JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

P. APPELL

Sur les équations de l'Hydrodynamique et la théorie des tourbillons

Journal de mathématiques pures et appliquées 5e série, tome 3 (1897), p. 5-16.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1897_5_3__5_0>

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

Sur les équations de l'Hydrodynamique et la théorie des tourbillons;

PAR M. P. APPELL.

1. On sait que la théorie des mouvements tourbillonnaires repose sur un théorème énoncé par Helmholtz. Des démonstrations nouvelles de ce théorème fondamental ont été données par M. Kirchhoff, par Sir W. Thomson et par M. Poincaré.

M. Maurice Lévy a remarqué [1] que des équations qui renferment tous les éléments de la théorie des tourbillons et qui sont analogues, parfois même identiques, à celles de Kirchhoff se trouvent dans un Mémoire de Cauchy, présenté à l'Académie des Sciences de Paris en 1815 et imprimé dans le *Recueil des Savants étrangers* en 1827; ce Mémoire, intitulé : *Théorie de la propagation des ondes à la surface d'un fluide pesant d'une profondeur indéfinie* est reproduit

[1] Voyez un important article de M. Maurice Lévy : *L'Hydrodynamique moderne et l'hypothèse des actions à distance* (*Revue générale des Sciences pures et appliquées*, 15 décembre 1890).

Voyez également un excellent Travail historique de M. Brillouin, publié dans les *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse* en 1885.

dans le premier Volume (1[re] série) des *Œuvres complètes de Cauchy*, imprimé chez Gauthier-Villars en 1882, et les équations dont il est question se trouvent dans la deuxième Partie, section première.

En me plaçant surtout au point de vue de l'enseignement, je me propose d'indiquer une interprétation simple et immédiate des équations de Cauchy, donnant les théorèmes fondamentaux de la théorie des tourbillons et conduisant en même temps aux équations de Weber.

2. Imaginons un fluide soumis à des forces dérivant d'un potentiel et dont la densité est fonction de la pression.

Cauchy suppose la densité constante; mais, et c'est là une remarque qui a déjà été faite souvent, son calcul s'applique identiquement au cas plus général où la densité est fonction de la pression.

Pour bien préciser les notations, nous reprendrons ici ce calcul.

Appelons avec Lagrange a, b, c les coordonnées d'une molécule du fluide à l'instant initial $t = 0$, et u_0, v_0, w_0 les projections de la vitesse initiale de cette molécule sur les axes; appelons de même x, y, z les coordonnées de cette molécule à l'instant t et u, v, w les projections de sa vitesse; supposons enfin que les forces agissant sur le fluide dérivent d'un potentiel U.

Les coordonnées x, y, z d'une molécule au temps t sont évidemment des fonctions des coordonnées initiales a, b, c de cette molécule et du temps

$$\begin{aligned} x &= f\,(a, b, c, t), \\ y &= f_1(a, b, c, t), \\ z &= f_2(a, b, c, t); \end{aligned}$$

en outre

$$u = \frac{\partial x}{\partial t}, \qquad v = \frac{\partial y}{\partial t}, \qquad w = \frac{\partial z}{\partial t},$$

de sorte que u, v, w sont fonctions des mêmes variables a, b, c, t.

Les équations du mouvement sont alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial t}, \\ \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial t}, \\ \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial t}, \end{aligned}$$

p désignant la pression et μ la densité. Comme μ est fonction de p par hypothèse, on peut poser

$$U - \int \frac{dp}{\mu} = \psi,$$

et écrire

$$(1) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \qquad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial z}.$$

Dans ces équations, ψ est regardé comme fonction de x, y, z, t; mais x, y, z sont fonctions de a, b, c, t : on a donc

$$\frac{\partial \psi}{\partial a} = \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial \psi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial a},$$

ou, d'après (1),

$$(2) \qquad \frac{\partial \psi}{\partial a} = \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial a}.$$

On trouve de même

$$(3) \qquad \frac{\partial \psi}{\partial b} = \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial b}.$$

Éliminant ψ entre ces deux équations à l'aide de la relation

$$\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\partial \psi}{\partial a}\right) = \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial \psi}{\partial b}\right),$$

on a l'équation

$$(4) \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial t\,\partial b}\frac{\partial x}{\partial a} - \frac{\partial^2 u}{\partial t\,\partial a}\frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial^2 v}{\partial t\,\partial b}\frac{\partial y}{\partial a} - \frac{\partial^2 v}{\partial t\,\partial a}\frac{\partial y}{\partial b} \\ &\qquad + \frac{\partial^2 w}{\partial t\,\partial b}\frac{\partial z}{\partial a} - \frac{\partial^2 w}{\partial t\,\partial a}\frac{\partial z}{\partial b} = 0. \end{aligned}\right.$$

Si, maintenant, on a égard aux formules

$$u = \frac{\partial x}{\partial t}, \qquad v = \frac{\partial y}{\partial t}, \qquad w = \frac{\partial z}{\partial t},$$

on reconnaît sans peine que le premier membre de (4) est la dérivée partielle, par rapport à t, de la quantité

$$\frac{\partial u}{\partial b}\frac{\partial x}{\partial a}-\frac{\partial u}{\partial a}\frac{\partial x}{\partial b}+\frac{\partial v}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial a}-\frac{\partial v}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial b}+\frac{\partial w}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial a}-\frac{\partial w}{\partial a}\frac{\partial z}{\partial b}.$$

Cette quantité est donc indépendante du temps t : elle est égale, pendant toute la durée du mouvement, à sa valeur initiale; or, à l'époque $t = 0$, on a

$$u = u_0, \qquad v = v_0, \qquad w = w_0, \qquad x = a, \qquad y = b, \qquad z = c,$$

et, par suite, toujours pour $t = 0$,

$$\frac{\partial x}{\partial a} = 1, \qquad \frac{\partial x}{\partial b} = 0, \qquad \frac{\partial y}{\partial a} = 0, \qquad \frac{\partial y}{\partial b} = 1;$$

la valeur initiale de la quantité considérée est donc

$$\frac{\partial u_0}{\partial b} - \frac{\partial v_0}{\partial a}.$$

On en conclut l'équation

$$(5)\quad \frac{\partial u}{\partial b}\frac{\partial x}{\partial a}-\frac{\partial u}{\partial a}\frac{\partial x}{\partial b}+\frac{\partial v}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial a}-\frac{\partial v}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial b}+\frac{\partial w}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial a}-\frac{\partial w}{\partial a}\frac{\partial z}{\partial b}=\frac{\partial u_0}{\partial b}-\frac{\partial v_0}{\partial a}$$

et deux équations analogues obtenues en permutant a, b, c; x, y, z; u, v, w.

Telles sont les trois relations établies par Cauchy et dénotées (15) dans la deuxième Partie de son Mémoire.

3. Voici maintenant l'interprétation qu'on peut en donner. Considérons l'expression différentielle

$$(6)\qquad u\,dx + v\,dy + w\,dz - (u_0\,da + v_0\,db + w_0\,dc),$$

où t est regardé comme une constante, et x, y, z comme des fonctions de a, b, c, t correspondant au mouvement du fluide. Les équations de Cauchy telles que (5) signifient que, *pour chaque valeur de t, l'expression* (6) *est une différentielle totale exacte.*

En effet, t étant regardé comme une constante, on a

$$dx = \frac{\partial x}{\partial a}da + \frac{\partial x}{\partial b}db + \frac{\partial x}{\partial c}dc,$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial a}da + \frac{\partial y}{\partial b}db + \frac{\partial y}{\partial c}dc,$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial a}da + \frac{\partial z}{\partial b}db + \frac{\partial z}{\partial c}dc.$$

L'expression (6) s'écrit alors

$$\left(u\frac{\partial x}{\partial a} + v\frac{\partial y}{\partial a} + w\frac{\partial z}{\partial a} - u_0\right)da + \left(u\frac{\partial x}{\partial b} + v\frac{\partial y}{\partial b} + w\frac{\partial z}{\partial b} - v_0\right)db, \\ + \left(u\frac{\partial x}{\partial c} + v\frac{\partial y}{\partial c} + w\frac{\partial z}{\partial c} - w_0\right)dc,$$

expression de la forme

$$\mathrm{A}\,da + \mathrm{B}\,db + \mathrm{C}\,dc;$$

et les relations telles que (5) signifient, comme on le vérifie immédiatement,

$$\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial a} = \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial b}, \quad \frac{\partial \mathrm{C}}{\partial b} = \frac{\partial \mathrm{B}}{\partial c}, \quad \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial c} = \frac{\partial \mathrm{C}}{\partial a};$$

la quantité considérée est donc bien une différentielle exacte d'une fonction

$$\mathrm{F}(a, b, c, t)$$

et l'on a, pendant tout le mouvement,

$$(7) \qquad \begin{cases} u\dfrac{\partial x}{\partial a} + v\dfrac{\partial y}{\partial a} + w\dfrac{\partial z}{\partial a} - u_0 = \dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial a}, \\ u\dfrac{\partial x}{\partial b} + v\dfrac{\partial y}{\partial b} + w\dfrac{\partial z}{\partial b} - v_0 = \dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial b}, \\ u\dfrac{\partial x}{\partial c} + v\dfrac{\partial y}{\partial c} + w\dfrac{\partial z}{\partial c} - w_0 = \dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial c}, \end{cases}$$

équations que l'on peut résumer dans l'équation unique

$$u\,dx + v\,dy + w\,dz - (u_0\,da + v_0\,db + w_0\,dc) = d\mathrm{F}. \tag{8}$$

D'après ces équations (7), les trois dérivées $\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial a}, \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial b}, \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial c}$ s'annulent pour $t = 0$, car u, v, w prennent alors les valeurs u_0, v_0, w_0 et x, y, z les valeurs a, b, c. Donc, pour $t = 0$, F se réduit à une constante indépendante de a, b, c.

4. Dans cette manière d'interpréter le calcul de Cauchy, le théorème de Lagrange sur le potentiel des vitesses devient évident. Ce théorème consiste en ce que *si*

$$u_0\,da + v_0\,db + w_0\,dc$$

est une différentielle totale exacte d'une fonction $\varphi(a, b, c)$,

$$u\,dx + v\,dy + w\,dz$$

est également une différentielle exacte. On a en effet

$$u\,dx + v\,dy + w\,dz = u_0\,da + v_0\,db + w_0\,dc + d\mathrm{F};$$

si donc

$$u_0\,da + v_0\,db + w_0\,dc = d\varphi,$$

on a

$$u\,dx + v\,dy + w\,dz = d(\varphi + \mathrm{F}),$$

et le théorème de Lagrange est démontré.

5. Le théorème exprimé par l'identité (8) permet d'établir immédiatement le théorème de Helmholtz sous la forme donnée par Sir W. Thomson et adoptée par M. Poincaré dans ses Leçons (¹).

Soient C_0 une courbe fermée prise dans le fluide à l'instant $t = 0$, et C la courbe fermée suivant laquelle sont disposées à l'instant t les

(¹) Poincaré, *Leçons sur la théorie des tourbillons*; Carré, 1893.

molécules qui étaient primitivement sur C_0. On a, quel que soit t,

$$(9) \qquad \int_C (u\,dx + v\,dy + w\,dz) = \int_{C_0} (u_0\,da + v_0\,db + w_0\,dc),$$

la première intégrale étant prise le long de C et la deuxième le long de C_0.

En effet, d'après l'identité (8), la différence des deux intégrales (9) est

$$\int_{C_0} dF(a, b, c, t),$$

c'est-à-dire o, puisque la courbe C_0 est fermée. Réciproquement, en partant de cette propriété, on remonte immédiatement à l'identité (8) et, par suite, aux équations de Cauchy. Car, si la différence

$$\int_C (u\,dx + v\,dy + w\,dz) - \int_{C_0} (u_0\,da + v_0\,db + w_0\,dc)$$

est nulle quelle que soit la courbe C_0, l'expression

$$u\,dx + v\,dy + w\,dz - (u_0\,da + v_0\,db + w_0\,dc),$$

considérée comme fonction des variables indépendantes a, b, c, est une différentielle totale exacte.

6. Au sujet de la fonction F qui s'introduit ainsi dans la théorie du mouvement des fluides, nous ferons les remarques suivantes :

Soit Γ_0 un arc de courbe non fermé, d'extrémités M_0 et M_1, pris dans le fluide à l'instant initial; à l'instant t, les molécules, primitivement situées sur Γ_0, se trouvent sur une courbe Γ d'extrémités P_0 et P_1. Appelons a_0, b_0, c_0 et a_1, b_1, c_1 les coordonnées des points M_0 et M_1; x_0, y_0, z_0 et x_1, y_1, z_1 celles des points P_0 et P_1. Évaluons l'intégrale

$$(10) \qquad \int_{(P_0)}^{(P_1)} u\,dx + v\,dy + w\,dz,$$

prise sur l'arc Γ. Les coordonnées x, y, z d'un point P de cet arc sont fonctions des coordonnées a, b, c d'un point M de Γ_0 et de t,

$$(11)\qquad \begin{cases} x = f(a, b, c, t), \\ y = f_1(a, b, c, t), \\ z = f_2(a, b, c, t). \end{cases}$$

Quand le point géométrique M décrit l'arc Γ_0 de M_0 en M_1, le point P décrit Γ de P_0 en P_1. En faisant, dans l'intégrale (10), le changement de variables exprimé par les formules (11), où t a une valeur constante, on trouve

$$\int_{(P_0)}^{(P_1)} u\,dx + v\,dy + w\,dz$$
$$= \int_{(M_0)}^{(M_1)} \left(u\frac{\partial x}{\partial a} + v\frac{\partial y}{\partial a} + w\frac{\partial z}{\partial a}\right)da + \left(u\frac{\partial x}{\partial b} + \ldots\right)db + \left(u\frac{\partial x}{dc} + \ldots\right)dc,$$

ou encore, d'après les relations (7),

$$\int_{(P_0)}^{(P_1)} u\,dx + v\,dy + w\,dz = \int_{(M_0)}^{(M_1)} u_0\,da + v_0\,db + w_0\,dc + dF.$$

et en transposant

$$\int_{(P_0)}^{(P_1)} u\,dx + v\,dy + w\,dz - \int_{(M_0)}^{(M_1)} u_0\,da + v_0\,db + w_0\,dc$$
$$= \int_{(M_0)}^{(M_1)} dF = F(a_1, b_1, c_1, t) - F(a_0, b_0, c_0, t),$$

relation qui pourrait servir à définir géométriquement la fonction F, car les intégrales du premier membre ont des significations simples.

7. Reprenons les équations du mouvement (1) et les relations (7)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial x},$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial y},$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial z},$$

$$u\frac{\partial x}{\partial a}+v\frac{\partial y}{\partial a}+w\frac{\partial z}{\partial a}=u_0+\frac{\partial F}{\partial a},$$
$$u\frac{\partial x}{\partial b}+v\frac{\partial y}{\partial b}+w\frac{\partial z}{\partial b}=v_0+\frac{\partial F}{\partial b},$$
$$u\frac{\partial x}{\partial c}+v\frac{\partial y}{\partial c}+w\frac{\partial z}{\partial c}=w_0+\frac{\partial F}{\partial c},$$

où x, y, z, u, v, w, F sont des fonctions de a, b, c, t; u_0, v_0, w_0 des fonctions de a, b, c; ψ une fonction de x, y, z, t.

Différentions la première équation du deuxième groupe par rapport à t; il vient

$$\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial a}+\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial a}+\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial a}+u\frac{\partial^2 x}{\partial a\,\partial t}+v\frac{\partial^2 y}{\partial a\,\partial t}+w\frac{\partial^2 z}{\partial a\,\partial t}=\frac{\partial^2 t}{\partial a\,\partial t};$$

mais on a

$$\frac{\partial x}{\partial t}=u,\qquad \frac{\partial^2 x}{\partial a\,\partial t}=\frac{\partial u}{\partial a},\qquad \ldots,\qquad \frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial\psi}{\partial x},\qquad \ldots;$$

on peut donc écrire

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial a}+\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial a}+u\frac{\partial u}{\partial a}+v\frac{\partial v}{\partial a}+w\frac{\partial w}{\partial a}=\frac{\partial^2 F}{\partial a\,\partial t}.$$

La première ligne de cette équation est identique à $\frac{\partial\psi}{\partial a}$, car ψ dépend de a, b, c par l'intermédiaire de x, y, z : on peut donc écrire l'équation

$$\frac{\partial}{\partial a}\left[\psi+\frac{1}{2}(u^2+v^2+w^2)-\frac{\partial F}{\partial t}\right]=0.$$

On trouverait de même

$$\frac{\partial}{\partial b}\left[\psi+\frac{1}{2}(u^2+v^2+w^2)-\frac{\partial F}{\partial t}\right]=0,$$
$$\frac{\partial}{\partial c}\left[\psi+\frac{1}{2}(u^2+v^2+w^2)-\frac{\partial F}{\partial t}\right]=0.$$

La fonction entre crochets est donc indépendante de a, b, c et ne dépend plus que de t. Donc

$$\psi + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) - \frac{\partial F}{\partial t} = \chi(t).$$

Comme jusqu'ici la fonction F a simplement été définie par la condition que ses dérivées partielles par rapport à a, b, c aient des valeurs données, elle n'est déterminée qu'à une fonction de t près et l'on peut faire rentrer $\int \chi(t)\,dt$ dans F; on a donc enfin

$$\psi + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) = \frac{\partial F(a, b, c, t)}{\partial t},$$

où la fonction F est maintenant complètement déterminée à une constante additive près. On peut convenir de déterminer cette constante de façon que F s'annule avec t, car, pour $t = 0$, F est indépendant de a, b, c (n° 3). Ces équations reviennent à celles de Weber.

8. En adoptant les notations habituelles, désignons par ξ, η, ζ les projections du vecteur tourbillon

$$2\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z},$$

$$2\eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x},$$

$$2\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y},$$

où u, v, w sont supposés exprimés en fonctions de x, y, z, t. Appelons en outre ξ_0, η_0, ζ_0 les valeurs de ξ, η, ζ à l'instant $t = 0$,

$$2\xi_0 = \frac{\partial w_0}{\partial b} - \frac{\partial v_0}{\partial c},$$

$$2\eta_0 = \frac{\partial u_0}{\partial c} - \frac{\partial w_0}{\partial a},$$

$$2\zeta_0 = \frac{\partial v_0}{\partial a} - \frac{\partial u_0}{\partial b}.$$

Cauchy établit entre ces quantités les relations suivantes [équations (16), seconde Partie]

$$(12)\quad \begin{cases} D\xi = \dfrac{\partial x}{\partial a}\xi_0 + \dfrac{\partial x}{\partial b}\eta_0 + \dfrac{\partial x}{\partial c}\zeta_0, \\ D\eta = \dfrac{\partial y}{\partial a}\xi_0 + \dfrac{\partial y}{\partial b}\eta_0 + \dfrac{\partial y}{\partial c}\zeta_0, \\ D\zeta = \dfrac{\partial z}{\partial a}\xi_0 + \dfrac{\partial z}{\partial b}\eta_0 + \dfrac{\partial z}{\partial c}\zeta_0, \end{cases}$$

où D désigne le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial a} & \dfrac{\partial x}{\partial b} & \dfrac{\partial x}{\partial c} \\ \dfrac{\partial y}{\partial a} & \dfrac{\partial y}{\partial b} & \dfrac{\partial y}{\partial c} \\ \dfrac{\partial z}{\partial a} & \dfrac{\partial z}{\partial b} & \dfrac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix}.$$

Ces équations de Cauchy permettent de vérifier facilement cette conséquence du théorème de Helmholtz, que les *lignes de tourbillon se conservent*. C'est ce qu'on voit en employant l'analyse de Kirchhoff dans ses *Vorlesungen über mathematische Physik*, p. 167. On appelle *lignes de tourbillon* les lignes qui, à l'instant t, admettent pour tangentes en chacun de leurs points le vecteur de projections (ξ, η, ζ). Ces lignes ont donc pour équations différentielles

$$(\mathrm{T})\qquad \frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} = \frac{dz}{\zeta}.$$

A l'instant initial $t = 0$, les lignes de tourbillon ont pour équations différentielles

$$(\mathrm{T}_0)\qquad \frac{da}{\xi_0} = \frac{db}{\eta_0} = \frac{dc}{\zeta_0}.$$

Il faut montrer que les molécules qui, à l'instant initial, sont sur une ligne de tourbillon T_0, sont à l'instant t sur une ligne de tourbillon T. La molécule qui, à l'instant $t = 0$, a pour coordonnées a, b, c, possède au temps t les coordonnées x, y, z liées à a, b, c par les relations de la forme

$$x = f\,(a, b, c, t),$$
$$y = f_1(a, b, c, t),$$
$$z = f_2(a, b, c, t).$$

Quand le point géométrique a, b, c se déplace sur T_0 de da, db, dc, le point x, y, z subit un déplacement géométrique correspondant

$$(13)\qquad \begin{cases} dx = \dfrac{\partial x}{\partial a} da + \dfrac{\partial x}{\partial b} db + \dfrac{\partial x}{\partial c} dc, \\ dy = \dfrac{\partial y}{\partial a} da + \dfrac{\partial y}{\partial b} db + \dfrac{\partial y}{\partial c} dc, \\ dz = \dfrac{\partial z}{\partial a} da + \dfrac{\partial z}{\partial b} db + \dfrac{\partial z}{\partial c} dc. \end{cases}$$

Le point a, b, c se déplaçant sur T_0, da, db, dc vérifient les relations (T_0) et l'on a, en appelant λ un facteur de proportionnalité,

$$da = \lambda \xi_0, \qquad db = \lambda \eta_0, \qquad dc = \lambda \zeta_0.$$

Alors, d'après (12) et (13),

$$dx = \lambda\left(\frac{\partial x}{\partial a}\xi_0 + \frac{\partial x}{\partial b}\eta_0 + \frac{\partial x}{\partial c}\zeta_0\right) = \frac{\lambda}{D}\xi,$$
$$dy = \lambda\left(\frac{\partial y}{\partial a}\xi_0 + \frac{\partial y}{\partial b}\eta_0 + \frac{\partial y}{\partial c}\zeta_0\right) = \frac{\lambda}{D}\eta,$$
$$dz = \lambda\left(\frac{\partial z}{\partial a}\xi_0 + \frac{\partial z}{\partial b}\eta_0 + \frac{\partial z}{\partial c}\zeta_0\right) = \frac{\lambda}{D}\zeta,$$

relations qui montrent que dx, dy, dz sont proportionnels à ξ, η, ζ, c'est-à-dire que le point x, y, z décrit une ligne de tourbillon T.

Le même fait de la conservation a lieu pour les lignes définies par les équations (T_0) et (T) en prenant pour ξ_0, η_0, ζ_0 des fonctions arbitraires de a, b, c, pourvu que ξ, η, ζ soient donnés par les formules (12) de Cauchy, dans lesquelles D est un facteur quelconque de proportionnalité.