\Delta_1 b_{i1} + \Delta_2 b_{i2} + \Delta_3 b_{i3} + \Delta_4 b_{i4} + \Delta_5 b_{i5} + \Delta_6 b_{i6} \\ &\quad = \Delta(\mu_1)\frac{dF_1}{dx_i} + \Delta(\mu_2)\frac{dF_2}{dx_i} \\ &\qquad + \Delta(\mu_3)\frac{dF_3}{dx_i} + \Delta(\mu_4)\frac{dF_4}{dx_i} + \Delta(\mu_5)\frac{dF_5}{dx_i}, \end{aligned}\right.$$

où i prend également les valeurs successives 1, 2, ..., 6.

Désignons par λ et μ deux nouvelles fonctions inconnues et cherchons à déterminer les fonctions λ, μ, F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, λ_5, μ_1, μ_2, μ_3, μ_4, μ_5 de façon à satisfaire aux équations (2), (3) et à

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} &\Delta(\lambda\lambda_1 + \mu\mu_1) = 0, \\ &\Delta(\lambda\lambda_2 + \mu\mu_2) = 0, \\ &\Delta(\lambda\lambda_3 + \mu\mu_3) = 0, \\ &\Delta(\lambda\lambda_4 + \mu\mu_4) = 0, \\ &\Delta(\lambda\lambda_5 + \mu\mu_5) = 0. \end{aligned}\right.$$

Ces équations s'écrivent

$$\begin{aligned} &\lambda_1\Delta(\lambda) + \mu_1\Delta(\mu) + \lambda\Delta(\lambda_1) + \mu\Delta(\mu_1) = 0, \\ &\lambda_2\Delta(\lambda) + \mu_2\Delta(\mu) + \lambda\Delta(\lambda_2) + \mu\Delta(\mu_2) = 0, \\ &\lambda_3\Delta(\lambda) + \mu_3\Delta(\mu) + \lambda\Delta(\lambda_3) + \mu\Delta(\mu_3) = 0, \\ &\lambda_4\Delta(\lambda) + \mu_4\Delta(\mu) + \lambda\Delta(\lambda_4) + \mu\Delta(\mu_4) = 0, \\ &\lambda_5\Delta(\lambda) + \mu_5\Delta(\mu) + \lambda\Delta(\lambda_5) + \mu\Delta(\mu_5) = 0. \end{aligned}$$

Multiplions la première par $\frac{dF_1}{dx_i}$, la seconde par $\frac{dF_2}{dx_i}$, ..., la cinquième par $\frac{dF_5}{dx_i}$ et ajoutons. On aura

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} & a_i\Delta(\lambda)+b_i\Delta(\mu)+\lambda(\Delta_1 a_{i1}+\Delta_2 a_{i2}+\Delta_3 a_{i3}\\ &\qquad\qquad +\Delta_4 a_{i4}+\Delta_5 a_{i5}+\Delta_6 a_{i6})\\ &\qquad +\mu(\Delta_1 b_{i1}+\Delta_2 b_{i2}+\Delta_3 b_{i3}\\ &\qquad\qquad +\Delta_4 b_{i4}+\Delta_5 b_{i5}+\Delta_6 b_{i6})=0, \end{aligned}\right.$$

où i prend les valeurs successives 1, 2, ..., 6. Joignons-y les équations (4), (5) et écrivons-les toutes. On aura le système suivant

$$(10)\quad \left\{\begin{array}{lll} a_1\Delta(\lambda)+b_1\Delta(\mu)+\Delta_1(\lambda a_{11}+\mu b_{11})+\ldots+\Delta_6(\lambda a_{16}+\mu b_{16}) & & =0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ a_6\Delta(\lambda)+b_6\Delta(\mu)+\Delta_1(\lambda a_{61}+\mu b_{61})+\ldots+\Delta_6(\lambda a_{66}+\mu b_{66}) & & =0,\\ \qquad\qquad\Delta_1 a_1 \qquad\qquad +\ldots+\Delta_6 a_6 & & =0,\\ \qquad\qquad\Delta_1 b_1 \qquad\qquad +\ldots+\Delta_6 b_6 & & =0. \end{array}\right.$$

Considérons ces équations comme des équations homogènes dans les quantités $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_6, \Delta(\lambda), \Delta(\mu)$; on aura, par élimination, le déterminant suivant :

$$(11)\quad \begin{vmatrix} 0 & \lambda a_{12}+\mu b_{12} & \ldots & \lambda a_{16}+\mu b_{16} & a_1 & b_1\\ \lambda a_{21}+\mu b_{21} & 0 & \ldots & \lambda a_{26}+\mu b_{26} & a_2 & b_2\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \lambda a_{61}+\mu b_{61} & \lambda a_{62}+\mu b_{62} & \ldots & 0 & a_6 & b_6\\ -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_6 & 0 & 0\\ -b_1 & -b_2 & \ldots & -b_6 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0,$$

qui est symétrique gauche d'ordre pair. Il est donc carré parfait et il est aisé de voir qu'il est le carré parfait d'une fonction homogène et du second degré en λ et μ. Soit $\frac{\lambda_1}{\mu_1}$ une valeur du rapport $\frac{\lambda}{\mu}$ satisfaisant à l'équation (11), on en aura toujours au moins une. On aura

$$(12)\qquad \begin{cases} \lambda = \lambda_1 k, & \Delta(\lambda) = \lambda_1 \Delta(k) + k\Delta(\lambda_1), \\ \mu = \mu_1 k, & \Delta(\mu) = \mu_1 \Delta(k) + k\Delta(\mu_1). \end{cases}$$

Les équations (10) se réduisent à six distinctes au plus, car on sait que, quand un déterminant symétrique gauche d'ordre pair est nul, il en est de même de tous ses mineurs du premier ordre. On pourra donc toujours satisfaire aux équations (10) par des formules de la forme, α et β désignant deux arbitraires,

$$(13)\qquad \begin{cases} \Delta_1 = A_1\alpha + B_1\beta, \\ \Delta_2 = A_2\alpha + B_2\beta, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \Delta_6 = A_6\alpha + B_6\beta, \\ \dfrac{\Delta(\lambda)}{k} = A\ \alpha + B\ \beta, \\ \dfrac{\Delta(\mu)}{k} = A'\,\alpha + B'\,\beta. \end{cases}$$

Posons

$$A_1\frac{dF}{dx_1} + A_2\frac{dF}{dx_2} + A_3\frac{dF}{dx_3} + A_4\frac{dF}{dx_4} + A_5\frac{dF}{dx_5} + A_6\frac{dF}{dx_6} = \Delta_1(F),$$

$$B_1\frac{dF}{dx_1} + B_2\frac{dF}{dx_2} + B_3\frac{dF}{dx_3} + B_4\frac{dF}{dx_4} + B_5\frac{dF}{dx_5} + B_6\frac{dF}{dx_6} = \Delta_2(F),$$

et les deux dernières équations (12) deviennent

$$\left[\lambda_1\frac{\Delta_1(k)}{k} + \Delta_1(\lambda_1) - A\right]\alpha + \left[\lambda_1\frac{\Delta_2(k)}{k} + \Delta_2(\lambda_1) - B\right]\beta = 0,$$

$$\left[\mu_1\frac{\Delta_1(k)}{k} + \Delta_1(\mu_1) - A'\right]\alpha + \left[\mu_1\frac{\Delta_2(k)}{k} + \Delta_2(\mu_1) - B'\right]\beta = 0.$$

On en tire, en multipliant la première par μ_1, la seconde par λ_1, et retranchant,

$$\begin{aligned} &[\mu_1\Delta_1(\lambda_1) - \lambda_1\Delta_1(\mu_1) + A'\lambda_1 - A\mu_1]\alpha \\ &+ [\mu_1\Delta_2(\lambda_1) - \lambda_1\Delta_2(\mu_1) + B'\lambda_1 - B\mu_1]\beta = 0, \end{aligned}$$

qui donne toujours une valeur pour le rapport de α à β.

On a ensuite k par une équation de la forme

$$C_1 \frac{dk}{dx_1} + C_2 \frac{dk}{dx_2} + C_3 \frac{dk}{dx_3} + C_4 \frac{dk}{dx_4} + C_5 \frac{dk}{dx_5} + C_6 \frac{dk}{dx_6} = Ck.$$

On peut aussi diriger de la manière suivante la résolution des équations (10) maintenant que l'on sait que ce système est possible.

En vertu de l'équation (4) on a, u étant une fonction quelconque

$$\begin{aligned} &a_i \Delta(u) + u[\Delta_1 a_{i1} + \Delta_2 a_{i2} + \Delta_3 a_{i3} + \Delta_4 a_{i4} + \Delta_5 a_{i5} + \Delta_6 a_{i6}] \\ &\quad = \Delta_1 (au)_{i1} + \Delta_2 (au)_{i2} + \ldots + \Delta_6 (au)_{i6}, \end{aligned}$$

et les équations (10) peuvent, en tenant compte de cette équation et de (12), s'écrire de la manière suivante :

$$(14)\quad \left\{ \begin{array}{lll} (a_1\lambda_1 + b_1\mu_1)\dfrac{\Delta k}{k} + \Delta_1(a\lambda_1 + b\mu_1)_{11} + \ldots + \Delta_6(a\lambda_1 + b\mu_1)_{16} & & = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ (a_6\lambda_1 + b_6\mu_1)\dfrac{\Delta k}{k} + \Delta_1(a\lambda_1 + b\mu_1)_{61} + \ldots + \Delta_6(a\lambda_1 + b\mu_1)_{66} & & = 0, \\ \qquad\qquad \Delta_1 a_1 \qquad\qquad + \ldots + \Delta_6 a_6 & & = 0, \\ \qquad\qquad \Delta_1 b_1 \qquad\qquad + \ldots + \Delta_6 b_6 & & = 0; \end{array} \right.$$

ces équations en $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \frac{\Delta k}{k}$ seront compatibles et fourniront au moins un système de valeurs proportionnelles, soit

$$\frac{\Delta_1}{C_1} = \frac{\Delta_2}{C_2} = \frac{\Delta_3}{C_3} = \ldots = \frac{\Delta_6}{C_6} = \frac{\Delta k}{kC},$$

d'où

$$(15)\quad C_1 \frac{dk}{dx_1} + C_2 \frac{dk}{dx_2} + C_3 \frac{dk}{dx_3} + C_4 \frac{dk}{dx_4} + C_5 \frac{dk}{dx_5} + C_6 \frac{dk}{dx_6} = Ck.$$

En prenant pour $F_1, F_2, \ldots, F_5$ cinq solutions distinctes de l'équation

$$C_1 \frac{dF}{dx_1} + C_2 \frac{dF}{dx_2} + C_3 \frac{dF}{dx_3} + C_4 \frac{dF}{dx_4} + C_5 \frac{dF}{dx_5} + C_6 \frac{dF}{dx_6} = 0,$$

et pour k une solution de l'équation (15), les six premières équations (10) fournissent les équations (8). En vertu des deux dernières équations (10), les équations (2) et (3) fournissent des valeurs pour $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_5, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_5$.

Le système différentiel (1) peut donc toujours être mis sous la forme

$$\lambda_1 dF_1 + \lambda_2 dF_2 + \lambda_3 dF_3 + \lambda_4 dF_4 + \lambda_5 dF_5 = 0,$$
$$\mu_1 dF_1 + \mu_2 dF_2 + \mu_3 dF_3 + \mu_4 dF_4 + \mu_5 dF_5 = 0,$$

où l'une de ces équations peut être remplacée par la suivante :

$$(\lambda\lambda_1 + \mu\mu_1) dF_1 + (\lambda\lambda_2 + \mu\mu_2) dF_2 + (\lambda\lambda_3 + \mu\mu_3) dF_3 \\ + (\lambda\lambda_4 + \mu\mu_4) dF_4 + (\lambda\lambda_5 + \mu\mu_5) dF_5 = 0,$$

dont les coefficients sont des fonctions de F_1, F_2, F_3, F_4, F_5. En somme, en désignant par y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 ces fonctions, le système proposé peut toujours être ramené à la forme

$$(16) \qquad \begin{cases} A_1 dy_1 + A_2 dy_2 + A_3 dy_3 + A_4 dy_4 + A_5 dy_5 = 0, \\ B_1 dy_1 + B_2 dy_2 + B_3 dy_3 + B_4 dy_4 + B_5 dy_5 = 0, \end{cases}$$

où A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 ne sont fonctions que de y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, et où B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 contiennent en général une sixième variable y_6.

5. Je vais maintenant étudier un cas particulier qui se relie immédiatement à la forme réduite que nous venons de trouver.

C'est celui où le système (1) peut être ramené à la formule (16), dans laquelle les coefficients B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 ne dépendent que des variables y_1, y_2, y_3, y_4, y_5. Dans ce cas, on peut déterminer des fonctions $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \lambda, \lambda', \mu, \mu'$ satisfaisant aux équations (2), (3), par suite à (4), (5) et aux suivantes :

$$\Delta(\lambda\lambda_1 + \mu\mu_1) = 0, \quad \ldots, \quad \Delta(\lambda\lambda_5 + \mu\mu_5) = 0,$$
$$\Delta(\lambda'\lambda_1 + \mu'\mu_1) = 0, \quad \ldots, \quad \Delta(\lambda'\lambda_5 + \mu'\mu_5) = 0.$$

Les deux premières de ces équations développées sont

$$\begin{aligned}
&\lambda\,\Delta(\lambda_1) + \mu\,\Delta(\mu_1) + \lambda_1\Delta(\lambda) + \mu_1\Delta(\mu) = 0,\\
&\lambda'\Delta(\lambda_1) + \mu'\Delta(\mu_1) + \lambda_1\Delta(\lambda') + \mu_1\Delta(\mu') = 0;
\end{aligned}$$

comme $\lambda\mu' - \mu\lambda'$ est différent de zéro, on peut les résoudre par rapport à $\Delta(\lambda_1)$, $\Delta(\mu_1)$ et l'on en tire

$$(17)\qquad \left\{\begin{aligned}
\Delta(\lambda_1) &= \alpha\,\lambda_1 + \beta\,\mu_1,\\
\Delta(\mu_1) &= \alpha'\lambda_1 + \beta'\mu_1.
\end{aligned}\right.$$

Dans ces équations on peut remplacer λ_1 et μ_1 par λ_2 et μ_2, ..., λ_3 et μ_3.

Inversement, supposons que les quantités λ_1, μ_1, λ_2, μ_2, ..., λ_3, μ_3 des équations (2) et (3) satisfassent aux relations

$$(18)\qquad \left\{\begin{array}{ll}
\Delta(\lambda_1) = \alpha\lambda_1 + \beta\mu_1, & \Delta(\mu_1) = \alpha'\lambda_1 + \beta'\mu_1,\\
\dots\dots\dots\dots, & \dots\dots\dots\dots\\
\Delta(\lambda_3) = \alpha\lambda_3 + \beta\mu_3, & \Delta(\mu_3) = \alpha'\lambda_3 + \beta'\mu_3,
\end{array}\right.$$

α, β, α', β' étant convenablement choisis. Supposons $\lambda_1\mu_2 - \mu_1\lambda_2$ différent de zéro et évaluons l'expression

$$\Delta\left(\frac{\lambda_1\mu_3 - \mu_1\lambda_3}{\lambda_1\mu_2 - \mu_1\lambda_2}\right),$$

c'est

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(\lambda_1\mu_2 - \mu_1\lambda_2)^2}\big[&(\lambda_1\mu_2 - \mu_1\lambda_2)\Delta(\lambda_1\mu_3 - \mu_1\lambda_3)\\
&- (\lambda_1\mu_3 - \mu_1\lambda_3)\Delta(\lambda_1\mu_2 - \mu_1\lambda_2)\big].
\end{aligned}$$

Le numérateur de cette expression est

$$\begin{aligned}
&(\lambda_1\mu_2 - \mu_1\lambda_2)[\lambda_1\Delta(\mu_3) + \mu_3\Delta(\lambda_1) - \mu_1\Delta(\lambda_3) - \lambda_3\Delta(\mu_1)]\\
-&(\lambda_1\mu_3 - \mu_1\lambda_3)[\lambda_1\Delta(\mu_2) + \mu_2\Delta(\lambda_1) - \mu_1\Delta(\lambda_2) - \lambda_2\Delta(\mu_1)],
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 [\Delta(\mu_1)(\lambda_2\mu_3 - \mu_2\lambda_3) + \Delta(\mu_2)(\lambda_3\mu_1 - \mu_3\lambda_1) \\
&\qquad\qquad + \Delta(\mu_3)(\lambda_1\mu_2 - \mu_1\lambda_2)] \\
&- \mu_1 [\Delta(\lambda_1)(\lambda_2\mu_3 - \mu_2\lambda_3) + \Delta(\lambda_2)(\lambda_3\mu_1 - \mu_3\lambda_1) \\
&\qquad\qquad + \Delta(\lambda_3)(\lambda_1\mu_2 - \mu_1\lambda_2)] \\
&= \lambda_1 \begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & \Delta(\mu_1) \\ \lambda_2 & \mu_2 & \Delta(\mu_2) \\ \lambda_3 & \mu_3 & \Delta(\mu_3) \end{vmatrix} - \mu_1 \begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & \Delta(\lambda_1) \\ \lambda_2 & \mu_2 & \Delta(\lambda_2) \\ \lambda_3 & \mu_3 & \Delta(\lambda_3) \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

En tenant compte des équations (18), on voit que ce second membre est nul. Donc, le système (1) étant mis sous la forme

$$\begin{gathered}
\lambda_1\, dF_1 + \lambda_2\, dF_2 + \lambda_3\, dF_3 + \lambda_4\, dF_4 + \lambda_5\, dF_5 = 0, \\
\mu_1\, dF_1 + \mu_2\, dF_2 + \mu_3\, dF_3 + \mu_4\, dF_4 + \mu_5\, dF_5 = 0,
\end{gathered}$$

si l'on résout ces équations par rapport à dF_1, dF_2, les coefficients de dF_3, dF_4, dF_5, dans les deux équations ainsi obtenues, seront des fonctions de F_1, F_2, F_3, F_4, F_5. Donc il suffit de satisfaire aux équations (2), (3) et (18).

Pour y satisfaire il suffit, d'autre part, de satisfaire à (4), (5) et au système suivant :

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned}
\Delta_1 a_{i1} + \Delta_2 a_{i2} + \Delta_3 a_{i3} + \Delta_4 a_{i4} + \Delta_5 a_{i5} + \Delta_6 a_{i6} &= \alpha\, a_i + \beta\, b_i, \\
\Delta_1 b_{i1} + \Delta_2 b_{i2} + \Delta_3 b_{i3} + \Delta_4 b_{i4} + \Delta_5 b_{i5} + \Delta_6 b_{i6} &= \alpha' a_i + \beta' b_i.
\end{aligned} \right.$$

Je vais faire voir que, pour que l'on puisse satisfaire aux équations (4), (5) et (19), il faut et il suffit que l'équation (11) soit une identité.

D'abord, cela est nécessaire.

En effet, multiplions la première équation (19) par λ, la seconde par μ et ajoutons, on aura

$$\begin{aligned}
\Delta_1(\lambda a_{i1} + \mu b_{i1}) + \ldots + \Delta_6(\lambda a_{i6} + \mu b_{i6}) \\
= (\alpha\lambda + \alpha'\mu) a_i + (\beta\lambda + \beta'\mu) b_i.
\end{aligned}$$

Joignons à ces équations (4) et (5) et considérons-y comme inconnues

$\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_6, \alpha\lambda + \alpha'\mu, \beta\lambda + \beta'\mu$. Elles seront satisfaites. Donc leur déterminant sera nul. Or, c'est précisément (11). Donc l'équation (11) doit être satisfaite quelles que soient λ et μ; c'est bien une identité.

Inversement, écrivons les équations

$$(20)\quad \begin{cases} \Delta_1(\lambda a_{11} + \mu b_{11}) + \ldots + \Delta_6(\lambda a_{16} + \mu b_{16}) = \gamma a_1 + \delta b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \Delta_1(\lambda a_{61} + \mu b_{61}) + \ldots + \Delta_6(\lambda a_{66} + \mu b_{66}) = \gamma a_6 + \delta b_6, \\ \Delta_1 a_1 \qquad\qquad + \ldots + \Delta_6 a_6 \qquad\qquad = 0, \\ \Delta_1 b_1 \qquad\qquad + \ldots + \Delta_6 b_6 \qquad\qquad = 0. \end{cases}$$

Ces équations, quelles que soient λ et μ, se réduisent à six distinctes au plus, car on sait que quand un déterminant symétrique gauche d'ordre pair est nul, il en est de même de tous ses mineurs du premier ordre.

Elles admettront donc toujours au moins deux systèmes de solutions distincts pour les inconnues $\Delta_1, \ldots, \Delta_6, \gamma, \delta$ et l'on voit immédiatement que les deux systèmes de valeurs de $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_6$ sont distincts. Soient pour $\mu = 0, \lambda = 1$

$$A_1, \quad A_2, \quad \ldots, \quad A_6$$

un de ces systèmes. Posons

$$A_1 b_{i1} + A_2 b_{i2} + \ldots + A_6 b_{i6} = R_i.$$

Si l'on avait les relations

$$(21)\qquad R_i = \omega a_i + \omega' b_i,$$

les équations (19) seraient satisfaites avec les valeurs A_i données aux Δ_i. Supposons donc qu'il n'en soit pas ainsi.

Soient alors, pour un second système de valeurs de λ et μ, λ' et μ',

$$\Delta'_i = \rho C_i + \rho' D_i,$$

les valeurs des Δ satisfaisant aux équations (20). Soient enfin, pour un troisième système de valeurs de λ et μ, λ'' et μ''

$$\Delta''_i = \sigma E_i + \sigma' F_i,$$

les valeurs des Δ satisfaisant aux équations (20); ρ, ρ', σ, σ' sont quelconques.

Prenons les équations (20) où l'on a $\mu = 0$, $\lambda = 1$ et $\Delta_i = A_i$; multiplions-les par $\Delta'_1, \ldots, \Delta'_6$ et ajoutons il viendra

$$\Sigma a_{ij} \Delta'_i A_j = 0.$$

Prenons les équations (20) où l'on a $\lambda = \lambda'$, $\mu = \mu'$, $\Delta_i = \Delta'_i$; multiplions-les par $A_1, \ldots, A_6$ et ajoutons; il vient

$$\lambda' \Sigma a_{ij} A_i \Delta'_j + \mu' \Sigma b_{ij} A_i \Delta'_j = 0.$$

On aura donc

$$\Sigma b_{ij} A_i \Delta'_j = 0,$$

c'est-à-dire

$$\Sigma R_i (\rho C_i + \rho' D_i) = 0,$$

c'est-à-dire séparément

$$R_1 C_1 + \ldots + R_6 C_6 = 0,$$

$$R_1 D_1 + \ldots + R_6 D_6 = 0;$$

on aura de même

$$R_1 E_1 + \ldots + R_6 E_6 = 0,$$

$$R_1 F_1 + \ldots + R_6 F_6 = 0.$$

Si donc on considère les équations

$$(22) \qquad \begin{cases} a_1 X_1 + \ldots + a_6 X_6 = 0, \\ b_1 X_1 + \ldots + b_6 X_6 = 0, \\ R_1 X_1 + \ldots + R_6 X_6 = 0, \end{cases}$$

elles sont satisfaites pour les valeurs

$$(23) \qquad \begin{cases} C_1, C_2, \ldots, C_6, \\ D_1, D_2, \ldots, D_6, \\ E_1, E_2, \ldots, E_6, \\ F_1, F_2, \ldots, F_6, \end{cases}$$

données aux quantités $X_1, \ldots, X_6$. Mais les équations (22) sont distinctes, puisque les équations (21) n'ont pas lieu. Donc les quatre systèmes de valeurs (23) rentrent dans trois d'entre eux. On peut donc déterminer des quantités ν, ν', ν'', ν''' telles que l'on ait

$$\nu C_i + \nu' D_i = \nu'' E_i + \nu''' F_i.$$

Le système de valeurs des Δ_i

$$\Delta_i = \nu C_i + \nu' D_i = \nu'' E_i + \nu''' F_i,$$

satisfait donc aux équations (19), (4) et (5), puisqu'il satisfait aux équations (20) pour deux systèmes de valeurs différentes de λ et μ.

Donc, on peut toujours satisfaire aux équations (19), (4) et (5), quand l'équation (11) est une identité.

4. Je vais maintenant commencer l'examen des cas particuliers du système (1), en passant rapidement sur les premiers cas, dont l'étude résulte immédiatement de cas déjà traités dans un précédent Mémoire (*Revue bourguignonne de l'enseignement supérieur*, t. V, n° 1).

Le premier cas est celui où l'on peut déterminer des quantités λ, μ, λ', μ', F_1, F_2 satisfaisant aux équations

$$a = \lambda \frac{dF_1}{dx} + \mu \frac{dF_2}{dx},$$

$$b = \lambda' \frac{dF_1}{dx} + \mu' \frac{dF_2}{dx}.$$

La condition pour qu'il en soit ainsi est que le système d'équations obtenues en prenant dans le Tableau suivant trois colonnes quelconques, forme un système complet à deux fonctions distinctes

$$(24) \qquad \begin{vmatrix} \frac{dF}{dx_1} & \frac{dF}{dx_2} & \frac{dF}{dx_3} & \frac{dF}{dx_4} & \frac{dF}{dx_5} & \frac{dF}{dx_6} \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \end{vmatrix}.$$

Les conditions développées sont que toutes les quantités

$$L_{ijkl}, \quad M_{ijkl}$$

soient nulles; i, j, k, l étant quatre des nombres $1, 2, \ldots, 6$.

Le système (1) est alors réductible à la forme

$$(\mathrm{I}) \qquad dy_1 = 0, \qquad dy_2 = 0.$$

Le second cas est celui où l'on peut déterminer des fonctions λ_1, μ_1, F_1 satisfaisant aux équations

$$\lambda_1 a + \mu_1 b = \frac{dF_1}{dx}.$$

Les conditions pour qu'il en soit ainsi sont que le système (24) forme un système complet à une solution. Il faut d'abord que tous les rapports

$$\frac{L_{ijkl}}{M_{ijkl}}$$

soient égaux. Désignant par $\frac{L}{M}$ leur valeur commune, posons

$$c = aM + bL,$$

il faudra de plus que les quantités

$$c_{ijk}$$

soient toutes nulles, i, j, k étant trois des nombres $1, 2, \ldots, 6$. Remarquons maintenant que si l'on remplace l'une des équations (1), par exemple la première, par la combinaison linéaire

$$\Sigma(\lambda_1 a + \mu_1 b)dx = dF_1,$$

l'équation du second degré en $\frac{\mu}{\lambda}$ a ses deux racines nulles. L'équation du second degré en $\frac{\mu}{\lambda}$ correspondant au système (1) aura donc ses racines égales. La seconde équation (1) pourra toujours, du reste, être mise sous l'une des deux formes

$$dF_4 - F_5 dF_2 - F_6 dF_3 = 0, \qquad dF_3 - F_4 dF_2 = 0;$$

dans le second cas, l'équation en $\frac{\mu}{\lambda}$ sera une identité; dans le premier, elle ne sera que carré parfait. On aura les deux formes

$$\text{(II)} \qquad dy_1 = 0, \qquad dy_3 - y_4 dy_2 = 0,$$

$$\text{(VI)} \qquad dy_1 = 0, \qquad dy_4 - y_5 dy_2 - y_6 dy_3 = 0.$$

Le troisième cas est celui où l'on peut mettre le système différentiel (1) sous la forme

$$dF_2 - F_3 dF_1 = 0,$$
$$dF_3 - F_4 dF_1 = 0.$$

On peut alors déterminer des fonctions F_1, F_2, F_3, F_4, λ, μ, λ', μ' de façon à satisfaire aux équations

$$\frac{dF_2}{dx} - F_3 \frac{dF_1}{dx} = \lambda a + \mu b,$$
$$\frac{dF_3}{dx} - F_4 \frac{dF_1}{dx} = \lambda' a + \mu' b.$$

On sait, d'après ce qui a été fait dans le Mémoire rappelé plus haut, qu'il faut d'abord que tous les rapports

$$\frac{L_{ijkl}}{M_{ijkl}}$$

soient égaux. Désignant la valeur commune par $\frac{L}{M}$, il faut de plus que l'équation

$$\Sigma(aM + bL)dx = 0,$$

soit réductible à la forme

$$dF_2 - F_3 dF_1 = 0.$$

Je vais démontrer que, si les rapports précédents sont égaux, cela a toujours lieu.

Pour que l'équation

$$\Sigma(aM + bL)dx = 0$$

soit réductible à la forme

$$dF_2 - F_3 dF_1 = 0,$$

il faut et il suffit que le déterminant

$$(25)\quad \begin{vmatrix} (aM + bL)_{11} & \cdots & (aM + bL)_{16} & a_1 M + b_1 L \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ (aM + bL)_{61} & \cdots & (aM + bL)_{66} & a_6 M + b_6 L \\ -(a_1 M + b_1 L) & \cdots & -(a_6 M + b_6 L) & 0 \end{vmatrix}$$

ait tous ses mineurs du premier ordre symétriques par rapport à la diagonale principale nuls. Or, d'après ce qu'on a vu dans le Mémoire précédemment rappelé, il en est ainsi de tous, excepté de celui qu'on obtient en supprimant la dernière ligne et la dernière colonne.

Or, considérons des équations du premier degré ayant pour déterminant des inconnues le déterminant précédent. Soient $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_6, \alpha$ les inconnues. On voit que, si l'on fait par exemple $\Delta_1 = 0$, on peut satisfaire au système par des valeurs convenables de $\Delta_2, \ldots, \Delta_6, \alpha$ car les six dernières se réduisent à quatre au plus. De même, on aura un autre système de solutions pour lequel Δ_2 est nul, etc., enfin un système pour lequel Δ_6 est nul. Or, tous ces systèmes ne peuvent se réduire au même, car on aurait alors

$$a_1 M + b_1 L = 0, \qquad a_6 M + b_6 L = 0;$$

les quantités $a_1, \ldots, a_6$ seraient proportionnelles à $b_1, \ldots, b_6$. On a donc deux systèmes de solutions distincts satisfaisant aux équations considérées et, par suite, tous les mineurs du premier ordre sont nuls.

Donc, dans le cas où tous les rapports

$$\frac{L_{ijkl}}{M_{ijkl}}$$

sont égaux, le système (1) est réductible à la forme

$$\text{(III)} \qquad dy_2 - y_3 dy_1 = 0, \qquad dy_3 - y_4 dy_1 = 0.$$

On peut remarquer que dans ce cas, l'équation (11) étant une identité, la valeur $\frac{\lambda}{\mu} = \frac{M}{L}$ y satisfait. Or, tous les mineurs du second ordre, obtenus en supprimant deux lignes ou deux colonnes se coupant sur la diagonale principale parmi les six premières ayant pour valeur

$$(\lambda L_{ijkl} - \mu M_{ijkl})^2,$$

sont nuls pour la valeur $\frac{\lambda}{\mu} = \frac{M}{L}$.

D'après les formules connues qui donnent le développement d'un déterminant symétrique gauche d'ordre pair, on en conclura que tous les mineurs obtenus en supprimant deux lignes et deux colonnes symétriques par rapport à la diagonale principale, une des lignes étant la septième ou la huitième, sont aussi nuls. Enfin, d'après le raisonnement fait tout à l'heure sur le déterminant (25), il faudra que le mineur obtenu en supprimant les deux dernières lignes et les deux dernières colonnes soit aussi nul et, par suite, tous les mineurs du second ordre de (11) seront nuls pour la valeur $\frac{M}{L}$ donnée à $\frac{\lambda}{\mu}$.

Le quatrième cas est celui où l'on peut satisfaire aux équations

$$a = \lambda_1 \frac{dF_1}{dx} + \lambda_2 \frac{dF_2}{dx} + \lambda_3 \frac{dF_3}{dx},$$

$$b = \mu_1 \frac{dF_1}{dx} + \mu_2 \frac{dF_2}{dx} + \mu_3 \frac{dF_3}{dx},$$

F_1, F_2, F_3, λ_1, λ_2, λ_3, μ_1, μ_2, μ_3 étant des fonctions convenablement choisies.

Les conditions pour qu'il en soit ainsi sont, d'après le Mémoire précédemment rappelé, que les équations

$$
(26)\quad \left\{
\begin{aligned}
&L_{2345}\frac{dF}{dx_1}+L_{3451}\frac{dF}{dx_2}+L_{4512}\frac{dF}{dx_3}+L_{5123}\frac{dF}{dx_4}+L_{1234}\frac{dF}{dx_5}=0,\\
&L_{3456}\frac{dF}{dx_2}+L_{4562}\frac{dF}{dx_3}+L_{5623}\frac{dF}{dx_4}+L_{6234}\frac{dF}{dx_5}+L_{2345}\frac{dF}{dx_6}=0,\\
&L_{4561}\frac{dF}{dx_3}+L_{5613}\frac{dF}{dx_4}+L_{6134}\frac{dF}{dx_5}+L_{1345}\frac{dF}{dx_6}+L_{3456}\frac{dF}{dx_1}=0,\\
&L_{5612}\frac{dF}{dx_4}+L_{6124}\frac{dF}{dx_5}+L_{1245}\frac{dF}{dx_6}+L_{2456}\frac{dF}{dx_1}+L_{4561}\frac{dF}{dx_2}=0,\\
&L_{6123}\frac{dF}{dx_5}+L_{1235}\frac{dF}{dx_6}+L_{2356}\frac{dF}{dx_1}+L_{3561}\frac{dF}{dx_2}+L_{5612}\frac{dF}{dx_3}=0,\\
&L_{1234}\frac{dF}{dx_6}+L_{2346}\frac{dF}{dx_1}+L_{3461}\frac{dF}{dx_2}+L_{4612}\frac{dF}{dx_3}+L_{6123}\frac{dF}{dx_4}=0,
\end{aligned}
\right.
$$

et celles qu'on obtient en y changeant L en M, que nous désignerons par (26 *bis*), forment un système complet à trois fonctions distinctes.

Si nous considérons les équations (10), comme les rapports

$$\frac{L_{ijkl}}{M_{ijkl}}$$

ne sont pas égaux, on a pour les quantités $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_6$ les systèmes suivants de valeurs se réduisant à deux distincts

$$
\begin{aligned}
&\lambda L_{2345}-\mu M_{2345},\quad \lambda L_{3451}-\mu M_{3451},\quad \lambda L_{4512}-\mu M_{4512},\\
&\qquad \lambda L_{5123}-\mu M_{5123},\quad \lambda L_{1234}-\mu M_{1234},\quad 0,
\end{aligned}
$$

$$
(27)\quad \left\{
\begin{aligned}
&0,\quad \lambda L_{3456}-\mu M_{3456},\quad \lambda L_{4562}-\mu M_{4562},\quad \lambda L_{5623}-\mu M_{5623},\\
&\qquad \lambda L_{6234}-\mu M_{6234},\quad \lambda L_{2345}-\mu M_{2345},\\
&\lambda L_{3456}-\mu M_{3456},\quad 0,\quad \lambda L_{4561}-\mu M_{4561},\quad \lambda L_{5613}-\mu M_{5613},\\
&\qquad \lambda L_{6134}-\mu M_{6134},\quad \lambda L_{1345}-\mu M_{1345},\\
&\lambda L_{2456}-\mu M_{2456},\quad \lambda L_{4561}-\mu M_{4561},\quad 0,\quad \lambda L_{5612}-\mu M_{5612},\\
&\qquad \lambda L_{6124}-\mu M_{6124},\quad \lambda L_{1245}-\mu M_{1245},\\
&\lambda L_{2356}-\mu M_{2356},\quad \lambda L_{3561}-\mu M_{3561},\quad \lambda L_{5612}-\mu M_{5612},\quad 0,\\
&\qquad \lambda L_{6123}-\mu M_{6123},\quad \lambda L_{1235}-\mu M_{1235},\\
&\lambda L_{2346}-\mu M_{2346},\quad \lambda L_{3461}-\mu M_{3461},\quad \lambda L_{4612}-\mu M_{4612},\\
&\qquad \lambda L_{6123}-\mu M_{6123},\quad 0,\quad \lambda L_{1234}-\mu M_{1234}.
\end{aligned}
\right.
$$

Je désignerai deux de ces systèmes par

$$\lambda L_1 - \mu M_1,\quad \lambda L_2 - \mu M_2,\quad \lambda L_3 - \mu M_3,\quad \lambda L_4 - \mu M_4,$$
$$\lambda L_5 - \mu M_5,\quad \lambda L_6 - \mu M_6,$$
$$\lambda l_1 - \mu m_1,\quad \lambda l_2 - \mu m_2,\quad \lambda l_3 - \mu m_3,\quad \lambda l_4 - \mu m_4,$$
$$\lambda l_5 - \mu m_5,\quad \lambda l_6 - \mu m_6.$$

Les équations (26) et (26 *bis*) devant former un système complet à trois fonctions distinctes doivent d'abord se réduire algébriquement à trois. Ces conditions sont toujours remplies quand l'équation (11) est une identité. Il faudra, de plus, que ces trois équations forment un système complet. Dans ce cas, le système est réductible à la forme

$$\text{(IV)}\qquad dy_2 - y_3\,dy_1 = 0,\qquad dy_4 - y_5\,dy_1 = 0.$$

Je placerai maintenant ici le cas où l'équation (11) est une identité. Le système est alors réductible à la forme

$$\text{(V)}\qquad dy_2 - y_3\,dy_1 = 0,\qquad dy_3 - \mathrm{H}\,dy_1 - \mathrm{K}\,dy_4 = 0,$$

H et K étant deux fonctions de $y_1, \ldots, y_5$ d'après ce qui a été fait dans le Mémoire précédemment rappelé.

5. Je vais maintenant m'occuper du cas particulier où l'on peut trouver des fonctions F_1, F_2, F_3, λ, μ satisfaisant aux équations

$$(28)\qquad a\lambda + b\mu = \frac{dF_2}{dx} - F_3\frac{dF_1}{dx};$$

une des équations du système (1) peut, dans ce cas, être remplacée par

$$dF_2 - F_3\,dF_1 = 0.$$

Occupons-nous du système (28). Soit

$$\Delta_1\frac{dF}{dx_1} + \Delta_2\frac{dF}{dx_2} + \Delta_3\frac{dF}{dx_3} + \Delta_4\frac{dF}{dx_4} + \Delta_5\frac{dF}{dx_5} + \Delta_6\frac{dF}{dx_6} = 0$$

une équation du premier ordre à laquelle satisfont les fonctions F_1, F_2, F_3, on aura

$$\lambda \Sigma a\Delta + \mu \Sigma b\Delta = 0.$$

Nous admettrons en plus que l'on a séparément

$$(29) \qquad \Sigma a\Delta = 0, \qquad \Sigma b\Delta = 0;$$

on voit qu'il reste encore deux coefficients Δ arbitraires. De même que du système (2) on a déduit les équations (6), on tirera du système (28) les équations

$$(30) \qquad \Delta_1(\lambda a + \mu b)_{i1} + \ldots + \Delta_6(\lambda a + \mu b)_{i6} = 0,$$

ou, en développant et tenant compte de (29),

$$a_i\Delta(\lambda) + b_i\Delta(\mu) + \Delta_1(\lambda a_{i1} + \mu b_{i1}) + \ldots + \Delta_6(\lambda a_{i6} + \mu b_{i6}) = 0,$$

on retrouve les équations (10). L'équation (11) devra donc être satisfaite et fournira deux valeurs pour le rapport $\frac{\lambda}{\mu}\cdot$ On prendra successivement ces valeurs, et le système ayant été mis sous la forme (16)

$$\begin{aligned}
A_1 dy_1 + A_2 dy_2 + A_3 dy_3 + A_4 dy_4 + A_5 dy_5 = 0,\\
B_1 dy_1 + B_2 dy_2 + B_3 dy_3 + B_4 dy_4 + B_5 dy_5 = 0,
\end{aligned}$$

où les A ne contiennent pas y_6, il sera nécessaire et suffisant que la première des équations se mette sous la forme

$$dF_2 - F_3 dF_1 = 0.$$

On peut aisément obtenir les conditions pour qu'il en soit ainsi. Nous avons, en effet, déterminé les deux valeurs possibles du rapport $\frac{\lambda}{\mu}\cdot$ Il sera donc nécessaire et suffisant que l'équation

$$\Sigma(a\lambda + b\mu)dx = 0$$

se réduise à la forme

$$dF_2 - F_3 dF_1 = 0.$$

Pour cela, il suffit que tous les mineurs du premier ordre, symétriques par rapport à la diagonale principale du déterminant

$$(31)\quad \begin{vmatrix} 0 & (a\lambda+b\mu)_{12} & \dots & (a\lambda+b\mu)_{16} & a_1\lambda+b_1\mu \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a\lambda+b\mu)_{61} & (a\lambda+b\mu)_{62} & \dots & 0 & a_6\lambda+b_6\mu \\ -(a_1\lambda+b_1\mu) & -(a_2\lambda+b_2\mu) & \dots & -(a_6\lambda+b_6\mu) & 0 \end{vmatrix},$$

soient nuls. Nous avons vu qu'il suffit d'écrire ceux qui s'obtiennent en supprimant une ligne et une colonne se coupant sur la diagonale principale parmi les six premiers. Les conditions sont suffisantes et même renferment l'équation (11).

Nous avons vu que les équations (10) fournissent pour les Δ deux systèmes distincts explicités dans les formules (27) que nous avons représentés par

$$\begin{gathered} \lambda L_1 - \mu M_1, \quad \dots, \quad \lambda L_6 - \mu M_6 \\ \lambda l_1 - \mu m_1, \quad \dots, \quad \lambda l_6 - \mu m_6; \end{gathered}$$

par conséquent les équations

$$(32)\quad \begin{cases} \Sigma(\lambda L - \mu M)\dfrac{dF}{dx} = 0 \\ \Sigma(\lambda l - \mu m)\dfrac{dF}{dx} = 0 \end{cases}$$

devront avoir trois solutions communes distinctes. Je dis qu'inversement, quand ces équations ont trois solutions communes distinctes, on peut former une combinaison des équations (1) se réduisant à la forme

$$dF_2 - F_3 dF_1 = 0.$$

Pour le faire voir, considérons les équations (20) :

$$\begin{aligned}
&\Delta_1(\lambda a_{11}+\mu b_{11})+\ldots+\Delta_6(\lambda a_{16}+\mu b_{16})=\gamma a_1+\delta b_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\Delta_1(\lambda a_{61}+\mu b_{61})+\ldots+\Delta_6(\lambda a_{66}+\mu b_{66})=\gamma a_6+\delta b_6,\\
&\Delta_1\ a_1\qquad\qquad +\ldots+\Delta_6\ a_6\qquad\qquad =0,\\
&\Delta_1\ b_1\qquad\qquad +\ldots+\Delta_6\ b_6\qquad\qquad =0.
\end{aligned}$$

Supposons que nous substituions aux variables x d'autres variables x' et supposons que les équations

$$\Sigma a\,dx=0,\qquad \Sigma b\,dx=0$$

deviennent

$$\Sigma a'\,dx'=0,\qquad \Sigma b'\,dx'=0.$$

Les équations (20) ont des solutions en $\Delta_1,\ldots,\Delta_6,\gamma,\delta$ quand l'équation (11) est satisfaite, et soit $F(x_1,\ldots,x_6)$ une fonction satisfaisant à l'équation

$$\Delta_1\frac{dF}{dx_1}+\ldots+\Delta_6\frac{dF}{dx_6}=0;$$

par le changement de variables, F deviendra une fonction

$$\Phi(x'_1,x'_2,\ldots,x'_6).$$

Elle satisfera alors à l'équation

$$\Delta'_1\frac{d\Phi}{dx'_1}+\ldots+\Delta'_6\frac{d\Phi}{dx'_6}=0,$$

où les $\Delta'_1,\ldots,\Delta'_6$ satisfont aux équations

$$\begin{aligned}
&\Delta'_1(\lambda a'_{11}+\mu b'_{11})+\ldots+\Delta'_6(\lambda a'_{16}+\mu b'_{16})=\gamma a'_1+\delta b'_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\Delta'_1(\lambda a'_{61}+\mu b'_{61})+\ldots+\Delta'_6(\lambda a'_{66}+\mu b'_{66})=\gamma a'_6+\delta b'_6,\\
&\Delta'_1\ a'_1\qquad\qquad +\ldots+\Delta'_6\ a'_6\qquad\qquad =0,\\
&\Delta'_1\ b'_1\qquad\qquad +\ldots+\Delta'_6\ b'_6\qquad\qquad =0,
\end{aligned}$$

γ et δ ayant les mêmes valeurs que précédemment.

Ce théorème résulte immédiatement de la propriété d'invariance de la quantité $\Sigma a_{ik} dx_i \delta x_k$ que M. Darboux a prise pour point de départ de la méthode si simple qu'il a suivie pour obtenir les formes réduites d'une équation de Pfaff (voir *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. VI). Si donc les équations (32) ont trois solutions communes distinctes, il en sera de même des équations correspondantes après un changement quelconque de variables. De plus, il est aisé de voir que, si dans le système (1) on change a en αa, b en βb, les quantités L sont multipliées par $\alpha^2\beta$, les quantités M par $\alpha\beta^2$, la valeur de $\frac{\lambda}{\mu}$ par $\frac{\beta}{\alpha}$; donc $\lambda L - \mu M$ est multipliée par $\alpha^2\beta^2$; donc le système (32) ne change pas. Si, enfin, on change a en $a+b$, M ne change pas; L se change en $L - M$, $\frac{\mu}{\lambda}$ en $\frac{\mu}{\lambda} - 1$; donc $\lambda L - \mu M$ devient

$$\lambda(L - M) - M(\mu - \lambda) = \lambda L - \mu M,$$

c'est-à-dire ne change pas.

Si donc on fait un changement quelconque de variables et si l'on remplace les équations (1) par un système équivalent, les équations (32) se changent en un système équivalent.

Cela posé, supposons qu'elles aient trois racines communes et ramenons le système à la forme (16), et supposons que la première des équations (16) soit réductible à la forme

$$dz_3 - z_4 dz_1 - z_5 dz_2 = 0,$$

la seconde étant devenue

$$c_1 dz_1 + c_2 dz_2 + c_4 dz_4 + c_5 dz_5 = 0,$$

les équations (20) sont

$$\begin{aligned}
-\Delta_4 &= -\gamma z_4 + \delta c_1,\\
-\Delta_5 &= -\gamma z_5 + \delta c_2,\\
0 &= \gamma,\\
\Delta_1 &= \delta c_4,\\
\Delta_2 &= \delta c_5,\\
-z_4\Delta_1 - z_5\Delta_2 + \Delta_3 &= 0,\\
c_1\Delta_1 + c_2\Delta_2 + c_4\Delta_4 + c_5\Delta_5 &= 0.
\end{aligned}$$

On en tire

$$\gamma = 0, \qquad \Delta_1 = \delta c_4, \qquad \Delta_2 = \delta c_5, \qquad \Delta_4 = -\delta c_1,$$
$$\Delta_5 = -\delta c_2, \qquad \Delta_3 = \delta(c_4 z_4 + c_5 z_5).$$

On a donc les deux systèmes distincts

$$\Delta_1 = c_4, \qquad \Delta_2 = c_5, \qquad \Delta_3 = c_4 z_4 + c_5 z_5,$$
$$\Delta_4 = -c_1, \qquad \Delta_5 = -c_2, \qquad \Delta_6 = 0;$$
$$\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \Delta_4 = \Delta_5 = 0, \qquad \Delta_6 = 1,$$

et les équations (32) deviennent

$$c_4 \frac{dF}{dz_1} + c_5 \frac{dF}{dz_2} + (c_4 z_4 + c_5 z_5)\frac{dF}{dz_3} - c_1 \frac{dF}{dz_4} - c_2 \frac{dF}{dz_5} = 0, \qquad \frac{dF}{dz_6} = 0.$$

Supposons qu'elles aient trois solutions communes. On aura, les fonctions F_1, F_2, F_3 ne contenant pas z_6, les équations

$$c_4\left(\frac{dF_1}{dz_1} + z_4 \frac{dF_1}{dz_3}\right) + c_5\left(\frac{dF_1}{dz_2} + z_5 \frac{dF_1}{dz_3}\right) - c_1 \frac{dF_1}{dz_4} - c_2 \frac{dF_1}{dz_5} = 0,$$
$$c_4\left(\frac{dF_2}{dz_1} + z_4 \frac{dF_2}{dz_3}\right) + c_5\left(\frac{dF_2}{dz_2} + z_5 \frac{dF_2}{dz_3}\right) - c_1 \frac{dF_2}{dz_4} - c_2 \frac{dF_2}{dz_5} = 0,$$
$$c_4\left(\frac{dF_3}{dz_1} + z_4 \frac{dF_3}{dz_3}\right) + c_5\left(\frac{dF_3}{dz_2} + z_5 \frac{dF_3}{dz_3}\right) - c_1 \frac{dF_3}{dz_4} - c_2 \frac{dF_3}{dz_5} = 0.$$

On voit que l'on en tirerait, pour les valeurs des rapports de trois des quantités c_1, c_2, c_4, c_5, des valeurs indépendantes de z_6, auquel cas la proposition que l'on a en vue est démontrée, à moins que tous les déterminants du Tableau suivant soient nuls :

$$\left|\begin{array}{cccc}
-z_4 & \dfrac{dF_1}{dz_1} & \dfrac{dF_2}{dz_1} & \dfrac{dF_3}{dz_1} \\[2ex]
-z_5 & \dfrac{dF_1}{dz_2} & \dfrac{dF_2}{dz_2} & \dfrac{dF_3}{dz_2} \\[2ex]
1 & \dfrac{dF_1}{dz_3} & \dfrac{dF_2}{dz_3} & \dfrac{dF_3}{dz_3} \\[2ex]
0 & \dfrac{dF_1}{dz_4} & \dfrac{dF_2}{dz_4} & \dfrac{dF_3}{dz_4} \\[2ex]
0 & \dfrac{dF_1}{dz_5} & \dfrac{dF_2}{dz_5} & \dfrac{dF_3}{dz_5}
\end{array}\right|.$$

Dans ce cas, on peut, par un changement de variables effectué sur les variables z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, mettre l'équation

$$dz_3 - z_4 dz_1 - z_5 dz_2 = 0$$

sous la forme

$$dF_3 - F_4 dF_1 - F_5 dF_2 = 0$$

et l'équation

$$c_1 dz_1 + c_2 dz_2 + c_4 dz_4 + c_5 dz_5 = 0$$

devient

$$e_1 dF_1 + e_2 dF_2 + e_4 dF_4 + e_5 dF_5 = 0.$$

Le système (32) devient

$$e_4 \frac{dF}{dF_1} + e_5 \frac{dF}{dF_2} + (e_4 F_4 + e_5 F_5)\frac{dF}{dF_3} - e_1 \frac{dF}{dF_4} - e_2 \frac{dF}{dF_5} = 0,$$
$$\frac{dF}{dz_6} = 0.$$

Il admet comme solutions

$$F = F_1, \qquad F = F_2, \qquad F = F_3.$$

On aura donc

$$e_4 = 0, \qquad e_5 = 0,$$

et la seconde des équations du système devient

$$e_1 dF_1 + e_2 dF_2 = 0,$$

ce qui démontre la proposition que l'on avait en vue. Ainsi, quand les équations (32) ont trois solutions communes, il existe toujours une combinaison des équations du système (1) réductible à la forme

$$dF_2 - F_3 dF_1 = 0.$$

C'est le cas particulier (VIII). Le système est réductible à la forme

$$\text{(VIII)} \qquad dy_2 - y_3 dy_1 = 0, \qquad c_1 dy_1 + c_3 dy_3 + c_4 dy_4 + c_5 dy_5 = 0.$$

Mais il se peut que cette réduction soit possible pour les deux racines de l'équation en $\frac{\lambda}{\mu}$. Alors on a le cas particulier (VII)

$$(\text{VII}) \qquad dy_2 - y_3 dy_1 = 0, \qquad dy_5 - y_6 dy_4 = 0.$$

Enfin, il reste alors le cas général où le système est réductible à la forme (IX)

$$(\text{IX}) \qquad \begin{cases} dy_3 - y_4 dy_1 - y_5 dy_2 = 0, \\ c_1 dy_1 + c_2 dy_2 + c_4 dy_4 + c_5 dy_5 = 0. \end{cases}$$

6. Je vais maintenant m'occuper des solutions du système (1) dans ces différents cas.

Dans le cas (I) les formules

$$y_1 = c, \qquad y_2 = c',$$

c et c' désignant des constantes arbitraires, donnent la solution du système, quel que soit le nombre des variables indépendantes qui peut aller jusqu'à quatre.

Dans le cas (II) les formules

$$y_1 = c, \qquad y_2 = \alpha, \qquad y_3 = f(\alpha), \qquad y_4 = f'(\alpha)$$

donnent la solution du système, c étant une constante arbitraire, α une variable indépendante, $f(\alpha)$ une fonction arbitraire de cette variable, $f'(\alpha)$ sa dérivée première. Le nombre des variables arbitraires peut aller jusqu'à trois.

Dans le cas (III) les formules

$$y_1 = \alpha, \qquad y_2 = f(\alpha), \qquad y_3 = f'(\alpha), \qquad y_4 = f''(\alpha)$$

donnent la solution du système, α étant une variable arbitraire, $f(\alpha)$ une fonction arbitraire de cette variable, $f'(\alpha)$ sa dérivée première, $f''(\alpha)$ sa dérivée seconde. Le nombre des variables indépendantes peut encore être de trois.

Dans le cas (IV) les formules

$$y_1 = \alpha, \qquad y_2 = f(\alpha), \qquad y_3 = f'(\alpha), \qquad y_4 = \varphi(\alpha), \qquad y_5 = \varphi'(\alpha)$$

donnent la solution du problème, α étant une variable arbitraire, $f(\alpha)$ et $\varphi(\alpha)$ deux fonctions arbitraires de cette variable, $f'(\alpha)$ et $\varphi'(\alpha)$ leurs dérivées dans le cas d'une ou deux variables indépendantes. Dans le cas de trois, les formules

$$y_1 = c, \qquad y_2 = c', \qquad y_4 = c''$$

donnent la solution de la question, c, c', c'' étant trois constantes arbitraires.

Dans le cas (V) les formules

$$y_1 = \alpha, \qquad y_2 = f(\alpha), \qquad y_3 = f'(\alpha),$$
$$y_4 = \varphi(\alpha), \qquad f''(\alpha) - \mathrm{A} - \mathrm{B}\varphi'(\alpha) = 0$$

donnent la solution du problème, α étant une variable arbitraire, $f(\alpha)$ et $\varphi(\alpha)$ deux fonctions arbitraires de cette variable, $f'(\alpha)$, $f''(\alpha)$, $\varphi'(\alpha)$ les dérivées première et seconde de $f(\alpha)$ et la dérivée première de $\varphi(\alpha)$, le nombre des variables indépendantes étant d'une ou deux. Il ne peut plus y avoir que des solutions singulières dans le cas de trois variables indépendantes.

Dans le cas (VI) les formules

$$y_1 = c, \qquad y_2 = \alpha, \qquad y_3 = f(\alpha),$$
$$y_4 = \varphi(\alpha), \qquad \varphi'(\alpha) - y_5 - y_6 f'(\alpha) = 0$$

donnent la solution du système dans le cas d'une variable indépendante, α étant une variable arbitraire, $f(\alpha)$ et $\varphi(\alpha)$ deux fonctions arbitraires de cette variable, $f'(\alpha)$, $\varphi'(\alpha)$ leurs dérivées, c une constante arbitraire.

Dans le cas de deux variables indépendantes, les formules

$$y_1 = c, \qquad y_2 = \alpha, \qquad y_3 = \beta, \qquad y_4 = f(\alpha, \beta),$$
$$y_5 = \frac{\partial f}{\partial \alpha}, \qquad y_6 = \frac{\partial f}{\partial \beta}$$

donnent la solution du système, $f(\alpha, \beta)$ étant une fonction arbitraire des deux variables indépendantes α et β, $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial f}{\partial \beta}$ ses dérivées partielles par rapport à α et à β.

Dans le cas (VII) les formules

$$y_1 = \alpha, \quad y_2 = f(\alpha), \quad y_3 = f'(\alpha), \quad y_4 = \varphi(\alpha),$$
$$y_5 = \psi(\alpha), \quad \psi'(\alpha) - y_6 \varphi'(\alpha) = 0$$

donnent la solution du système dans le cas d'une variable indépendante, α étant une variable arbitraire, $f(\alpha)$, $\varphi(\alpha)$, $\psi(\alpha)$ trois fonctions arbitraires de cette variable, $f'(\alpha)$, $\varphi'(\alpha)$, $\psi'(\alpha)$ leurs dérivées.

Dans le cas de deux variables indépendantes, les formules

$$y_1 = \alpha, \quad y_2 = f(\alpha), \quad y_3 = f'(\alpha), \quad y_4 = \beta,$$
$$y_5 = \varphi(\beta), \quad y_6 = \varphi'(\beta)$$

donnent la solution du problème, α et β étant les deux variables indépendantes, $f(\alpha)$ et $\varphi(\beta)$ deux fonctions arbitraires, la première de α, la seconde de β, $f'(\alpha)$ et $\varphi'(\beta)$ leurs dérivées.

Dans le cas (VIII) les formules

$$y_1 = \alpha, \quad y_2 = f(\alpha), \quad y_3 = f'(\alpha), \quad y_4 = \varphi(\alpha), \quad y_5 = \psi(\alpha),$$
$$c_1 + c_3 f''(\alpha) + c_4 \varphi'(\alpha) + c_5 \psi'(\alpha) = 0$$

donnent la solution du système dans le cas d'une variable indépendante, $f(\alpha)$, $\varphi(\alpha)$, $\psi(\alpha)$ étant trois fonctions arbitraires de cette variable, $f'(\alpha)$, $f''(\alpha)$, $\varphi'(\alpha)$, $\psi'(\alpha)$ les dérivées première et seconde de $f(\alpha)$ et les dérivées premières de $\varphi(\alpha)$ et $\psi(\alpha)$.

Dans le cas de deux variables indépendantes on ne peut plus comprendre dans un même système de formules toutes les solutions; mais reprenons les formules

$$y_1 = \alpha, \quad y_2 = f(\alpha), \quad y_3 = f'(\alpha),$$
$$c_1\, d\alpha + c_3 f''(\alpha)\, d\alpha + c_4\, dy_4 + c_5\, dy_5 = 0;$$

si l'on précise la fonction $f(\alpha)$, on est ramené à une équation de la forme

$$A_1 dz_1 + A_2 dz_2 + A_3 dz_3 + A_4 dz_4 = 0,$$

les variables z_1, z_2, z_3, z_4 étant α, y_4, y_5, y_6; le terme A_3 manquerait. On sait que l'on peut comprendre toutes les solutions de cette équation dans des formules de la forme

$$F_1(\alpha, y_4, y_5, y_6) = \beta, \qquad F_2 = \varphi(\beta), \qquad F_3 = \varphi'(\beta).$$

On en tirerait trois des quantités α, y_4, y_5, y_6 en fonction de β et de l'une d'entre elles, $\varphi(\beta)$ étant une fonction arbitraire de β, $\varphi'(\beta)$ sa dérivée.

Dans le cas général (IX) les formules

$$y_1 = \alpha, \qquad y_2 = f(\alpha), \qquad y_3 = \varphi(\alpha), \qquad y_5 = \psi(\alpha),$$
$$y_4 = \varphi'(\alpha) - \psi(\alpha) f'(\alpha),$$
$$c_1 + c_2 f'(\alpha) + c_4 [\varphi''(\alpha) - \psi'(\alpha) f'(\alpha) - \psi(\alpha) f''(\alpha)] + c_5 \psi'(\alpha) = 0$$

donnent la solution de la question dans le cas d'une variable indépendante, α désignant une variable arbitraire, $f(\alpha)$, $\varphi(\alpha)$, $\psi(\alpha)$ trois fonctions arbitraires de cette variable, $f'(\alpha), f''(\alpha)$, $\varphi'(\alpha)$, $\varphi''(\alpha)$, $\psi'(\alpha)$ étant les dérivées première et seconde de $f(\alpha)$, $\varphi(\alpha)$ et la dérivée première de $\psi(\alpha)$.

Presque toutes les propositions précédentes sont immédiates. Il n'y a qu'à faire voir que seulement dans le cas (I) le système (1) a des solutions en prenant quatre variables indépendantes et seulement dans les cas (I), (II), (III), (IV), le système (1) a des solutions en prenant trois variables indépendantes.

Nous considérons pour cela qu'un système de solutions des équations (1) forme une intégrale singulière quand on ne peut prendre arbitrairement les valeurs initiales des six quantités $x_1, \ldots, x_6$ et nous écarterons ce cas.

Dès lors, un système de solutions des équations (1) à quatre variables indépendantes devra renfermer deux constantes arbitraires. Soient

$$F_1(x_1, \ldots, x_6) = c,$$
$$F_2(x_1, \ldots, x_6) = c'$$

les équations définissant ce système résolues par rapport aux constantes c, c'. Les équations

$$\sum \frac{dF_1}{dx}dx = 0, \qquad \sum \frac{dF_2}{dx}dx = 0$$

devront donc être satisfaites en même temps que (1), quelles que soient $x_1, \ldots, x_6$; donc elles rentreront dans (1) et l'on est bien dans le cas (I).

De même un système de solutions à trois variables indépendantes devra renfermer trois constantes arbitraires. Soient

$$\begin{aligned}
F_1(x_1, \ldots, x_6) &= c,\\
F_2(x_1, \ldots, x_6) &= c',\\
F_3(x_1, \ldots, x_6) &= c''
\end{aligned}$$

ces équations. Les équations

$$\sum \frac{dF_1}{dx}dx = 0, \qquad \sum \frac{dF_2}{dx}dx = 0, \qquad \sum \frac{dF_3}{dx}dx = 0$$

devront renfermer le système (1) et par suite on se trouve dans le cas (IV) renfermant comme cas particuliers (I), (II), (III).

7. Il nous reste maintenant à nous occuper de la recherche des solutions du système (1) dans le cas général, lorsque le nombre des variables indépendantes est de deux. C'est la question dont nous allons parler.

Reprenons les équations (2), (3); (4), (5) qui en sont la conséquence et cherchons à satisfaire en outre aux équations

$$(33)\qquad \left\{\begin{aligned}
\lambda_1 &= \alpha_1\frac{d\omega_1}{dF_1} + \alpha_2\frac{d\omega_2}{dF_1} + \alpha_3\frac{d\omega_3}{dF_1} + \alpha_4\frac{d\omega_4}{dF_1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\lambda_5 &= \alpha_1\frac{d\omega_1}{dF_5} + \alpha_2\frac{d\omega_2}{dF_5} + \alpha_3\frac{d\omega_3}{dF_5} + \alpha_4\frac{d\omega_4}{dF_5},
\end{aligned}\right.$$

$$(34)\qquad \left\{\begin{aligned}
\mu_1 &= \beta_1\frac{d\omega_1}{dF_1} + \beta_2\frac{d\omega_2}{dF_1} + \beta_3\frac{d\omega_3}{dF_1} + \beta_4\frac{d\omega_4}{dF_1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\mu_5 &= \beta_1\frac{d\omega_1}{dF_5} + \beta_2\frac{d\omega_2}{dF_5} + \beta_3\frac{d\omega_3}{dF_5} + \beta_4\frac{d\omega_4}{dF_5},
\end{aligned}\right.$$

$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ étant des fonctions de F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 seulement. On voit que, si l'on peut satisfaire à ces équations, les équations (2), et (3) deviennent

$$a = \alpha_1 \frac{d\omega_1}{dx} + \alpha_2 \frac{d\omega_2}{dx} + \alpha_3 \frac{d\omega_3}{dx} + \alpha_4 \frac{d\omega_4}{dx},$$

$$b = \beta_1 \frac{d\omega_1}{dx} + \beta_2 \frac{d\omega_2}{dx} + \beta_3 \frac{d\omega_3}{dx} + \beta_4 \frac{d\omega_4}{dx}$$

et le système différentiel (1) est mis sous la forme

$$\alpha_1 d\omega_1 + \alpha_2 d\omega_2 + \alpha_3 d\omega_3 + \alpha_4 d\omega_4 = 0,$$

$$\beta_1 d\omega_1 + \beta_2 d\omega_2 + \beta_3 d\omega_3 + \beta_4 d\omega_4 = 0.$$

Il est satisfait en posant

$$\omega_1 = C_1, \qquad \omega_2 = C_2, \qquad \omega_3 = C_3, \qquad \omega_4 = C_4,$$

C_1, C_2, C_3, C_4 étant des constantes. Les équations précédentes fournissent quatre des quantités x comme fonctions des deux autres et de quatre constantes arbitraires. On a un système d'intégrales des équations différentielles proposées dans le cas de deux variables indépendantes renfermant quatre constantes arbitraires. Je vais chercher à former de tels systèmes ([1]).

Pour que les équations (33) et (34) soient satisfaites, il faut en somme satisfaire à des équations de la forme

$$(35) \qquad \lambda_1 H_1 + \lambda_2 H_2 + \lambda_3 H_3 + \lambda_4 H_4 + \lambda_5 H_5 = 0,$$

$$(36) \qquad \mu_1 H_1 + \mu_2 H_2 + \mu_3 H_3 + \mu_4 H_4 + \mu_5 H_5 = 0,$$

H_1, H_2, H_3, H_4, H_5 étant proportionnelles à des fonctions de F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 seulement. Les fonctions $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ sont alors quatre solutions distinctes de l'équation

$$H_1 \frac{d\omega}{dF_1} + H_2 \frac{d\omega}{dF_2} + H_3 \frac{d\omega}{dF_3} + H_4 \frac{d\omega}{dF_4} + H_5 \frac{d\omega}{dF_5} = 0;$$

([1]) On peut consulter sur cette manière de transformer en général un système d'équations de Pfaff le savant Mémoire de Biermann : *Ueber n simultane differential Gleichungen der Form* $\Sigma X_\mu dx_\mu = 0$ (*Schlöm. Zeitschrift*, t. XXX, 1885, p. 234-244.

supposons, par exemple, $H_1 \neq 0$ et posons

$$\frac{H_2}{H_1} = X_2, \qquad \frac{H_3}{H_1} = X_3, \qquad \frac{H_4}{H_1} = X_4, \qquad \frac{H_5}{H_1} = X_5;$$

les équations (35) et (36) deviennent

$$(37) \qquad \lambda_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3 + \lambda_4 X_4 + \lambda_5 X_5 = 0,$$

$$(38) \qquad \mu_1 + \mu_2 X_2 + \mu_3 X_3 + \mu_4 X_4 + \mu_5 X_5 = 0.$$

On en tire

$$(39) \left\{ \begin{array}{l} \Delta(\lambda_1) + \Delta(\lambda_2)X_2 + \Delta(\lambda_3)X_3 + \Delta(\lambda_4)X_4 + \Delta(\lambda_5)X_5 = 0, \\ \Delta^2(\lambda_1) + \Delta^2(\lambda_2)X_2 + \Delta^2(\lambda_3)X_3 + \Delta^2(\lambda_4)X_4 + \Delta^2(\lambda_5)X_5 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{array} \right.$$

$$(40) \left\{ \begin{array}{l} \Delta(\mu_1) + \Delta(\mu_2)X_2 + \Delta(\mu_3)X_3 + \Delta(\mu_4)X_4 + \Delta(\mu_5)X_5 = 0, \\ \Delta^2(\mu_1) + \Delta^2(\mu_2)X_2 + \Delta^2(\mu_3)X_3 + \Delta^2(\mu_4)X_4 + \Delta^2(\mu_5)X_5 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array} \right.$$

Cela posé, adjoignons aux équations (2) et (3) les suivantes :

$$(41) \left\{ \begin{array}{l} \lambda\Delta(\lambda_1) + \mu\Delta(\mu_1) + \alpha\lambda_1 + \beta\mu_1 = 0, \\ \lambda\Delta(\lambda_2) + \mu\Delta(\mu_2) + \alpha\lambda_2 + \beta\mu_2 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \lambda\Delta(\lambda_5) + \mu\Delta(\mu_5) + \alpha\lambda_5 + \beta\mu_5 = 0. \end{array} \right.$$

Alors, si par exemple μ est différent de zéro, le système (40) rentre dans (37), (38) et (39). Déterminons alors X_2, X_3, X_4, X_5 par les équations (37), (38) et les deux premières de (39). De la première de (39) et de (37) on tire

$$(42) \qquad \lambda_2\Delta(X_2) + \lambda_3\Delta(X_3) + \lambda_4\Delta(X_4) + \lambda_5\Delta(X_5) = 0;$$

de (38) et de la première de (40) on tire

$$(43) \qquad \mu_2\Delta(X_2) + \mu_3\Delta(X_3) + \mu_4\Delta(X_4) + \mu_5\Delta(X_5) = 0;$$

des deux premières de (39) on tire

$$(44)\quad \Delta(\lambda_2)\Delta(X_2)+\Delta(\lambda_3)\Delta(X_3)+\Delta(\lambda_4)\Delta(X_4)+\Delta(\lambda_5)\Delta(X_5)=0,$$

et l'on voit que, si X_2, X_3, X_4, X_5 satisfaisaient à la troisième des équations (39), on aurait

$$(45)\quad \Delta^2(\lambda_2)\Delta(X_2)+\Delta^2(\lambda_3)\Delta(X_3)+\Delta^2(\lambda_4)\Delta(X_4)+\Delta^2(\lambda_5)\Delta(X_5)=0,$$

et les équations (42), (43), (44), (45) montreraient que l'on a

$$\Delta(X_2)=0,\qquad \Delta(X_3)=0,\qquad \Delta(X_4)=0,\qquad \Delta(X_5)=0,$$

si le déterminant

$$\begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 & \lambda_5 \\ \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 & \mu_5 \\ \Delta(\lambda_2) & \Delta(\lambda_3) & \Delta(\lambda_4) & \Delta(\lambda_5) \\ \Delta^2(\lambda_2) & \Delta^2(\lambda_3) & \Delta^2(\lambda_4) & \Delta^2(\lambda_5) \end{vmatrix}$$

est différent de zéro. Or, pour que la troisième des équations (39) rentre dans (37), (38) et les deux premières de (39), il faut et il suffit que l'on ait l'équation suivante

$$(46)\quad \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 & \lambda_5 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 & \mu_4 \\ \Delta(\lambda_1) & \Delta(\lambda_2) & \Delta(\lambda_3) & \Delta(\lambda_4) & \Delta(\lambda_5) \\ \Delta^2(\lambda_1) & \Delta^2(\lambda_2) & \Delta^2(\lambda_3) & \Delta^2(\lambda_4) & \Delta^2(\lambda_5) \\ \Delta^3(\lambda_1) & \Delta^3(\lambda_2) & \Delta^3(\lambda_3) & \Delta^3(\lambda_4) & \Delta^3(\lambda_5) \end{vmatrix} = 0.$$

On voit en somme que, si tous les déterminants obtenus en prenant quatre colonnes dans les quatre premières lignes du déterminant de l'équation (46) ne sont pas nuls, cette équation (46) sera la condition pour que l'on puisse déterminer des quantités H_1, H_2, H_3,

H_4, H_5 dont les rapports à l'une d'entre elles soient fonctions seulement de F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 satisfaisant aux équations (35) et (36).

Ces quantités sont alors déterminées par les équations

$$\lambda_1 H_1 + \lambda_2 H_2 + \lambda_3 H_3 + \lambda_4 H_4 + \lambda_5 H_5 = 0,$$

$$\mu_1 H_1 + \mu_2 H_2 + \mu_3 H_3 + \mu_4 H_4 + \mu_5 H_5 = 0,$$

$$(47)\quad \begin{cases} \Delta(\lambda_1)H_1 + \Delta(\lambda_2)H_2 + \Delta(\lambda_3)H_3 + \Delta(\lambda_4)H_4 + \Delta(\lambda_5)H_5 = 0, \\ \Delta^2(\lambda_1)H_1 + \Delta^2(\lambda_2)H_2 + \Delta^2(\lambda_3)H_3 + \Delta^2(\lambda_4)H_4 + \Delta^2(\lambda_5)H_5 = 0. \end{cases}$$

Nous avons en somme à résoudre le système des équations (2), (3) d'où résultent (4), (5), puis (41) et (46). On a comme inconnues

$$\begin{matrix} \lambda_1, & \lambda_2, & \lambda_3, & \lambda_4, & \lambda_5, \\ \mu_1, & \mu_2, & \mu_3, & \mu_4, & \mu_5, \\ F_1, & F_2, & F_3, & F_4, & F_5, \\ & \lambda, & \mu, & \alpha, & \beta; \end{matrix}$$

les quatre dernières inconnues se réduisant à trois, on a en tout dix-huit fonctions inconnues et pour les déterminer douze équations (2) et (3), cinq équations (41) et une équation (46).

Cherchons à résoudre ce système.

Multiplions la première des équations (41) par $\frac{dF_1}{dx_i}$, la seconde par $\frac{dF_2}{dx_i}$, ..., la cinquième par $\frac{dF_5}{dx_i}$ et ajoutons; il viendra, en vertu de (6) et (7),

$$(48)\qquad \Delta_1(\lambda a_{i1} + \mu b_{i1}) + \ldots + \Delta_6(\lambda a_{i6} + \mu b_{i6}) + \alpha a_i + \beta b_i = 0,$$

équation qui en contient six. Joignons-y les équations (4) et (5). On a le système

$$\begin{array}{l} \Delta_1(\lambda a_{11} + \mu b_{11}) + \ldots + \Delta_6(\lambda a_{16} + \mu b_{16}) + \alpha a_1 + \beta b_1 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Delta_1(\lambda a_{61} + \mu b_{61}) + \ldots + \Delta_6(\lambda a_{66} + \mu b_{66}) + \alpha a_6 + \beta b_6 = 0, \\ \qquad -a_1\Delta_1 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad -a_6\Delta_6 = 0, \\ \qquad -b_1\Delta_1 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad -b_6\Delta_6 = 0; \end{array}$$

on a huit équations homogènes à huit inconnues qui ne sont autres que les équations (20) où $-\gamma$ et $-\delta$ sont remplacés par α et β.

On aura donc l'équation (11) qui donnera deux valeurs pour le rapport $\frac{\lambda}{\mu}$. Les équations se réduisent alors à six distinctes et l'on a les formules (27) pour deux systèmes de valeurs de $\Delta_1, \ldots, \Delta_6$.

Pour la première racine en $\frac{\lambda}{\mu}$ on aura le système

$$A_1 + \omega B_1, \qquad A_2 + \omega B_2, \qquad \ldots, \qquad A_6 + \omega B_6.$$

ω étant arbitraire, et pour la seconde racine le système

$$C_1 + \omega' D_1, \qquad C_2 + \omega' D_2, \qquad \ldots, \qquad C_6 + \omega' D_6,$$

ω' étant arbitraire. Remarquons que l'on a les identités

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{ll} a_1 A_1 + a_2 A_2 + \ldots + a_6 A_6 = 0, & a_1 C_1 + a_2 C_2 + \ldots + a_6 C_6 = 0, \\ b_1 A_1 + b_2 A_2 + \ldots + b_6 A_6 = 0, & b_1 C_1 + b_2 C_2 + \ldots + b_6 C_6 = 0, \\ a_1 B_1 + a_2 B_2 + \ldots + a_6 B_6 = 0, & a_1 D_1 + a_2 D_2 + \ldots + a_6 D_6 = 0, \\ b_1 B_1 + b_2 B_2 + \ldots + b_6 B_6 = 0, & b_1 D_1 + b_2 D_2 + \ldots + b_6 D_6 = 0. \end{array} \right.$$

Il est aisé de voir que si l'on pouvait déterminer ω et ω' de façon que les équations

$$\sum (A + \omega B) \frac{dF}{dx} = 0,$$

$$\sum (C + \omega' D) \frac{dF}{dx} = 0,$$

aient quatre solutions communes, la question serait résolue, car les équations

$$X_1 \frac{d\omega_1}{dx_1} + \ldots + X_6 \frac{d\omega_1}{dx_6} = 0,$$

$$X_1 \frac{d\omega_2}{dx_1} + \ldots + X_6 \frac{d\omega_2}{dx_6} = 0,$$

$$X_1 \frac{d\omega_3}{dx_1} + \ldots + X_6 \frac{d\omega_3}{dx_6} = 0,$$

$$X_1 \frac{d\omega_4}{dx_1} + \ldots + X_6 \frac{d\omega_4}{dx_6} = 0,$$

$$X_1 a_1 + \ldots + X_6 a_6 = 0,$$

où $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ désignent ces quatre solutions communes et $X_1, \ldots, X_6$ des inconnues, sont satisfaites pour les valeurs $A_1+\omega B_1, \ldots, A_6+\omega B_6$ d'une part et $C_1+\omega' D_1, \ldots, C_6+\omega' D_6$ d'autre part. Ces deux systèmes sont distincts : sans cela on serait dans le cas particulier où l'équation (11) est identique. Donc dans le Tableau

$$\begin{vmatrix} \frac{d\omega_1}{dx_1} & \cdots & \frac{d\omega_1}{dx_6} \\ \frac{d\omega_2}{dx_1} & \cdots & \frac{d\omega_2}{dx_6} \\ \frac{d\omega_3}{dx_1} & \cdots & \frac{d\omega_3}{dx_6} \\ \frac{d\omega_4}{dx_1} & \cdots & \frac{d\omega_4}{dx_6} \\ a_1 & \cdots & a_6 \end{vmatrix}$$

tous les déterminants obtenus en supprimant une colonne sont nuls. Il en est de même si l'on remplace les a par les b. On voit donc que l'on retombe sur les équations qui définiraient les fonctions $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$.

8. Nous verrons plus tard les équations qui lient les quantités ω et ω'; pour le moment nous allons faire voir que l'on obtient de nouveaux cas d'intégration lorsque les équations

$$\sum A \frac{dF}{dx} = 0, \qquad \sum B \frac{dF}{dx} = 0,$$

qui ne sont autres que les équations (32), ont une ou deux solutions communes.

Soit, en effet, F_3 une solution commune des équations précédentes. Le système (1) étant supposé ramené à la forme (16)

$$\begin{aligned} A_1\, dy_1 + A_2\, dy_2 + A_3\, dy_3 + A_4\, dy_4 + A_5\, dy_5 &= 0, \\ B_1\, dy_1 + B_2\, dy_2 + B_3\, dy_3 + B_4\, dy_4 + B_5\, dy_5 &= 0, \end{aligned}$$

où les A sont seulement fonctions de $y_1, \ldots, y_5$; la fonction F_3 sera une fonction de $y_1, \ldots, y_5$.

On peut toujours ramener la première de ces équations à la forme

$$dF_3 - F_4\,dF_1 - F_5\,dF_2 = 0.$$

On aurait à satisfaire aux équations

$$\lambda A = \frac{dF_3}{dy} - F_4\frac{dF_1}{dy} - F_5\frac{dF_2}{dy}.$$

Or nous avons vu (voir *Revue bourguignonne de l'Enseignement supérieur*, t. V, Mémoire sur les équations différentielles, Chap. IV) que l'on peut résoudre ces équations en prenant arbitrairement λ et qu'alors F_3 est une solution qui peut être quelconque d'une équation

$$\Delta'_1\frac{dF}{dy_1} + \ldots + \Delta'_5\frac{dF}{dy_5} = H',$$

où les quantités Δ' contiennent λ et ses dérivées premières. Il suffira donc de déterminer λ de façon à satisfaire à l'équation précédente. F ayant la valeur F_3. Le système (16) se ramènera à la forme

$$(50)\qquad \left\{\begin{aligned} &dz_3 - z_4\,dz_1 - z_5\,dz_2 = 0,\\ &c_1\,dz_1 + c_2\,dz_2 + c_4\,dz_4 + c_5\,dz_5 = 0,\end{aligned}\right.$$

en désignant F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 par z_1, z_2, z_3, z_4, z_5. Nous avons vu que dans ce cas les équations (32) deviennent

$$c_4\frac{dF}{dz_1} + c_5\frac{dF}{dz_2} + (c_1 z_4 + c_5 z_5)\frac{dF}{dz_3} - c_1\frac{dF}{dz_4} - c_2\frac{dF}{dz_5} = 0,$$
$$\frac{dF}{dz_6} = 0.$$

Ces équations doivent admettre la solution commune

$$F = z_3.$$

On devra donc avoir

$$c_4 z_4 + c_5 z_5 = 0.$$

On peut prendre

$$c_4 = -z_5,\qquad c_5 = z_4,$$

et les équations (50) deviennent

$$dz_3 - z_4\,dz_1 - z_5\,dz_2 = 0,$$
$$c_1\,dz_1 + c_2\,dz_2 + z_4\,dz_5 - z_5\,dz_4 = 0.$$

Elles sont évidemment satisfaites en posant

$$z_3 = C, \qquad z_2 = f(z_1), \qquad \frac{z_4}{z_5} = -f'(z_1),$$
$$c_1 + c_2 f'(z_1) - z_5^2 f''(z_1) = 0.$$

On tire de la dernière z_5 et l'on a bien un système de solutions à deux variables indépendantes dont l'une est z_1 renfermant une constante et une fonction arbitraire.

Dans la pratique, les équations (32) ayant une solution commune F_3, on posera

$$F_3 = C;$$

on tirera de cette équation la valeur de l'une des quantités x. Le système (1) se transformera alors en un système de deux équations de même forme à cinq variables arbitraires. Se rapportant au Mémoire précité (*Revue bourguignonne de l'Enseignement supérieur*, t. V, n° 1, Chap. V), on sera dans le cas où ce système admet un système de solutions renfermant une fonction arbitraire, quel que soit C. Ce cas d'intégration paraît être nouveau.

Cela posé, étudions le cas où les équations (32) ont deux solutions communes distinctes. Dans ce cas, on voit que, si l'on désigne par F_1 et F_2 ces deux solutions, on peut trouver un système renfermant une fonction arbitraire en posant

$$F_2 = f(F_1),$$

f étant une fonction arbitraire. Posons alors

$$F_1 = \alpha, \qquad F_2 = f(\alpha).$$

De ces équations nous tirerons deux des quantités x en fonction des autres et de α. Nous préciserons la fonction $f(\alpha)$ et le système (1) se transformera en un système de deux équations à cinq variables (*Mémoire précité*, Chap. V), qui aura un système de solutions renfermant une fonction arbitraire.

Je dis que ce procédé donne toutes les solutions du système (1). En effet, nous avons vu que si les équations

$$\omega_1 = C_1, \qquad \omega_2 = C_2, \qquad \omega_3 = C_3, \qquad \omega_4 = C_4$$

représentent un système de solutions renfermant quatre constantes arbitraires, les fonctions ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 sont des solutions de l'équation

$$\sum A \frac{dF}{dx} + \omega \sum B \frac{dF}{dx} = 0,$$

ω étant convenablement choisie. Soient alors trois solutions Φ_1, Φ_2, Φ_3 formant avec F_1 et F_2 un système distinct; on aura

$$\omega_1 = f_1(F_1, F_2, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3), \qquad \omega_2 = f_2, \qquad \omega_3 = f_3, \qquad \omega_4 = f_4,$$

et les équations

$$\omega_1 = C_1, \qquad \omega_2 = C_2, \qquad \omega_3 = C_3, \qquad \omega_4 = C_4$$

donnent, en éliminant Φ_1, Φ_2, Φ_3, une équation de la forme

$$H(F_1, F_2, C_1, C_2, C_3, c_4) = 0,$$

ce qui montre bien que F_2 est une fonction de F_1.

On peut donner de cette proposition une autre démonstration qui fait voir plus clairement le résultat précédent.

Ramenons, comme dans le cas où les équations (32) ont une solution commune, le système à la forme

$$\begin{gathered} dz_3 - z_4\,dz_1 - z_5\,dz_2 = 0, \\ c_1\,dz_1 + c_2\,dz_2 + z_5\,dz_4 - z_4\,dz_5 = 0. \end{gathered}$$

Les coefficients c_1, c_2 qui contiennent z_6 seront liés par la relation

$$z_5 \frac{dF}{dz_1} - z_4 \frac{dF}{dz_2} - c_1 \frac{dF}{dz_4} - c_2 \frac{dF}{dz_5} = 0,$$

F étant la seconde solution commune des équations (32) et, par suite, ne contenant pas z_6.

On satisfera à l'équation

$$dz_3 - z_4\,dz_1 - z_5\,dz_2 = 0,$$

en prenant pour z_3 une fonction quelconque de z_1 et z_2 et posant

$$z_4 = \frac{dz_3}{dz_1}, \qquad z_5 = \frac{dz_3}{dz_2}.$$

L'équation

$$c_1\,dz_1 + c_2\,dz_2 + z_5\,dz_4 - z_4\,dz_5 = 0$$

donne alors

$$c_1 + z_5\frac{dz_4}{dz_1} - z_4\frac{dz_5}{dz_1} = 0,$$

$$c_2 + z_5\frac{dz_4}{dz_2} - z_4\frac{dz_5}{dz_2} = 0;$$

multiplions la première de ces équations par $\frac{dF}{dz_4}$, la seconde par $\frac{dF}{dz_5}$ et ajoutons; on aura

$$z_5\frac{dF}{dz_1} - z_4\frac{dF}{dz_2} + \frac{dF}{dz_4}\left(z_5\frac{dz_4}{dz_1} - z_4\frac{dz_5}{dz_1}\right) + \frac{dF}{dz_5}\left(z_5\frac{dz_4}{dz_2} - z_4\frac{dz_5}{dz_2}\right) = 0,$$

ou bien

$$\begin{aligned} z_5\left(\frac{dF}{dz_1} + \frac{dF}{dz_3}\frac{dz_3}{dz_1} + \frac{dF}{dz_4}\frac{dz_4}{dz_1} + \frac{dF}{dz_5}\frac{dz_5}{dz_1}\right) \\ = z_4\left(\frac{dF}{dz_2} + \frac{dF}{dz_3}\frac{dz_3}{dz_2} + \frac{dF}{dz_4}\frac{dz_4}{dz_2} + \frac{dF}{dz_5}\frac{dz_5}{dz_2}\right). \end{aligned}$$

Cette équation montre que F est une fonction de z_3.

Le système proposé pourra dès lors être remplacé par le suivant :

$$z_4 = \frac{dz_3}{dz_1}, \qquad z_5 = \frac{dz_3}{dz_2}, \qquad F(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) = f(z_3),$$

et l'une des deux équations

$$c_1 + z_5\frac{dz_4}{dz_1} - z_4\frac{dz_5}{dz_1} = 0, \qquad c_2 + z_5\frac{dz_4}{dz_2} - z_4\frac{dz_5}{dz_2} = 0.$$

De l'une des deux dernières on tirera z_6; on satisfera aux premières, en précisant la fonction $f(z_3)$, par des formules

$$\Phi(z_1, z_2, z_3, \beta) = \varphi(\beta), \qquad \frac{d\Phi}{d\beta} = \varphi'(\beta).$$

On peut donc dans ce cas obtenir toutes les solutions du système (1) par l'intégration d'équations différentielles ordinaires.

9. Revenons maintenant au cas général.

Il nous reste à former l'équation (46). On peut la mettre sous la forme

$$\Delta^3(\lambda) = a\Delta^2(\lambda) + b\Delta(\lambda) + c\mu + d\lambda,$$

λ désignant l'une des quantités $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_5$ et a, b, c, d des fonctions convenables. Multiplions-la par $\frac{dF}{dx}$ et ajoutons les cinq équations ainsi obtenues, λ et F ayant successivement les indices 1, 2, ..., 5. On aura

$$\sum \Delta^3(\lambda)\frac{dF}{dx} = a\sum \Delta^2(\lambda)\frac{dF}{dx} + b\sum \Delta(\lambda)\frac{dF}{dx} + c\sum \mu\frac{dF}{dx} + d\sum \lambda\frac{dF}{dx},$$

où le signe Σ porte sur les quantités λ, μ et F. On aura six équations semblables en donnant successivement à la lettre x les indices 1, 2, ..., 6 et l'on voit que l'on a à annuler tous les déterminants du Tableau

$$(51)\quad \begin{vmatrix} \sum \lambda\frac{dF}{dx_1} & \sum \mu\frac{dF}{dx_1} & \sum \Delta(\lambda)\frac{dF}{dx_1} & \sum \Delta^2(\lambda)\frac{dF}{dx_1} & \sum \Delta^3(\lambda)\frac{dF}{dx_1} \\ \sum \lambda\frac{dF}{dx_2} & \sum \mu\frac{dF}{dx_2} & \sum \Delta(\lambda)\frac{dF}{dx_2} & \sum \Delta^2(\lambda)\frac{dF}{dx_2} & \sum \Delta^3(\lambda)\frac{dF}{dx_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum \lambda\frac{dF}{dx_6} & \sum \mu\frac{dF}{dx_6} & \sum \Delta(\lambda)\frac{dF}{dx_6} & \sum \Delta^2(\lambda)\frac{dF}{dx_6} & \sum \Delta^3(\lambda)\frac{dF}{dx_6} \end{vmatrix}$$

qui se réduisent à une seule équation.

On a

$$\sum \lambda\frac{dF}{dx_i} = a_i, \qquad \sum \mu\frac{dF}{dx_i} = b_i,$$

puis

$$\sum \Delta(\lambda)\frac{dF}{dx_i} = \Delta_1 a_{i1} + \Delta_2 a_{i2} + \ldots + \Delta_6 a_{i6},$$

où

$$\Delta_1 = A_1 + \omega B_1, \qquad \ldots, \qquad \Delta_6 = A_6 + \omega B_6,$$

en se servant d'une des racines de l'équation (11) en $\frac{\lambda}{\mu}$ et, par suite, on aura

$$\sum \Delta(\lambda)\frac{dF}{dx_i} = R_i + \omega S_i. \tag{52}$$

Remarquons que l'on a identiquement

$$\Sigma(A + \omega B)(R + \omega S) = 0,$$

c'est-à-dire séparément

$$\Sigma AR = 0, \qquad \Sigma BS = 0, \qquad \Sigma(AS + BR) = 0.$$

Remarquons encore que, dans le cas où l'équation en $\frac{\lambda}{\mu}$ a ses racines distinctes, on aurait en multipliant l'équation (52) par $C_i + \omega' D_i$ et ajoutant en donnant à i les valeurs 1, 2, ..., 6, la formule

$$\Sigma(C + \omega' D)(R + \omega S) = 0.$$

Cette équation est une identité et ne donne aucune relation entre ω et ω'.

En effet, désignons pour abréger $C + \omega' D$ par Δ'. Soient λ_1 et μ_1 les valeurs de λ et μ pour le système $\Delta = A + \omega B$, et λ_2 et μ_2 les valeurs de λ et μ pour le système Δ'. Si l'on multiplie les équations (48) où λ et μ sont remplacés par λ_1 et μ_1 par $\Delta'_1, \ldots, \Delta'_6$ et que l'on ajoute, il viendra

$$\lambda_1 \Sigma a_{ij}(\Delta'_i \Delta_j - \Delta'_j \Delta_i) + \mu_1 \Sigma b_{ij}(\Delta'_i \Delta_j - \Delta'_j \Delta_i) = 0.$$

De même si, dans ces équations (48), l'on remplace les Δ par Δ' et λ et μ par λ_2 et μ_2, puis qu'on les multiplie par Δ et qu'on ajoute, il vient

$$\lambda_2 \Sigma a_{ij}(\Delta'_i \Delta_j - \Delta'_j \Delta_i) + \mu_2 \Sigma b_{ij}(\Delta'_i \Delta_j - \Delta'_j \Delta_i) = 0.$$

On aura donc séparément

$$\Sigma a_{ij}(\Delta'_i \Delta_j - \Delta'_j \Delta_i) = 0, \qquad \Sigma b_{ij}(\Delta'_i \Delta_j - \Delta'_j \Delta_i) = 0;$$

la première de ces équations peut s'écrire

$$\Sigma(R + \omega S)(C + \omega' D) = 0,$$

qui a donc bien lieu quels que soient ω et ω'. On aura séparément

$$\Sigma RC = 0, \qquad \Sigma RD = 0, \qquad \Sigma SC = 0, \qquad \Sigma SD = 0.$$

On voit que, si l'on fait tendre la seconde racine de l'équation (11) vers la première, on a alors au lieu de la relation

$$\Sigma(AS + BR) = 0,$$

séparément

$$\Sigma AS = 0, \qquad \Sigma BR = 0.$$

Inversement, je dis que, si l'on a

$$\Sigma AS = 0,$$

l'équation a une racine double. Supposons qu'il n'en soit pas ainsi. On aurait les relations

$$\Sigma XR = 0, \qquad \Sigma XS = 0,$$

qui seraient satisfaites pour les valeurs A, B, C, D données aux quantités X. Les systèmes A, B, C, D ne seraient donc pas distincts et l'on serait alors dans le cas où l'équation est identique, auquel cas la condition d'égalité des racines est bien satisfaite.

Revenons maintenant à la suite de la détermination des coefficients de l'équation (51). Posons pour cela

$$R + \omega S = r.$$

On aura

$$(52) \qquad \sum \Delta(\lambda) \frac{dF}{dx} = r.$$

De même que ces équations ont été tirées de

$$a = \sum \lambda \frac{dF}{dx}$$

on en tirera

$$(53) \qquad \sum \Delta^2(\lambda) \frac{dF}{dx_i} = r_{i1}\Delta_1 + \ldots + r_{i6}\Delta_6 = s_i,$$

puis, de ces équations

$$(54) \qquad \sum \Delta^3(\lambda) \frac{dF}{dx_i} = s_{i1}\Delta_1 + \ldots + s_{i6}\Delta_6 = t_i,$$

et l'équation (51) est un des déterminants du Tableau

$$(55) \qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & r_1 & s_1 & t_1 \\ a_2 & b_2 & r_2 & s_2 & t_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_6 & b_6 & r_6 & s_6 & t_6 \end{vmatrix}.$$

Remarquons que l'on a identiquement, c'est-à-dire quel que soit ω,

$$\Sigma s\Delta = 0, \qquad \Sigma t\Delta = 0,$$

les termes se détruisant deux à deux dans ces équations. Comme on avait déjà les relations

$$\Sigma a\Delta = 0, \qquad \Sigma b\Delta = 0, \qquad \Sigma r\Delta = 0,$$

on voit que les équations (55) se réduisent bien à une.

10. Remarquons d'abord que cette équation ne donne la solution cherchée que dans le cas où tous les déterminants du Tableau

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 & \lambda_5 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 & \mu_5 \\ \Delta(\lambda_1) & \Delta(\lambda_2) & \Delta(\lambda_3) & \Delta(\lambda_4) & \Delta(\lambda_5) \\ \Delta^2(\lambda_1) & \Delta^2(\lambda_2) & \Delta^2(\lambda_3) & \Delta^2(\lambda_4) & \Delta^2(\lambda_5) \end{vmatrix}$$

ne sont pas nuls, c'est-à-dire quand tous les déterminants du Tableau

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \\ r_1 & r_2 & r_3 & r_4 & r_5 & r_6 \\ s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & s_5 & s_6 \end{vmatrix}$$

ne sont pas nuls. Voyons ce qui arrive dans ce cas. On peut alors satisfaire aux équations (37) et (38) en prenant arbitrairement l'une des quantités X_2, X_3, X_4, X_5 comme solution de l'équation $\Delta(F) = 0$, c'est-à-dire que l'on peut prendre arbitrairement l'une des fonctions $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ comme solution de cette équation. Mais il est préférable de présenter de la manière suivante les solutions que l'on obtient dans ce cas. En somme, les déterminants des deux Tableaux suivants sont nuls

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 & \lambda_5 \\ \Delta(\lambda_1) & \Delta(\lambda_2) & \Delta(\lambda_3) & \Delta(\lambda_4) & \Delta(\lambda_5) \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 & \mu_5 \\ \Delta(\mu_1) & \Delta(\mu_2) & \Delta(\mu_3) & \Delta(\mu_4) & \Delta(\mu_5) \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 & \lambda_5 \\ \Delta(\lambda_1) & \Delta(\lambda_2) & \Delta(\lambda_3) & \Delta(\lambda_4) & \Delta(\lambda_5) \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 & \mu_5 \\ \Delta^2(\lambda_1) & \Delta^2(\lambda_2) & \Delta^2(\lambda_3) & \Delta^2(\lambda_4) & \Delta^2(\lambda_5) \end{vmatrix}.$$

On aura donc les relations, λ étant l'une des quantités $\lambda_1, \ldots, \lambda_5$

$$\Delta(\mu) = \alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\Delta(\lambda), \qquad \Delta^2(\lambda) = \alpha'\lambda + \beta'\mu + \gamma'\Delta(\lambda),$$

on en tire

$$\Delta^3(\lambda) = \alpha''\lambda + \beta''\Delta(\lambda) + \gamma''\Delta^2(\lambda).$$

Donc, tous les déterminants du Tableau

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 & \lambda_5 \\ \Delta(\lambda_1) & \Delta(\lambda_2) & \Delta(\lambda_3) & \Delta(\lambda_4) & \Delta(\lambda_5) \\ \Delta^2(\lambda_1) & \Delta^2(\lambda_2) & \Delta^2(\lambda_3) & \Delta^2(\lambda_4) & \Delta^2(\lambda_5) \\ \Delta^3(\lambda_1) & \Delta^3(\lambda_2) & \Delta^3(\lambda_3) & \Delta^3(\lambda_4) & \Delta^3(\lambda_5) \end{vmatrix}$$

sont nuls.

Prenons par exemple l'un de ces déterminants. On aura

$$\begin{aligned} \lambda_4 &= m\lambda_1 + n\lambda_2 + p\lambda_3, \\ \Delta(\lambda_4) &= m\Delta(\lambda_1) + n\Delta(\lambda_2) + p\Delta(\lambda_3), \\ \Delta^2(\lambda_4) &= m\Delta^2(\lambda_1) + n\Delta^2(\lambda_2) + p\Delta^2(\lambda_3), \\ \Delta^3(\lambda_4) &= m\Delta^3(\lambda_1) + n\Delta^3(\lambda_2) + p\Delta^3(\lambda_3). \end{aligned}$$

On tire de ces équations

$$\Delta(m) = 0, \qquad \Delta(n) = 0, \qquad \Delta(p) = 0;$$

on pourra donc, en général, poser

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= m_1 k_1 + n_1 k_2 + p_1 k_3, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda_5 &= m_5 k_1 + n_5 k_2 + p_5 k_3, \end{aligned}$$

les quantités $m_1, n_1, p_1, \ldots, m_5, n_5, p_5$ étant des fonctions seulement de $F_1, F_2, \ldots, F_5$. On a ensuite

$$\begin{aligned} \mu_1 &= m_1 h_1 + n_1 h_2 + p_1 h_3, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mu_5 &= m_5 h_1 + n_5 h_2 + p_5 h_3. \end{aligned}$$

On voit qu'alors le système (1) peut se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} k_1 \sum_1^5 m\,dF + k_2 \sum_1^5 n\,dF + k_3 \sum_1^5 p\,dF &= 0, \\ h_1 \sum_1^5 m\,dF + h_2 \sum_1^5 n\,dF + h_3 \sum_1^5 p\,dF &= 0. \end{aligned}$$

Elles sont évidemment satisfaites avec deux variables indépendantes en posant

$$\sum_1^5 m\,dF = 0, \qquad \sum_1^5 n\,dF = 0, \qquad \sum_1^5 p\,dF = 0,$$

qui comportent une fonction arbitraire (*voir* Mémoire précité, Chapitre VI).

Cherchons maintenant à quelles conditions doivent satisfaire les coefficients des équations (1) pour que l'on se trouve dans ce cas particulier.

Il faut et il suffit que l'on puisse déterminer ω, puis des quantités m, n, p, de façon que l'on ait

$$s_i = m r_i + n b_i + p a_i.$$

Supposons d'abord que l'équation (11) ait ses racines distinctes. On aura

$$\Sigma C s = 0, \qquad \Sigma D s = 0,$$

et inversement on voit aisément que ces conditions sont suffisantes.

On a

$$\begin{aligned} s_i &= \Delta_1 r_{i1} + \Delta_2 r_{i2} + \ldots + \Delta_6 r_{i6}, \\ &= \Delta_1 \frac{d}{dx_1}(R_i + S_i\omega) + \ldots + \Delta_6 \frac{d}{dx_6}(R_i + S_i\omega) \\ &\quad - \Delta_1 \frac{d}{dx_i}(R_1 + S_1\omega) - \ldots - \Delta_6 \frac{d}{dx_i}(R_6 + S_6\omega), \\ &= U_i + S_i\Delta(\omega) - \Sigma AS\frac{d\omega}{dx_i}, \end{aligned}$$

U_i étant une fonction du second degré de ω. On aura donc

$$(56)\qquad \begin{cases} \Sigma C s = \Sigma CU - \Sigma AS\,\Sigma C\dfrac{d\omega}{dx} = 0, \\ \Sigma D s = \Sigma DU - \Sigma AS\,\Sigma D\dfrac{d\omega}{dx} = 0. \end{cases}$$

Si ces deux équations ont une solution commune, cette solution fournira une équation

$$\Sigma(\mathrm{A}+\omega\mathrm{B})\frac{d\mathrm{F}}{dx}=0,$$

dont cinq solutions distinctes seront les fonctions $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \ldots, \mathrm{F}_5$.

Le cas où l'équation (11) a une racine double sera étudié plus tard.

11. Écartons maintenant ce cas, c'est-à-dire supposons ω différent d'une solution commune des équations (56) et reprenons l'équation (55). Calculons pour cela les quantités t.

On a

$$\begin{aligned}
t_i &= \Delta_1 s_{i1}+\ldots+\Delta_6 s_{i6},\\
&= \Delta_1\frac{ds_i}{dx_1}+\ldots+\Delta_6\frac{ds_i}{dx_6}-\Delta_1\frac{ds_1}{dx_i}-\ldots-\Delta_6\frac{ds_6}{dx_i},\\
&= \Delta_1\left[\frac{d\mathrm{U}_i}{dx_1}+\frac{d\mathrm{U}_i}{d\omega}\frac{d\omega}{dx_1}+\frac{d\mathrm{S}_i}{dx_1}\Delta(\omega)+\mathrm{S}_i\frac{d}{dx_1}(\Delta\omega)-\frac{d}{dx_1}(\Sigma\mathrm{AS})\frac{d\omega}{dx_i}-\Sigma\mathrm{AS}\frac{d^2\omega}{dx_i\,dx_1}\right]+\ldots\\
&\quad+\Delta_6\left[\frac{d\mathrm{U}_i}{dx_6}+\frac{d\mathrm{U}_i}{d\omega}\frac{d\omega}{dx_6}+\frac{d\mathrm{S}_i}{dx_6}\Delta(\omega)+\mathrm{S}_i\frac{d}{dx_6}(\Delta\omega)-\frac{d}{dx_6}(\Sigma\mathrm{AS})\frac{d\omega}{dx_i}-\Sigma\mathrm{AS}\frac{d^2\omega}{dx_i\,dx_6}\right]\\
&\quad-\Delta_1\frac{ds_1}{dx_i}-\ldots-\Delta_6\frac{ds_6}{dx_i},
\end{aligned}$$

ou bien, en posant

$$\Sigma\mathrm{AS}=\mathrm{I},$$

$$\begin{aligned}
t_i &= \Delta_1\frac{d\mathrm{U}_i}{dx_1}+\ldots+\Delta_6\frac{d\mathrm{U}_i}{dx_6}+\frac{d\mathrm{U}_i}{d\omega}\Delta(\omega)+\Delta(\mathrm{S}_i)\Delta(\omega)+\mathrm{S}_i\Delta^2(\omega)-\Delta(\mathrm{I})\frac{d\omega}{dx_i}-\mathrm{I}\Delta\left(\frac{d\omega}{dx_i}\right)\\
&\quad-\Delta_1\left[\frac{d\mathrm{U}_1}{dx_i}+\frac{d\mathrm{U}_1}{d\omega}\frac{d\omega}{dx_i}+\frac{d\mathrm{S}_1}{dx_i}\Delta(\omega)+\mathrm{S}_1\frac{d}{dx_i}[\Delta(\omega)]-\frac{d\mathrm{I}}{dx_i}\frac{d\omega}{dx_1}-\mathrm{I}\frac{d^2\omega}{dx_1\,dx_i}\right]-\ldots\\
&\quad-\Delta_6\left[\frac{d\mathrm{U}_6}{dx_i}+\frac{d\mathrm{U}_6}{d\omega}\frac{d\omega}{dx_i}+\frac{d\mathrm{S}_6}{dx_i}\Delta(\omega)+\mathrm{S}_6\frac{d}{dx_i}[\Delta(\omega)]-\frac{d\mathrm{I}}{dx_i}\frac{d\omega}{dx_6}-\mathrm{I}\frac{d^2\omega}{dx_6\,dx_i}\right],
\end{aligned}$$

ou bien

$$t_i=\mathrm{V}_i+\mathrm{I}'\frac{d\omega}{dx_i}+\mathrm{T}_i\Delta(\omega)+\mathrm{S}_i\Delta^2(\omega)-\mathrm{I}\frac{d}{dx_i}[\Delta(\omega)],$$

V_i, I', T_i étant des fonctions du troisième, du second et du premier degré en ω. L'équation (55) devient alors

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & R_1+S_1\omega & U_1+S_1\Delta(\omega)-I\dfrac{d\omega}{dx_1} & V_1+I'\dfrac{d\omega}{dx_1}+T_1\Delta(\omega)+S_1\Delta^2(\omega)-I\dfrac{d}{dx_1}[\Delta(\omega)] \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_6 & b_6 & R_6+S_6\omega & U_6+S_6\Delta(\omega)-I\dfrac{d\omega}{dx_6} & V_6+I'\dfrac{d\omega}{dx_6}+T_6\Delta(\omega)+S_6\Delta^2(\omega)-I\dfrac{d}{dx_6}[\Delta(\omega)] \end{vmatrix}.$$

Les équations

$$s=\Sigma\Delta^2(\lambda)\frac{dF}{dx},\qquad t=\Sigma\Delta^3(\lambda)\frac{dF}{dx}$$

montrent que l'on a, en posant comme il a été fait,

$$C+\omega' D=\Delta',$$

les relations

$$\Sigma\Delta' s=0,\qquad \Sigma\Delta' t=0,$$

c'est-à-dire

$$(57)\qquad \begin{cases} \Sigma\Delta' U - I\Delta'(\omega)=0, \\ \Sigma\Delta' V + I'\Delta'(\omega)+\Delta(\omega)\Sigma T\Delta' - I\Delta'\Delta(\omega). \end{cases}$$

Les relations

$$\Sigma a\Delta'=0,\qquad \Sigma b\Delta'=0,\qquad \Sigma r\Delta'=0,\qquad \Sigma s\Delta'=0,\qquad \Sigma t\Delta'=0,$$

jointes à

$$\Sigma a\Delta=0,\qquad \Sigma b\Delta=0,\qquad \Sigma r\Delta=0,\qquad \Sigma s\Delta=0,\qquad \Sigma t\Delta=0,$$

montrent que les équations (57) peuvent remplacer (55); ω′ y entre au premier degré; en l'éliminant, on en tire l'équation en ω

$$(58)\qquad \frac{\Sigma CU - I\Sigma C\dfrac{d\omega}{dx}}{\Sigma DU - I\Sigma D\dfrac{d\omega}{dx}} = \frac{\Sigma CV + I'\Sigma C\dfrac{d\omega}{dx} + \Delta(\omega)\Sigma CT - I\Sigma C\dfrac{d}{dx}[\Delta(\omega)]}{\Sigma DV + I'\Sigma D\dfrac{d\omega}{dx} + \Delta(\omega)\Sigma DT - I\Sigma D\dfrac{d}{dx}[\Delta(\omega)]}.$$

Cette équation, qui peut remplacer les équations (55), est toujours du second ordre.

Reprenons l'équation

$$\Sigma\Delta' U - I\Delta'(\omega) = 0.$$

On aurait de même

$$\Sigma\Delta U' - J\Delta(\omega') = 0,$$

en posant

$$R'_i + S'_i\omega' = r'_i = \Delta'_1 a_{i1} + \ldots + \Delta'_6 a_{i6},$$

$$U'_i + S'_i\Delta'(\omega') - J\frac{d\omega'}{\partial x_i} = s'_i = \Delta'_1 r'_{i1} + \ldots + \Delta'_6 r'_{i6},$$

$$J = \Sigma C S'.$$

La première donne

$$\omega' = -\frac{\Sigma C U - I\Sigma C\frac{d\omega}{dx}}{\Sigma D U - I\Sigma D\frac{d\omega}{dx}};$$

en portant cette valeur dans la seconde, on a une équation du second ordre qui ne peut être autre que (58). Donc, les équations

$$(59)\qquad \begin{cases} \Sigma\Delta' U - I\Delta'(\omega) = 0, \\ \Sigma\Delta U' - J\Delta(\omega') = 0 \end{cases}$$

sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que les équations

$$\Sigma(A + \omega B)\frac{dF}{dx} = 0,$$

$$\Sigma(C + \omega' D)\frac{dF}{dx} = 0$$

forment un système complet. I et J, étant tous deux la condition pour que l'équation (11) ait une racine double, ne peuvent différer que par une constante.

Je vais maintenant m'occuper de la construction des développements en série des intégrales du système (1), question qui peut offrir un certain intérêt.

Soient

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_6) = u,$$

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_6) = v$$

les variables indépendantes. On a les équations

$$\Sigma a\,dx = 0,$$
$$\Sigma b\,dx = 0,$$
$$\Sigma(R + \omega S)dx = 0,$$
$$\Sigma(R' + \omega' S')dx = 0.$$

Ces quatre équations ont deux systèmes de solutions qui sont

$$A_1 + \omega B_1,\ \ldots,\ A_6 + \omega B_6,$$
$$C_1 + \omega' D_1,\ \ldots,\ C_6 + \omega' D_6.$$

On aura donc

$$\frac{dx}{du} = \lambda(A + \omega B) + \mu(C + \omega' D),$$
$$\frac{dx}{dv} = \lambda'(A + \omega B) + \mu'(C + \omega' D).$$

On en tire

$$1 = \lambda\Delta(F) + \mu\Delta'(F), \qquad 0 = \lambda\Delta(\Phi) + \mu\Delta'(\Phi),$$
$$0 = \lambda'\Delta(F) + \mu'\Delta'(F), \qquad 1 = \lambda'\Delta(\Phi) + \mu'\Delta'(\Phi),$$

d'où

$$\lambda = \frac{\Delta'(\Phi)}{H}, \qquad \lambda' = -\frac{\Delta'(F)}{H}, \qquad \mu = \frac{-\Delta(\Phi)}{H}, \qquad \mu' = \frac{\Delta(F)}{H},$$

avec

$$H = \Delta(F)\Delta'(\Phi) - \Delta(\Phi)\Delta'(F).$$

On aura de même pour les fonctions ω et ω'

$$\frac{d\omega}{du} = \lambda\Delta(\omega) + \mu\Delta'(\omega), \qquad \frac{d\omega'}{du} = \lambda\Delta(\omega') + \mu\Delta'(\omega'),$$
$$\frac{d\omega}{dv} = \lambda'\Delta(\omega) + \mu'\Delta'(\omega), \qquad \frac{d\omega'}{dv} = \lambda'\Delta(\omega') + \mu'\Delta'(\omega'),$$

d'où

$$\Delta'(\omega) = \lambda\frac{d\omega}{dv} - \lambda'\frac{d\omega}{du},$$
$$-\Delta(\omega') = \mu\frac{d\omega'}{dv} - \mu'\frac{d\omega'}{du}.$$

On remplacera dans ces équations $\Delta(\omega')$ et $\Delta'(\omega)$ par les valeurs fournies par les équations (59) et l'on aura le système suivant :

$$
\begin{aligned}
&\frac{dx_1}{du} = f_1(x_1, \ldots, x_6, \omega, \omega'),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\frac{dx_6}{du} = f_6(x_1, \ldots, x_6, \omega, \omega'),\\
&\frac{dx_1}{dv} = \varphi_1(x_1, \ldots, x_6, \omega, \omega'),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\frac{dx_6}{dv} = \varphi_6(x_1, \ldots, x_6, \omega, \omega'),\\
&\frac{d\omega}{du} = m(x_1, \ldots, x_6, \omega, \omega') + n(x_1, \ldots, x_6, \omega, \omega')\frac{d\omega}{dv},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\frac{d\omega'}{du} = p(x_1, \ldots, x_6, \omega, \omega') + q(x_1, \ldots, x_6, \omega, \omega')\frac{d\omega'}{dv}.
\end{aligned}
$$

Si l'on se donne pour les valeurs initiales de u et de v celles de $x_1, \ldots, x_6$, ce qui n'en fait que quatre d'arbitraires, puis les fonctions ω et ω' de v pour la valeur initiale de u, on peut construire les développements en série qui seront convergents.

La solution comporte donc deux fonctions arbitraires d'une variable [1].

12. Nous allons maintenant nous occuper du cas de la racine double.

On a d'abord à voir si l'on peut annuler tous les déterminants du Tableau

$$
\left|\begin{matrix}
a_1 & a_2 & \ldots & a_6\\
b_1 & b_2 & \ldots & b_6\\
r_1 & r_2 & \ldots & r_6\\
s_1 & s_2 & \ldots & s_6
\end{matrix}\right|,
$$

[1] Les systèmes d'équations aux dérivées partielles de ce genre ont été étudiés dans le savant *Traité d'Analyse* de M. Méray, t. I, Chap. XII.

c'est-à-dire ici

$$(60)\quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \\ R_1+S_1\omega & R_2+S_2\omega & R_3+S_3\omega & R_4+S_4\omega & R_5+S_5\omega & R_6+S_6\omega \\ U_1+S_1\Delta(\omega) & U_2+S_2\Delta(\omega) & U_3+S_3\Delta(\omega) & U_4+S_4\Delta(\omega) & U_5+S_5\Delta(\omega) & U_6+S_6\Delta(\omega) \end{vmatrix}.$$

Si tous ces déterminants sont nuls, on aura, α, β, γ étant convenablement choisis,

$$U + S\Delta(\omega) = \alpha a + \beta b + \gamma(R + \omega S).$$

On en tire

$$(61)\qquad \Sigma AU = 0, \qquad \Sigma BU = 0;$$

on a

$$U = L + M\omega + N\omega^2,$$

et l'on a les relations

$$\Sigma AL = 0, \quad \Sigma(BL + AM) = 0, \quad \Sigma(AN + BM) = 0, \quad \Sigma BN = 0.$$

Les équations (61) deviennent

$$\omega\Sigma AM + \omega^2\Sigma AN = 0,$$
$$\Sigma BL + \omega\,\Sigma BM = 0.$$

Elles fournissent pour ω une et une seule valeur. Les équations (60) se réduisent alors à une qui est la condition cherchée.

Considérons maintenant le cas tout à fait général et voyons si l'équation en ω est du second ordre; c'est

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & R_1+S_1\omega & U_1+S_1\Delta(\omega) & V_1+P\dfrac{d\omega}{dx_1}+T_1\Delta(\omega)+S_1\Delta^2(\omega) \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_6 & b_6 & R_6+S_6\omega & U_6+S_6\Delta(\omega) & V_6+P\dfrac{d\omega}{dx_6}+T_6\Delta(\omega)+S_6\Delta^2(\omega) \end{vmatrix}.$$

Les termes en $\Delta^2(\omega)$ sont les déterminants du Tableau

$$\left|\begin{array}{cccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \\ \mathrm{R}_1 & \mathrm{R}_2 & \mathrm{R}_3 & \mathrm{R}_4 & \mathrm{R}_5 & \mathrm{R}_6 \\ \mathrm{S}_1 & \mathrm{S}_2 & \mathrm{S}_3 & \mathrm{S}_4 & \mathrm{S}_5 & \mathrm{S}_6 \\ \mathrm{U}_1 & \mathrm{U}_2 & \mathrm{U}_3 & \mathrm{U}_4 & \mathrm{U}_5 & \mathrm{U}_6 \end{array}\right|.$$

Si tous ces déterminants étaient nuls, on pourrait déterminer α, β, γ, δ tels que l'on ait

$$\mathrm{U} = \alpha a + \beta b + \gamma \mathrm{R} + \delta \mathrm{S}.$$

On en tirerait

$$\Sigma \mathrm{AU} = 0, \qquad \Sigma \mathrm{BU} = 0.$$

Je vais démontrer que dans ce cas l'équation (11) est identique. Pour cela nous supposerons le système (1) ramené à la forme

$$dz_3 - z_4\,dz_1 - z_5\,dz_2 = 0,$$
$$c_1\,dz_1 + c_2\,dz_2 + c_4\,dz_4 + c_5\,dz_5 = 0.$$

On a trouvé

$$\begin{array}{lll} \mathrm{A}_1 = c_4, & \mathrm{A}_2 = c_5, & \mathrm{A}_3 = c_4 z_4 + c_5 z_5, \\ \mathrm{A}_4 = -c_1, & \mathrm{A}_5 = -c_2, & \mathrm{A}_6 = 0, \\ \mathrm{B}_1 = 0, & \mathrm{B}_2 = 0, & \mathrm{B}_3 = 0, \\ \mathrm{B}_4 = 0, & \mathrm{B}_5 = 0, & \mathrm{B}_6 = 1. \end{array}$$

On a ensuite

$$\mathrm{R}_1 = \left(\frac{dc_1}{dz_2} - \frac{dc_2}{dz_1}\right)c_5 + \frac{dc_1}{dz_3}(c_4 z_4 + c_5 z_5) - \left(\frac{dc_1}{dz_4} - \frac{dc_4}{dz_1}\right)c_1 - \left(\frac{dc_1}{dz_5} - \frac{dc_5}{dz_1}\right)c_2,$$

$$\mathrm{S}_1 = \frac{dc_1}{dz_6},$$

$$\mathrm{R}_2 = \left(\frac{dc_2}{dz_1} - \frac{dc_1}{dz_2}\right)c_4 + \frac{dc_2}{dz_3}(c_4 z_4 + c_5 z_5) - \left(\frac{dc_2}{dz_4} - \frac{dc_4}{dz_2}\right)c_1 - \left(\frac{dc_2}{dz_5} - \frac{dc_5}{dz_2}\right)c_2,$$

$$\mathrm{S}_2 = \frac{dc_2}{dz_6},$$

$$\mathrm{R}_3 = -\frac{dc_1}{dz_3}c_4 - \frac{dc_2}{dz_3}c_5 + \frac{dc_4}{dz_3}c_1 + \frac{dc_5}{dz_3}c_2,$$

$$\mathrm{S}_3 = 0,$$

$$\mathrm{R}_4 = \left(\frac{dc_4}{dz_1} - \frac{dc_1}{dz_4}\right)c_4 + \left(\frac{dc_4}{dz_2} - \frac{dc_2}{dz_4}\right)c_5 + \frac{dc_4}{dz_3}(c_4 z_4 + c_5 z_5) - \left(\frac{dc_4}{dz_5} - \frac{dc_5}{dz_4}\right)c_2,$$

$$\mathrm{S}_4 = \frac{dc_4}{dz_6},$$

$$\mathrm{R}_5 = \left(\frac{dc_5}{dz_1} - \frac{dc_1}{dz_5}\right)c_4 + \left(\frac{dc_5}{dz_2} - \frac{dc_2}{dz_5}\right)c_5 + \frac{dc_5}{dz_3}(c_4 z_4 + c_5 z_5) - \left(\frac{dc_5}{dz_4} - \frac{dc_4}{dz_5}\right)c_1,$$

$$\mathrm{S}_5 = \frac{dc_5}{dz_6},$$

$$\mathrm{R}_6 = -\frac{dc_1}{dz_6}c_4 - \frac{dc_2}{dz_6}c_5 + \frac{dc_4}{dz_6}c_1 + \frac{dc_5}{dz_6}c_2,$$

$$\mathrm{S}_6 = 0.$$

Formons l'expression $\Sigma \mathrm{BU} = 0$; elle se réduit à $\mathrm{U}_6 = 0$. On a

$$\mathrm{U}_6 = \Delta_1 r_{61} + \ldots + \Delta_6 r_{66}.$$

On a, dans le cas de la racine double,

$$\mathrm{R}_6 = 0;$$

comme S_6 est nul, on a en somme $r_6 = 0$, et, par suite, l'équation

$$\mathrm{U}_6 = 0$$

devient

$$\Delta_1 \frac{dr_1}{dz_6} + \Delta_2 \frac{dr_2}{dz_6} + \ldots + \Delta_5 \frac{dr_5}{dz_6} = 0;$$

on a de plus, puisque r_6 est nul,

$$\Delta_1 r_1 + \Delta_2 r_2 + \ldots + \Delta_5 r_5 = 0;$$

il vient donc

$$\Delta_1 \frac{dr_1}{dz_6} + \ldots + \Delta_5 \frac{dr_5}{dz_6} = -\left(r_1 \frac{d\Delta_1}{dz_6} + \ldots + r_5 \frac{d\Delta_5}{dz_6}\right),$$

et l'équation

$$U_6 = 0$$

devient finalement

$$R_1 \frac{dc_4}{dz_6} + R_2 \frac{dc_5}{dz_6} + R_3 \left(z_4 \frac{dc_4}{dz_6} + z_5 \frac{dc_5}{dz_6} \right) - R_4 \frac{dc_1}{dz_6} - R_5 \frac{dc_2}{dz_6} = 0.$$

On vérifie par un calcul facile que cette condition, jointe à $R_6 = 0$, se transforme dans la condition pour que l'équation (11) soit identique.

Ainsi, le cas où l'équation (11) a ses racines égales n'offre rien de particulier.

Il nous reste à construire les développements en série. Nous partirons des équations

$$\begin{aligned}
&\Sigma a\, dx = 0,\\
&\Sigma b\, dx = 0,\\
&\Sigma (R + S\omega)\, dx = 0,\\
&\Sigma [U + S\Delta(\omega)]\, dx = 0,\\
&\Sigma [V + T\Delta(\omega) + S\Delta^2(\omega)]\, dx + P\, d\omega = 0.
\end{aligned}$$

Posons

$$\Delta(\omega) = \omega',$$

les équations précédentes deviennent

$$\begin{aligned}
&\Sigma a\, dx = 0,\\
&\Sigma b\, dx = 0,\\
&\Sigma (R + S\omega)\, dx = 0,\\
&\Sigma (U + S\omega')\, dx = 0,\\
&\Sigma [V + T\omega' + S\Delta(\omega')]\, dx + P\, d\omega = 0.
\end{aligned}$$

Le système $A + B\omega$ mis en place de dx satisfait à ces équations; des quatre premières on tire un autre système

$$M + N\omega',$$

qui satisfait aux quatre premières; M et N sont des fonctions de ω du troisième degré.

On aura alors

$$\frac{dx}{du} = \lambda\,(A + B\omega) + \mu\,(M + N\omega'),$$

$$\frac{dx}{dv} = \lambda'(A + B\omega) + \mu'(M + N\omega');$$

u, v étant les variables indépendantes, soient

$$F(x_1, \ldots, x_6) = u,$$
$$\Phi(x_1, \ldots, x_6) = v.$$

On aura, en posant

$$\Sigma(A + B\omega)\frac{dF}{dx} = \Delta\,(F),$$

$$\Sigma(M + N\omega')\frac{dF}{dx} = \Delta_1(F),$$

les équations

$$1 = \lambda\,\Delta(F) + \mu\,\Delta_1(F),$$
$$0 = \lambda'\Delta(F) + \mu'\Delta_1(F),$$
$$0 = \lambda\,\Delta(\Phi) + \mu\,\Delta_1(\Phi),$$
$$1 = \lambda'\Delta(\Phi) + \mu'\Delta_1(\Phi),$$

qui déterminent λ, μ, λ', μ'. On aura ensuite

$$\Sigma(V + T\omega')(M + N\omega') + \Delta(\omega')\Sigma S(M + N\omega') + I'\Delta_1(\omega) = 0,$$

et enfin

$$\frac{d\omega}{du} = \lambda\,\omega' + \mu\,\Delta_1(\omega), \qquad \frac{d\omega'}{du} = \lambda\,\Delta(\omega') + \mu\,\Delta_1(\omega'),$$

$$\frac{d\omega}{dv} = \lambda'\omega' + \mu'\Delta_1(\omega), \qquad \frac{d\omega'}{dv} = \lambda'\Delta(\omega') + \mu'\Delta_1(\omega').$$

On en tire, en posant

$$H = \Delta(F)\Delta_1(\Phi) - \Delta(\Phi)\Delta_1(F),$$

$$\lambda = \frac{\Delta_1(\Phi)}{H}, \qquad \lambda' = -\frac{\Delta_1(F)}{H}, \qquad \mu = -\frac{\Delta(\Phi)}{H}, \qquad \mu' = \frac{\Delta(F)}{H},$$

les équations

$$\Delta_1(\omega) = \lambda\frac{d\omega}{dv} - \lambda'\frac{d\omega}{du},$$

$$\omega' = \mu'\frac{d\omega}{du} - \mu\frac{d\omega}{dv},$$

$$\Delta(\omega') = \mu'\frac{d\omega'}{du} - \mu'\frac{d\omega'}{dv};$$

d'où finalement les équations

$$\omega' = \mu'\frac{d\omega}{du} - \mu\frac{d\omega}{dv},$$

$$\Sigma(V+T\omega')(M+N\omega') + \left(\mu'\frac{d\omega'}{du} - \mu\frac{d\omega'}{dv}\right)\Sigma MS + I'\left(\lambda\frac{d\omega}{dv} - \lambda'\frac{d\omega}{du}\right) = 0.$$

On en tire

$$\frac{d\omega}{dv} = \alpha + \beta\frac{d\omega}{du},$$

$$\frac{d\omega'}{dv} = \alpha' + \beta'\frac{d\omega'}{du} + \gamma'\frac{d\omega}{du},$$

qui permettent la construction de développements en séries convergentes et montrent que l'on peut prendre arbitrairement les valeurs de quatre des quantités $x_1, \ldots, x_6$ pour les valeurs initiales de u et v, ainsi que les fonctions ω et ω' de u pour la valeur initiale de v (1).

13. On peut former des équations auxquelles doivent satisfaire les fonctions ω_1, ω_2, ω_3, ω_4. Bien que n'ayant pas servi, elles ont néan-

(1) Voir la note de la page 70.

moins un certain intérêt. Reprenons les équations des deux Tableaux :

$$\left\| \begin{matrix} \frac{d\omega_1}{dx_1} & \cdots & \frac{d\omega_1}{dx_6} \\ \frac{d\omega_2}{dx_1} & \cdots & \frac{d\omega_2}{dx_6} \\ \frac{d\omega_3}{dx_1} & \cdots & \frac{d\omega_3}{dx_6} \\ \frac{d\omega_4}{dx_1} & \cdots & \frac{d\omega_4}{dx_6} \\ a_1 & \cdots & a_6 \end{matrix} \right\|, \quad \left\| \begin{matrix} \frac{d\omega_1}{dx_1} & \cdots & \frac{d\omega_1}{dx_6} \\ \frac{d\omega_2}{dx_1} & \cdots & \frac{d\omega_2}{dx_6} \\ \frac{d\omega_3}{dx_1} & \cdots & \frac{d\omega_3}{dx_6} \\ \frac{d\omega_4}{dx_1} & \cdots & \frac{d\omega_4}{dx_6} \\ b_1 & \cdots & b_6 \end{matrix} \right\|.$$

On en tire les équations du Tableau suivant :

$$(62) \qquad \left\| \begin{matrix} \frac{dF}{dx_1} & \cdots & \frac{dF}{dx_6} \\ \frac{d\Phi}{dx_1} & \cdots & \frac{d\Phi}{dx_6} \\ \frac{d\Psi}{dx_1} & \cdots & \frac{d\Psi}{dx_6} \\ a_1 & \cdots & a_6 \\ b_1 & \cdots & b_6 \end{matrix} \right\|.$$

Tous les déterminants de ce Tableau seront nuls quand on y remplacera F, Φ, Ψ par trois des fonctions ω_1, ω_2, ω_3, ω_4.

Développons tous ces déterminants en négligeant d'abord la première colonne du Tableau, puis la seconde, etc., puis la dernière. Dérivons la première équation par rapport à x_1, la seconde par rapport à x_2, etc., la dernière par rapport à x_6, et ajoutons; les dérivées secondes des fonctions F, Φ, Ψ disparaissent et si dans l'équation obtenue on remplace

$$\frac{d\Psi}{dx}$$

par

$$\lambda \frac{dF}{dx} + \mu \frac{d\Phi}{dx} + \nu a + \rho b,$$

en vertu des équations du Tableau (62), les termes en λ et μ disparaissent; le coefficient de ν est alors

$$\mathrm{L}_{2345}\frac{\mathrm{F}\Phi}{x_1 x_6}+\ldots-\mathrm{L}_{6123}\frac{\mathrm{F}\Phi}{x_4 x_5};$$

celui de ρ est

$$\mathrm{M}_{2345}\frac{\mathrm{F}\Phi}{x_1 x_6}+\ldots-\mathrm{M}_{6123}\frac{\mathrm{F}\Phi}{x_4 x_5}.$$

Or, pour les valeurs de F et Φ égales à ω_1 et ω_2, par exemple, on peut remplacer Ψ par ω_3 et ω_4; on en déduit que les coefficients de ν et ρ doivent être nuls. Ces coefficients s'écrivent [*voir* les équations (27)]

$$(63)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(\mathrm{L}_{2345}\frac{d\mathrm{F}}{dx_1}+\mathrm{L}_{3451}\frac{d\mathrm{F}}{dx_2}+\mathrm{L}_{4512}\frac{d\mathrm{F}}{dx_3}+\mathrm{L}_{5123}\frac{d\mathrm{F}}{dx_4}+\mathrm{L}_{1234}\frac{d\mathrm{F}}{dx_5}\right)\frac{d\Phi}{dx_6}\\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &-\left(\mathrm{L}_{1234}\frac{d\mathrm{F}}{dx_6}+\mathrm{L}_{2346}\frac{d\mathrm{F}}{dx_1}+\mathrm{L}_{3461}\frac{d\mathrm{F}}{dx_2}+\mathrm{L}_{4612}\frac{d\mathrm{F}}{dx_3}+\mathrm{L}_{6123}\frac{d\mathrm{F}}{dx_4}\right)\frac{d\Phi}{dx_5}=0 \end{aligned}\right.$$

et

$$(64)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(\mathrm{M}_{2345}\frac{d\mathrm{F}}{dx_1}+\mathrm{M}_{3451}\frac{d\mathrm{F}}{dx_2}+\mathrm{M}_{4512}\frac{d\mathrm{F}}{dx_3}+\mathrm{M}_{5123}\frac{d\mathrm{F}}{dx_4}+\mathrm{M}_{1234}\frac{d\mathrm{F}}{dx_5}\right)\frac{d\Phi}{dx_6}\\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &-\left(\mathrm{M}_{1234}\frac{d\mathrm{F}}{dx_6}+\mathrm{M}_{2346}\frac{d\mathrm{F}}{dx_1}+\mathrm{M}_{3461}\frac{d\mathrm{F}}{dx_2}+\mathrm{M}_{4612}\frac{d\mathrm{F}}{dx_3}+\mathrm{M}_{6123}\frac{d\mathrm{F}}{dx_4}\right)\frac{d\Phi}{dx_5}=0. \end{aligned}\right.$$

Cela posé, je dis que, si ces équations en Φ ont pour une valeur de F quatre solutions communes ω_1, ω_2, ω_3, ω_4, ces fonctions satisfont à la question. Pour cela, désignons par Δ_1, Δ_2, ..., Δ_6 les coefficients de $\frac{d\Phi}{dx_1}, \ldots, \frac{d\Phi}{dx_6}$ dans l'équation (63); par $\Delta'_1, \Delta'_2, \ldots, \Delta'_6$ les coefficients de $\frac{d\Phi}{dx_1}, \ldots, \frac{d\Phi}{dx_6}$ dans l'équation (64). On vérifie sans peine que l'on a, quel que soit F,

$$\begin{aligned} a_1\Delta_1+\ldots+a_6\Delta_6&=0,\\ b_1\Delta_1+\ldots+b_6\Delta_6&=0,\\ a_1\Delta'_1+\ldots+a_6\Delta'_6&=0,\\ b_1\Delta'_1+\ldots+b_6\Delta'_6&=0. \end{aligned}$$

Les équations

$$
\begin{aligned}
X_1 \frac{d\omega_1}{dx_1} + \ldots + X_6 \frac{d\omega_1}{dx_6} &= 0\\
X_1 \frac{d\omega_2}{dx_1} + \ldots + X_6 \frac{d\omega_2}{dx_6} &= 0\\
X_1 \frac{d\omega_3}{dx_1} + \ldots + X_6 \frac{d\omega_3}{dx_6} &= 0\\
X_1 \frac{d\omega_4}{dx_1} + \ldots + X_6 \frac{d\omega_4}{dx_6} &= 0\\
X_1\, a_1 + \ldots + X_6\, a_6 &= 0
\end{aligned}
$$

sont satisfaites pour les valeurs $\Delta_1, \ldots, \Delta_6, \Delta'_1, \ldots, \Delta'_6$ données aux quantités $X_1, \ldots, X_6$; si ces valeurs sont distinctes, c'est-à-dire si l'on n'est pas dans des cas particuliers étudiés, les équations précédentes se réduisent à quatre et tous les déterminants du Tableau

$$
\begin{vmatrix}
\frac{d\omega_1}{dx_1} & \ldots & \frac{d\omega_1}{dx_6}\\
\ldots & \ldots & \ldots\\
\frac{d\omega_4}{dx_1} & \ldots & \frac{d\omega_4}{dx_6}\\
a_1 & \ldots & a_6
\end{vmatrix}
$$

sont nuls, ce qui démontre la proposition.

Cela posé, considérons l'équation

$$\Sigma A \frac{dF}{dx} + \omega \Sigma B \frac{dF}{dx} = 0.$$

On en tirera

$$
(65) \qquad \frac{A_1 \frac{d\omega_1}{dx_1} + \ldots + A_6 \frac{d\omega_1}{dx_6}}{B_1 \frac{d\omega_1}{dx_1} + \ldots + B_6 \frac{d\omega_1}{dx_6}} = \frac{A_1 \frac{d\omega_2}{dx_1} + \ldots + A_6 \frac{d\omega_2}{dx_6}}{B_1 \frac{d\omega_2}{dx_1} + \ldots + B_6 \frac{d\omega_2}{dx_6}}.
$$

Je dis que cette équation est une combinaison des équations (63) et (64). En effet, écrivons les deux équations

$$A_1 \frac{dF}{dx_1} + \ldots + A_6 \frac{dF}{dx_6} = 0,$$

$$B_1 \frac{dF}{dx_1} + \ldots + B_6 \frac{dF}{dx_6} = 0.$$

Si l'on forme les combinaisons où manquent successivement $\frac{dF}{dx_6}$, $\frac{dF}{dx_1}$, ..., $\frac{dF}{dx_5}$, ce sont

$$(A_1 B_6 - A_6 B_1) \frac{dF}{dx_1} + \ldots + (A_5 B_6 - A_6 B_5) \frac{dF}{dx_5} = 0,$$

$$(B_1 A_5 - A_1 B_5) \frac{dF}{dx_1} + \ldots + (B_6 A_5 - A_6 B_5) \frac{dF}{dx_6} = 0.$$

Or ces équations sont encore

$$(\lambda L_{2345} - \mu M_{2345}) \frac{dF}{dx_1} + \ldots = 0,$$

....

D'où il suit bien que les rapports

$$\frac{A_1 B_6 - A_6 B_1}{\lambda L_{2345} - \mu M_{2345}}$$

auront tous la même valeur et que par suite l'équation (65) est bien la combinaison obtenue en multipliant (63) par λ, (64) par μ et en retranchant.