JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

P. GÜNTHER

Les recherches de Gauss dans la théorie des fonctions elliptiques

Journal de mathématiques pures et appliquées 5e série, tome 3 (1897), p. 95-112.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1897_5_3__95_0>

Les recherches de Gauss dans la théorie des fonctions elliptiques ;

Par M. P. GÜNTHER (1).

Mémoire présenté par M. H. Weber à la Société royale des Sciences de Göttingue. en avril 1894.

Traduit par M. **L. LAUGEL**.

Dans la première des lettres où Jacobi (2) communique sa nouvelle théorie des fonctions elliptiques au vénérable maître Legendre, il dit entre autres choses avoir appris que Gauss, dès l'année 1808, était en

(1) *Voir* la Notice à la fin du Mémoire.

(2) La collection de ces lettres de Jacobi et Legendre se trouve dans le *Bulletin* de M. Darboux, 1re série, t. VIII et IX, 1875. Consulter un intéressant article de M. Jules Tannery, rendant compte de l'Ouvrage de M. Kœnigsberger, *Historique des fonctions elliptiques de* 1826 *à* 1829 (*Bulletin* de M. Darboux, 2e série, t. III, 1879). Dans le même Recueil l'on trouvera encore, 2e série, t. IX, 1885, un article de M. Bertrand rendant compte du Livre de M. Bjerknes, *Niels Henrik Abel...*, où l'éminent géomètre nous dit le dernier mot qui trancherait la question, même si l'on n'avait jamais retrouvé les cahiers de Gauss : « ... il fallait le croire, puisque Gauss l'affirmait. Par l'élévation du caractère comme par la puissance du génie, il était le plus grand de tous. » Dans ces derniers temps, M. Th. Pepin a publié une *Introduction à la théorie des fonctions elliptiques d'après les Œuvres de Gauss* (*Rom. Acc. R. d. N. Lincei*, t. IX, 2e fasc., p. 1-129; 1893), qui est en quelque sorte la réalisation de l'intention de Günther.

L. L.

possession d'une partie des résultats publiés par lui Jacobi en 1827. Legendre met ceci en doute, même après une deuxième affirmation de Jacobi et, emporté par son animosité contre Gauss, il se livre contre lui à des attaques très dures; il tient pour incroyable que quelqu'un ait pu faire des découvertes d'une telle importance sans avoir songé à les publier.

Mais il doit être clair pour quiconque s'est occupé en détail de la nouvelle théorie, que Gauss, en effet, avait obtenu depuis bien des années une connaissance profonde de la théorie des fonctions elliptiques, et cette remarque dans la Section VII des *Disquisitiones Arithmeticæ,* que le principe sur lequel repose la division de la circonférence en parties égales est applicable aussi à la lemniscate, et depuis le premier grand Mémoire d'Abel à des questions plus générales encore, est, pour citer les paroles de Dirichlet dans son *Éloge de Jacobi* « un témoignage irrécusable que, devançant de beaucoup son époque, Gauss, dès le commencement du siècle, avait reconnu le principe de la double périodicité ».

Gauss, il est vrai, ne s'est jamais décidé à publier *in extenso* ses vastes recherches sur les fonctions elliptiques; ce n'est qu'en deux occasions qu'il a communiqué des résultats isolés appartenant à ce domaine : une fois en 1808, dans le Mémoire *Summatio quarumdam serierum singularium,* et d'ailleurs sans indiquer que les séries et produits étudiés ici appartiennent à la théorie des fonctions elliptiques; puis (1818) dans le Travail *Determinatio attractionis quam in punctum quodvis positionis datæ exerceret planeta...*, où est exposée la transformation, *dite* de Gauss, du second degré et son application à l'évaluation des intégrales elliptiques de première et seconde espèces.

Abstraction faite de ces recherches, nous ne possédons de travaux de Gauss sur les fonctions elliptiques que dans son œuvre posthume et pour la plupart sous forme de formules sans texte, de sorte que le plus souvent nous sommes réduits à conjecturer la marche des déductions.

Nous devons, sans aucun doute, regarder comme étant les premières recherches sur ces sujets celles qui ont trait à la moyenne arithmético-géométrique. D'après une assertion de Gauss citée par M. Schering, dès 1794, c'est-à-dire à l'âge de 17 ans, il connaissait les rapports entre la moyenne arithmético-géométrique et les séries de puissances dont les exposants sont les nombres carrés; en d'autres termes le développement de l'intégrale complète de première espèce K suivant les puissances de la grandeur q qui se présente dans les fonctions ϑ correspondantes.

On sait que l'algorithme de la moyenne arithmético-géométrique est en corrélation des plus intimes avec la transformation du second degré des fonctions elliptiques, en ce sens que cet algorithme permet de déterminer la chaîne des modules correspondants; en effet, le complément du second module de la chaîne est égal au quotient des moyennes arithmétique et géométrique entre 1 et le complément du premier module. Celui qui découvrit le premier cette transformation, Landen, et qui la publia en 1775, n'avait pas d'ailleurs indiqué l'algorithme sous la forme connue; celle-ci est due à Lagrange qui, en 1784, indépendamment de Landen, paraît-il, découvrit de nouveau cette transformation. Chez lui on trouve l'algorithme exposé tout à fait explicitement, ainsi que son application à la détermination de la chaîne des modules.

Jusqu'aujourd'hui, dans les exposés de l'historique des fonctions elliptiques, l'on n'a encore jamais attiré l'attention sur le fait que Gauss a établi l'algorithme de la moyenne arithmético-géométrique en corrélation avec un autre (1) qui se transforme à l'aide d'une substitution trigonométrique (2) très simple, qui se trouve aussi chez Gauss, en celui de la transformation de Landen. Maintenant si l'on ne veut pas admettre que Gauss ait tout simplement pris cette transformation à Landen ou Lagrange, ou encore dans le Travail de Legendre publié plus tard par ce dernier en 1786, dans les *Mémoires de l'Académie de Paris*, nous ne sommes plus en présence, semble-t-il, que de deux cas possibles : ou bien Gauss de son côté a découvert la transformation, sous la même forme que Landen et Lagrange, en étudiant l'intégrale, puis pour des raisons pratiques l'a transformé en l'algorithme, ou bien il a d'abord découvert l'algorithme de la moyenne arithmé-

(1) P. 387. Ce chiffre, comme ceux de toutes les notes suivantes, désigne la page dont il s'agit du tome III des *Œuvres* de Gauss.

(2) P. 388, milieu et fin. V, 2V', ... sont les amplitudes directes d'une chaîne de transformations de Landen.

tico-géométrique et, par une heureuse généralisation, a passé de celui-ci au second algorithme d'une manière analogue à celle par laquelle des formes quadratiques on arrive aux formes bilinéaires; en effet, c'est à peu près ainsi que se comportent vis-à-vis les unes des autres les équations des deux algorithmes [1]. Dans cette dernière hypothèse alors le rapport avec les intégrales elliptiques eût été une conséquence dérivée secondairement des lois de l'algorithme.

Distinguer avec certitude entre ces trois cas possibles est un choix assez difficile à faire, mais on doit surtout avoir ceci présent à l'esprit: la signification de la transformation elle-même ne vient qu'après celle *des conséquences* que Gauss a su tirer des deux algorithmes qui y sont réunis, et si sur ce point on peut peut-être lui refuser d'avoir fait la découverte indépendamment, néanmoins la gloire d'avoir découvert les fonctions elliptiques trente ans avant Abel et Jacobi lui reste intacte pour tout temps.

Les conséquences en question, comme je l'ai déjà indiqué, reposent sur l'algorithme de la moyenne arithmético-géométrique. Celui-ci détermine une série infinie de paires de quantités a, b par cette condition que chaque a soit la moyenne arithmétique et chaque b la moyenne géométrique entre les quantités de la paire précédente. La limite commune vers laquelle convergent les deux séries des a et des b est dite alors la *moyenne arithmético-géométrique* entre les quantités de la première paire et naturellement aussi de chaque paire suivante.

D'après une remarque déjà faite, il résulte que tous les quotients $\frac{b}{a}$ peuvent être regardés comme les modules complémentaires k' d'une chaîne de transformations de Landen. Si l'on désigne maintenant les modules mêmes correspondants k par $\frac{c}{a}$, l'on aura ainsi défini une troisième série infinie de quantités c qui possède avec les deux premières séries une relation facile à reconnaître. On est aussi conduit à considérer en même temps les deux modules compléments l'un de l'autre lorsque, comme le fait Gauss dans un travail posthume [2] de

---

(1) C'est M. Weierstrass qui m'a indiqué ce point de vue.

(2) P. 361-371, en particulier nos 7 et 8.

l'année 1800, l'on établit la corrélation de l'algorithme et des intégrales elliptiques indépendamment de la transformation de Landen. On obtient notamment pour la valeur réciproque de la moyenne arithmético-géométrique entre 1 et k, un développement en série hypergéométrique suivant les puissances de k' qui, d'une part, nous conduit à l'équation linéaire du second ordre bien connue, et d'autre part nous permet de reconnaître que cette valeur est égale à la grandeur $\frac{2}{\pi}K'$, et, de même, que la valeur réciproque de la moyenne arithmético-géométrique entre 1 et k' est égale à $\frac{2}{\pi}K$.

Par suite, dans l'algorithme homogène des quantités a, b, c, le quotient de la moyenne arithmético-géométrique entre a et b divisée par celle entre a et c sera égal à la grandeur $\frac{K'}{K}$ ou $-\frac{1}{\pi}\log q$ ou $\frac{w}{i}$ où l'on a posé $q = e^{w\pi i}$. Le développement en série que donne Gauss [1] pour cette grandeur w fournit directement cette représentation connue de q comme produit infini à l'aide des modules d'une chaîne de transformations du second ordre obtenue par Jacobi [2] dans les *Fundamenta nova* et dans le Mémoire *Sur les formules les plus commodes pour l'évaluation numérique des fonctions elliptiques*.

La pensée qui est à l'origine des déductions de Gauss est maintenant la suivante : toutes les quantités a, b, c, qui se présentent dans l'algorithme, dépendent de deux variables; l'on prend d'abord les quantités a, b de la première paire, puis les deux moyennes entre a et b d'une part, entre a et c d'autre part, ou plutôt on prend la première moyenne μ et le quotient des deux moyennes, c'est-à-dire la grandeur w ou encore q. Les quotients $\frac{a}{\mu}$, $\frac{b}{\mu}$, $\frac{c}{\mu}$ dépendent seulement de w et sont étudiées [3] par Gauss comme fonctions de cette grandeur. Ce ne sont pas autre chose que les carrés des trois fonctions ϑ_3, ϑ_0, ϑ_2

(1) Page 377, troisième équation à partir d'en haut.

(2) JACOBI, *Œuvres*, t. I, p. 201, 351.

(3) Dans ses recherches sur la moyenne arithmético-géométrique. Gauss *désigne* notre notation q habituelle par y; et ainsi

$$p(y) = \vartheta_3(0, w), \qquad q(y) = \vartheta_0(0, w), \qquad r(y) = \vartheta_2(0, w).$$

pour la valeur zéro du premier argument, de sorte que la relation qui a lieu entre a, b, c ne représente évidemment pas autre chose que la célèbre équation entre les quatrièmes puissances de ces trois constantes ϑ. Maintenant, l'algorithme de la moyenne arithmético-géométrique se révèle comme identique à celui qui exprime les trois fonctions ϑ paires aux arguments o, $2w$ à l'aide de celles d'arguments o, w, par conséquent aussi, comme identique à la transformation du second ordre des fonctions ϑ pour la valeur zéro du premier argument.

Les lois de l'algorithme suffisent maintenant pour établir les principales propriétés de ces *nouvelles transcendantes*, comme les appelle Gauss, et avant tout leur représentation à l'aide de ces merveilleux développements en série suivant les puissances de q dont les exposants sont les carrés des nombres (¹). Ces développements en série fournissent les formules de transformation des constantes ϑ pour le changement de q en $-q$ ou de w en $w+1$ (²), tandis que l'on obtient les équations fonctionnelles pour le changement de w en $\frac{1}{w}$ (³) en observant que lorsque l'on échange les modules, compléments l'un de l'autre, k et k', le quotient $\frac{K'}{K}$ prend comme valeur sa réciproque. Ici se trouve l'origine de la transformation linéaire des fonctions ϑ. Gauss distingue d'ailleurs encore explicitement les six cas que l'on sait (⁴). A l'endroit cité se trouve une indication assez obscure sur la corrélation entre les nouvelles transcendantes et les formes quadratiques à déterminant négatif, allusion sur laquelle, longtemps après, les recherches de M. Kronecker ont porté le jour le plus clair.

On trouve (⁵) encore, dans ces notations, l'équation différentielle bien connue du troisième ordre, traitée plus tard par Jacobi, qui est vérifiée par chacune de ces trois séries ϑ comme fonction de q. Elle est établie ici à l'aide des relations différentielles entre les termes de l'algorithme.

---

(1) Page 383.
(2) Page 386, au haut de la page.
(3) Page 385, au bas de la page. Page 386, au haut de la page.
(4) Page 386.
(5) Page 382.

Telles sont, indiquées rapidement, car l'on ne peut guère en cette occasion entrer dans les détails ([1]), les conséquences essentielles tirées par Gauss de l'algorithme de la moyenne arithmético-géométrique. Le principe fondamental, j'y insiste encore, est la considération des éléments de l'algorithme, non dans leur dépendance avec *les premiers termes* de l'algorithme, mais au contraire avec *les valeurs limites* de ce dernier; ainsi sont obtenues par Gauss les trois fonctions ϑ pour la valeur o du premier argument, qui, par conséquent, ne sont fonctions que d'un seul argument w.

Le même principe appliqué au second algorithme déjà cité, qui n'est pas autre chose que la transformation de Landen, conduit Gauss à la découverte des fonctions elliptiques générales qui dépendent de deux arguments x, w.

Dans cette transformation de Landen la chaîne des modules est déterminée de la manière indiquée précédemment à l'aide de l'algorithme de la moyenne arithmético-géométrique; la série des amplitudes φ, φ_1, φ_2, ... jouit de cette propriété que les quantités φ, $\frac{\varphi_1}{2}$, $\frac{\varphi_2}{4}$, ... tendent vers une limite déterminée x, qui est égale à l'intégrale elliptique donnée, multipliée par $\frac{\pi}{2K}$; cette grandeur x, ainsi que la grandeur w relative à la chaîne des modules, sont les deux valeurs limites que nous devons considérer dans l'algorithme de la transformation. L'algorithme lui-même consiste en ceci : c'est que les sinus et cosinus de la seconde amplitude ainsi que la quantité que l'on désigne habituellement par Δ pour la seconde amplitude et pour le second module s'expriment rationnellement d'une manière simple à l'aide des trois quantités correspondantes pour la première amplitude et le premier module de la chaîne. Maintenant, si l'on considère la dépendance des éléments de cet algorithme, non directement des valeurs limites, mais en employant le principe déjà indiqué pour l'algorithme de la moyenne arithmético-géométrique d'après lequel on rend les équations homogènes en exprimant les trois grandeurs

([1]) C'est-à-dire dans cette occasion où Günther parlait devant la Faculté de Philosophie de l'Université de Berlin. L. L.

$\sin^2$, $\cos^2$ et Δ^2 pour chaque terme de la chaîne de transformations par les quotients de quatre nouvelles quantités α, β, γ, δ, c'est-à-dire par $\frac{\delta}{\beta}$, $\frac{\gamma}{\beta}$, $\frac{\alpha}{\beta}$ (¹); alors, dis-je, l'on arrive à l'algorithme donné par Gauss, qui d'ailleurs se transforme en celui de la moyenne arithmético-géométrique, pourvu que l'on égale à zéro les quantités δ, ..., c'est-à-dire les amplitudes, puisqu'alors α, β, γ deviennent identiques aux quantités précédemment désignées par a, b, c.

L'algorithme de Gauss fournit maintenant une représentation des quatre quantités α, β, γ, δ, abstraction faite d'un facteur commun sans importance, sous forme de produits infinis dont les facteurs dépendent seulement des amplitudes et modules de la transformation de Landen (²), si l'on regarde ces produits comme dépendant, non des éléments initiaux φ, k de la transformation, mais des valeurs limites x et w; alors lesdits produits ne sont pas autre chose que les carrés des quatre fonctions ϑ et le nouvel algorithme se révèle comme étant cette transformation du second degré qui exprime les fonctions ϑ de $2x$, $2w$ par celles de x et w, et ainsi de suite. Ces représentations des fonctions ϑ par des produits à l'aide d'une chaîne de transformation de Landen coïncident complètement avec celles données par Jacobi dans les *Fundamenta nova* et dans le Mémoire déjà cité sur les calculs

---

(¹) Page 388. Comparer note (²), p. 97, du Mémoire actuel.

(²) Ceci repose sur la troisième équation, p. 388 à partir d'en haut, d'après laquelle $\frac{\beta}{b}$ peut être représentée à l'aide de la quantité que Gauss *désigne* par $\frac{k}{K}$, multipliée par un produit infini où se présentent seulement les quotients $\frac{\alpha}{\beta}$ et $\frac{a}{b}$; il en est alors de même des quantités restantes. Les équations sont, p. 394 en haut,

$$(\alpha = kP^2, \ldots, \delta = kS^2, \text{ d'où } y = q = e^{w\pi i}, \eta = e^{2ix})$$

et, p. 395 en haut,

$$(Q = q\sqrt{\Delta}\sqrt[4]{\Delta'}\ldots).$$

Relativement, d'ailleurs, à l'exposé de la déduction des fonctions ϑ par Gauss, je n'ai pas abordé la question de savoir si Gauss, ici, n'a eu à l'esprit que des arguments réels, car cette question ne pourra jamais être tranchée rigoureusement.

numériques (¹); exemple frappant de la manière dont Gauss, avec son intuition merveilleuse des applications, considérait toujours avant tout la commodité pour les évaluations numériques.

A l'aide d'artifices simples, notamment certains échanges entre les α, β, γ, δ de l'algorithme, et la recherche des modifications correspondantes dans les valeurs limites, on peut maintenant obtenir les équations fonctionnelles pour les fonctions ϑ, lorsque l'on augmente des périodes le premier argument (²). De là résultent, de la manière connue, les séries de Fourier, ou chez Gauss, les développements suivant les puissances de e^{2ix} et de q (³), dont cependant il n'étudie pas la convergence. L'on trouve ensuite, dans ces notations, l'équation aux dérivées partielles des quatre fonctions ϑ (⁴), et cet algorithme qui exprime (⁵) les fonctions aux arguments x, $2w$, à l'aide de celles aux arguments x, w, en d'autres termes, la transformation du second degré dite *de Gauss*, telle qu'il l'a publiée dans la *Determinatio attractionis ...;* cet algorithme peut également, à l'aide d'un artifice simple, se tirer de celui de Landen.

L'essentiel dans ces résultats est par conséquent ceci :

Gauss, par l'algorithme de la transformation de Landen, qu'il l'ait trouvé lui-même indépendamment ou qu'il l'ait pris chez d'autres, est conduit à l'inversion de l'intégrale elliptique de première espèce et trouve en même temps dans les lois de l'algorithme le moyen de pénétrer la nature des fonctions qui se présentent alors. Il reconnaît que la limite supérieure z d'une telle intégrale et, de même, que $\sqrt{1-z^2}$, $\sqrt{1-k^2z^2}$ peuvent être représentés comme des quotients dont les numérateurs et le dénominateur commun sont des fonctions de deux arguments, c'est-à-dire de l'intégrale x elle-même et de la

(¹) JACOBI, *Œuvres*, t. I, p. 204 en haut; p. 357, milieu. Pour reconnaître la coïncidence l'on ne doit pas employer, comme le fait M. Schering au haut de la page 395, les $U^{(n)}$, mais, comme c'est déjà indiqué dans notre note (²), p. 97, du Mémoire actuel, les $V^{(n)}$.

(²) Page 396, en haut.

(³) Page 399.

(⁴) Page 393.

(⁵) Page 396.

grandeur ϖ. Il expose les propriétés de ces quatre fonctions fondamentales pour la théorie et il en donne les expressions analytiques; mais les démonstrations, au moins dans les manuscrits que nous avons, ne sont pas poussées jusqu'au bout.

Dans ces cahiers de notes qui, vraisemblablement, datent des dernières années du siècle précédent, Gauss se sert donc d'une méthode qui n'a rien de commun avec les méthodes de ceux qui ont travaillé plus tard à cette théorie. Mais ceci n'est pas resté pour lui l'unique accès aux fonctions elliptiques.

Nous avons aussi des notes datant de l'année 1799, sous le titre: *Varia, imprimis de integrali* $\int \frac{du}{\sqrt{1+\mu^2 \sin^2 u}}$ (¹).

Ici Gauss, entre autres choses, donne le développement en série de Fourier de sin am, ainsi que des fonctions $\mathfrak{S}_0$, $\mathfrak{S}_1$, dont le quotient représente cette fonction, ensuite les produits infinis pour $\mathfrak{S}_0$, $\mathfrak{S}_1$, le tout sous la même forme qu'Abel et Jacobi, bien que dans d'autres notations. Les formules se suivent sans aucun texte qui les relie, et il serait très difficile de pouvoir se former une opinion sur la manière dont Gauss a pu obtenir ces résultats, si lui-même n'avait expressément remarqué dans ses Lettres à Bessel et à Crelle, qu'Abel dans ses *recherches* (1827) avait « enfilé précisément la même route dont il (Gauss) était sorti en 1798 », époque par conséquent où les recherches de Gauss dont il s'agit ici étaient déjà pour la plus grande partie terminées, puisque la remarque susdite ne peut être relative à d'autres Notes sur la Théorie générale. Nous aurions donc à supposer que Gauss, après avoir été amené, par les considérations que nous avons exposées, à la conception de l'inversion, aurait presque aussitôt reconnu l'importance extrême du théorème d'Euler pour les nouvelles transcendantes et se serait efforcé de l'employer, pour édifier la théorie, de la même manière que le fit plus tard Abel.

Et le fait que Gauss ne fait allusion en aucun endroit au théorème d'addition pour les fonctions elliptiques générales n'est d'aucun poids, en présence des communications faites à Crelle et Bessel. Du reste,

---

(¹) P. 443 et suiv., où $S\Psi\varpi = S\varphi = \sin\mathrm{am}(\varphi, \mu i)$; et où à peu de chose près $T = \mathfrak{S}_1$, $w = \mathfrak{S}_0$.

dans les papiers laissés par Gauss, l'on ne trouve non plus aucune trace de maintes recherches que Gauss a, sans aucun doute, menées à bonne fin et qu'il a communiquées à d'autres. A ce propos, je rappellerai seulement ses recherches sur les intégrales de fonctions d'une variable complexe, au sujet desquelles il a fait de si intéressantes communications à Bessel dans sa correspondance, et encore la théorie générale de la division de la lemniscate à laquelle il fait allusion dans l'endroit déjà cité des *Disquisitiones Arithmeticæ*.

Dans ces recherches de l'an 1789, nous avons donc *un traitement de la théorie complètement différent de celui que nous avons indiqué au commencement de cet article*. Gauss d'ailleurs a, semble-t-il, fait usage de la même méthode dans son étude des *fonctions lemniscatiques* (¹), sujet dont il commence l'étude en 1797, comme l'indique une note de sa main; et cette circonstance est bien propre à servir d'appui à l'opinion que nous avons tout à l'heure énoncée.

Gauss commence la théorie des fonctions lemniscatiques, après la définition des fonctions sin lemn, cos lemn, en exposant le théorème de l'addition, dont sont ensuite tirées les premières formules de la multiplication. Ensuite (²) vient la détermination de ces fonctions comme quotients de séries de puissances, qu'il affirme expressément être toujours convergentes. Ces fonctions sont précisément, particularisées dans le cas en question, les fonctions A*l* de M. Weierstrass. Ces fonctions sont aussi représentées par Gauss (³), comme produits simplement infinis, sous la forme trigonométrique connue qui met en évidence les zéros, et à ce propos il ajoute cette remarque : « Id quod rigorose demonstrare possumus. » Relativement à ceci, nous n'avons pas besoin de supposer, comme il a été déjà fait (⁴), que Gauss possédait déjà les théorèmes généraux sur la représentation des fonctions uniformes par des produits infinis; cette remarque a trait, semble-t-il, plutôt à la démonstration de l'identité des séries trigonométriques, trouvées pour les fonctions ϑ, et des produits.

(¹) P. 404 et suiv.

(²) P. 405, bas; 406, haut de la page.

(³) P. 415 et suiv.

(⁴) KOENIGSBERGER, *Historique des fonctions elliptiques, de 1826 à 1829*. Teubner.

Gauss donne ensuite en cet endroit les développements de Fourier pour les numérateurs et dénominateurs de sin lemn et cos lemn, ainsi que pour ces dernières fonctions (1), et encore la décomposition de ces dernières en éléments simples (Partialbrüche) (2). Enfin l'on trouve encore un nombre de formules pour la multiplication complexe (3) (déduites du théorème d'addition), puis des développements en série et en produits pour les périodes (4) et des formules pour la quintisection (5), obtenues au moyen de la moyenne arithmético-géométrique, formules qui sont certainement en rapport avec la théorie générale de la division à laquelle Gauss fait allusion dans les *Disquisitiones*.

Mais Gauss ne s'est pas contenté de pénétrer profondément dans la théorie des fonctions elliptiques à l'aide des deux méthodes par lesquelles il était arrivé aux résultats que nous avons cités jusqu'ici. Il avait représenté ses nouvelles transcendantes, les fonctions $\mathfrak{S}$, d'une part comme séries infinies, d'autre part comme produits infinis, et la corrélation remarquable ainsi obtenue entre ces expressions analytiques de nature diverse l'engagea à chercher une démonstration directe des équations en question et à établir sur ces principes une théorie de ses fonctions; il n'a du reste pas mené jusqu'à terme ce dernier point.

Gauss, dans les recherches de 1798, que nous avons indiquées, éprouve déjà le besoin d'une démonstration directe pour les identités qui ont lieu entre ces séries et produits infinis (6). Il est ensuite revenu sur ce point qui, jusqu'alors, n'était pas encore complètement élucidé, dans des Notes nombreuses datant de 1808, 1809 (7). La question est traitée par lui avec le plus d'extension dans le fragment

---

(1) P. 418 et suiv.
(2) P. 417.
(3) P. 411.
(4) P. 420, p. 424.
(5) P. 421.
(6) P. 434, au bas de la page.
(7) P. 440 vers la fin. x à partir d'ici représente toujours ce que nous désignons par q, et y est notre e^{2ix}; cette équation est la représentation par un produit de $\mathfrak{S}_3$; plus loin, voir encore équations (6), (7), (9), p. 446 et 447.

intitulé : *Cent théorèmes sur les nouvelles transcendantes* (¹), dont nous savons seulement qu'il ne remonte pas plus loin que 1818, vu que le Mémoire *Determinatio attractionis* ... y est cité ; Gauss part ici d'une somme finie et la transforme en un produit ; le passage à l'infini lui fournit alors directement deux relations entre les séries infinies et les produits.

L'on ne peut nier que ce procédé de Gauss manque de cette simplicité qui distingue, par exemple, les démonstrations d'identité de Jacobi et de Cauchy, où l'on sait que la marche inverse, qui paraît plus naturelle, part du produit fini pour aboutir à la somme finie.

Que Gauss eût en vue de baser sur cette démonstration d'identité une théorie de ses fonctions, c'est ce qui résulte déjà de toute la méthode d'exposition du fragment cité ; ainsi, par exemple, comme conséquence évidente du théorème suit cette remarque (²) : « Les fonctions qui sont, à l'aide de ces deux théorèmes, développées en produits infinis, sont de la plus haute importance, et il serait bon de les désigner ici par un symbole fonctionnel particulier. » Ces fonctions sont précisément nos ϑ_2, ϑ_3 ; ensuite Gauss introduit ϑ_0 en remplaçant w par $w+1$ dans ϑ_3. Il considère alors les développements en produits et en séries de ces trois fonctions pour les arguments o, w, d'une part, et pour les arguments o, $2w$, d'autre part ; l'on obtient ainsi des relations identiques (³) qui fournissent la transformation du second degré des constantes thêta et en même temps se présente ainsi à un nouveau point de vue la corrélation avec la moyenne arithmético-géométrique. Le fragment se termine (⁴) par l'établissement de l'expression déjà citée de q à l'aide des modules de cette chaîne de transformations du second degré.

La méthode que Gauss emploie dans les dernières Notes citées, ainsi d'ailleurs que dans d'autres que nous possédons (qui recommencent de nouveau à partir de 1827), peut être désignée sous le nom de la *méthode des identités*. Le principe est toujours le même : des équa-

---

(¹) P. 461 et suiv.
(²) P. 465.
(³) P. 466.
(⁴) P. 467.

tions identiques entre produits infinis ou sommes, déduire les relations entre fonctions thêta.

Relativement à cette méthode, de même que relativement aux précédentes, les travaux de Gauss ont de nombreux points de contact avec d'autres recherches et notamment avec des études plus modernes. En effet, par exemple, les démonstrations pour les théorèmes d'addition et pour les équations de transformation des fonctions ϑ se ramènent toujours à de pareilles identités; il s'agit pour cela seulement de les faire précéder de principes intuitifs généraux (heuristische). Tels sont en particulier les principes : 1° de *la décomposition en facteurs des produits infinis*, en particulier à l'aide du théorème de Cotes, principe dont l'emploi est devenu bien connu par l'usage qu'en ont fait Abel et Jacobi pour établir les équations de la transformation; 2° du *théorème de M. Hermite* qui nous dit qu'entre $r+1$ fonctions thêta dites d'ordre r, doit toujours avoir lieu une équation linéaire homogène à coefficients constants; ce théorème a son application ici dans l'établissement des identités entre *les séries* ϑ.

De ces deux principes il n'est pas douteux que Gauss, bien qu'il n'ait pas fait usage du théorème de Cotes, a employé le premier, comme il résulte de beaucoup d'ébauches de démonstrations (¹). Quant au second principe, l'on pourrait peut-être soupçonner, d'après la forme de démonstration donnée pour certaines relations thêta, que Gauss le connaissait, au moins en partie, sinon en toute sa généralité. Il remarque notamment en un endroit (²) que le produit

$$\vartheta_3(x+y, w)\vartheta_3(x-y, w)$$

peut s'exprimer en fonction linéaire et homogène de $\vartheta_3(2x, 2w)$ et $\vartheta_2(2x, 2w)$ à coefficients qui ne dépendent que de y seul, et il détermine ces derniers en portant dans l'équation des valeurs spéciales; la démonstration par conséquent est donc pareille à celle que l'on emploie d'habitude aujourd'hui. Quant au principe même, il n'est nulle part

(¹) P. 466, en haut; p. 470 [2] entre autres.

(²) P. 457, équation [69], on posera $x = q = e^{\pi i w}$, $y = e^{2ix}$, $(x, y) = \vartheta_3(x, w)$, $z = e^{2iy}$.

énoncé par Gauss; nous devons donc laisser ouverte la question de savoir s'il a trouvé les résultats dont il s'agit ici à l'aide d'autres principes ou encore par intuition.

Cette méthode des identités s'étend non seulement aux théorèmes d'addition des fonctions ϑ, où l'équation de Gauss citée peut être employée comme point de départ suffisant, mais encore, ainsi qu'il a été déjà remarqué, à la théorie de la transformation. Nous trouvons ici chez Gauss, outre la transformation du premier [1] ordre et du second ordre [2], aussi celles des troisième [3], cinquième [4] et septième [5] ordre des fonctions ϑ. Au lieu des équations modulaires, il donne toujours seulement les équations homogènes pour les constantes ϑ où q a été remplacé par q^n [6], ce dont on peut aisément déduire les équations modulaires. En un endroit [7] il donne aussi pour chaque degré impair de transformation toutes les racines des équations correspondantes; ici apparaissent les constantes ϑ correspondant à $\sqrt[n]{q}$ et Gauss ajoute que l'on pourrait aisément trouver les coefficients des équations au moyen du développement en séries des constantes ϑ suivant les puissances de q.

Outre les résultats que nous avons exposés, nous trouvons encore dans ces derniers cahiers de notes, qui de même que les précédents sont le plus souvent composés de formules sans texte qui les relie, de nombreuses propositions accidentelles ou intercalations; je citerai entre autres une seconde déduction où est établie l'équation différentielle du troisième ordre à laquelle satisfont les trois fonctions $\vartheta_h(0, w)$, faite à l'aide des développements en produits [8], et encore une remarque [9]

---

(1) P. 441. Chose singulière, c'est seulement un cas particulier qui est traité ici.

(2) P. 471 et suivantes.

(3) P. 471, 459 et suivantes.

(4) P. 476 et suivantes.

(5) P. 474.

(6) P. 441 et suivantes, p. 456, 475 et suivantes, p. 478 et suivantes.

(7) P. 476.

(8) P. 445.

(9) P. 478. En toute exactitude, on a la formule $\left[\frac{Q(t)}{P(t)}\right]^2 = \frac{\vartheta_0^2(0, w)}{\vartheta_3^2(0, w)} = k'$. Com-

relative à la considération de la grandeur ω comme fonction de k, qui nous dit qu'à chaque valeur de k correspond *toujours une seule et unique* valeur ω à l'intérieur d'une certaine partie du plan des ω, à l'intérieur du polygone fondamental, dirions-nous aujourd'hui.

Résumons maintenant rapidement les principaux résultats de notre étude. Nous avons vu que Gauss, dès la fin du dernier siècle, avait été conduit, au moyen de l'algorithme de la transformation de Landen, à représenter l'inversion de l'intégrale elliptique de première espèce à l'aide des quatre fonctions $\mathfrak{S}$, ainsi qu'à développer les propriétés essentielles de ces nouvelles transcendantes. Il ne pouvait lui échapper quelle portée fondamentale sur les fonctions inverses a le théorème d'addition d'Euler pour les intégrales, et ceci l'engagea à pénétrer plus profondément dans la nature de ces fonctions par un second chemin, chemin par lequel Abel entra dans ce domaine environ trente ans plus tard. Les merveilleuses relations entre les sommes et produits infinis, qui sont fournies à l'aide de la représentation des fonctions $\mathfrak{S}$ par des produits, conduisent enfin Gauss à une troisième manière de traiter cette théorie par la méthode que j'ai nommée dans mon exposé, celle des *identités;* parmi les résultats de cette dernière recherche, il faut citer, en particulier, ceux qui sont relatifs à la théorie de la transformation.

Ainsi Gauss, et cela en partie au moyen d'une méthode qui par son originalité singulière nous intéresse au plus haut degré, s'était créé, plusieurs dizaines d'années environ avant Abel et Jacobi, une théorie étendue des fonctions elliptiques qui renfermait une partie des résultats les plus importants énoncés plus tard par ces géomètres. En effet, des domaines vastes et étendus de cette théorie, ce n'est à proprement parler que les recherches plutôt algébriques qui sont relatives au théorème d'Abel qui lui sont restées étrangères; mais bien plus, la théorie de Gauss renferme encore, comme nous l'avons vu, en différents endroits les points de départ de recherches plus étendues que la postérité seule a su mener à terme.

Si nous réfléchissons à l'immense portée des découvertes de Gauss,

---

parer le Mémoire de Dedekind (*Journal de Crelle*, t. **83**), *Sur la théorie des fonctions modulaires elliptiques.*

importance qui ne pouvait certes échapper à leur auteur, il paraît au plus haut degré extraordinaire qu'il ait pu penser à cacher ces trésors à ses contemporains, surtout après qu'Abel et Jacobi par leurs travaux lui eussent enlevé la priorité pour une partie des résultats. Nous devons en chercher la raison, d'après une opinion de Wilhelm Weber que M. Weierstrass a bien voulu me communiquer, dans ce fait que Gauss ne voulait jamais commencer la publication de ses recherches avant d'avoir complètement relié entre elles en un accord parfait toutes les diverses méthodes qui lui avaient donné accès à la théorie. Et cette opinion correspond absolument à tous les principes de Gauss relativement à la publication de travaux. Néanmoins nous ne pensons pas nous avancer trop loin en regardant cette première découverte de la théorie des fonctions elliptiques et le fait de sa non-publication comme un des événements les plus surprenants et les plus merveilleux de toute l'histoire des Mathématiques.

Notice sur Paul Günther, Professeur à l'Université de Berlin (1867-1891).

Paul Günther, un des plus brillants élèves de MM. Kronecker, Weierstrass et Fuchs, publia, dès l'âge de 20 ans, dans le *Journal de Crelle,* des Mémoires très remarquables sur la Théorie des fonctions elliptiques et celle des équations différentielles linéaires. Le Mémoire ici traduit a été lu (1890) devant la Faculté de Philosophie de l'Université de Berlin à l'occasion de son *Habilitation.* Il allait entreprendre sur le même sujet un grand travail *in extenso,* à l'invitation de M. Weierstrass, qui fondait sur son élève les plus hautes espérances; malheureusement Günther fut enlevé à ses amis et à la Science par une mort prématurée, à l'âge de 24 ans. Une courte biographie a été publiée par M. Gutzmer dans le *Zeitschrift* de MM. Schlömilch et Cantor, t. XXXVII, p. 46-49, sous le titre *Zur Erinnerung an Paul Günther.* Plusieurs autres Mémoires ont été publiés après sa mort dans le *Journal de Crelle* par les soins de son beau-frère, M. Gutzmer, professeur à l'Université de Halle, et de M. Stæckel, professeur à l'Université de Kœnigsberg. L. L.