JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

N. SALTYKOW

Étude sur les intégrales d'un système des équations différentielles aux dérivées partielles de plusieurs fonctions inconnues

Journal de mathématiques pures et appliquées 5e série, tome 3 (1897), p. 423-428.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1897_5_3__423_0>

Étude sur les intégrales d'un système des équations différentielles aux dérivées partielles de plusieurs fonctions inconnues;

PAR M. N. SALTYKOW.

1. Soient $z_1, z_2, \ldots, z_n$ des fonctions de variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_{m+p}$.

Le système d'équations différentielles que je veux étudier ici est de la forme

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial z_\nu}{\partial x_h} + \displaystyle\sum_{k=m+1}^{m+p} X_k^h \frac{\partial z_\nu}{\partial x_k} - X^{h\nu} = 0 \\ (h = 1, 2, \ldots, m;\ \nu = 1, 2, \ldots, n), \end{cases}$$

X_k^h, $X^{h\nu}$ étant des fonctions de toutes les variables x et z. L'indice p est un nombre entier quelconque. Si $p = 0$ nous y comprendrons le cas où toutes les fonctions X_k^h s'annulent, le système (1) étant

$$\frac{\partial z_\nu}{\partial x_h} - X^{h\nu} = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, m;\ \nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Il est aisé d'intégrer ce dernier système si les fonctions $X^{h\nu}$ satisfont à certaines conditions. Mais nous ne nous y arrêterons pas, car ce système sera compris dans nos recherches sur les équations (1).

Un second cas particulier du système (1), correspondant à la valeur

$m=1$, a été intégré par Jacobi [1]. Mais l'illustre géomètre n'a pas examiné le caractère des intégrales qu'il avait obtenues.

Enfin, si $n=1$, les équations (1) présentent un système bien connu des équations linéaires aux dérivées partielles d'une seule fonction inconnue.

2. Supposons que le système de n équations distinctes par rapport aux variables z

$$(2)\qquad f_i(x_1, x_2, \ldots, x_{m+p}, z_1, z_2, \ldots, z_n) = 0 \qquad (i=1, 2, \ldots, n),$$

soit une solution des équations (1). Les équations (2), dérivées par rapport aux variables x, donneront

$$(3)\qquad \frac{\partial f_i}{\partial x_h} + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial z_\nu}\frac{\partial z_\nu}{\partial x_h} = 0,$$

$$(4)\qquad \frac{\partial f_i}{\partial x_k} + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial z_\nu}\frac{\partial z_\nu}{\partial x_k} = 0,$$

l'indice h prenant toutes les valeurs de 1 à m, k les valeurs de $m+1$ à $m+p$.

Multiplions l'égalité (4) par X_k^h et sommons le résultat par rapport à l'indice k. En y ajoutant l'égalité (3), il viendra

$$(5)\qquad \frac{\partial f_i}{\partial x_h} + \sum_{k=m+1}^{m+p} X_k^h \frac{\partial f_i}{\partial x_k} + \sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{\partial z_\nu}{\partial x_h} + \sum_{k=m+1}^{m+p} X_k^h \frac{\partial z_\nu}{\partial x_k}\right)\frac{\partial f_i}{\partial z_\nu} = 0.$$

Comme en vertu des équations (2) on a identiquement

$$\frac{\partial z_\nu}{\partial x_h} + \sum_{k=m+1}^{m+p} X_k^h \frac{\partial z_\nu}{\partial x_k} = X^{h\nu},$$

[1] *G. W.*, B. IV, S. 7-9. Depuis, M. Hamburger est revenu deux fois aux mêmes équations (*Journ. Crelle*, B. 100, S. 404; B. 110, S. 171).

les égalités (5) deviennent

$$(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f_i}{\partial x_h} + \displaystyle\sum_{k=m+1}^{m+p} X_k^h \frac{\partial f_i}{\partial x_k} + \sum_{\nu=1}^{n} X^{h\nu} \frac{\partial f_i}{\partial z_\nu} = 0 \\ (h = 1, 2, \ldots, m;\ i = 1, 2, \ldots, n). \end{cases}$$

Ainsi, pour que les valeurs des fonctions z tirées de (2) satisfassent aux équations (1), il est nécessaire que les équations (6) soient des conséquences de (2).

3. Prenons donc le système de m équations aux dérivées partielles du premier ordre d'une seule fonction f par rapport aux variables x et z

$$(7)\qquad \frac{\partial f}{\partial x_h} + \sum_{k=m+1}^{m+p} X_k^h \frac{\partial f}{\partial x_k} + \sum_{\nu=1}^{n} X^{h\nu} \frac{\partial f}{\partial z_\nu} = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, m).$$

Supposons que ce système ait n intégrales distinctes $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

Nous allons montrer que les équations

$$(8)\qquad f_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

fournissent une solution des équations (1).

En effet, on a

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_h} + \sum_{k=m+1}^{m+p} X_k^h \frac{\partial f_i}{\partial x_k} + \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{\partial z_\nu}{\partial x_h} + \sum_{k=m+1}^{m+p} X_k^h \frac{\partial z_\nu}{\partial x_k} \right) \frac{\partial f_i}{\partial z_\nu} = 0.$$

Les fonctions f_i étant des intégrales des équations (7), on aura de même

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_h} + \sum_{k=m+1}^{m+p} X_k^h \frac{\partial f_i}{\partial x_k} + \sum_{\nu=1}^{n} X^{h\nu} \frac{\partial f_i}{\partial z_\nu} = 0.$$

Il viendra donc

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial z_\nu}\left(\frac{\partial z_\nu}{\partial x_h} + \sum_{k=m+1}^{m+p} X_k^h \frac{\partial z_\nu}{\partial x_k} - X^{h\nu}\right) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Le déterminant fonctionnel des fonctions f_i par rapport aux variables z ne s'annulant pas, il s'ensuit que pour les valeurs des fonctions z tirées des équations (8), on a les identités

$$\frac{\partial z_\nu}{\partial x_h} + \sum_{k=m+1}^{m+p} X_k^h \frac{\partial z_\nu}{\partial x_k} - X^{h\nu} = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n;\ h = 1, 2, \ldots, m).$$

4. Supposons que les fonctions X_k^h, $X^{h\nu}$ sont telles que les m équations (7) forment un système jacobien. Soit $f_1, f_2, \ldots, f_{p+n}$ un système d'intégrales distinctes des équations (7), $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$ étant des fonctions arbitraires distinctes de ces intégrales. D'après le théorème démontré au numéro précédent, les équations

$$\pi_i(f_1, f_2, \ldots, f_{p+n}) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

fournissent une solution des équations (1).

Il est aisé de démontrer que les équations (9) *présentent la solution la plus générale des équations* (1). *C'est-à-dire que chaque solution*

$$(10) \qquad z_\nu = \psi_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_{m+p}) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

des équations (1) *est contenue dans les formules* (9), *à condition que, pour toutes les valeurs de variables x et z satisfaisant aux relations* (10), *les fonctions X_k^h, $X^{h\nu}$ sont holomorphes.*

En effet, pour chaque valeur de l'indice h, nous avons le système des identités suivantes :

$$\frac{\partial \psi_\nu}{\partial x_h} + \sum_{k=m+1}^{m+p} X_k^h \frac{\partial \psi_\nu}{\partial x_k} - X^{h\nu} = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\frac{\partial f_s}{\partial x_h} + \sum_{k=m+1}^{m+p} X_k^h \frac{\partial f_s}{\partial x_k} + \sum_{\nu=1}^{n} X^{h\nu} \frac{\partial f_s}{d z_\nu} \qquad (s = 1, 2, \ldots, p+n),$$

où les fonctions z sont remplacées par leurs valeurs (10). En éliminant les n valeurs $X^{h\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, il viendra

$$(11)\qquad Dx_h f_s + \sum_{k=m+1}^{m+p} X_k^h Dx_k f_s = 0, \qquad s = 1, 2, \ldots, p+n,$$

où l'on a

$$Dx_h f_s = \frac{df_s}{\partial x_{sn}} + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f_s}{\partial z_\nu} \frac{\partial \psi_\nu}{\partial x_{sn}}.$$

Cela posé, éliminons les p valeurs X_k^h, $k = m+1, \ldots, m+p$, entre les équations (11). Leur nombre étant $p+n$, nous obtiendrons n identités nouvelles indépendantes de X_k^h. On voit aisément qu'elles sont de la forme suivante :

$$\Delta_{h\sigma} = 0, \qquad \sigma = p+1, p+2, \ldots, p+n,$$

les $\Delta_{h\sigma}$ étant des déterminants fonctionnels de $f_1, f_2, \ldots, f_p, f_\sigma$ par rapport à $x_h, x_{m+1}, \ldots, x_{m+p}$, en y considérant $z_1, z_2, \ldots, z_n$ comme des fonctions (10) de $x_1, x_2, \ldots, x_{m+p}$:

$$\Delta_{h\sigma} = \begin{vmatrix} Dx_h f_1 & Dx_{m+1} f_1 & \ldots & Dx_{m+p} f_1 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ Dx_h f_p & Dx_{m+1} f_p & \ldots & Dx_{m+p} f_p \\ Dx_h f_\sigma & Dx_{m+1} f_\sigma & \ldots & Dx_{m+p} f_\sigma \end{vmatrix}.$$

Les identités

$$\Delta_{h\sigma} = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, m)$$

montrent que ces valeurs des fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_p, f_\sigma$ sont liées par une relation. L'indice σ prenant n valeurs, on en conclut que toutes les intégrales (10) sont telles que, si on les substitue dans $f_1, f_2, \ldots, f_{p+n}$, les fonctions ainsi obtenues sont liées par n relations. Toutes ces intégrales sont donc fournies par les relations (10).

La démonstration que je viens d'exposer ici revient à celle qui m'a été indiquée par M. Liapounow dans le cas d'une seule équation linéaire aux dérivées partielles d'une seule fonction inconnue. Il est évident que les considérations citées ne sont permises que si, pour toutes les valeurs de variables x et z satisfaisant aux relations (10), les coefficients X_k^h, $X^{h\nu}$ sont holomorphes. En effet, si ce n'était pas le cas, il pourrait arriver que les fonctions f_i, ainsi que leurs dérivées partielles par rapport aux variables x et z, ne soient plus holomorphes pour les mêmes valeurs des variables. C'est alors que nous serions en état de dire *a priori* qu'un ou plusieurs déterminants $\Delta_{h\sigma}$ pourraient devenir infinis ou indéterminés. De pareilles intégrales (10) ne seront donc pas contenues dans les formules (9).

Soit, par exemple,

$$\frac{\partial z_1}{\partial x} = 1 + \sqrt{z_1 - x}, \qquad \frac{\partial z_1}{\partial y} = (z_2 - xy)\sqrt{z_1 - x},$$

$$\frac{\partial z_2}{\partial x} = y, \qquad \frac{\partial z_2}{\partial y} = x + (z_2 - xy)(x - 2\sqrt{z_1 - x})$$

un système de la forme (1). D'après la théorie exposée, la solution générale de ces équations est

$$z_1 = x + [\tfrac{1}{2}x - C_1 \operatorname{tang}(C_1 y + C_2)]^2,$$
$$z_2 = xy - 2C_1^2 \operatorname{séc}^2(C_1 y + C_2),$$

C_1, C_2 étant des constantes arbitraires. Évidemment, elle ne contient pas la solution

$$z_1 = x, \qquad z_2 = xy,$$

les coefficients des équations proposées n'étant plus holomorphes au voisinage de toutes les valeurs des variables x et z qui satisfont à ces dernières relations.

Les équations (1), dont la théorie vient d'être développée dans cet article, sont susceptibles de beaucoup d'applications dans l'Analyse mathématique. Nous en donnerons bientôt quelques exemples.