JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

A. LIAPOUNOFF

Sur certaines questions qui se rattachent au problème de Dirichlet

Journal de mathématiques pures et appliquées 5e série, tome 4 (1898), p. 241-311.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1898_5_4__241_0>

Sur certaines questions qui se rattachent au problème de Dirichlet;

PAR M. A. LIAPOUNOFF.

La question qui fera l'objet principal de ce Mémoire est celle de la possibilité du problème électrostatique, en particulier du problème fondamental qui a pour but la recherche de la distribution de l'électricité à la surface d'un conducteur soustrait à toute influence extérieure.

On sait que ce problème a une connexion intime avec un cas particulier du problème de Dirichlet, et cette connexion est telle, qu'on peut regarder le premier problème comme résolu, si l'on parvient à résoudre le second.

Mais, pour qu'il en soit ainsi, il faut que, pour la solution du problème de Dirichlet, l'on obtienne une expression qui se prête immédiatement aux calculs. Cependant on ne connaît de pareilles expressions que dans quelques suppositions particulières à l'égard du conducteur et, en général, les méthodes dont on dispose ne servent qu'à faire voir la possibilité du problème de Dirichlet.

Or, si l'on n'a démontré que cette possibilité, on n'a pas encore le droit d'affirmer que le problème électrostatique soit aussi possible.

En effet, pour que l'affirmation soit légitime, il faut non seulement établir la possibilité du problème de Dirichlet, mais encore démontrer que sa solution, dans le cas d'où dépend le problème électrostatique, peut être présentée sous forme du potentiel d'une simple couche répandue sur la surface du conducteur. Il faut donc démontrer l'existence de la fonction susceptible de représenter la densité de cette couche, et cela exige la considération des valeurs, sur la surface du conducteur, de la dérivée normale (dérivée estimée suivant la normale) de la fonction harmonique ([1]) cherchée. Or, les méthodes générales qu'on a proposé pour traiter le problème de Dirichlet conduisent à des résultats qui ne font pas voir que ces valeurs existent et, de là, provient la difficulté qui ne paraît pas avoir été levée.

Il est vrai que, pour démontrer la possibilité du problème électrostatique, on s'est servi souvent de la méthode directe fondée sur certaines considérations de minima dues à Gauss. Mais ces considérations sont aussi peu suffisantes que celles de la même espèce qu'on employait autrefois pour démontrer le principe de Dirichlet.

Donc, à la rigueur, cette méthode ne démontre rien, et la question qui nous intéresse ne peut être regardée comme résolue, si ce n'est dans quelques cas particuliers.

Cependant, dans certaines recherches, il est bien important de savoir si le problème considéré est possible en général. C'est ce qui m'a décidé à reprendre la question pour essayer de déduire la démonstration requise des principes des méthodes que possède aujourd'hui la Science pour traiter le problème de Dirichlet.

Je me suis arrêté aux méthodes de M. Neumann, qui sont les plus simples, et, en partant du principe fondamental de ces méthodes, j'ai réussi à établir, dans des suppositions assez générales, non seulement la possibilité du problème électrostatique dont il s'agit, mais encore la méthode qu'a proposée, pour le résoudre, M. Robin ([2]).

([1]) Dans ce qui suit, nous entendrons par fonction harmonique dans le domaine E toute fonction qui, pour les points du domaine E, sauf, peut-être, ceux de sa frontière, est uniforme et continue, ainsi que ses dérivées par rapport aux coordonnées, et qui satisfait à l'équation de Laplace. D'ailleurs, si le domaine E s'étend à l'infini, cette fonction doit s'annuler à l'infini, en tendant vers zéro uniformément dans toutes les directions (nous supposons que la frontière du domaine E ne s'étende pas à l'infini).

([2]) Il est à se rappeler que M. Robin n'a établi sa méthode que *dans la supposition qu'on ait préalablement démontré la possibilité du problème*. Récemment M. Stekloff a signalé une modification de l'analyse de M. Robin

Cela étant établi, on peut s'en servir pour aborder les questions plus générales. C'est ce que j'ai aussi essayé de faire, en considérant le cas général du problème de Dirichlet et en recherchant les conditions assurant l'existence, sur la surface qui sert de frontière au domaine considéré, des valeurs limites des dérivées de la fonction harmonique cherchée.

En traitant ce problème par une méthode convenable, je suis parvenu à montrer qu'en ce qui concerne la dérivée normale la question se ramène à celle de la même espèce pour le potentiel de la double couche dont la densité est égale à la valeur de la fonction harmonique sur la surface.

L'étude de ces sortes de questions n'est pas sans importance, puisque les valeurs, sur la surface, des dérivées de la fonction harmonique se présentent dans bien des cas : il n'y a qu'à se rappeler le problème général de l'Électrostatique, ainsi que la formule connue dont on se sert souvent pour représenter la solution du problème de Dirichlet, formule qui contient la dérivée normale de la fonction de Green.

Telles sont les questions qui feront l'objet des recherches qui vont suivre.

CHAPITRE I.

HYPOTHÈSES ET PROPOSITIONS AUXILIAIRES.

1. Notre Étude se rapportera au cas d'une surface *fermée* S à l'égard de laquelle nous ferons les suppositions suivantes :

1° En tout point de S il existe un plan tangent déterminé;

---

permettant de se débarrasser de cette supposition et, par suite, d'établir la possibilité du problème (*Comptes rendus*, 13 décembre 1897). L'analyse de M. Stekloff, comme celle de M. Robin, ne s'applique qu'aux surfaces convexes. Dans les *Comptes rendus* (22 novembre 1897), en énonçant les résultats de mon étude de la question, je me suis aussi restreint à la supposition que la surface considérée soit convexe. Mais, pour mon analyse, cette restriction n'a rien d'essentiel et, comme on le verra dans le présent Mémoire, elle peut être remplacée par une autre, plus générale (*voir* le n° 7).

2° Il existe une longueur D, telle que, un point quelconque p de S étant pris pour centre de la sphère de rayon D, une parallèle à la normale à S en p ne puisse rencontrer S, à l'intérieur de la sphère, qu'en un seul point;

3° ϑ étant l'angle aigu que fait la normale au point quelconque p de S avec celle d'un autre point p' de cette surface et r la distance mutuelle de ces deux points, on peut assigner deux nombres positifs a et α indépendants du choix des points p et p' et tels qu'on ait

$$\vartheta < ar^{\alpha},$$

quelles que soient les positions de ces points.

Outre ces suppositions, nous en aurons à faire encore une. Mais nous l'énoncerons plus tard et, à présent, nous nous arrêterons sur les suppositions ci-dessus pour en déduire quelques conséquences qui nous seront nécessaires dans la suite.

En prenant un point quelconque p_0 de S pour origine des coordonnées rectangulaires et la normale en ce point pour axe des z, considérons les points de S dont la distance r_0 au point p_0 ne surpasse pas D.

Soient p un de ces points et x, y, z ses coordonnées.

En vertu de la deuxième supposition, z sera une fonction uniforme de x, y, s'annulant pour $x = y = 0$, et cette fonction, en vertu des deux autres suppositions, admettra les dérivées

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}$$

qui seront continues, si D est assez petit pour que l'angle ϑ_0 que fait la normale au point p avec celle du point p_0 ne puisse atteindre $\frac{\pi}{2}$; c'est ce qui aura lieu, par exemple, si l'on a

$$a\mathrm{D}^{\alpha} \leqq 1.$$

D'ailleurs, si l'on admet cette inégalité et que l'on tienne compte de ce que

$$\cos\vartheta_0 > 1 - \tfrac{1}{2}\vartheta_0^2 > 1 - \tfrac{1}{2}a^2 r_0^{2\alpha},$$

on trouve

$$\frac{1}{\cos\mathfrak{S}_0} = \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} < 1 + a^2 r_0^{2\alpha},$$

d'où l'on déduit

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 < 2a^2 r_0^{2\alpha} + a^4 r_0^{4\alpha} < 3a^2 r_0^{2\alpha}.$$

Maintenant posons

$$x = \rho\cos\psi, \qquad y = \rho\sin\psi$$

et considérons z comme fonction de ρ et de ψ.

Puisqu'on a

$$\left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)^2 < \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2,$$

on aura

$$\left|\frac{\partial z}{\partial \rho}\right| < \sqrt{3}\,a r_0^{\alpha},$$

et, par suite,

$$|z| < \sqrt{3}\,a D^{\alpha}\rho < \sqrt{3}\,\rho.$$

De là on conclut

$$r_0 = \sqrt{\rho^2+z^2} < 2\rho.$$

On a donc

$$(1) \qquad \left|\frac{\partial z}{\partial \rho}\right| < \sqrt{3}\,a\,2^{\alpha}\rho^{\alpha},$$

et, par suite,

$$|z| < \frac{\sqrt{3}\,2^{\alpha}}{\alpha+1}\,a\rho^{\alpha+1},$$

ce que l'on peut remplacer par l'inégalité plus simple

$$(2) \qquad |z| < 2a\rho^{\alpha+1},$$

en remarquant que $2^{\alpha} \leqq \alpha + 1$, puisque le nombre α ne peut pas évidemment surpasser 1.

En même temps on aura

$$\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} < 4a\rho^\alpha, \tag{3}$$

$$\frac{1}{\cos \vartheta_0} < 1 + 4a^2\rho^{2\alpha}. \tag{4}$$

Toutes ces inégalités auront lieu, tant que $r_0 \leqq D$, si l'on prend pour D, ainsi que nous le supposerons dans la suite, une quantité satisfaisant non seulement à la condition de la deuxième supposition, mais encore à celle-ci, $aD^\alpha \leqq 1$.

Pour ce qui va suivre il est utile de remarquer que, si l'on construit un cylindre de révolution C ayant pour axe l'axe des z et, pour la plus courte distance de ses génératrices à l'axe, une quantité plus petite que $\frac{1}{2}D$, la portion S_0 de S, découpée par C au voisinage du point p_0, se trouvera tout entière à l'intérieur de la sphère de rayon D ayant pour centre le point p_0. Donc, les inégalités ci-dessus auront lieu pour tous les points de S_0.

2. Dans la suite, nous aurons à considérer des potentiels soit d'une simple couche, soit d'une double couche répandue sur S, et à présent nous nous arrêterons sur quelques propositions relatives à ces potentiels.

Nous commencerons par préciser la notion de ce que nous appellerons la *dérivée normale* d'une fonction au point quelconque de S.

La surface S étant fermée, l'espace tout entier sera partagé par elle en deux portions : l'espace intérieur E_i et l'espace extérieur E_e.

Considérons l'un quelconque de ces deux espaces que nous désignerons par E.

Soient $P(x, y, z)$ un point de E, et $F(x, y, z)$ une fonction définie dans le domaine E, fonction que nous supposerons uniforme et continue, ainsi que ses dérivées

$$\frac{\partial F}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \frac{\partial F}{\partial z},$$

tant que le point P ne se trouve pas sur S.

Supposons que le point P soit situé sur la normale au point p de S et, en entendant par n l'une des deux directions de cette normale, considérons l'expression

$$\frac{\partial F}{\partial x}\cos(n,x)+\frac{\partial F}{\partial y}\cos(n,y)+\frac{\partial F}{\partial z}\cos(n,z),$$

que nous désignerons par

$$\left(\frac{\partial F}{\partial n}\right)_P.$$

Supposons maintenant que le point P, *en restant toujours sur la normale* n, se rapproche indéfiniment du point p.

Alors, si l'expression ci-dessus tend vers une limite, cette limite représentera ce que nous appellerons la *dérivée normale* de la fonction F au point p, et ce que nous désignerons par $\frac{\partial F}{\partial n}$.

Dans les cas où il sera nécessaire d'appeler l'attention sur l'espace considéré, nous désignerons le point P par P_i ou par P_e, suivant qu'il appartient à E_i ou à E_e, et la limite dont il s'agit sera désignée par

$$\left(\frac{\partial F}{\partial n}\right)_i \quad \text{ou} \quad \left(\frac{\partial F}{\partial n}\right)_e,$$

de sorte qu'on aura

$$\lim\left(\frac{\partial F}{\partial n}\right)_{P_i}=\left(\frac{\partial F}{\partial n}\right)_i, \qquad \lim\left(\frac{\partial F}{\partial n}\right)_{P_e}=\left(\frac{\partial F}{\partial n}\right)_e,$$

les points P_i, P_e se rapprochant indéfiniment du point p.

Nous appellerons ces limites *dérivée normale intérieure* et *dérivée normale extérieure*.

Cela posé, considérons le potentiel V d'une simple couche à densité k répandue sur S.

Soient ds' un élément superficiel de S, k' la valeur de k au point p' appartenant à cet élément et R la distance du point P au point p'.

On aura

$$V=\int\frac{k'\,ds'}{R},$$

l'intégrale étant étendue à la surface S tout entière.

Nous supposerons que la densité k représente une fonction continue sur S (¹). Alors V sera une fonction de x, y, z continue dans l'espace tout entier. D'ailleurs, dans les suppositions que nous avons faites à l'égard de S, cette fonction admettra les deux dérivées normales

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_i, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_e$$

en tout point p de S.

Pour fixer les idées, nous supposerons que n désigne la direction de la normale *intérieure* par rapport à S, et dans la suite, où nous parlerons de la direction de la normale, nous entendrons par là toujours cette direction, à moins que nous ne disions le contraire.

Cela posé, on sait que

$$(5) \qquad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial V}{\partial n}\right)_i = \displaystyle\int \frac{k' \cos\varphi \, ds'}{r^2} - 2\pi k, \\ \left(\dfrac{\partial V}{\partial n}\right)_e = \displaystyle\int \frac{k' \cos\varphi \, ds'}{r^2} + 2\pi k, \end{cases}$$

où φ désigne l'angle que fait la normale au point p considéré (direction n) avec la direction pp' et r la distance pp'.

Donc, si l'on pose

$$\int \frac{k' \cos\varphi \, ds'}{r^2} = J,$$

et que l'on considère, par exemple, l'expression

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{p_i} - J + 2\pi k,$$

(¹) En disant qu'une fonction quelconque k définie pour les points de S est continue au point p, nous entendons par là la condition que, pour tout nombre positif ε, on peut assigner un autre nombre positif l, tel qu'on ait

$$|k - k'| < \varepsilon,$$

toutes les fois que la distance du point p' au point p ne surpasse pas l. Si cette condition est remplie pour toute position du point p, la fonction k sera *continue sur la surface* S. On sait que le nombre l peut être choisi alors indépendamment de la position du point p.

en supposant que le point P_i tende vers p, cette expression deviendra une quantité infiniment petite.

Dans la suite, nous aurons besoin d'avoir une limite supérieure pour la valeur absolue de cette quantité, et maintenant nous allons la rechercher, en nous restreignant à la supposition que la fonction continue k satisfasse à la condition exprimée par l'inégalité

$$(6) \qquad |k - k'| < N r^{\beta},$$

où N, β désignent des nombres positifs, indépendants de la position des points p, p' auxquels se rapportent les valeurs k, k'.

3. Soient p_0 le point de S, que nous voulons considérer, et $J(p_0)$ la valeur de la fonction J en ce point.

Soit, d'autre part, P_0 un point du domaine E_i se trouvant toujours sur la normale au point p_0.

En désignant la distance $P_0 p_0$ par ζ, la valeur de V au point P_0 sera une fonction de ζ, que nous désignerons par $V(\zeta)$.

La dérivée de cette fonction étant désignée par $V'(\zeta)$, nous aurons à discuter l'expression

$$V'(\zeta) - J(p_0) + 2\pi k_0,$$

où k_0 désigne la densité au point p_0.

Nous nous servirons du système de coordonnées introduit au n° **1** et nous désignerons par x, y, z les coordonnées d'un point p de l'élément superficiel ds. Alors, en posant

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \rho, \qquad \sqrt{\rho^2 + z^2} = r_0, \qquad \sqrt{\rho^2 + (z - \zeta)^2} = R_0,$$

nous aurons

$$V'(\zeta) = \int \frac{k(z - \zeta)\, ds}{R_0^3}, \qquad J(p_0) = \int \frac{k z\, ds}{r_0^3},$$

les intégrations étant étendues à S.

Maintenant concevons un cylindre de révolution C ayant pour axe l'axe des z (normale au point p_0) et, pour la plus courte distance de ses génératrices à l'axe, une quantité δ, que nous supposerons, eu égard à ce que nous avons remarqué au n° **1**, plus petite que $\frac{1}{2}$ D.

Soient S_0 la portion de S découpée par C au voisinage du point p_0, et S_1 la portion qui reste.

En désignant par $V'_0(\zeta)$, $J_0(p_0)$ les intégrales

$$\int \frac{k(z-\zeta)ds}{R_0^3}, \qquad \int \frac{kz\,ds}{r_0^3}$$

étendues à S_0, et par $V'_1(\zeta)$ la première intégrale étendue à S_1, on aura

$$V'(\zeta) = V'_0(\zeta) + V'_1(\zeta),$$
$$J(p_0) = J_0(p_0) + V'_1(0).$$

Par suite, la quantité

$$|V'(\zeta) - J(p_0) + 2\pi k_0|$$

ne surpassera pas celle-ci

$$|V'_1(\zeta) - V'_1(0)| + |V'_0(\zeta) - J_0(p_0) + 2\pi k_0|.$$

Or, si l'on fixe le nombre δ et que l'on ne considère que des valeurs assez petites de ζ, par exemple celles qui ne surpassent pas $\frac{1}{2}$ D, on pourra évidemment trouver un nombre positif A_1 ne dépendant ni de la position du point p_0, ni de la fonction k, et tel qu'on ait

$$|V'_1(\zeta) - V'_1(0)| < A_1 K\zeta,$$

K étant la plus grande valeur que puisse atteindre sur S la fonction $|k|$.

Donc, il ne reste qu'à discuter l'expression

$$V'_0(\zeta) - J_0(p_0) + 2\pi k_0.$$

Posons

$$\int\left(\frac{1}{R_0^2}-\frac{1}{r_0^2}\right)kz\,ds = P,$$

$$2\pi k_0 - \zeta\int\frac{k\,ds}{R_0^2} = Q,$$

les intégrations étant étendues à S_0.

Nous aurons alors

$$|V_0'(\zeta) - J_0(p_0) + 2\pi k_0| < |P| + |Q|.$$

Nous devons donc évaluer les limites supérieures pour $|P|$ et $|Q|$, ce que nous pouvons faire en nous servant des inégalités obtenues au n° **1**.

Prenons pour variables indépendantes dans les fonctions à intégrer les coordonnées polaires ρ, ψ définies par les équations

$$x = \rho\cos\psi, \qquad y = \rho\sin\psi.$$

Alors, en désignant par ϑ_0 l'angle que fait la normale au point p avec l'axe des z, on aura

$$P = \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\delta} \frac{kz}{\cos\vartheta_0}\left(\frac{1}{R_0^2}-\frac{1}{r_0^2}\right)\rho\,d\rho.$$

Or, en vertu des inégalités évidentes

$$|R_0 - r_0| < \zeta, \quad R_0 > \rho, \quad r_0 > \rho,$$

on a

$$\left|\frac{1}{R_0^3}-\frac{1}{r_0^3}\right| < \frac{\zeta}{R_0 r_0}\left(\frac{1}{R_0^2}+\frac{1}{R_0 r_0}+\frac{1}{r_0^2}\right) < \frac{3\zeta}{R_0\rho^3}.$$

D'autre part, en posant

$$\frac{\sqrt{\rho^2+\zeta^2}}{R_0} = T,$$

on trouve

$$T^2 - 1 = \frac{2z(\zeta - z) + z^2}{\rho^2 + (z-\zeta)^2},$$

et, par suite,

$$|T^2 - 1| < \left|\frac{z}{\rho}\right| + \frac{z^2}{\rho^2},$$

quel que soit ζ.

Maintenant supposons, pour fixer les idées, que δ ait été choisi conformément à l'inégalité

$$2a\delta^\alpha < 1.$$

Alors, pour les points de S_0, on aura, en vertu de (2), $|z| < \rho$ et, par suite, $T < 2$.

On aura donc

$$\left|\frac{1}{R_0^3} - \frac{1}{r_0^3}\right| < \frac{3T\zeta}{\rho^3\sqrt{\rho^2+\zeta^2}} < \frac{6\zeta}{\rho^3\sqrt{\rho^2+\zeta^2}}.$$

Cela posé, si l'on se sert des inégalités

$$|z| < 2a\rho^{\alpha+1}, \qquad \cos\xi_0 > \frac{1}{2},$$

dont la seconde résulte de (4), on trouve

$$|P| < 48\pi K a\zeta \int_0^\delta \frac{\rho^{\alpha-1}\,d\rho}{\sqrt{\rho^2+\zeta^2}}$$

ou, ce qui revient au même,

$$|P| < 48\pi K a\zeta^\alpha \int_0^{\frac{\delta}{\zeta}} \frac{x^{\alpha-1}\,dx}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Nous avons déjà remarqué que le nombre α ne peut pas surpasser 1. Or, si $\alpha < 1$, l'intégrale qui figure dans cette inégalité ne pourra surpasser, quel que soit ζ, le nombre fixe

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}\,dx}{\sqrt{x^2+1}},$$

et, si $\alpha = 1$, on aura une limite supérieure indépendante de ζ pour le produit de cette intégrale par ζ^ε, ε étant une fraction positive fixe qu'on pourra d'ailleurs prendre aussi voisine de zéro qu'on voudra.

On voit donc que, si l'on entend par α_0 un nombre positif fixe satisfaisant aux conditions

$$\alpha_0 < 1, \qquad \alpha_0 \leqq \alpha,$$

on aura

$$|P| < A_0 K \zeta^{\alpha_0},$$

A_0 étant une certaine constante ne dépendant ni de la position du point p_0, ni de la fonction k.

Considérons maintenant la quantité Q.

On voit aisément qu'on peut la présenter sous la forme

$$\begin{aligned} Q = \frac{2\pi k_0 \zeta}{\sqrt{\delta^2 + \zeta^2}} &+ k_0 \zeta \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{T^3}{\cos \vartheta_0}\right) \frac{\rho \, d\rho}{(\rho^2 + \zeta^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &- \zeta \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\delta} \frac{(k - k_0) T^3}{\cos \vartheta_0} \frac{\rho \, d\rho}{(\rho^2 + \zeta^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Or, pour les points de S_0, on a

$$|T^2 - 1| < \left|\frac{z}{\rho}\right| + \frac{z^2}{\rho^2} < 2 \left|\frac{z}{\rho}\right| < 4 a \rho^{\alpha},$$

et, par suite, puisque $T < 2$,

$$|T^3 - 1| < (T + 1) |T^2 - 1| < 12 a \rho^{\alpha}.$$

D'autre part, dans la supposition $2 a \delta^{\alpha} < 1$, l'inégalité (4) donne

$$\frac{1}{\cos \vartheta_0} < 1 + 2 a \rho^{\alpha}.$$

Donc, en vertu de l'inégalité évidente

$$|ab - 1| < |a - 1| + |b - 1| + |a - 1| |b - 1|,$$

on trouve

$$\left|\frac{T^3}{\cos \vartheta_0} - 1\right| < 26 a \rho^{\alpha}.$$

En se servant de cette inégalité ainsi que de celle-ci

$$\frac{T^3}{\cos \vartheta_0} < 14,$$

qui en résulte, et en remarquant qu'en vertu de (6)

$$|k - k_0| < N(2\rho)^\beta$$

(puisque, pour les points considérés $r_0 < 2\rho$), on arrive, après une transformation évidente, à l'inégalité

$$|Q| < 2\pi K \frac{\zeta}{\delta} + 52\pi K a \zeta^\alpha \int_0^{\frac{\delta}{\zeta}} \frac{x^{\alpha+1}\,dx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$
$$+ 28\pi N(2\zeta)^\beta \int_0^{\frac{\delta}{\zeta}} \frac{x^{\beta+1}\,dx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}.$$

Or, sauf le cas où k est une constante, le nombre β ne peut pas surpasser l'unité. D'ailleurs on peut évidemment supposer toujours $\beta < 1$.

Par suite, en remarquant que les intégrales qui figurent dans cette inégalité sont de la même nature que celle que nous avons rencontrée plus haut, on aura

$$|Q| < A'_0 K \zeta^{\alpha_0} + BN\zeta^\beta,$$

A'_0 et B étant des nombres de la même espèce que A_0 et A_1.

Donc, en rapprochant toutes les inégalités obtenues, on trouve

$$|V'(\zeta) - J(p_0) + 2\pi k_0| < AK\zeta^{\alpha_0} + BN\zeta^\beta,$$

A, B étant des constantes qui ne dépendent ni de la position du point p_0, ni de la fonction k.

Dans le cas que nous avons en vue on aura $\beta < \alpha$, et, par suite, on pourra prendre $\alpha_0 = \beta$.

Alors, en remplaçant p_0 par p et en reprenant les notations du n° **2**, on obtiendra

$$(7) \qquad \left|\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{P_i} - J + 2\pi k\right| < (AK + BN)\zeta^\beta,$$

ζ étant la distance $P_i p$.

4. Comme nous l'avons déjà remarqué, la condition de continuité de la fonction k assure l'existence des deux dérivées normales

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_i, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_e,$$

en tout point p de S.

Donc, à cette seule condition, pour chacun des deux domaines E_i, E_e, il existera une limite déterminée pour l'expression

$$\frac{\partial V}{\partial x}\cos(n, x) + \frac{\partial V}{\partial y}\cos(n, y) + \frac{\partial V}{\partial z}\cos(n, z),$$

lorsque le point $P(x, y, z)$ appartenant à ce domaine tendra à se rapprocher indéfiniment du point p, *en restant toujours sur la normale n.*

Mais supposons maintenant que le point P se rapproche vers p suivant une courbe quelconque.

Pourrait-on affirmer alors l'existence d'une limite pour l'expression ci-dessus? Et, plus généralement, pourrait-on conclure l'existence des limites pour les trois dérivées

$$(8) \qquad \frac{\partial V}{\partial x}, \quad \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial V}{\partial z}?$$

On s'assure facilement qu'à la seule condition de continuité de k cette conclusion ne serait pas légitime. Mais, si l'on suppose que la fonction k satisfasse encore à la condition (6), on pourra montrer, ainsi que nous le ferons tout de suite, que les limites dont il s'agit existeront toutes et seront indépendantes du choix de la courbe suivant laquelle le point P se rapproche de p.

Soit p_0 le point de S vers lequel on fera tendre le point P du domaine considéré et soit P_0 un point du même domaine situé sur la normale en p_0.

En désignant les valeurs des dérivées (8) au point P respectivement par X(P), Y(P), Z(P), nous commencerons par démontrer l'existence des limites pour $X(P_0)$, $Y(P_0)$, $Z(P_0)$, le point P_0 tendant vers p_0.

Pour le démontrer, en général, il suffit évidemment de le faire dans une supposition particulière quelconque à l'égard du système de coordonnées.

Prenons donc le système considéré au numéro précédent, le point p_0 étant l'origine et la direction $p_0 P_0$ l'axe des z.

Alors il n'y aura à considérer que les deux expressions $X(P_0)$, $Y(P_0)$ et, d'ailleurs, il suffira d'établir l'existence de la limite pour l'une quelconque d'entre elles, par exemple pour $X(P_0)$.

En reprenant les notations du numéro précédent, nous aurons

$$X(P_0) = \int \frac{kx\,ds}{R_0^3},$$

l'intégrale étant étendue à S.

Introduisons maintenant le cylindre C, que nous y avons défini, et désignons par $X_0(P_0)$, $X_1(P_0)$ les intégrales de la même forme étendues à S_0, S_1.

On aura

$$X(P_0) = X_0(P_0) + X_1(P_0).$$

Or, on voit aisément que, δ étant fixé et ζ étant assez petit (par exemple, plus petit que $\frac{1}{2}D$), on pourra trouver un nombre positif C_1 indépendant de la position du point p_0 et tel qu'on ait

$$|X_1(P_0) - X_1(p_0)| < C_1\zeta.$$

D'autre part, δ étant assez petit, on a

$$X_0(P_0) = \int_0^{2\pi} \cos\psi\,d\psi \int_0^{\delta} \frac{k\rho^2\,d\rho}{R_0^3\cos\vartheta_0},$$

ce qu'on peut présenter sous la forme

$$\begin{aligned} X_0(P_0) = k_0 \int_0^{2\pi} \cos\psi\,d\psi \int_0^{\delta} \left(\frac{T^3}{\cos\vartheta_0} - 1\right) \frac{\rho^2\,d\rho}{(\rho^2+\zeta^2)^{\frac{3}{2}}} \\ + \int_0^{2\pi} \cos\psi\,d\psi \int_0^{\delta} \frac{(k-k_0)T^3}{\cos\vartheta_0} \frac{\rho^2\,d\rho}{(\rho^2+\zeta^2)^{\frac{3}{2}}}, \end{aligned}$$

et, si l'on fait à l'égard de δ les mêmes suppositions qu'au numéro précédent, on aura, dans le champ d'intégration,

$$\left|\frac{T^2}{\cos\vartheta_0} - 1\right| < 26 a \rho^{\alpha}.$$

De là, eu égard à l'inégalité

$$|k - k_0| < N r_0^{\beta} < 2N\rho^{\beta},$$

on voit immédiatement que, ζ tendant vers zéro, la fonction $X_0(P_0)$ tendra vers une limite déterminée.

D'ailleurs, en désignant cette limite par $X_0(p_0)$, on aura

$$X_0(p_0) = k_0 \int_0^{2\pi} \cos\psi \, d\psi \int_0^{\delta} \left(\frac{T_0^3}{\cos\vartheta_0} - 1\right)\frac{d\rho}{\rho}$$
$$+ \int_0^{2\pi} \cos\psi \, d\psi \int_0^{\delta} \frac{(k - k_0) T_0^3}{\cos\vartheta_0} \frac{d\rho}{\rho},$$

T_0 étant la valeur de T pour $\zeta = 0$.

On voit donc que, ζ tendant vers zéro, la fonction $X(P_0)$ tendra vers la limite

$$X_0(p_0) + X_1(p_0)\,(^1),$$

que nous désignerons par $X(p_0)$. D'ailleurs, il est facile de s'assurer qu'elle tendra vers cette limite *uniformément* pour toutes les positions du point p_0.

Pour le montrer, nous remarquons qu'on peut écrire

$$X_0(P_0) - X_0(p_0) = k_0 \int_0^{2\pi} \cos\psi \, d\psi \int_0^{\delta} \left(\frac{T^3}{\cos\vartheta_0} - 1\right)\left[\frac{1}{(\rho^2 + \zeta^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{\rho^3}\right]\rho^2 \, d\rho$$
$$+ \int_0^{2\pi} \cos\psi \, d\psi \int_0^{\delta} \frac{k - k_0}{\cos\vartheta_0}\left(\frac{1}{R_0^3} - \frac{1}{r_0^3}\right)\rho^2 \, d\rho$$
$$+ k_0 \int_0^{2\pi} \cos\psi \, d\psi \int_0^{\delta} \frac{T^3 - T_0^3}{\cos\vartheta_0} \frac{d\rho}{\rho}.$$

(1) On peut remarquer que cette limite est la même pour les domaines E_i et E_e.

Or, on a

$$T^2 - T_0^2 = \frac{T^2(2\rho^2 z\zeta + z^2\zeta^2)}{(\rho^2+\zeta^2)(\rho^2+z^2)}$$

et, par suite, puisque dans le champ d'intégration $T < 2$, $a\rho^\alpha < a\delta^\alpha < \frac{1}{2}$, $T_0 < 1$, on trouve

$$|T^2 - T_0^2| < \frac{16a(\rho + a\rho^\alpha\zeta)\rho^\alpha\zeta}{\rho^2+\zeta^2} < \frac{24a\rho^\alpha\zeta}{\sqrt{\rho^2+\zeta^2}},$$

$$|T^3 - T_0^3| < (T + T_0)\,|T^2 - T_0^2| < \frac{72a\rho^\alpha\zeta}{\sqrt{\rho^2+\zeta^2}}.$$

En se servant de cette inégalité ainsi que de celles-ci

$$\left|\frac{T^3}{\cos\vartheta_0} - 1\right| < 26a\rho^\alpha, \qquad |k - k_0| < 2N\rho^\beta, \qquad \cos\vartheta_0 > \tfrac{1}{2},$$

$$\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{(\rho^2+\zeta^2)^{\frac{3}{2}}} < \frac{2\zeta}{\rho^3\sqrt{\rho^2+\zeta^2}}, \qquad \left|\frac{1}{R_0^3} - \frac{1}{r_0^3}\right| < \frac{6\zeta}{\rho^3\sqrt{\rho^2+\zeta^2}},$$

on parvient à la suivante :

$$|X_0(P_0) - X_0(p_0)| < 392\pi K a\zeta^\alpha \int_0^{\frac{\delta}{\zeta}} \frac{x^{\alpha-1}\,dx}{\sqrt{x^2+1}} + 48\pi N\zeta^\beta \int_0^{\frac{\delta}{\zeta}} \frac{x^{\beta-1}\,dx}{\sqrt{x^2+1}},$$

et, de là, si $\beta < \alpha$, on conclut

$$|X_0(P_0) - X_0(p_0)| < C_0\zeta^\beta,$$

C_0 étant un nombre de la même espèce que C_1.

Donc, en désignant par C un nombre positif convenablement choisi et indépendant de la position du point p_0, on aura

$$|X(P_0) - X(p_0)| < C\zeta^\beta$$

pour toutes les valeurs de ζ qui ne surpassent pas une certaine limite fixe (par exemple, pour $\zeta < \frac{1}{2}D$); et cette inégalité prouve bien l'exactitude de notre affirmation.

Maintenant reportons-nous à un système de coordonnées quelconque.

D'après ce que nous venons de montrer et ce que nous avons montré au numéro précédent, nous pouvons affirmer que, la distance ζ du point P_0 au point p_0 tendant vers zéro, les quantités $X(P_0)$, $Y(P_0)$, $Z(P_0)$ tendront vers certaines limites (en général, différentes pour les domaines E_i et E_e), et cela uniformément pour toutes les positions du point p_0.

Ces limites, que nous pouvons désigner, ne considérant qu'un seul des deux domaines E_i, E_e, par $X(p_0)$, $Y(p_0)$, $Z(p_0)$, représenteront certaines fonctions du point p_0, et il est facile de voir que ces fonctions seront continues sur S.

En effet, les expressions $X(P_0)$, $Y(P_0)$, $Z(P_0)$, si l'on y donne à ζ une valeur fixe suffisamment petite (par exemple, plus petite que $\frac{1}{2}D$), deviendront des fonctions du point p_0 continues sur S et, comme, pour $\zeta = 0$, elles tendent *uniformément* vers les fonctions $X(p_0)$, $Y(p_0)$, $Z(p_0)$, on en conclut immédiatement la continuité de ces dernières.

Cela étant établi, concevons, outre le point p_0, un autre point p de S et un point P du domaine considéré situé sur la normale en p.

Soient ζ la distance pP et r_0 la distance pp_0.

Quelle que soit la position du point p, nous pouvons prendre ζ assez petit pour que les différences

$$X(P) - X(p), \qquad Y(P) - Y(p), \qquad Z(P) - Z(p)$$

soient aussi petites en valeurs absolues qu'on voudra et, d'autre part, les fonctions $X(p)$, $Y(p)$, $Z(p)$ étant continues sur S, on peut prendre r_0 assez petit pour que les différences

$$X(p) - X(p_0), \qquad Y(p) - Y(p_0), \qquad Z(p) - Z(p_0)$$

soient aussi voisines de zéro qu'on voudra.

Donc, on pourra prendre ζ et r_0 suffisamment petits pour qu'on ait

$$|X(P) - X(p_0)| < \varepsilon, \qquad |Y(P) - Y(p_0)| < \varepsilon,$$
$$|Z(P) - Z(p_0)| < \varepsilon,$$

quelque petit que soit le nombre ε.

On a donc bien

$$\lim X(P) = X(p_0), \qquad \lim Y(P) = Y(p_0), \qquad \lim Z(P) = Z(p_0),$$

indépendamment de la loi suivant laquelle le point P se rapproche de p_0.

5. L'intégrale J qui figure dans l'expression de $\frac{\partial V}{\partial n}$ jouera dans la suite un rôle considérable, et nous nous arrêterons maintenant sur une de ses propriétés.

Il est facile de montrer que, k étant une fonction quelconque, intégrable sur S (et par suite limitée), cette intégrale représentera une fonction continue sur S, de sorte que, si l'on désigne par J' la valeur de J au point p' et par r la distance de ce point au point p, la différence J' — J deviendra infiniment petite, toutes les fois que r tendra vers zéro.

Mais il y a plus : on peut montrer que cette différence n'est jamais de l'ordre infiniment petit par rapport à r.

Pour établir ce point, qui est d'une grande importance pour ce qui va suivre, il faut montrer que, β étant un certain nombre positif fixe, on peut assigner au rapport

$$\frac{|J' - J|}{r^\beta}$$

une limite supérieure indépendamment de la position des points p, p'.

La recherche de la limite supérieure exacte des valeurs de β, satisfaisant à cette condition, serait un problème assez difficile, et nous nous contenterons de signaler une quelconque de ces valeurs de β, ce qui nous suffira complètement dans notre étude.

Soient p_0 et p_1 les deux points considérés de S dont la distance mutuelle sera désignée par r.

En entendant par p un point de l'élément superficiel ds, nous désignerons par r_0 et φ_0 la distance p_0p et l'angle que fait la normale au point p_0 avec la direction p_0p. Pareillement, par r_1 et φ_1 seront désignés la distance p_1p et l'angle de la normale au point p_1 avec la direction $p_1 p$. Alors, pour les valeurs de J aux points p_0, p_1, on aura

$$J(p_0) = \int \frac{k \cos\varphi_0 \, ds}{r_0^2}, \qquad J(p_1) = \int \frac{k \cos\varphi_1 \, ds}{r_1^2},$$

les intégrales étant étendues à S, et nous aurons à évaluer, en fonction de r, une limite supérieure pour

$$|J(p_1) - J(p_0)|.$$

Nous introduirons de nouveau le cylindre C, considéré au n° **3**, ayant pour axe la normale au point p_0, et nous désignerons par $J_0(p_0)$, $J_0(p_1)$ les intégrales ci-dessus étendues à S_0 et par $J_1(p_0)$, $J_1(p_1)$ ces intégrales étendues à S_1.

En posant

$$J_1(p_1) - J_1(p_0) = \Delta,$$

et en remarquant que

$$|J(p_1) - J(p_0)| < |J_0(p_0)| + |J_0(p_1)| + |\Delta|,$$

nous chercherons les limites supérieures des trois termes du second membre en fonction de δ et r, sauf à établir ensuite une certaine dépendance entre ces deux quantités.

Dans cette recherche, nous supposerons $r < \delta$.

Commençons par les deux premiers termes.

Pour évaluer leurs limites supérieures, nous considérerons, d'une manière générale, l'intégrale

$$J_s(p_0) = \int_{(s)} \frac{k \cos\varphi_0 \, ds}{r_0^2}$$

étendue à une portion quelconque s de S, dans laquelle r_0 ne surpasse pas une quantité assez petite l.

Nous nous servirons du système de coordonnées et des notations du n° **3**. Nous aurons alors

$$J_s(p_0) = \int_{(s)} \frac{k z \, ds}{r_0^3},$$

et, en supposant l assez petit pour qu'on puisse se servir des inégalités

$$|z| < 2a\rho^{\alpha+1}, \qquad \cos\vartheta_0 > \frac{1}{2},$$

nous en déduirons

$$|J_s(p_0)| < 4a\mathrm{K}\int_{(s)} \rho^{\alpha-2}\cos\vartheta_0\, ds.$$

Par suite, à plus forte raison,

$$|J_s(p_0)| < 4a\mathrm{K}\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{l} \rho^{\alpha-1}\, d\rho = \frac{8\pi}{\alpha}\mathrm{K}a l^{\alpha}.$$

Maintenant, pour obtenir les limites cherchées, il n'y a qu'à remarquer que dans les intégrales $J_0(p_0)$, $J_0(p_1)$

$$r_0 < 2\delta, \qquad r_1 < r + r_0 < 3\delta.$$

On a donc, δ étant assez petit,

$$|J_0(p_0)| < \frac{16\pi}{\alpha}\mathrm{K}a\delta^{\alpha}, \qquad |J_0(p_1)| < \frac{24\pi}{\alpha}\mathrm{K}a\delta^{\alpha}.$$

Considérons maintenant le troisième terme.

Nous supposerons que δ ne surpasse pas une quantité fixe δ_0 satisfaisant aux inégalités

$$\delta_0 < \frac{1}{2}\mathrm{D}, \qquad 2a\delta_0^{\alpha} < 1,$$

et nous désignerons par Δ_0 la valeur de Δ pour $\delta = \delta_0$.

On aura

$$|\Delta| < |\Delta - \Delta_0| + |\Delta_0|,$$

$$\Delta - \Delta_0 = \int_0^{2\pi} d\psi \int_{\delta}^{\delta_0} \left(\frac{\cos\varphi_1}{r_1^2} - \frac{\cos\varphi_0}{r_0^2}\right)\frac{k\rho\, d\rho}{\cos\vartheta_0}.$$

Or, ϑ étant l'angle fait par la normale au point p_1 avec celle du point p_0 et x_1, y_1, z_1 les coordonnées du point p_1, on a

$$r_1 \cos\varphi_1 = \left[z - z_1 - (x - x_1)\frac{\partial z_1}{\partial x_1} - (y - y_1)\frac{\partial z_1}{\partial y_1}\right]\cos\hat{z}.$$

Par suite, puisque $r_0 \cos\varphi_0 = z$, on aura

$$\begin{aligned}&|r_1\cos\varphi_1 - r_0\cos\varphi_0|\\ &\quad < |z|(1-\cos\hat{z}) + |z_1| + \left|(x-x_1)\frac{\partial z_1}{\partial x_1} + (y-y_1)\frac{\partial z_1}{\partial y_1}\right|.\end{aligned}$$

D'ailleurs

$$\begin{aligned}&\left|(x-x_1)\frac{\partial z_1}{\partial x_1} + (y-y_1)\frac{\partial z_1}{\partial y_1}\right|\\ &\quad < \sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}\sqrt{\left(\frac{\partial z_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_1}{\partial y_1}\right)^2},\end{aligned}$$

et, en vertu des inégalités (2), (3), (4), on a

$$|z_1| < 2a\delta_0 r^\alpha, \qquad \sqrt{\left(\frac{\partial z_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_1}{\partial y_1}\right)^2} < 4ar^\alpha, \qquad 1 - \cos\hat{z} < 2ar^\alpha.$$

Donc, en remarquant que dans le champ de l'intégration

$$|z| < \delta_0, \qquad \sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2} < 2\delta_0,$$

il vient

$$|r_1\cos\varphi_1 - r_0\cos\varphi_0| < 12a\delta_0 r^\alpha.$$

D'autre part, puisque

$$|r_1 - r_0| < r, \qquad r_0 > \rho, \qquad r_1 > r_0 - r > \rho - r,$$

et que dans le champ d'intégration $\rho - r > 0$, on trouve

$$\left|\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_0^3}\right| < \frac{r}{r_1 r_0}\left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_1 r_0} + \frac{1}{r_0^2}\right) < \frac{3r}{r_1\rho(\rho-r)^2}.$$

Supposons que $r < \frac{1}{2}\delta$. Alors cette inégalité donnera

$$\left|\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_0^3}\right| < \frac{12r}{r_1\rho^3},$$

et puisque

$$\frac{\cos\varphi_1}{r_1^2} - \frac{\cos\varphi_0}{r_0^2} = \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_0^3}\right) r_1 \cos\varphi_1 + \frac{r_1\cos\varphi_1 - r_0\cos\varphi_0}{r_0^3},$$

on aura, dans le champ d'intégration,

$$\left|\frac{\cos\varphi_1}{r_1^2} - \frac{\cos\varphi_0}{r_0^2}\right| < \frac{12r}{\rho^3} + \frac{12a\delta_0 r^\alpha}{\rho^3}.$$

Par suite, en remarquant que le second membre ne surpasse pas la quantité

$$\frac{12(\delta_0^{1-\alpha} + a\delta_0) r^\alpha}{\rho^3} < \frac{18\delta_0^{1-\alpha} r^\alpha}{\rho^3},$$

et que dans la fonction à intégrer $\cos\vartheta_0 > \frac{1}{2}$, on trouve

$$|\Delta - \Delta_0| < 72\pi\delta_0^{1-\alpha} K \frac{r^\alpha}{\delta}.$$

D'autre part, il est évident qu'il y aura un nombre fixe H'_0 ne dépendant pas de la fonction k et tel qu'on ait

$$|\Delta_0| < H'_0 K r^\alpha.$$

Donc, pour un autre nombre H' de la même nature, on aura

$$|\Delta| < H' K \frac{r^\alpha}{\delta}.$$

De tout cela, on conclut qu'on aura une inégalité de la forme

$$|J(p_1) - J(p_0)| < H' K \frac{r^\alpha}{\delta} + H'' K \delta^\alpha,$$

H', H'' étant des nombres ne dépendant ni de la position des points considérés, ni de la fonction k, ni de δ, et, par la nature même de cette inégalité, on voit qu'elle aura lieu non seulement dans les suppositions que nous avons faites pour l'obtenir, mais encore quels que soient r et δ, pourvu qu'on prenne pour H' et H'' des nombres assez grands.

Maintenant, posons

$$\delta = cr^{\gamma},$$

en entendant par c une constante positive quelconque et en supposant $\gamma = \frac{\alpha}{\alpha+1}$.

Alors notre inégalité deviendra

$$|J(p_1) - J(p_0)| < \left(H'\frac{1}{c} + H''c^{\alpha}\right)Kr^{\beta},$$

avec cette valeur pour β

$$\beta = \frac{\alpha^2}{\alpha+1},$$

et c'est le résultat cherché.

En remplaçant p_0, p_1 par p, p' et en reprenant les notations introduites au début du numéro présent, nous le présenterons sous la forme

$$(9) \qquad |J' - J| < HKr^{\beta},$$

H étant un nombre positif ne dépendant ni de la position des points p, p', ni de la fonction k.

6. Comme nous l'avons déjà dit, outre les potentiels des simples couches, nous aurons à considérer aussi ceux des doubles couches.

Par le potentiel, au point P, d'une double couche à densité (ou à moment) μ on entend, comme on sait, l'intégrale

$$W = \int \frac{\mu' \cos \Phi' \, ds'}{R^2},$$

dans laquelle Φ' désigne l'angle que fait la normale au point p' de l'élément ds' avec la direction $p'P$, R la distance $p'P$ et μ' la valeur de μ au point p'.

Nous supposerons que μ est une fonction continue sur la surface S à laquelle s'étend l'intégration.

A cette condition W représentera une fonction des coordonnées x, y, z du point P parfaitement déterminée dans tout l'espace. Mais cette fonction, tout en restant continue, tant que le point P ne se trouve pas sur S, varie brusquement, lorsque ce point vient à traverser la surface en un point quelconque p.

Soient φ', r ce que deviennent Φ', R, lorsque le point P se trouve en p, et

$$w = \int \frac{\mu' \cos\varphi' \, ds'}{r^2}.$$

Alors w représentera ce qu'on peut appeler la *valeur directe* de W au point p, valeur qui diffère, en général, des valeurs limites w_i et w_e qu'on obtient en supposant que le point P se rapproche indéfiniment vers p, en restant toujours, soit dans le domaine E_i, soit dans le domaine E_e.

On a, en effet, comme on sait,

$$(10) \qquad \left\{ \begin{aligned} w_i &= w + 2\pi\mu, \\ w_e &= w - 2\pi\mu. \end{aligned} \right.$$

On peut remarquer que, μ étant continue, w et, par suite aussi, w_i, w_e représenteront des fonctions continues sur S.

Maintenant, supposant que le point P se trouve sur la normale n au point p, considérons l'expression

$$\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_P,$$

qui se présentera dans notre étude dans la supposition que la distance ζ du point P au point p soit assez petite.

Il est bien clair que la seule condition de continuité de la fonction μ ne suffit pas encore pour assurer l'existence d'une limite pour l'expression ci-dessus, ζ tendant vers zéro.

Donc la dérivée normale de la fonction W n'existe que sous certaines conditions complémentaires, et de pareilles conditions seront indiquées dans la suite.

Mais à présent nous n'admettrons que les suppositions déjà faites, et, en restant dans ces généralités, nous nous bornerons à montrer que, ζ étant assez petit, il existe une limite supérieure pour le produit

$$\zeta\left|\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_p\right|,$$

ce qui suffira pour la recherche que nous avons en vue.

En entendant par $\widehat{\varpi}$ l'angle des deux normales aux points p et p' et par Φ l'angle de la normale n au point p avec la direction Pp', on aura

$$\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_p = \int(\cos\widehat{\varpi} + 3\cos\Phi\cos\Phi')\,\frac{\mu'\,ds'}{R^3}.$$

Par suite, il vient

$$\left|\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_p\right| < 4M\int\frac{ds'}{R^3},$$

M étant la plus grande valeur sur S de la fonction $|\mu|$.

Or l'intégrale qui figure ici est bien connue, et l'on sait que, ζ étant assez petit, on peut assigner une limite supérieure pour le produit

$$\zeta\int\frac{ds'}{R^3}.$$

D'ailleurs, si le rapport de ζ à D ne surpasse pas une fraction fixe, par exemple, $\frac{1}{2}$, cette limite pourra être choisie indépendamment de la position du point p.

Donc, pour de pareilles valeurs de ζ, on aura une inégalité de la forme

$$\left|\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_p\right| < G\,\frac{M}{\zeta}, \tag{11}$$

G étant une constante ne dépendant ni de la position du point p, ni de la fonction μ.

7. Soit v_0 une fonction donnée définie pour les points de S de manière à être intégrable sur cette surface (et, par suite, limitée).

Supposons qu'en partant de cette fonction on ait formé la suite indéfinie de fonctions

$$v_1, \quad v_2, \quad v_3, \quad \ldots,$$

liées par les équations de la forme

$$v_m = \frac{1}{2\pi}\int \frac{v'_{m-1}\cos\varphi'\, ds'}{r^2},$$

où m est un nombre de la suite $1, 2, 3, \ldots$, et v'_{m-1} la valeur de la fonction v_{m-1} au point p'.

On sait que cette suite de fonctions joue un rôle très important dans les méthodes qu'a proposées M. Neumann pour les divers problèmes se rattachant à l'équation de Laplace.

On sait, en effet, que ces méthodes sont fondées sur le principe suivant, que nous appellerons *principe de Neumann:*

Quelle que soit la fonction v_0, il existe une constante C, telle que, pour tous les points de S et pour toutes les valeurs de m, on ait

$$(12) \qquad |v_m - \mathrm{C}| < \mathrm{L}\lambda^m,$$

L, λ étant des constantes positives indépendantes du nombre m, et λ *représentant un nombre qui est plus petit que* 1 *et ne dépend point de la fonction* v_0.

C'est encore sur ce principe que nous allons nous appuyer dans notre recherche.

Comme on le sait, la première démonstration de ce principe est due à M. Neumann, qui a imaginé, à cet effet, une méthode spéciale devenue maintenant classique.

Cette méthode ne s'applique qu'aux surfaces convexes. Mais c'est un cas assez général où elle peut servir à démontrer le principe en toute rigueur, du moins dans les suppositions qui sont ici admises.

C'est pourquoi, dans ma Note des *Comptes rendus* (22 novembre 1897), je me suis borné à la supposition que la surface considérée soit convexe.

Toutefois, pour l'exactitude du principe, cette supposition n'est nullement nécessaire. On sait, en effet, par les dernières recherches de M. Poincaré (*Acta mathematica*, t. XX), que le principe de Neumann peut bien être exact aussi pour certaines surfaces non convexes.

D'ailleurs, de cette supposition elle-même, l'analyse qu'on trouvera ici sera entièrement indépendante, et tout ce qui va suivre sera applicable non seulement aux surfaces convexes, mais encore à toute surface qui satisfait aux conditions du n° **1** et pour laquelle on réussit à démontrer le principe en question.

Par cette raison, à présent, au lieu de supposer que la surface S soit convexe, nous supposerons, plus généralement, que le principe de Neumann soit applicable.

C'est en cela que consistera la supposition que nous avions encore à faire, ainsi que nous l'avons mentionné au n° **1**.

Après ces préliminaires, abordons notre étude.

CHAPITRE II.

PROBLÈME FONDAMENTAL DE L'ÉLECTROSTATIQUE.

8. Nous ne considérerons que le cas d'un conducteur unique d'étendue finie et limité par une seule surface fermée S à l'égard de laquelle nous ferons les suppositions énoncées au n° **1**.

Supposons que notre conducteur soit chargé d'une quantité donnée d'électricité, et qu'il soit ensuite soustrait à toute influence extérieure.

On sait que, si l'équilibre est possible, l'électricité se distribuera à la surface S avec une densité k, telle que l'intégrale

$$V = \int \frac{k' ds'}{R},$$

représentant, avec les notations déjà définies (n° **2**), le potentiel de la couche électrique, conservera une valeur constante C dans toute l'étendue du conducteur.

Donc, pour démontrer la possibilité du problème qui nous occupe, on doit établir l'existence d'une fonction k satisfaisant à la condition ci-dessus et conduisant à la valeur donnée pour l'intégrale

$$\int k\,ds \text{ (1)}.$$

On peut remarquer que cette fonction, si toutefois elle est continue, satisfait à l'équation

$$k = \frac{1}{2\pi}\int \frac{k' \cos\varphi\, ds'}{r^2} \tag{13}$$

qui découle immédiatement de la première des formules (5).

Réciproquement, toute solution continue de cette équation conduit à une valeur constante de l'intégrale

$$\int \frac{k'\,ds'}{R}$$

dans toute l'étendue du conducteur. Donc, si cette solution n'est pas identiquement nulle, elle donnera une solution du problème considéré.

On sait que, dans les Traités de l'Électrostatique, on propose le théorème d'après lequel, *le problème considéré étant possible, il n'en peut exister qu'une seule solution.*

Il va sans dire que ce théorème n'est exact qu'avec certaines restrictions.

Si l'on ne veut admettre pour k que des solutions *continues*, on peut

(1) Nous désignerons l'élément superficiel tantôt par ds, tantôt par ds', et le point variable appartenant à cet élément sera désigné par p dans le premier cas et par p' dans le second. En même temps, considérant une fonction d'un seul point de S et désignant sa valeur au point p par f, nous désignerons sa valeur en p' par f'.

le démontrer, par des méthodes connues, en toute rigueur. Mais, si l'on ne faisait pas cette restriction, on ne pourrait démontrer le théorème qu'en précisant d'avance la manière dont se comporte la fonction k aux lieux de discontinuité.

Nous ne nous arrêterons pas sur ce point, puisque, dans la suite, nous ne considérerons que des solutions continues.

Aussi bornons-nous à citer la proposition suivante :

L'équation (13) *avec la condition*

$$\int k\, ds = \text{quantité donnée}$$

ne peut admettre qu'une seule solution continue.

9. Reprenons la suite de fonctions

$$v_0, \quad v_1, \quad v_2, \quad v_3, \quad \ldots,$$

définie au n° **7**.

Les deux fonctions consécutives de cette suite étant liées par l'équation

$$v_m = \frac{1}{2\pi}\int \frac{v'_{m-1}\cos\varphi'\, ds'}{r^2},$$

toutes ces fonctions seront parfaitement déterminées, si l'on donne v_0.

Mais à présent, au lieu de donner directement cette fonction, nous la définirons par la formule

$$v_0 = \int \frac{k'_0\, ds'}{r},$$

k_0 étant une fonction donnée que nous supposerons non seulement continue sur S, mais encore vérifiant la condition analogue à celle (6),

$$(14) \qquad |k_0 - k'_0| < N_0 r^{\beta_0},$$

où N_0, β_0 désignent des nombres positifs indépendants de la position des points p, p'.

Les fonctions ci-dessus ne sont définies que pour les points de la surface S. Mais, en partant de ces fonctions, on peut construire une autre suite de fonctions

$$V_0,\quad V_1,\quad V_2,\quad V_3,\quad \ldots$$

définies pour tous les points de l'espace E_i intérieur à cette surface.

Nous définirons ces fonctions par la condition qu'elles représentent, pour le domaine E_i, les solutions du problème de Dirichlet se réduisant sur S respectivement aux fonctions

$$v_0,\quad v_1,\quad v_2,\quad v_3,\quad \ldots.$$

Alors nous aurons

$$V_0 = \int \frac{k'_0\, ds'}{R},$$

et, en vertu de la première des formules (10), il viendra

$$(15)\qquad V_m = \frac{1}{2\pi}\int \frac{v'_{m-1}\cos\psi'\, ds'}{R^2} - V_{m-1}.$$

Par cette formule, en y faisant successivement $m = 1, 2, 3, \ldots$, on déterminera, de proche en proche, toutes les fonctions V_m.

Maintenant supposons que, pour la surface considérée, on ait réussi à démontrer le principe de Neumann.

On aura alors l'inégalité (12), et comme, d'après le théorème connu, toutes les valeurs de la fonction V_m se trouvent entre la plus petite et la plus grande des valeurs de la fonction v_m, on aura aussi

$$|V_m - C| < L\lambda^m$$

pour tous les points du domaine E_i.

De là, puisque $\lambda < 1$, on voit que, m croissant indéfiniment, la fonction V_m tendra vers la constante C.

Or, nous verrons tout de suite que la fonction V_m peut être présentée sous la forme

$$(16)\qquad V_m = \int \frac{k'_m\, ds'}{R}$$

du potentiel d'une simple couche répandue sur S à densité k_m continue sur cette surface.

Donc, si l'on parvient à démontrer que, m croissant indéfiniment, cette densité tend uniformément vers une limite qui ne soit pas identiquement nulle, la possibilité du problème électrostatique sera établie, puisque cette limite représentera une fonction k pour laquelle l'intégrale

$$\int \frac{k'\,ds'}{R}$$

conservera une valeur constante dans le domaine E_i, et quant à la condition

$$\int k\,ds = \text{quantité donnée},$$

on pourra toujours y satisfaire par un choix convenable de la fonction k_0.

10. Pour démontrer la formule (16), supposons qu'on ait déjà trouvé

$$V_{m-1} = \int \frac{k'_{m-1}\,ds'}{R},$$

et que la densité k_{m-1} de ce potentiel satisfasse à la condition

$$|k_{m-1} - k'_{m-1}| < N_{m-1}\, r^{\beta_{m-1}},$$

N_{m-1}, β_{m-1} étant des nombres positifs indépendants de la position des points p, p'.

Alors, comme nous l'avons vu au n° **4**, les dérivées

$$\frac{\partial V_{m-1}}{\partial x}, \quad \frac{\partial V_{m-1}}{\partial y}, \quad \frac{\partial V_{m-1}}{\partial z}$$

seront déterminées et continues dans le domaine E_i, *jusqu'à la surface* S.

Par suite, nous pourrons appliquer à la fonction V_{m-1} la formule connue de Green, qui donnera

$$V_{m-1} = \frac{1}{4\pi}\int \frac{v'_{m-1}\cos\Phi'\,ds'}{R^2} - \frac{1}{4\pi}\int \frac{\partial V'_{m-1}}{\partial n'}\frac{ds'}{R},$$

$\frac{\partial V'_{m-1}}{\partial n'}$ étant la valeur au point p' de la dérivée normale intérieure de la fonction V_{m-1}.

Or, en vertu de cela, la formule (15) se réduira à

$$V_m = \frac{1}{2\pi}\int \frac{\partial V'_{m-1}}{\partial n'}\frac{ds'}{R} + V_{m-1},$$

ce qui se présentera sous la forme (16), si l'on pose

$$k_m = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial V_{m-1}}{\partial n} + k_{m-1}.$$

D'ailleurs, en vertu de (5), cette expression de k_m prendra la forme

(17) $$k_m = \frac{1}{2\pi}\int \frac{k'_{m-1}\cos\varphi\,ds'}{r^2},$$

d'où l'on voit, en vertu de ce qui a été montré au n° 3, qu'on aura

(18) $$|k_m - k'_m| < N_m r^{\beta_m},$$

N_m, β_m étant des nombres de la même espèce que N_{m-1}, β_{m-1}.

Donc, la formule (16) et l'inégalité (18) étant exactes pour une valeur quelconque de m, elles le seront aussi pour la valeur plus grande d'une unité.

Or, la fonction V_0 a déjà la forme (16) avec la condition (14), que nous avons admise.

Par suite, la formule (16) et la continuité de la fonction k_m se trouvent démontrées.

D'ailleurs nous avons obtenu la formule (17), qui permet de calculer les k_m, en partant de k_0.

Remarquons que cette formule fait voir, tout indépendamment du principe de Neumann, que, dans notre recherche, il suffira d'établir l'existence de la limite k pour k_m et l'uniformité de convergence vers cette limite. Il résulte, en effet, de la formule (17) que cette limite satisfera nécessairement à l'équation (13).

Remarquons encore que pour satisfaire à l'équation

$$\int k\,ds = g,$$

g étant la charge donnée du conducteur, il n'y aura qu'à prendre, pour k_0, une fonction vérifiant l'équation

$$\int k_0\,ds = g.$$

On a, en effet, en vertu de (17),

$$\int k_m\,ds = \int k'_{m-1}\,ds'$$

et, par suite,

$$\int k_m ds = \int k_0\,ds,$$

quel que soit m.

Cela posé, nous allons établir l'existence de la limite k, en nous appuyant sur le principe de Neumann.

11. Tout d'abord, il est facile de s'assurer que la fonction V_m peut être présentée sous forme de potentiel d'une double couche répandue sur S.

A cet effet, on remarquera qu'en vertu de (12) la série

$$(v_m - v_{m+1}) + (v_{m+2} - v_{m+3}) + (v_{m+4} - v_{m+5}) + \ldots$$

est convergente et, d'ailleurs, uniformément pour tous les points de S.

La série considérée définit donc une certaine fonction, et, ses termes étant continus sur S, cette fonction le sera aussi en vertu de l'uniformité de convergence.

En désignant cette fonction par μ_m, posons

$$(19) \qquad W_m = \frac{1}{2\pi}\int \frac{\mu'_m \cos\Phi' \, ds'}{R^2}.$$

Alors W_m représentera une certaine fonction harmonique dans le domaine E_i, et cette fonction, en vertu de (10), se réduira sur S à

$$\frac{1}{2\pi}\int \frac{\mu'_m \cos\varphi' \, ds'}{r^2} + \mu_m.$$

Or, le premier terme de cette expression, en vertu de la formule

$$(20) \qquad \mu_m = (v_m - v_{m+1}) + (v_{m+2} - v_{m+3}) + \ldots$$

et des équations par lesquelles sont liées les v_m, est égal à

$$(v_{m+1} - v_{m+2}) + (v_{m+3} - v_{m+4}) + \ldots = v_m - \mu_m - C.$$

Donc la fonction W_m se réduit sur S à

$$v_m - C,$$

et, par suite, on a

$$(21) \qquad V_m = W_m + C$$

pour tous les points du domaine E_i. C'est ce que donne, d'ailleurs, immédiatement la méthode connue de Neumann.

Cela posé, prenons un point quelconque p de S et un point P du domaine E_i situé sur la normale n en p. Puis, en supposant que la distance $\zeta = \mathrm{P}p$ soit assez petite (par exemple, plus petite que $\frac{1}{2}$ D), considérons les expressions

$$\left(\frac{\partial V_m}{\partial n}\right)_{\mathrm{P}} \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial W_m}{\partial n}\right)_{\mathrm{P}}$$

V_m, W_m étant définies par les formules (16) et (19).

Soit K_m une limite supérieure quelconque de la fonction $|k_m|$.

En vertu de (9) et de (17), on aura

$$|k_m - k'_m| < \mathrm{H}\mathrm{K}_{m-1} r^\beta,$$

H étant indépendant du nombre m et de la position des points p, p' et β étant défini par la formule

$$\beta = \frac{\alpha^2}{\alpha+1}.$$

Par suite, l'inégalité (7) donnera

$$\left|\left(\frac{\partial \mathrm{V}_m}{\partial n}\right)_{\mathrm{P}} - 2\pi(k_{m+1} - k_m)\right| < (\mathrm{AK}_m + \mathrm{BK}_{m-1})\zeta^\beta,$$

A, B étant des nombres de la même espèce que H, et de là on déduit

$$2\pi|k_{m+1} - k_m| < (\mathrm{AK}_m + \mathrm{BK}_{m-1})\zeta^\beta + \left|\left(\frac{\partial \mathrm{V}_m}{\partial n}\right)_{\mathrm{P}}\right|.$$

D'autre part, en vertu de (12), on a

$$|v_m - v_{m+1}| < \mathrm{L}(\lambda^m + \lambda^{m+1})$$

et, par suite, (20) donne

$$|\mu_m| < \frac{\mathrm{L}}{1-\lambda}\lambda^m.$$

On aura donc, en vertu de (11),

$$\left|\left(\frac{\partial \mathrm{W}_m}{\partial n}\right)_{\mathrm{P}}\right| < \mathrm{G}\frac{\lambda^m}{\zeta},$$

G étant une constante ne dépendant ni du nombre m, ni de la position du point p.

Or, en vertu de (21),

$$\left(\frac{\partial \mathrm{W}_m}{\partial n}\right)_{\mathrm{P}} = \left(\frac{\partial \mathrm{V}_m}{\partial n}\right)_{\mathrm{P}}.$$

Par suite, on a

$$2\pi|k_{m+1} - k_m| < (\mathrm{AK}_m + \mathrm{BK}_{m-1})\zeta^\beta + \mathrm{G}\frac{\lambda^m}{\zeta},$$

et cette inégalité, où le premier membre ne dépend point de ζ, sera encore exacte, si l'on y pose

$$\zeta = c\lambda^{\frac{m}{1+\beta}},$$

c étant un nombre positif quelconque.

Donc, en posant

$$\lambda^{\frac{\beta}{1+\beta}} = \lambda_1,$$

on aura une inégalité de la forme

$$|k_{m+1} - k_m| < (l + q'K_m + q''K_{m-1})\lambda_1^m, \tag{22}$$

l, q', q'' étant des nombres positifs qui ne dépendent ni du nombre m, ni de la position du point p.

De cette inégalité il vient

$$|k_{m+1}| < |k_m| + (l + q'K_m + q''K_{m-1})\lambda_1^m,$$

d'où l'on voit qu'à partir de $m = 1$ on peut admettre

$$K_{m+1} = K_m + (l + q'K_m + q''K_{m-1})\lambda_1^m.$$

Mais alors, à partir de la même valeur de m, on aura $K_{m+1} > K_m$ et, par suite, en posant $q' + q'' = q$, il viendra

$$K_{m+1} < (1 + q\lambda_1^m)K_m + l\lambda_1^m.$$

Cette inégalité aura lieu à partir de $m = 2$. Mais, en choisissant convenablement K_0 et K_1, on pourra l'admettre à partir de $m = 0$.

Alors, en remarquant qu'elle peut être écrite ainsi :

$$K_{m+1} + \frac{l}{q} < (1 + q\lambda_1^m)\left(K_m + \frac{l}{q}\right),$$

on en déduira

$$K_{m+1} + \frac{l}{q} < \left(K_0 + \frac{l}{q}\right)(1 + q)(1 + q\lambda_1)(1 + q\lambda_1^2)\ldots(1 + q\lambda_1^m).$$

Or, λ_1 est plus petit que 1. Par suite, le produit infini

$$(1+q)(1+q\lambda_1)(1+q\lambda_1^2)(1+q\lambda_1^3)\ldots$$

est convergent et, si l'on désigne sa valeur par Q, l'inégalité ci-dessus donnera

$$K_{m+1}+\frac{l}{q}<\left(K_0+\frac{l}{q}\right)Q.$$

Donc le nombre K_m, quel que soit m, reste au-dessous de

$$\left(K_0+\frac{l}{q}\right)Q-\frac{l}{q},$$

en vertu de quoi l'inégalité (22) permet de conclure la suivante :

$$(23)\qquad |k_{m+1}-k_m|<L_1\lambda_1^m,$$

où

$$L_1=(l+qK_0)Q.$$

De là, on voit que la série

$$(24)\qquad k_0+(k_1-k_0)+(k_2-k_1)+(k_3-k_2)+\ldots$$

converge. D'ailleurs, L_1 et λ_1 étant indépendants de la position du point p, sa convergence est uniforme pour tous les points de S.

Donc, cette série définit une fonction k parfaitement déterminée sur S et, comme la somme de ses $m+1$ premiers termes est égale à k_m, on voit que, m croissant indéfiniment, k_m tendra uniformément vers k.

C'est ce que nous avons voulu démontrer.

12. La fonction k, comme cela résulte de sa définition par la série (24), est continue en tous les points de S. D'ailleurs, en vertu de (17), k_m tendant *uniformément* vers k, cette fonction vérifie l'équation (13).

Nous avons donc démontré que, dans le cas des surfaces que nous considérons ici, les équations

$$k = \frac{1}{2\pi}\int \frac{k' \cos\varphi \, ds'}{r^2}, \qquad \int k \, ds = g,$$

g étant une quantité donnée quelconque, admettent toujours une solution continue et, comme nous l'avons déjà remarqué, elles n'en admettent qu'une seule.

En même temps, nous avons établi que cette solution peut être obtenue par la méthode suivante :

On prendra une fonction quelconque k_0, limitée et vérifiant la condition

$$\int k_0 \, ds = g.$$

Puis, en partant de cette fonction, on construira une suite indéfinie de fonctions

$$k_1, \quad k_2, \quad k_3, \quad k_4, \quad \ldots,$$

qu'on déterminera successivement par la formule

$$k_m = \frac{1}{2\pi}\int \frac{k'_{m-1} \cos\varphi \, ds'}{r^2},$$

et la solution cherchée s'obtiendra comme la limite de k_m, lorsque m croîtra indéfiniment ([1]).

C'est en cela que consiste la méthode proposée par M. Robin pour résoudre le problème considéré.

Le principe d'où découle cette méthode consiste en ce que les fonctions k_m satisfont à l'inégalité

$$|k_{m+1} - k_m| < L_1 \lambda_1^m,$$

([1]) Dans la démonstration, nous avons imposé à k_0 une certaine restriction, à savoir, que cette fonction satisfasse à l'inégalité (14). Mais on remarque tout de suite qu'on peut s'en affranchir. En effet, quelle que soit la fonction k_0, pourvu qu'elle soit intégrable (et, par suite, limitée), la fonction k_1 satisfera à l'inégalité (18) et, par conséquent, pourra jouer le rôle de k_0 dans la démonstration.

où L_1, λ_1 sont des constantes positives indépendantes du nombre m et, d'ailleurs, λ_1 est plus petit que 1 et ne dépend point de la fonction k_0.

Nous venons de montrer que, pour les surfaces satisfaisant aux conditions du n° **1**, ce principe est une conséquence nécessaire du principe de Neumann.

13. Le cas où l'on a

$$\int k_0\, ds = 0$$

mérite une attention particulière.

Dans ce cas, la fonction continue k, à laquelle conduit la méthode ci-dessus, satisfera aux équations

$$k = \frac{1}{2\pi}\int \frac{k' \cos\varphi\, ds'}{r^2}, \qquad \int k\, ds = 0$$

et, par suite, sera identiquement nulle.

Or, cette fonction représente la valeur de la série

$$k_m + (k_{m+1} - k_m) + (k_{m+2} - k_{m+1}) + \ldots.$$

On aura donc

$$k_m = (k_m - k_{m+1}) + (k_{m+1} - k_{m+2}) + \ldots$$

et, de là, en vertu de (23), on conclura

$$|k_m| < \frac{L_1}{1-\lambda_1}\lambda_1^m.$$

Donc, dans le cas considéré, la série

$$k_0 + k_1 + k_2 + k_3 + \ldots$$

sera absolument et uniformément convergente, et sa convergence sera plus forte que celle d'une progression géométrique de raison λ_1.

14. Reprenons le problème électrostatique.

Par l'équation (13), à laquelle satisfait la densité k, on voit que cette fonction satisfera à la condition (6), si l'on y pose

$$\beta = \frac{\alpha^2}{\alpha + 1}.$$

Donc, en vertu de ce qui a été montré au n° **4**, le potentiel

$$V = \int \frac{k' ds'}{R}$$

admettra des valeurs limites déterminées pour ses dérivées

$$\frac{\partial V}{\partial x}, \quad \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial V}{\partial z},$$

toutes les fois que le point $P(x, y, z)$ se rapprochera indéfiniment d'un point déterminé de S, en restant toujours dans l'espace E_e extérieur à cette surface.

Par suite on arrive à la conclusion que, dans le cas particulier du problème de Dirichlet, celui où, le domaine considéré étant l'espace extérieur à S, la fonction harmonique cherchée se réduit sur S à une constante, cette fonction admettra, en tout point de S, non seulement la dérivée normale, mais encore des valeurs limites déterminées pour ses trois dérivées partielles du premier ordre par rapport aux coordonnées. D'ailleurs ces valeurs représenteront des fonctions continues sur S.

Nous allons maintenant étudier les questions analogues pour le cas général du problème de Dirichlet.

CHAPITRE III.

PROBLÈME DE DIRICHLET.

15. Nous considérerons le problème de Dirichlet tant pour l'espace E_i intérieur à S que pour l'espace E_e extérieur à cette surface.

Soit f la fonction donnée à laquelle doit se réduire sur S la fonction harmonique cherchée V.

En supposant que f soit continue sur S et en admettant toujours que le principe de Neumann soit applicable à la surface considérée, nous rechercherons les conditions pour qu'il existe une dérivée normale de la fonction V pour tous les points de S. Puis, nous signalerons aussi une condition assurant l'existence des valeurs limites pour les dérivées

$$\frac{\partial V}{\partial x}, \quad \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial V}{\partial z},$$

le point $P(x, y, z)$ tendant vers un point quelconque de S.

Cette dernière condition se rapportera exclusivement à la fonction f, de sorte que le théorème sera applicable au cas général des surfaces que nous considérons ici.

Quant à la recherche concernant la dérivée normale seule, les dérivées par rapport aux coordonnées pouvant ne pas admettre des valeurs limites sur S, nous ne pourrons l'entreprendre que sous certaines restrictions complémentaires à l'égard de la surface, et la supposition à laquelle nous nous arrêterons consistera en ce que, pour le nombre α défini au n° **1**, on peut prendre 1.

A cette condition, on pourra construire, au voisinage de S, deux séries de surfaces fermées, dites *parallèles,* n'ayant pas de points multiples et aussi voisines de S qu'on voudra, l'une des deux séries contenant les surfaces S_i intérieures à S, l'autre celles S_e extérieures à S.

Pour s'en assurer, il n'y a qu'à se servir des inégalités du n° **1** où l'on fera $\alpha = 1$, en les appliquant aux formules connues

$$X = x \pm \zeta \cos(n, x),$$
$$Y = y \pm \zeta \cos(n, y),$$
$$Z = z \pm \zeta \cos(n, z),$$

qui établissent une correspondance entre les points $p(x, y, z)$ de la surface S et ceux $P(X, Y, Z)$ d'une des surfaces parallèles, n étant la direction de la normale à S au point p et ζ un nombre positif fixe représentant la distance mutuelle des points p et P.

En considérant ces formules, on s'assure facilement que, si le nombre ζ vérifie les inégalités

$$\zeta < D, \qquad 2a\zeta < 1$$

(dans la supposition $aD \leqq 1$ à laquelle se réduit celle $aD^\alpha \leqq 1$ du n° 1), le lieu géométrique des points P représentera une surface fermée sans points multiples qui n'aura aucun point commun avec S et admettra un plan tangent déterminé en chacun de ses points, ce plan étant parallèle au plan tangent de la surface S au point correspondant.

Cela posé, considérons la dérivée normale d'une fonction quelconque au point P de l'une des surfaces que nous venons de définir et supposons qu'on fasse tendre ζ vers zéro.

Le point P tendra vers p, et comme les normales à S et à la surface considérée aux points p et P se confondent, la dérivée dont il s'agit tendra, si elle a une limite, vers la dérivée normale de la même fonction au point p de S.

Cette remarque nous permettra, ainsi qu'on le verra tout de suite, d'employer, à une certaine condition, la formule de Green et les autres formules analogues qui résultent de la transformation d'une intégrale étendue au volume en celle de surface.

16. Supposons que, pour l'un des deux domaines E_i, E_e, on ait trouvé la fonction harmonique V se réduisant sur S à une fonction donnée f supposée continue sur S (¹), et que cette fonction harmonique admette la dérivée normale $\frac{\partial V}{\partial n}$ en tout point p de S.

Cherchons la condition que doit remplir pour cela la fonction f.

Pour aborder cette recherche, nous devrons faire toutefois une certaine restriction.

En supposant que la dérivée normale $\frac{\partial V}{\partial n}$ existe pour tous les points de S, nous admettons seulement que la différence

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_P - \frac{\partial V}{\partial n},$$

le point P étant situé sur la normale n en p, tend vers zéro en même temps que la distance $Pp = \zeta$, quelle que soit la position du point p.

Mais cela ne nous suffira pas encore, et nous devrons supposer que la différence en question tende vers zéro *uniformément* pour tous les points de S.

Lorsqu'une fonction sera dans ce cas, nous dirons que sa dérivée normale est *régulière* sur S.

Tel sera, par exemple, le cas du potentiel d'une simple couche répandue sur S *à densité continue* sur cette surface, comme on s'en assure facilement par l'inspection des formules développées au Chapitre I (²).

Supposons donc que la dérivée normale $\frac{\partial V}{\partial n}$ soit régulière sur S.

Elle représentera alors nécessairement une fonction continue sur cette surface.

On en déduira encore une autre conclusion importante : la valeur

---

(¹) En disant qu'une fonction V, définie pour l'un des deux domaines E_i, E_e, se réduit sur S à f, nous entendons par là que $V - f$ tend vers zéro, toutes les fois que le point $P(x, y, z)$ se rapproche indéfiniment vers le point p de S suivant une courbe située tout entière dans le domaine considéré.

(²) Nous y avons supposé que la densité k satisfasse à la condition (6). Mais on remarquera tout de suite que, pour ce que nous venons de dire, cette restriction n'est aucunement indispensable.

absolue de l'expression

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_P,$$

pour des valeurs de ζ ne surpassant pas une certaine limite fixe (par exemple, pour $\zeta < \frac{1}{2}D$), admettra une limite supérieure indépendante de la position du point p et de ζ, et, par suite, la valeur de V au point P, ζ tendant vers zéro, tendra vers sa limite f *uniformément* pour toutes les positions du point p.

A ces conditions, nous pouvons appliquer à la fonction V la formule de Green dont nous nous sommes servi au n° **10**.

Pour fixer les idées, supposons qu'on considère l'espace E_i intérieur à S.

Alors, avec les notations déjà employées, nous aurons

$$(25) \qquad V = \frac{1}{4\pi}\int \frac{f'\cos\Phi'\,ds'}{R^2} - \frac{1}{4\pi}\int \frac{\partial V'}{\partial n'}\frac{ds'}{R},$$

pour tout point du domaine E_i, $\frac{\partial V'}{\partial n'}$ étant la valeur de $\frac{\partial V}{\partial n}$ au point p'.

En effet, pour tout point de E_i qui ne se trouve pas sur S, on aura une formule analogue où les intégrales seront étendues à une surface S_i parallèle à S et suffisamment voisine de cette surface. Dans cette nouvelle formule, au lieu de f' et de $\frac{\partial V'}{\partial n'}$, figureront les valeurs de V et de

$$\frac{\partial V}{\partial x}\cos(n', x) + \frac{\partial V}{\partial y}\cos(n', y) + \frac{\partial V}{\partial z}\cos(n', z)$$

au point P' de S_i situé sur la normale n' à S en p', et, si l'on suppose que la surface S_i se rapproche indéfiniment de S, ces valeurs tendront vers f' et $\frac{\partial V'}{\partial n'}$ uniformément pour toutes les positions du point p'. Par suite, à la limite, la formule considérée donnera celle (25).

Cela posé, considérons la fonction

$$\frac{1}{2\pi}\int \frac{f'\cos\Phi'\,ds'}{R^2} = W.$$

Comme le montre la formule (25), cette fonction admet la dérivée normale intérieure $\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_i$ en tout point p de S, et, en vertu de la première des formules (5), cette dérivée a pour expression

$$\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_i = \frac{\partial V}{\partial n} + \frac{1}{2\pi}\int \frac{\partial V'}{\partial n'} \frac{\cos\varphi\, ds'}{r^2}.$$

D'ailleurs, d'après ce que nous avons dit plus haut, cette dérivée est régulière sur S.

Or, il est facile de s'assurer que la fonction W admettra aussi la dérivée normale extérieure $\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_e$ qui sera encore régulière, et que cette dérivée sera égale à $\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_i$.

Pour le montrer, considérons la fonction figurant au second membre de la formule (25) pour les points du domaine E_e.

Ce sera une fonction harmonique dans ce domaine se réduisant sur S à

$$\frac{1}{4\pi}\int \frac{f\cos\varphi'\, ds'}{r^2} - \frac{1}{2}f - \frac{1}{4\pi}\int \frac{\partial V'}{\partial n'} \frac{ds'}{r},$$

comme on le voit par la seconde des formules (10).

Mais, en vertu de la première de ces formules, la formule (25) donne

$$f = \frac{1}{4\pi}\int \frac{f\cos\varphi'\, ds'}{r^2} + \frac{1}{2}f - \frac{1}{4\pi}\int \frac{\partial V'}{\partial n'} \frac{ds'}{r}.$$

Donc la fonction considérée se réduit sur S à zéro, et, par suite, elle est identiquement nulle dans le domaine E_e.

On a donc

$$W = \frac{1}{2\pi}\int \frac{\partial V'}{\partial n'} \frac{ds'}{R}$$

pour tous les points de l'espace E_e, et de là on voit que la dérivée $\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_e$ existe et qu'elle est régulière sur S. D'ailleurs, en vertu de la seconde des formules (5), on trouve

$$\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_e = \frac{1}{2\pi}\int \frac{\partial V'}{\partial n'} \frac{\cos\varphi\, ds'}{r^2} + \frac{\partial V}{\partial n},$$

et, par suite,

$$\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_e = \left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_i.$$

Nous avons considéré le problème pour le domaine E_i.

Si l'on voulait considérer le même problème pour le domaine E_e, on partirait de la formule

$$V = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\partial V'}{\partial n'}\frac{ds'}{R} - \frac{1}{4\pi}\int \frac{f'\cos\Phi'\,ds'}{R^2},$$

qu'on établirait par la méthode indiquée pour la formule (25), et l'on parviendrait au résultat identique au précédent.

Donc, dans les deux cas, l'existence et la régularité de la dérivée normale $\frac{\partial V}{\partial n}$ exigent que la fonction W admette les deux dérivées normales $\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_i$, $\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_e$, régulières sur S, et que ces dérivées soient toujours égales.

Nous allons, à présent, établir que cette condition nécessaire est en même temps suffisante.

17. Commençons par le problème relatif au domaine E_i.

Soit

$$\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_i = \left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_e = L,$$

les deux dérivées normales étant régulières sur S.

Alors L représentera une fonction continue sur S et cette fonction vérifiera nécessairement la condition

$$(26)\qquad \int L\,ds = 0,$$

comme on le voit par l'égalité

$$\int\left[\frac{\partial W}{\partial n}\cos(n,x) + \frac{\partial W}{\partial y}\cos(n,y) + \frac{\partial W}{\partial z}\cos(n,z)\right]ds_i = 0$$

qui aura lieu pour toute surface S_i parallèle à S et suffisamment voisine de cette surface (l'intégration étant étendue à tous les éléments ds_i de la surface S_i).

Cela posé, considérons l'équation

$$h + \frac{1}{2\pi}\int \frac{h' \cos\varphi \, ds'}{r^2} = L, \tag{27}$$

h étant une fonction inconnue.

Il est facile d'en obtenir une solution sous forme d'une série.

En effet, considérons la suite indéfinie de fonctions

$$h_0, \quad h_1, \quad h_2, \quad \ldots$$

se déterminant successivement par la formule

$$h_m = \frac{1}{2\pi}\int \frac{h'_{m-1} \cos\varphi \, ds'}{r^2}$$

dans la supposition

$$h_0 = L.$$

En vertu de (26) on aura $\int h_0 \, ds = 0$, et, par suite, d'après ce que nous avons vu au n° **13**, la série

$$h_0 - h_1 + h_2 - h_3 + \ldots$$

sera convergente et sa convergence sera uniforme pour tous les points de S. Cette série représente donc une certaine fonction continue sur S, et l'on voit immédiatement qu'elle satisfait à l'équation (27).

Posons donc

$$h = h_0 - h_1 + h_2 - h_3 + \ldots,$$

et, en partant de cette valeur de h, considérons l'expression

$$U = \frac{1}{2} W - \frac{1}{4\pi}\int \frac{h' \, ds'}{R}.$$

On voit que c'est une fonction harmonique dans chacun des deux domaines E_i, E_e.

Or, en la considérant dans le domaine E_e, on trouve

$$\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_e = \frac{1}{2}L - \frac{1}{4\pi}\int \frac{h' \cos\varphi\, ds'}{r^2} - \frac{1}{2}h,$$

ce qui, en vertu de (27), se réduit à zéro. D'ailleurs, on voit que cette dérivée normale est régulière sur S.

Donc, la fonction U, qui s'annule à l'infini, est identiquement nulle dans le domaine E_e. C'est ce qui résulte, en effet, de la considération de l'intégrale

$$\int \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right] d\tau,$$

étendue à tous les éléments $d\tau$ de l'espace extérieur à une surface S_e parallèle à S, cette surface se rapprochant indéfiniment de S.

On a donc

$$W = \frac{1}{2\pi}\int \frac{h'\, ds'}{R}$$

pour tous les points de l'espace E_e et, par suite,

$$\frac{1}{2\pi}\int \frac{h'\, ds'}{r} = \frac{1}{2\pi}\int \frac{f' \cos\varphi'\, ds'}{r^2} - f,$$

pour tous les points de S.

Mais la fonction harmonique que représente U dans le domaine E_i se réduit sur S à

$$\frac{1}{4\pi}\int \frac{f' \cos\varphi'\, ds'}{r^2} + \frac{1}{2}f - \frac{1}{4\pi}\int \frac{h'\, ds'}{r},$$

et l'égalité ci-dessus montre que cette expression se réduit à f.

Donc, la formule

$$V = \frac{1}{4\pi}\int \frac{f' \cos\Phi'\, ds'}{R^2} - \frac{1}{4\pi}\int \frac{h'\, ds'}{R}$$

définit une fonction harmonique dans le domaine E_i se réduisant sur S à f, et l'on voit que cette fonction admet une dérivée normale régulière sur S. Quant à la valeur de cette dérivée, elle est égale, en vertu de (27), à h.

18. Considérons maintenant le problème pour le domaine E_e.

En admettant, comme au numéro précédent, les égalités

$$\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_i = \left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_e = L,$$

dans la supposition que les deux dérivées normales soient régulières sur S, nous prendrons pour point de départ l'équation

$$(28) \qquad h - \frac{1}{2\pi}\int \frac{h' \cos\varphi \, ds'}{r^2} = -L,$$

h étant une fonction inconnue.

On voit immédiatement que cette équation admet pour solution

$$h = -h_0 - h_1 - h_2 - \ldots,$$

h_0, h_1, h_2, ... étant les mêmes fonctions qu'au numéro précédent.

C'est une solution continue sur S, mais elle n'est pas unique.

Pour obtenir la solution continue générale, désignons par k la fonction continue définie par les équations

$$k = \frac{1}{2\pi}\int \frac{k' \cos\varphi \, ds'}{r^2}, \qquad \int k \, ds = 1,$$

fonction dont nous avons établi l'existence au Chapitre précédent.

Alors la solution cherchée sera donnée par la formule

$$h = Ck - h_0 - h_1 - h_2 - \ldots,$$

C étant une constante arbitraire.

Maintenant, en admettant pour h cette expression, considérons la suivante :

$$U = \frac{1}{4\pi}\int \frac{h' \, ds'}{R} - \frac{1}{2} W,$$

qui définit une fonction harmonique dans chacun des deux domaines E_i, E_e, fonction qui, en vertu de la continuité de h, admettra une dérivée normale régulière sur S.

En considérant cette fonction dans le domaine E_i, on trouve

$$\left(\frac{dU}{dn}\right)_i = \frac{1}{4\pi}\int \frac{h' \cos\varphi \, ds'}{r^2} - \frac{1}{2}h - \frac{1}{2}L,$$

ce qui est égal à zéro en vertu de l'équation (28).

On en conclut que U conserve une valeur constante dans le domaine E_i. Cette constante dépendra de C, et si l'on désigne par A_0 sa valeur pour $C = 0$, on aura, pour son expression générale,

$$A_0 + A_1 C,$$

A_1 étant la valeur constante de

$$\frac{1}{4\pi}\int \frac{k' \, ds'}{R}$$

dans le domaine E_i.

Or, la constante A_1 est évidemment différente de zéro. On peut donc disposer de C de manière à avoir

$$A_0 + A_1 C = 0,$$

et si l'on s'arrête à cette hypothèse, la fonction U sera égale à zéro pour tous les points de E_i, ce qui donnera

$$\frac{1}{4\pi}\int \frac{h' \, ds'}{r} - \frac{1}{4\pi}\int \frac{f' \cos\varphi' \, ds'}{r^2} = \frac{1}{2}f$$

pour tous les points de S.

Mais alors la fonction harmonique que représente U dans le domaine E_e se réduira sur S à

$$\frac{1}{4\pi}\int \frac{h' \, ds'}{r} - \frac{1}{4\pi}\int \frac{f' \cos\varphi' \, ds'}{r^2} + \frac{1}{2}f = f.$$

Par suite, la formule

$$V = \frac{1}{4\pi}\int \frac{h' \, ds'}{R} - \frac{1}{4\pi}\int \frac{f' \cos\Phi' \, ds'}{R^2},$$

considérée dans le domaine E_e, définira une fonction harmonique se réduisant sur S à f, et cette fonction admettra une dérivée normale régulière sur S. On voit, d'ailleurs, que cette dérivée est égale à h.

19. En résumé, nous avons admis que la surface S satisfait aux conditions du n° **1** dans l'hypothèse $\alpha = 1$ et que le principe de Neumann lui est applicable, et nous sommes parvenu au résultat que voici :

Étant considéré le problème de Dirichlet pour l'un quelconque des deux domaines E_i, E_e, *pour que la fonction harmonique cherchée* V, *se réduisant sur* S *à une fonction continue* f, *admette une dérivée normale régulière sur* S, *il faut et il suffit que la fonction*

$$W = \frac{1}{2\pi}\int \frac{f' \cos\Phi' \, ds'}{R^2}$$

admette les deux dérivées normales $\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_i$, $\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_e$ *qui soient également régulières sur* S, *et que l'on ait d'ailleurs*

$$\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_i = \left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_e$$

pour tous les points de S.

De cette manière, la recherche concernant la dérivée normale de la fonction V, cette dérivée étant supposée régulière sur S, se ramène à une recherche analogue pour la fonction W qui est un potentiel d'une double couche à densité $\frac{f}{2\pi}$.

Il va sans dire qu'il est impossible de donner les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence, la régularité et l'égalité des deux dérivées normales de W. Mais on peut en indiquer des conditions suffisantes, plus ou moins générales, soit en ce qui concerne la fonction f, soit relativement à la surface S, et c'est à cela que nous nous arrêterons à présent.

20. Dans une Note sur le potentiel, publiée dans les *Communica-*

tions de la Société mathématique de Kharkow (t. VI), j'ai signalé certaines conditions assurant l'existence et l'égalité des dérivées normales de W.

Entre autres, j'y ai admis l'existence de la courbure pour les sections normales de la surface S. Mais l'examen plus attentif de la chose fait voir que cette restriction est inutile, et qu'à l'égard de S il suffit d'admettre les suppositions du n° **1**, avec la restriction $\alpha = 1$, que nous avons introduite au n° **15**.

C'est ce que nous allons montrer tout de suite, en faisant la même restriction au sujet de f que dans la Note citée.

Cette restriction, étendue à tous les points de S, nous l'énoncerons de la manière suivante :

On considère un point quelconque p_0 de S et les valeurs de f en des points dont la distance au point p_0 ne surpasse pas D (n° **1**). Puis, en prenant le point p_0 pour pôle des coordonnées polaires, le rayon vecteur ρ et l'angle polaire ψ, dans le plan tangent à la surface en p_0, on regarde la valeur de f en un point p comme fonction des coordonnées ρ, ψ de la projection de p sur le plan tangent. Alors, si l'on pose

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\,d\psi = \bar{f}$$

et que l'on désigne par f_0 la valeur de f au point p_0, on pourra assigner deux nombres positifs b et β indépendants de ρ et de la position du point p_0, et tels qu'on ait

$$(29) \qquad |\bar{f} - f_0| < b\rho^{\beta+1},$$

quelque petit que soit ρ.

Dans ces conditions, nous allons établir non seulement l'existence et l'égalité des dérivées normales de W en tout point de S, mais encore la régularité de ces dérivées sur S.

Soient P_0 un point de l'espace situé sur la normale à S en p_0 et ζ la distance $P_0 p_0$ prise positivement dans le cas où la direction $p_0 P_0$ est celle de la normale intérieure par rapport à S et négativement dans le cas contraire.

Cela posé, considérons la valeur de W au point P_0.

Pour une position donnée de p_0, ce sera une fonction de ζ, et notre problème se ramène à montrer que la dérivée $\frac{dW}{d\zeta}$ de cette fonction, ζ tendant vers zéro, tend vers une certaine limite indépendante du signe de ζ, et cela uniformément pour toutes les positions du point p_0.

Soient

p un point appartenant à l'élément superficiel ds;
Φ l'angle que fait la normale en p avec la direction $p P_0$;
Φ_0 l'angle de la normale en p_0 avec la direction $P_0 p$;
$\mathfrak{I}_0$ l'angle des deux normales en p et en p_0;
R_0 la distance $P_0 p$.

On aura

$$\frac{dW}{d\zeta} = \frac{1}{2\pi}\int(\cos\mathfrak{I}_0 + 3\cos\Phi_0\cos\Phi)\frac{f\,ds}{R_0^3},$$

ce que l'on peut présenter sous la forme

$$\frac{dW}{d\zeta} = \frac{1}{2\pi}\int(\cos\mathfrak{I}_0 + 3\cos\Phi_0\cos\Phi)\frac{(f-f_0)\,ds}{R_0^3}, \tag{30}$$

puisque le potentiel W, lorsqu'on y remplace f par une constante, se réduit à une constante dans chacun des deux domaines E_i, E_e (1).

Maintenant, prenons le point p_0 pour origine des coordonnées et la normale en ce point pour axe des z, et introduisons le cylindre C, considéré au n° **3**, avec les mêmes suppositions à l'égard de δ.

Soit $\Omega(\zeta, \delta)$ ce que devient le second membre de la formule (30), si l'on étend l'intégration à la portion S_1 de S, de sorte qu'on aura

$$\Omega(\zeta, 0) = \frac{dW}{d\zeta}$$

et $\Omega(\zeta, 0) - \Omega(\zeta, \delta)$ représentera le second membre de la même formule, l'intégration étant étendue à S_0.

(1) Ce remplacement de f par $f - f_0$, que je n'ai pas utilisé dans ma Note citée, produit toutefois de grandes simplifications. Je l'emprunte à M. Tauber. *Voir* ses Notes insérées dans les *Monatshefte für Mathematik und Physik* (1897, 1 Vierteljahr et 1898, 1 Vierteljahr).

Considérons l'expression de $\Omega(\zeta, o) - \Omega(\zeta, \delta)$.

En introduisant, au lieu de x, y, les coordonnées polaires ρ, ψ, nous aurons

$$\Omega(\zeta, o) - \Omega(\zeta, \delta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\delta}\left(1 + 3\frac{\cos\Phi_0 \cos\Phi}{\cos\mathfrak{S}_0}\right)\frac{(f - f_0)\rho\, d\rho}{R_0^3}.$$

Or, on a

$$\cos\Phi_0 = \frac{z-\zeta}{R_0}, \qquad R_0 = \sqrt{\rho^2 + (z-\zeta)^2},$$

et, si l'on désigne par r_0, φ ce que deviennent R_0, Φ pour $\zeta = o$, on aura

$$R_0 \cos\Phi = r_0 \cos\varphi + \zeta \cos\mathfrak{S}_0.$$

Par suite, on trouve

$$1 + 3\frac{\cos\Phi_0\cos\Phi}{\cos\mathfrak{S}_0} = \frac{\rho^2 - 2\zeta^2}{R_0^2} + \frac{z^2 + z\zeta}{R_0^2} + \frac{3(z-\zeta) r_0 \cos\varphi}{R_0^2 \cos\mathfrak{S}_0}$$

et, en introduisant la quantité T du n° **3**, puis, en posant

$$(\rho^2 - 2\zeta^2)(T^3 - 1) + \left[z^2 + z\zeta + 3(z-\zeta)\frac{r_0\cos\varphi}{\cos\mathfrak{S}_0}\right] T^3 = Q,$$

on pourra présenter l'expression dont il s'agit sous la forme

$$\Omega(\zeta, o) - \Omega(\zeta, \delta) = \int_0^{\delta}\frac{(\bar{f} - f_0)(\rho^2 - 2\zeta^2)\rho\, d\rho}{(\rho^2 + \zeta^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$+ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\delta}\frac{(f - f_0) Q \rho\, d\rho}{(\rho^2 + \zeta^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Maintenant, remarquons que

$$\frac{r_0\cos\varphi}{\cos\mathfrak{S}_0} = \rho\frac{\partial z}{\partial\rho} - z$$

et reportons-nous aux formules des nos **1** et **3**.

Les inégalités (1) et (2), si l'on y fait $\alpha = 1$, donnent

$$\left|\frac{\partial z}{\partial\rho}\right| < 4a\rho, \qquad |z| < 2a\rho^2.$$

Par suite, on a

$$\left|\frac{r_0 \cos\varphi}{\cos\mathfrak{S}_0}\right| < 6a\rho^2.$$

D'autre part, la formule

$$T^2 - 1 = \frac{T^2(2\rho\zeta - \rho^2)}{\rho^2 + \zeta^2},$$

si l'on suppose δ assez petit pour que, dans le champ de l'intégration, on ait $T < 2$, donne

$$|T - 1| < \frac{4}{3}\,\frac{2\rho|\zeta| + \rho^2}{\rho^2 + \zeta^2} < \frac{16}{3}(a|\zeta| + a^2\rho^2).$$

De là, on voit qu'on pourra assigner deux nombres positifs fixes A et B, tels que, dans le champ d'intégration, on ait

$$|Q| < A|\zeta|(\rho^2 + \zeta^2) + B(\rho^2 + \zeta^2)^2.$$

Cela posé, désignons par η la plus grande valeur que puisse atteindre sur S_0 la fonction $|f - f_0|$ et admettons l'inégalité (29).

Alors, en remarquant que

$$|\zeta|\int_0^\delta \frac{\rho\, d\rho}{(\rho^2 + \zeta^2)^{\frac{3}{2}}} < 1,$$

nous aurons

$$|\Omega(\zeta, 0) - \Omega(\zeta, \delta)| < \frac{2b}{\beta}\delta^\beta + (A + B\delta)\eta,$$

et cette inégalité aura lieu pour toutes les valeurs de ζ, à la seule exception de $\zeta = 0$.

En même temps nous aurons évidemment

$$|\Omega(0, \varepsilon) - \Omega(0, \delta)| < \frac{b}{\beta}\delta^\beta + B\delta\eta,$$

pour tout nombre positif ε plus petit que δ; ce qui fait voir que, δ tendant vers zéro, la quantité $\Omega(o, \delta)$ tend vers une certaine limite, et que, cette limite étant désignée par L_0, on a

$$|\Omega(o, \delta) - L_0| < \frac{b}{\beta}\delta^\beta + B\delta\eta.$$

Par suite, eu égard à l'identité

$$\Omega(\zeta, o) - L_0 = \Omega(\zeta, o) - \Omega(\zeta, \delta) + \Omega(o, \delta) - L_0 \\ + \Omega(\zeta, \delta) - \Omega(o, \delta).$$

nous arriverons à l'inégalité suivante

$$|\Omega(\zeta, o) - L_0| < \frac{3b}{\beta}\delta^\beta + (A + 2B\delta)\eta + |\Omega(\zeta, \delta) - \Omega(o, \delta)|.$$

Or, la fonction f étant continue, la quantité η tendra, pour $\delta = o$, vers zéro. D'ailleurs, la continuité de f ne pouvant être qu'uniforme sur S, η tendra vers zéro uniformément pour toutes les positions du point p_0.

D'autre part, δ ayant une valeur fixe, différente de zéro, la quantité $|\Omega(\zeta, \delta) - \Omega(o, \delta)|$ tendra, pour $\zeta = o$, vers zéro, et cela uniformément pour toutes les positions du point p_0.

Par suite, on doit conclure que, ζ tendant vers zéro, la quantité

$$\Omega(\zeta, o) = \frac{dW}{d\zeta}$$

tendra vers L_0, quel que soit le signe de ζ, et cela uniformément pour toutes les positions du point p_0.

Notre proposition se trouve donc démontrée, et, en se reportant au théorème du numéro précédent, on voit que, dans les conditions où nous nous sommes placé, la fonction harmonique V admettra une dérivée normale régulière sur S.

Remarque. — Des formules que nous venons de développer on tire

$$|\Omega(\zeta, o) - \Omega(-\zeta, o)| < 2(A + B\delta)\eta + |\Omega(\zeta, \delta) - \Omega(-\zeta, \delta)|,$$

ce qui fait voir que, f étant une fonction continue quelconque, la différence $\Omega(\zeta, o) - \Omega(-\zeta, o)$ tend, pour $\zeta = o$, vers zéro, et cela uniformément pour tous les points de S.

Donc, *quelle que soit la fonction continue f, si l'une des deux dérivées normales* $\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_i$, $\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_e$ *existe et est régulière sur* S, *l'autre le sera aussi et ces dérivées seront égales.*

Eu égard à cette proposition, on pourrait énoncer le théorème du numéro précédent plus simplement, comme il suit :

Pour que la fonction harmonique V, *se réduisant sur* S *à une fonction continue f, admette une dérivée normale régulière sur* S, *il faut et il suffit que la fonction* W *soit dans le même cas.*

21. Maintenant nous allons indiquer, pour f, une condition qui assurera l'existence non seulement des dérivées normales, mais encore des valeurs limites sur S des dérivées prises par rapport aux coordonnées, tant pour la fonction W que pour la fonction V elle-même. D'ailleurs, cette condition permettra de s'affranchir de la restriction $\alpha = 1$, et, dans ce qui suit, nous pourrons supposer que α soit un nombre positif quelconque.

Jusqu'à présent nous avons considéré la fonction f comme étant définie seulement pour les points de la surface S. Maintenant nous supposerons que f soit la valeur sur S d'une fonction donnée F définie pour tous les points de l'espace, assez voisins de S, et c'est à cette fonction F que se rapportera la condition que nous avons en vue. Voici cette condition.

A l'intérieur de toute sphère Σ d'un rayon fixe D et de centre situé sur S, la fonction F et ses dérivées par rapport à x, y, z des deux premiers ordres sont uniformes et continues.

Il est facile de montrer que cette condition assure l'existence des valeurs limites sur S des dérivées $\frac{\partial W}{\partial x}$, $\frac{\partial W}{\partial y}$, $\frac{\partial W}{\partial z}$, dans chacun des deux domaines E_i, E_e.

Pour le montrer, considérons l'une quelconque des sphères Σ, en supposant le rayon D assez petit pour qu'il satisfasse aux conditions du n° **1**, et pour que les dérivées des deux premiers ordres de la fonction F aient des valeurs déterminées sur la surface Σ elle-même.

La surface S partagera l'espace intérieur à Σ en deux portions : l'espace E_{i0} intérieur à S et l'espace E_{e0} extérieur à S.

Considérons l'un quelconque de ces deux espaces, par exemple, celui E_{i0} qui est limité par la portion Σ_i de Σ intérieure à S et par la portion S_0 de S intérieure à Σ.

Soient :

ds' un élément superficiel de S_0;
$d\sigma'$ un élément superficiel de Σ_i;
$d\tau'$ un élément de volume pour l'espace E_{i0};
p' un point appartenant soit à l'élément ds', soit à celui $d\sigma'$;
$P'(x', y', z')$ un point appartenant à l'élément $d\tau'$;
$P(x, y, z)$ un point quelconque de l'espace ne se trouvant pas sur la surface qui limite E_{i0};
R la distance du point P soit au point p', soit au point P';
n' la direction de la normale à S ou à Σ en p' dirigée à l'intérieur de E_{i0};
Φ' l'angle que fait n' avec la direction $p'P$;
F' la valeur de F en p' ou en P';
$\frac{\partial F'}{\partial n'}$ la valeur de l'expression

$$\frac{\partial F}{\partial x}\cos(n', x) + \frac{\partial F}{\partial y}\cos(n', y) + \frac{\partial F}{\partial z}\cos(n', z)$$

au pied p' de la normale n'.

Cela posé, nous nous servirons des théorèmes connus permettant d'exprimer l'intégrale

$$\int\left(\frac{\partial^2 F'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 F'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 F'}{\partial z'^2}\right)\frac{d\tau'}{R}$$

étendue à l'espace E_{i0} au moyen des intégrales étendues à la surface qui sert de frontière à E_{i0}.

Posons, pour abréger,

$$\frac{\partial^2 F'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 F'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 F'}{\partial z'^2} = \Delta F'.$$

Alors nous aurons :

Si le point P est intérieur à E_{i0},

$$\int \frac{\Delta F'\,d\tau'}{R} = \int \frac{f'\cos\Phi'\,ds'}{R^2} - \int \frac{\partial F'}{\partial n'}\frac{ds'}{R} + \int \frac{F'\cos\Phi'\,d\sigma'}{R^2} - \int \frac{\partial F'}{\partial n'}\frac{d\sigma'}{R} - 4\pi F,$$

et, si ce point est extérieur à E_{i0},

$$\int \frac{\Delta F'\,d\tau'}{R} = \int \frac{f'\cos\Phi'\,ds'}{R^2} - \int \frac{\partial F'}{\partial n'}\frac{ds'}{R} + \int \frac{F'\cos\Phi'\,d\sigma'}{R^2} - \int \frac{\partial F'}{\partial n'}\frac{d\sigma'}{R},$$

les intégrales relatives à ds' et à $d\sigma'$ étant respectivement étendues à S_0 et à Σ_i.

Or, avec les notations actuelles, on a

$$W = \frac{1}{2\pi}\int \frac{f'\cos\Phi'\,ds'}{R^2} + W_1,$$

W_1 étant le potentiel dû à la portion de S extérieure à la sphère Σ.

Par suite, si l'on pose

$$\frac{1}{2\pi}\int \frac{\Delta F'\,d\tau'}{R} + \frac{1}{2\pi}\int \frac{\partial F'}{\partial n'}\frac{d\sigma'}{R} - \frac{1}{2\pi}\int \frac{F'\cos\Phi'\,d\sigma'}{R^2} + W_1 = U,$$

il viendra : si le point P est intérieur à E_{i0},

$$W = 2F + \frac{1}{2\pi}\int \frac{\partial F'}{\partial n'}\frac{ds'}{R} + U,$$

et, si ce point est extérieur à E_{i0},

$$W = \frac{1}{2\pi}\int \frac{\partial F'}{\partial n'}\frac{ds'}{R} + U.$$

Nous remarquons maintenant que, les dérivées du second ordre de la fonction F étant continues et, par suite, limitées à l'intérieur de la sphère Σ, quelle que soit la position de son centre sur S, on peut assigner une limite supérieure fixe aux valeurs absolues des quantités

$$\frac{1}{r}\left(\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{\partial F'}{\partial x'}\right),\qquad \frac{1}{r}\left(\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\partial F'}{\partial y'}\right),\qquad \frac{1}{r}\left(\frac{\partial F}{\partial z}-\frac{\partial F'}{\partial z'}\right),$$

où r désigne la distance mutuelle des points $p(x, y, z)$ et $p'(x', y', z')$ auxquels se rapportent les valeurs des dérivées, ces points étant pris arbitrairement sur S.

Par suite, on pourra trouver un nombre fixe A, tel qu'on ait

$$\left|\frac{\partial F}{\partial n}-\frac{\partial F'}{\partial n'}\right| < A r^{\alpha},$$

quelles que soient les positions des points p et p' sur S, α étant le nombre défini au n° **1**.

De là, en vertu de ce que nous avons montré au n° **4**, il suit que les dérivées premières du potentiel

$$\int \frac{\partial F'}{\partial n'}\frac{ds'}{R}$$

tendront vers des limites déterminées, toutes les fois que le point P, en restant toujours dans l'un quelconque des deux domaines E_{i0}, E_{e0}, se rapprochera indéfiniment vers un point p de S ne se trouvant pas sur le contour de S_0.

D'autre part, on voit que la fonction U, ainsi que ses dérivées du premier ordre, sont continues à l'intérieur de toute sphère Σ' concentrique et intérieure à Σ.

Donc, les formules obtenues montrent que les dérivées $\frac{\partial W}{\partial x}$, $\frac{\partial W}{\partial y}$, $\frac{\partial W}{\partial z}$ admettront des valeurs limites déterminées en tout point p de S intérieur à Σ', et cela pour chacun des domaines E_{i0}, E_{e0}.

Ces valeurs limites, pour les deux domaines, seront, en général, différentes. Mais, en ce qui concerne les dérivées normales, les formules (5) montrent bien qu'on aura

$$\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_i = \left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_e = L,$$

où l'on a posé

$$L = \frac{1}{2\pi}\int \frac{\partial F'}{\partial n'}\frac{\cos\varphi\, ds'}{r^2} + \frac{\partial F}{\partial n} + \frac{\partial U}{\partial n}.$$

Nous n'avons considéré que les points intérieurs à Σ'. Mais le centre commun des sphères Σ et Σ' peut être placé où l'on voudra sur S.

Par suite, les dérivées $\frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial y}, \frac{\partial W}{\partial z}$ auront des valeurs limites en tout point de S, et les dérivées $\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_i$ et $\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_e$ seront toujours égales. D'ailleurs, comme on le voit aisément, ces dérivées normales seront régulières sur S.

Quant à la valeur commune L des dérivées normales, nous remarquerons qu'elle satisfera à une condition de la forme

$$(31) \qquad |L - L'| < br^{\beta},$$

b et β étant des nombres positifs indépendants de la position des points p, p' auxquels se rapportent les valeurs L, L'.

En effet, eu égard à ce qui a été montré au n° 5, l'expression ci-dessus de L fait voir que la condition dont il s'agit sera remplie, si l'on a

$$\left|\frac{\partial U}{\partial n} - \frac{\partial U'}{\partial n'}\right| < cr^{\gamma}$$

pour toutes les positions des points p, p' sur S à l'intérieur de Σ', c et γ étant des nombres positifs indépendants de la position de ces points, et cette dernière inégalité résulte immédiatement des propriétés connues des potentiels de volume.

22. Appliquons les résultats précédents au problème de Dirichlet. Considérons, par exemple, le problème qui se rapporte au domaine E_i.

Le principe de Neumann étant supposé applicable à la surface S, l'équation (27) définira une fonction continue h, et cette fonction, en vertu de (31), vérifiera une condition de la forme

$$|h - h'| < cr^\gamma,$$

c, γ étant des nombres positifs indépendants des positions des points p, p'.

Par suite, le potentiel

$$\int \frac{h'\,ds'}{R}$$

admettra sur S des valeurs limites déterminées pour ses dérivées de premier ordre dans chacun des deux domaines E_i, E_e, et la fonction

$$U = \frac{1}{2}W - \frac{1}{4\pi}\int \frac{h'\,ds'}{R},$$

que nous avons considérée au n° **17** sera dans le même cas.

Donc, on pourra considérer l'intégrale

$$\int \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right] d\tau,$$

étendue à l'espace E_e, et la valeur de cette intégrale sera égale à celle-ci

$$\int U\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_e ds,$$

étendue à la surface S.

Par suite, l'égalité

$$\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_e = 0,$$

qui a lieu pour tous les points de S, conduira à la conclusion que $U = 0$ pour tous les points de E_e.

Or, cela étant établi, on arrive à la formule, obtenue à la fin du n° **17**, qui donne la solution du problème.

D'une manière tout à fait analogue, on démontrera aussi la formule du n° **18** qui donne la solution du problème pour le domaine E_e, et ces formules montrent bien que les valeurs limites des dérivées $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$ existent en tout point p de S.

D'ailleurs, on voit que la dérivée normale $\frac{\partial V}{\partial n}$ est régulière sur S.

On arrive donc à la proposition suivante :

$F(x, y, z)$ *étant une fonction uniforme et continue, ainsi que ses dérivées des deux premiers ordres, au voisinage de tout point de* S *et* f *représentant la valeur de* F *sur* S, *la fonction* V *harmonique dans l'un quelconque des deux domaines* E_i, E_e *et se réduisant à* f *sur* S *admettra, pour ses dérivées* $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$, *des valeurs limites déterminées sur* S, *et sa dérivée normale* $\frac{\partial V}{\partial n}$ *sera régulière sur* S.

Cette proposition est exacte pour toute surface S satisfaisant aux conditions du n° **1**, pourvu que le principe de Neumann lui soit applicable.

23. Le théorème précédent permet d'établir la possibilité du problème électrostatique dans des conditions assez générales.

Considérons un conducteur limité par une surface S satisfaisant aux conditions ci-dessus, et supposons que ce conducteur, chargé d'une quantité donnée g d'électricité, se trouve en présence de corps mauvais conducteurs situés tous à l'extérieur de S et portant des distributions électriques données.

On demande la distribution électrostatique à la surface S.

Ce problème dépend, comme on sait, de la recherche d'une fonction V, harmonique dans le domaine E_e extérieur à S et se réduisant sur S à

$$C - U,$$

U étant une fonction connue représentant le potentiel de l'électricité que portent les mauvais conducteurs et C une constante qu'on devra déterminer par la condition que la charge du conducteur soit égale à g.

La fonction V une fois trouvée, la possibilité du problème dépendra de l'existence de la dérivée normale $\frac{\partial V}{\partial n}$ sur S. Or, la fonction $C - U$ jouissant de toutes les propriétés de la fonction F, cette existence est hors de doute, et la densité q de la couche électrique en équilibre sur S sera donnée par la formule

$$q = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial V}{\partial n} + \frac{\partial U}{\partial n}\right),$$

où le second membre sera linéaire par rapport à C qu'on déterminera par l'équation $\int q\,ds = g$.

D'ailleurs, en se reportant à ce qui a été montré au n° **18**, on pourra déterminer q directement comme il suit :

En entendant par u' la valeur de la fonction U au point p' de l'élément ds', désignons par L la valeur de la dérivée normale de la fonction

$$\frac{1}{2\pi}\int \frac{u' \cos\Phi'\, ds'}{R^2}$$

en un point quelconque p de S. Puis, désignons par $h_0, h_1, h_2, \ldots$ les fonctions se déterminant successivement par la formule

$$h_m = \frac{1}{2\pi}\int \frac{h'_{m-1} \cos\varphi\, ds'}{r^2},$$

dans la supposition $h_0 = L$, et introduisons la fonction k définie au n° **18**.

Alors nous aurons

$$q = gk + \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial U}{\partial n} + L + h_1 + h_2 + h_3 + \ldots\right).$$

24. Une autre application, non moins importante, est relative à la fonction de Green.

Soient E l'un des deux domaines E_i, E_e; $P(x, y, z)$ et $P'(x', y', z')$ des points de ce domaine et R la distance PP'.

En plaçant le point P dans une position fixe ne se trouvant pas sur S, désignons par H la fonction de x', y', z', harmonique dans le domaine E, et se réduisant sur S à $\frac{1}{R}$. Alors la fonction

$$G = \frac{1}{R} - H$$

représentera ce qu'on appelle la *fonction de Green,* correspondant au pôle P.

Cette fonction (ainsi que R et H) dépendra non seulement de x', y', z', mais encore de x, y, z, et si l'on veut appeler l'attention sur ce point, on pourra la désigner par

$$G(x', y', z'; x, y, z).$$

On sait que la plupart des applications où se présente la fonction G exigent la considération des valeurs limites des dérivées $\frac{\partial G}{\partial x'}$, $\frac{\partial G}{\partial y'}$, $\frac{\partial G}{\partial z'}$ sur S, et que, dans bien des cas, cette fonction ne peut être utile que si ces valeurs existent.

Or, dans les suppositions que nous avons faites à l'égard de S, leur existence est hors de doute, puisque, le pôle P ne se trouvant pas sur S, la fonction $\frac{1}{R}$ jouira de toutes les propriétés de la fonction $F(x', y', z')$, et le théorème du n° **22** sera applicable.

L'existence de ces valeurs limites étant prouvée, on pourra se servir des méthodes connues pour étudier les propriétés de la fonction G, et les propositions connues qui s'y rattachent pourront être établies rigoureusement.

Par exemple, on pourra démontrer l'égalité fondamentale due à Riemann,

$$G(x, y, z; x', y', z') = G(x', y', z'; x, y, z).$$

23. En terminant, arrêtons-nous sur la formule connue qui donne la solution du problème de Dirichlet au moyen de la fonction de Green.

Pour avoir, dans les cas des deux domaines E_i, E_e, les mêmes formules, nous conviendrons ici d'attribuer à la normale la direction intérieure, non pas par rapport à E_i (comme nous l'avons fait jusqu'à présent), mais par rapport au domaine E que nous considérerons.

Alors, quel que soit le domaine considéré, la formule de Green donnera

$$V = \frac{1}{4\pi}\int f' \frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{R}\right) ds' - \frac{1}{4\pi}\int \frac{\partial V'}{\partial n'}\frac{ds'}{R},$$

en supposant, bien entendu, que la fonction f satisfait à la condition du n° **21**.

Dans cette formule, n' désigne la direction de la normale au point p' appartenant à l'élément ds' et $\frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{R}\right)$ est la valeur que prend l'expression

$$\frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial x'}\cos(n', x) + \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial y'}\cos(n', y) + \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial z'}\cos(n', z),$$

lorsque le point $P'(x', y', z')$ vient en p'. Dans le même sens seront employées aussi les notations $\frac{\partial H}{\partial n'}$, $\frac{\partial G}{\partial n'}$.

Cela posé, et en remarquant que, par la nature de la fonction H, on a

$$\int \frac{\partial V'}{\partial n'}\frac{ds'}{R} = \int f' \frac{\partial H}{\partial n'} ds',$$

on trouve

$$V = \frac{1}{4\pi}\int f' \frac{\partial G}{\partial n'} ds'$$

et c'est la formule dont il s'agit.

Cette formule n'est démontrée que dans le cas où la fonction f satisfait à la condition du n° **21**. Mais elle peut être étendue à tous les cas où f est une fonction continue.

En effet, quelle que soit f, la formule en question définit une fonction harmonique dans le domaine E. Il ne reste donc qu'à montrer que cette fonction se réduit sur S à f, et c'est ce qu'on pourra faire par une méthode analogue à celle employée par M. Schwarz dans le cas de l'intégrale de Poisson.

L'application directe de cette méthode exigerait la discussion de la fonction $\frac{\partial G}{\partial n'}$ dans la supposition que le point P soit infiniment voisin du point p' [1]. Mais nous pouvons éviter cette discussion, en nous servant du théorème du n° **22**.

A cet effet, considérons d'abord le cas particulier où l'on a

$$f=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2,$$

x_0, y_0, z_0 étant les coordonnées d'un point quelconque fixe de S que nous désignerons par p_0.

Dans ce cas, le théorème, que nous venons de mentionner, étant applicable, la formule ci-dessus donnera la solution du problème de Dirichlet, et, par suite, la fonction V définie par cette formule tendra vers f toutes les fois que le point P tendra vers un point $p(x, y, z)$ de S.

D'ailleurs, si l'on suppose que le point P se trouve sur la normale du point p et que l'on désigne par ζ la distance Pp, on pourra trouver un nombre positif A indépendant de la position du point p et tel qu'on ait

$$|V-f|<A\zeta.$$

C'est ce qui résulte, en effet, de ce que la dérivée normale de la fonction V considérée est régulière sur S.

Nous supposerons que le nombre A ait été choisi indépendamment de la position du point p_0, ce qui est, évidemment, permis, f étant une fonction entière de x_0, y_0, z_0.

Cela posé, appliquons notre inégalité au point p_0. La fonction f se réduisant, en ce point, à zéro, nous aurons

$$V_0<A\zeta,$$

V_0 étant la valeur de V au point P_0 situé sur la normale à la distance ζ du point p_0 (valeur qui est, évidemment, positive).

---

(1) Cette méthode a été employée récemment par M. Zaremba. *Voir* les *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure* (3e série, t. XIV, p. 251; 1897). On remarquera que M. Zaremba considère la fonction u qui n'est autre chose que $\frac{1}{4\pi}\frac{\partial G}{\partial n'}$, sans démontrer son existence.

Nous remarquons maintenant que pour tous les points de S on a

$$\frac{\partial G}{\partial n'} \geqq 0,$$

puisque la fonction G s'annule sur la surface S et reste positive pour tous les autres points du domaine E.

Par suite, on aura

$$V_0 > \frac{1}{4\pi}\int_{(1)} f' \frac{\partial G_0}{\partial n'} ds',$$

l'intégrale étant étendue à une portion quelconque S_1 de S et G_0 désignant la fonction de Green correspondant au pôle P_0.

Nous prendrons pour S_1 la portion de S extérieure à une sphère Σ de rayon δ ayant pour centre le point p_0. Alors l'inégalité ci-dessus donnera

$$V_0 > \frac{\delta^2}{4\pi}\int_{(1)} \frac{\partial G_0}{\partial n'} ds',$$

et nous aurons

$$\frac{1}{4\pi}\int_{(1)} \frac{\partial G_0}{\partial n'} ds' < A\frac{\zeta}{\delta^2}.$$

Maintenant supposons que f soit une fonction continue quelconque et considérons la fonction V définie par la formule qui nous occupe.

En posant

$$\frac{1}{4\pi}\int \frac{\partial G}{\partial n'} ds' = \Omega$$

et désignant par Ω_0, V_0 les valeurs de Ω, V au point P_0 et par f_0 celle de f en p_0, nous aurons

$$V_0 - f_0 = (\Omega_0 - 1)f_0 + \frac{1}{4\pi}\int (f' - f_0)\frac{\partial G_0}{\partial n'} ds'.$$

Or, dans le domaine E_i on a $\Omega = 1$, et dans le domaine E_e, sauf les points de S, $\Omega < 1$. Par suite, en entendant par η la plus grande valeur de la fonction $|f' - f_0|$ à l'intérieur de la sphère Σ et par M la limite supérieure de la fonction $|f|$ sur S, on trouve

$$|V_0 - f_0| < M(1 - \Omega_0) + \eta + \frac{M}{2\pi}\int_{(1)} \frac{\partial G_0}{\partial n'} ds'.$$

D'ailleurs on a évidemment

$$1 - \Omega_0 < B\zeta,$$

B étant un certain nombre positif qu'on peut prendre indépendamment de la position du point p_0.

Donc il vient

$$|V_0 - f_0| < \eta + 2AM\frac{\zeta}{\delta^2} + BM\zeta.$$

Or, la fonction f étant continue sur S, la quantité η tendra, pour $\delta = 0$, vers zéro, et cela uniformément pour toutes les positions du point p_0.

Par suite, l'inégalité obtenue, où l'on pourra, par exemple, poser $\zeta = c\delta^3$, fait voir que, ζ tendant vers zéro, V_0 tendra vers f_0, et cela uniformément pour toutes les positions du point p_0.

Ce résultat étant établi, la continuité même de la fonction f assure que, toutes les fois que le point P tendra vers p_0 suivant une courbe quelconque, la fonction V tendra vers f_0.

Donc, dans le cas des surfaces que nous avons considérées, la formule

$$V = \frac{1}{4\pi}\int f'\frac{\partial G}{\partial n'}ds'$$

donne bien la solution du problème de Dirichlet, quelle que soit la fonction continue f à laquelle doit se réduire sur la surface la fonction harmonique cherchée.