JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

EUGÈNE FABRY

Sur les points singuliers d'une série de Taylor

Journal de mathématiques pures et appliquées 5e série, tome 4 (1898), p. 317-358.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1898_5_4__317_0>

Sur les points singuliers d'une série de Taylor;

PAR M. EUGÈNE **FABRY**.

---

1. Une série, ordonnée suivant les puissances entières de la variable, définit une fonction analytique pour les points intérieurs à la circonférence de convergence. La définition s'étend aux points extérieurs au moyen de nouvelles séries déduites de la première, pourvu que la circonférence de convergence renferme des points non singuliers. M. Hadamard a donné (*Journal de Liouville*, 4^e série, t. VIII) une méthode pour la recherche des points singuliers situés sur la circonférence de convergence. J'ai publié deux Mémoires (*Annales de l'École normale*, 3^e série, t. XIII; *Acta mathematica*, t. XXII) où, par une généralisation de cette méthode, j'ai obtenu de nouveaux résultats, particulièrement sur les séries dont le prolongement analytique est impossible. Je me propose ici d'étudier les points singuliers par une nouvelle méthode, qui repose sur le calcul des différences des coefficients et dont j'ai indiqué le principe (*Comptes rendus*, 20 décembre 1897). Quand on connaît l'ordre de grandeur des différences d'ordre infini, on pourra déterminer des régions ne contenant aucun point singulier, et l'on connaîtra les points singuliers situés sur la limite de ces régions, qui peuvent s'étendre au delà du cercle de convergence et dans bien des cas jusqu'à l'infini. On peut en déduire des cas assez généraux où les coefficients étant des fonctions continues, qui remplissent certaines conditions de grandeur, la circonférence de convergence ne contient qu'un seul point singulier. Cela peut expliquer pourquoi, comme l'a fait remarquer M. Picard dans la *Revue générale des Sciences,* l'on a eu autrefois tant de peine à former des séries ne pouvant pas se prolonger analytiquement, alors que ce fait se présente dans les cas les plus généraux, ainsi que l'a montré M. Borel (*Comptes rendus,* 14 décembre 1896).

2. Soit une série $f(z) = \Sigma a_n z^n$, dont le rayon de convergence est R. ε étant fixe, mais aussi petit que l'on voudra, pourvu que n soit assez grand, on a

$$|a_n| < \left(\frac{1}{R} + \varepsilon\right)^n.$$

Soit λ une quantité imaginaire et l son module. Posons

$$\Delta_\nu^n = \lambda^\nu a_{n+\nu} - \frac{\nu}{1}\lambda^{\nu-1} a_{n+\nu-1} + \frac{\nu(\nu-1)}{1.2}\lambda^{\nu-2} a_{n+\nu-2} - \ldots + (-1)^\nu a_n,$$

on en déduit

$$\Delta_0^n + \frac{\nu}{1}\Delta_1^n + \frac{\nu(\nu-1)}{1.2}\Delta_2^n + \ldots + \Delta_\nu^n = \lambda^\nu a_{n+\nu}$$

et

$$f^n(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n+\nu} z^\nu \frac{(n+\nu)!}{\nu!} = \left(1 - \frac{z}{\lambda}\right)^{-n-1} \sum_{\nu=0}^{\infty} \Delta_\nu^n \frac{(n+\nu)!}{\nu!} \left(\frac{z}{\lambda - z}\right)^\nu.$$

Pourvu que n soit assez grand, on a

$$|\Delta_\nu^n| < \left(\frac{1}{R} + \varepsilon\right)^n \left(1 + \frac{l}{R} + l\varepsilon\right)^\nu.$$

Il en résulte que la série précédente est convergente toutes les fois que $\left|\frac{z}{\lambda - z}\right| < \frac{R}{l + R}$. Mais il suffit qu'elle soit convergente pour qu'elle représente $f^n(z)$.

Soit θ une quantité positive. Représentons par $\frac{1}{\Lambda}$ la limite supérieure, pour $n = \infty$, de $\sqrt[n]{|\Delta_\nu^n| \frac{(n+\nu)!}{n!\,\nu!}\theta^\nu}$, où ν peut prendre toutes les valeurs, de o à ∞, pour chaque valeur de n. Cette limite supérieure étant supposée finie, si n est assez grand, on aura quel que soit ν

$$|\Delta_\nu^n| \frac{(n+\nu)!}{n!\,\nu!}\theta^\nu < \left(\frac{1}{A-\varepsilon}\right)^n.$$

Si $\theta < \frac{R}{l+R}$, en choisissant $\varepsilon < \frac{1}{l}\left(\frac{1}{\theta} - \frac{l+R}{R}\right)$, on a

$$\begin{aligned}|\Delta_\nu^n| \frac{(n+\nu)!}{n!\,\nu!}\theta^\nu &< \left(\frac{1}{R}+\varepsilon\right)^n \left(1+\frac{l}{R}+l\varepsilon\right)^\nu \theta^\nu \frac{(n+\nu)!}{n!\,\nu!} \\ &< \left(\frac{1}{R}+\varepsilon\right)^n \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(n+\nu)!}{n!\,\nu!}\left(1+\frac{l}{R}+l\varepsilon\right)^\nu \theta^\nu \\ &= \left(\frac{1}{R}+\varepsilon\right)^n \left[1-\theta\left(1+\frac{l}{R}+l\varepsilon\right)\right]^{-n-1}.\end{aligned}$$

Il en résulte

$$\frac{1}{A} \leqq \frac{1}{R-\theta(R+l)},$$

et, quel que soit θ, on aura

$$A+\theta(R+l)-R \geqq 0;$$

d'autre part, en supposant $\nu = 0$, on voit que $A \leqq R$.

Si z a une valeur telle que $\left|\frac{z}{\lambda - z}\right| < \theta$, on a

$$\begin{aligned}\left|\frac{f^n(z)}{n!}\right| &< \left|\frac{\lambda}{\lambda - z}\right|^{n+1} \left(\frac{1}{A-\varepsilon}\right)^n \sum_{\nu=}^{\infty} \left|\frac{z}{(\lambda - z)\theta}\right|^\nu \\ &= \left|\frac{\lambda}{\lambda - z}\right|^n \left(\frac{1}{A-\varepsilon}\right)^n \frac{|\lambda|}{|\lambda - z| - \left|\frac{z}{\theta}\right|};\end{aligned}$$

la limite supérieure, pour $n = \infty$, de $\sqrt[n]{\left|\frac{f^n(z)}{n!}\right|}$ est alors au plus égale à $\frac{1}{A}\left|\frac{\lambda}{\lambda - z}\right|$. Il n'y a donc aucun point singulier à l'intérieur du cercle de centre z et de rayon $A\left|1 - \frac{z}{\lambda}\right|$.

Posons $\frac{z}{\lambda - z} = te^{\alpha i}$, $t < 0$. Il n'y a aucun point singulier intérieur au cercle de centre $z = \frac{\lambda t}{t + e^{-\alpha i}}$ et de rayon $\frac{A}{|t + e^{-\alpha i}|}$. Un point $z = \rho e^{\omega i}$, où $\rho \geqq R$, sera intérieur à l'un de ces cercles, si l'on peut trouver deux arcs α et β tels que

$$\rho e^{\omega i} = \frac{\lambda t + A' e^{\beta i}}{t + e^{-\alpha i}}, \qquad \text{où} \qquad A' < A, \qquad t < 0,$$

car ce point est sur la circonférence de centre $\frac{\lambda t}{t + e^{-\alpha i}}$ et de rayon $\frac{A'}{|t + e^{-\alpha i}|}$. Il faut donc que

$$t\rho e^{\omega i} + \rho e^{(\omega - \alpha) i} = \lambda t + A' e^{\beta i};$$

on pourra déterminer α et β si la circonférence de centre $t\rho e^{\omega i}$ et de rayon ρ coupe, ou touche, celle de centre λt et de rayon A', c'est-à-dire si

$$\rho - A' \leqq t|\lambda - \rho e^{\omega i}| \leqq \rho + A'.$$

Pourvu que $\rho - A < 0|\lambda - \rho e^{\omega i}|$, on peut choisir t et A' de façon à vérifier ces inégalités. Il suffit de choisir A' tel que

$$A > A' > \rho - 0|\lambda - \rho e^{\omega i}|,$$

puis t de façon que

$$t < 0 \qquad \text{et} \qquad \rho - A' < t|\lambda - \rho e^{\omega i}| < \rho + A';$$

on est ainsi conduit au théorème suivant :

Soient

$$\Delta_\nu^n = \lambda^\nu a_{n+\nu} - \frac{\nu}{1}\lambda^{\nu-1} a_{n+\nu-1} + \frac{\nu(\nu-1)}{1.2}\lambda^{\nu-2} a_{n+\nu-2} - \ldots + (-1)^\nu a_n,$$

où λ est une quantité donnée, réelle ou imaginaire, et θ une quantité positive. Si $\sqrt[n]{|\Delta_\nu^n| \frac{(n+\nu)!}{n!\nu!} \theta^\nu}$ a, pour $n = \infty$, quel que soit ν, une limite supérieure finie $\frac{1}{A}$, il n'y a aucun point singulier z vérifiant l'inégalité

$$|z| - \theta|\lambda - z| < A.$$

5. Supposons $|z| = R$. Si $R - \theta|\lambda - Re^{\omega i}| < A$, le point de la circonférence de convergence, $Re^{\omega i}$, n'est pas singulier.

Soit $\lambda = le^{\gamma i}$, cela a lieu si

$$4lR\sin^2\frac{\omega-\gamma}{2} > \left(\frac{R-A}{\theta}\right)^2 - (l-R)^2.$$

On a vu que l'on a toujours $R - A \leqq \theta(R + l)$, par suite

$$\left(\frac{R-A}{\theta}\right)^2 - (l-R)^2 \leqq 4lR;$$

d'autre part, $\left(\frac{R-A}{\theta}\right)^2 - (l-R)^2$ ne peut pas être négatif, car autrement on aurait, quel que soit ω,

$$R - A < \theta|l - R| \leqq \theta|\lambda - Re^{\omega i}|;$$

aucun des points $Re^{\omega i}$ ne serait singulier, et le rayon de convergence serait supérieur à R. On a donc, dans tous les cas,

$$\theta(R + l) \geqq R - A \geqq \theta|l - R|.$$

Posons

$$4lR\sin^2\frac{\Omega}{2} = \left(\frac{R-A}{\theta}\right)^2 - (l-R)^2, \qquad 0 \leqq \Omega \leqq \pi,$$

cet arc Ω est toujours réel, et il n'y a aucun point singulier, sur la circonférence de convergence, entre les points d'argument $\gamma + \Omega$ et $2\pi + \gamma - \Omega$.

En particulier, si $R - A = \theta|l - R|$, on a

$$\Omega = 0;$$

le point $z = Re^{\gamma i}$ est le seul point singulier de la circonférence de convergence.

Si $l = R$, ces expressions se simplifient; on a

$$2R\theta \geqq R - A \geqq 0, \qquad \sin\frac{\Omega}{2} = \frac{R-A}{2R\theta}.$$

4. Supposons λ réel et positif, c'est-à-dire $\gamma = 0$, ce qui est toujours possible par un changement de variable. Considérons la courbe limite définie par l'équation

$$\rho - A = \theta\,|\lambda - \rho e^{\omega i}|,$$

ce qui suppose $\rho \geqq A$. Cette courbe divise le plan en deux régions. Pour $z = +R$, on a

$$R - A \leqq \theta\,|\lambda - R|;$$

pour $z = -R$, on a

$$R - A \leqq \theta(\lambda + R).$$

Il n'y a donc aucun point singulier dans celle de ces deux régions qui comprend le point $-R$ et ne comprend pas $+R$. Cela suffit pour la définir, car cette courbe limite ne passe jamais par ces deux points.

L'équation de la courbe, en coordonnées polaires, sera

$$\rho^2(1 - \theta^2) - 2\rho(A - \lambda\theta^2 \cos\omega) + A^2 - \lambda^2\theta^2 = 0, \qquad \text{où} \qquad \rho \geqq A.$$

Si $\theta < 1$, ρ a une racine plus petite que A, et l'on a la branche

$$\rho = \frac{A - \lambda\theta^2\cos\omega + \sqrt{(A - \lambda\theta^2\cos\omega)^2 - (1 - \theta^2)(A^2 - \lambda^2\theta^2)}}{1 - \theta^2}$$
$$= \frac{\lambda^2\theta^2 - A^2}{\lambda\theta^2\cos\omega - A + \sqrt{(A - \lambda\theta^2\cos\omega)^2 - (1 - \theta^2)(A^2 - \lambda^2\theta^2)}};$$

la quantité sous le radical est égale à

$$\theta^2[(A - \lambda\cos\omega)^2 + \lambda^2(1 - \theta^2)\sin^2\omega] \geqq 0;$$

ces deux formes de ρ montrent que, si ω croît de 0 à π, ρ croît constamment. On a une courbe fermée, à l'intérieur de laquelle ne peut se trouver aucun point singulier.

Si $A = R - \theta(\lambda + R)$, ce qui suppose $\theta < \frac{R}{\lambda + R}$, la courbe passe par le point $z = -R$ et est tout entière intérieure à la circonférence de convergence.

Si $\theta = 1$, on a la courbe limite

$$2\rho(\lambda\cos\omega - A) = \lambda^2 - A^2, \qquad \text{où} \qquad \rho \gtrless A,$$

on a

$$A \leqq R - |\lambda - R| \leqq \lambda.$$

Pour que ρ soit positif, il faut que $\lambda\cos\omega - A > 0$, ce qui donne la branche d'hyperbole

$$\rho = \frac{\lambda^2 - A^2}{2(\lambda\cos\omega - A)}, \qquad \cos\omega \gtrless \frac{A}{\lambda}.$$

Si $\theta > 1$, on a

$$A \leqq R - \theta|\lambda - R| \leqq \lambda.$$

Pour que ρ soit réel, il faut

$$|\theta^2\lambda\cos\omega - A| > \sqrt{(\theta^2 - 1)(\lambda^2\theta^2 - A^2)}.$$

Mais, si $\theta^2\lambda\cos\omega - A < 0$, les deux valeurs de ρ sont négatives. On a donc la branche de courbe :

$$\rho = \frac{\theta^2\lambda\cos\omega - A \pm \sqrt{(\lambda\theta^2\cos\omega - A)^2 - (\theta^2 - 1)(\lambda^2\theta^2 - A^2)}}{\theta^2 - 1},$$

$$\theta^2\lambda\cos\omega > A + \sqrt{(\theta^2 - 1)(\lambda^2\theta^2 - A^2)};$$

lorsque ω croît depuis zéro, la plus petite valeur de ρ croît, l'autre diminue, et l'on a une courbe fermée, à l'extérieur de laquelle il n'y a aucun point singulier à distance finie.

Dans ce cas, $z = \infty$ est un pôle ou un point ordinaire. En effet, si n est assez grand, la série

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \Delta_\nu^n \frac{(n+\nu)!}{\nu!}\left(\frac{z}{\lambda - z}\right)^n = \left(1 - \frac{z}{\lambda}\right)^{n+1} f^n(z)$$

est convergente tant que $\left|\frac{z}{\lambda - z}\right| < \theta$; le point $z = \infty$, $\frac{z}{\lambda - z} = -1$, n'est pas singulier pour $z^{n+1} f^n(z)$ et ne peut être, pour $f(z)$, qu'un point ordinaire ou un pôle d'ordre n au plus.

Quel que soit θ, si $A = R - \theta|\lambda - R|$, $z = +R$ est le seul point singulier de la circonférence de convergence.

Si $\theta < 1$, la courbe passe alors par le point $z = +R$.

Si $\theta \geqq 1$ et $\lambda > R$, on a $A = R - \theta(\lambda - R)$ et la courbe limite passe encore par $z = +R$.

Si $\theta > 1$, $\lambda \leqq R$, on a

$$A = R - \theta(R - \lambda) \leqq \lambda.$$

Alors, pourvu que $\rho > R$, on a

$$\rho - A < \theta(\rho - \lambda) \leqq \theta|\lambda - \rho e^{\omega i}|,$$

et lorsque $\rho = R$, si $\omega \gtrless 0$,

$$R - A = \theta(R - \lambda) < \theta|\lambda - R e^{\omega i}|.$$

Le point $z = +R$ est alors le seul point singulier à distance finie, $z = \infty$ pouvant être un pôle ou un point ordinaire.

Enfin, si $\theta = 1$, $\lambda \leqq R$ et $A = \lambda$, l'hyperbole limite se réduit à $\cos\omega = 1$, il n'y a aucun point singulier en dehors de la partie positive de l'axe OX.

3. Pour démontrer la réciproque du théorème fondamental, posons

$$\varphi_n(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \Delta_\nu^n \frac{(n+\nu)!}{n!\,\nu!} \left(\frac{z}{\lambda - z}\right)^\nu,$$

λ pouvant être réel ou imaginaire, et $\frac{z}{\lambda - z} = te^{\alpha i}$, t étant supposé tel que la série précédente soit convergente, quel que soit α. N étant un nombre entier, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{N}\sum_{\nu=0}^{N-1} e^{-\frac{2\pi i}{N}\nu h}\varphi_n\left(\frac{\lambda t}{t + e^{-\frac{2\pi i\nu}{N}}}\right) &= \frac{1}{N}\sum_{\mu=0}^{\infty}\Delta_\mu^n \frac{(n+\mu)!}{n!\,\mu!} t^\mu \sum_{\nu=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N}\nu(\mu-h)}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\Delta_{h+kN}^n t^{h+kN}\frac{(n+h+kN)!}{n!\,(h+kN)!}.\end{aligned}$$

Supposons que la fonction $f(z)$ n'ait aucun point singulier vérifiant l'inégalité

$$|z| - \theta|\lambda - z| < A,$$

où

$$\theta|l - R| \leqq R - A \leqq \theta(l + R), \qquad l = |\lambda|.$$

La première de ces inégalités est toujours vérifiée, car, autrement, le rayon de convergence serait supérieur à R, A et θ étant supposés positifs. La seconde inégalité est vérifiée si A est choisi de façon que la courbe, qui limite la région considérée, ne soit pas tout entière intérieure à la circonférence de convergence, et lui soit au moins tangente.

Dans le cas où $\theta \geqq 1$, supposons en outre que le point $z = \infty$ soit un pôle ou un point ordinaire.

En posant $\frac{z}{\lambda - z} = te^{\alpha i}$, on a

$$\varphi_n(z) = \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{z}{\lambda}\right)^{n+1} f^n(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \Delta_\nu^n \frac{(n+\nu)!}{n!\,\nu!} t^\nu e^{\nu\alpha i};$$

cette fonction n'a aucun point singulier vérifiant l'inégalité

$$t - \theta < A\left|\frac{1 + te^{\alpha i}}{\lambda}\right|,$$

sauf $te^{\alpha i} = -1$.

Si $\theta < 1$, cette inégalité est vérifiée, quel que soit α, pourvu que $t < \frac{A + l\theta}{A + l}$, valeur comprise entre 0 et 1.

Si $\theta > 1$, l'inégalité est toujours vérifiée lorsque $t < \frac{\theta l - A}{l - A}$, valeur supérieure à θ; et, si n est assez grand, $z = \infty$ est un point ordinaire pour $z^{n+1} f^n(z)$ et $\varphi_n(z)$.

Enfin, si $\theta = 1$, pourvu que n soit assez grand, $z = \infty$ sera un point ordinaire pour $\varphi_n(z)$; on peut alors trouver une quantité B telle qu'il n'y ait aucun point singulier vérifiant l'inégalité

$$|z| > B \qquad \text{ou} \qquad \left|\frac{1 + te^{\alpha i}}{\lambda}\right| < \frac{t}{B}.$$

D'autre part, il n'y a aucun point singulier tel que

$$\left|\frac{1+te^{\alpha i}}{\lambda}\right| > \frac{t-1}{\Lambda}.$$

Si $\frac{t}{B} > \frac{t-1}{\Lambda}$, quel que soit α, l'une de ces inégalités sera vérifiée. Il n'y a donc aucun point singulier tel que $t < \frac{B}{B-\Lambda}$.

Ainsi, dans tous les cas, le rayon de convergence de la série en t, qui représente $\varphi_n(z)$ est plus grand que θ. Et, si N augmente indéfiniment, la somme

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Delta''_{h+kN}\,\theta^{h+kN}\frac{(n+h+kN)!}{n!(h+kN)!}$$

tend vers zéro.

Considérons une circonférence de centre $z = \frac{\lambda\theta}{\theta+e^{-\alpha i}}$ et de rayon $\frac{\Lambda}{|\theta+e^{-\alpha i}|}$. Un point de cette circonférence sera représenté par

$$\rho e^{\omega i} = \frac{\lambda\theta + \Lambda e^{\beta i}}{\theta + e^{-\alpha i}},$$

d'où l'on déduit

$$\theta|\lambda - \rho e^{\omega i}| = |\rho e^{(\omega-\alpha)i} - \Lambda e^{\beta i}| > \rho - \Lambda,$$

et aucun point intérieur à cette circonférence n'est singulier pour $f^n(z)$. Il en résulte que $\sqrt[n]{\left|\frac{f^n(z)}{n!}\right|}$ a, pour $n = \infty$, une limite supérieure au plus égale à $\frac{1}{\Lambda}|\theta + e^{-\alpha i}| = \frac{1}{\Lambda}\left|\frac{\lambda}{\lambda - z}\right|$, et celle de $\sqrt[n]{|\varphi_n(z)|}$ est au plus égale à $\frac{1}{\Lambda}$. Pourvu que n soit assez grand, on a donc, quel que soit α,

$$\left|\varphi_n\left(\frac{\theta}{\theta+e^{-\alpha i}}\right)\right| < \left(\frac{1}{\Lambda-\varepsilon}\right)^n$$

et

$$|\Delta''_h|\,\theta^h\frac{(n+h)!}{n!\,h!} < \frac{1}{N}\sum_{\nu=0}^{N-1}\left|\varphi_n\left(\frac{\theta\lambda}{\theta+e^{-\frac{2\pi i}{N}\nu}}\right)\right| + \left|\sum_{k=1}^{\infty}\Delta''_{h+kN}\,\theta^{h+kN}\frac{(n+h+kN)!}{n!(h+kN)!}\right|;$$

le premier terme est plus petit que $\left(\frac{1}{\Lambda-\varepsilon}\right)^n$, le second est aussi petit que l'on voudra et tend vers o lorsque N augmente indéfiniment. Il en résulte que $\sqrt[n]{|\Delta_h^n|\theta^h\frac{(n+h)!}{n!\,h!}}$ est plus petit que $\frac{1}{\Lambda-\varepsilon}$, et a, pour $n=\infty$, une limite supérieure au plus égale à $\frac{1}{\Lambda}$; ce qui conduit à la réciproque du théorème fondamental :

Si $f(z)$ n'a aucun point singulier vérifiant l'inégalité

$$|z|-\theta|\lambda-z|<\Lambda,$$

où Λ et θ sont positifs, et si, lorsque $\theta\geq 1$, le point $z=\infty$ est un pôle ou un point ordinaire, la limite supérieure, pour $n=\infty$, de

$$\sqrt[n]{|\Delta_\nu^n|\frac{(n+\nu)!}{n!\,\nu!}\theta^\nu}$$

est au plus égale à $\frac{1}{\Lambda}$.

6. $\frac{1}{\Lambda}$ représentant toujours la limite supérieure, supposée finie, de $\sqrt[n]{|\Delta_\nu^n|\frac{(n+\nu)!}{n!\,\nu!}\theta^\nu}$, pour $n=\infty$, si $\theta\gtrless 1$, il y a au moins un point singulier sur la courbe limite

$$|z|-\theta|\lambda-z|=\Lambda;$$

autrement, quel que soit α, il n'y aurait aucun point singulier, non seulement à l'intérieur, mais sur la circonférence de centre

$$z=\frac{\lambda\theta}{\theta+e^{-\alpha i}}$$

et de rayon

$$\frac{\Lambda}{|\theta+e^{-\alpha i}|}.$$

On pourrait alors trouver une quantité positive r, telle qu'il n'y ait aucun point singulier intérieur à chacun des cercles de centre z et de rayon

$$\frac{A}{|\theta+e^{-\alpha i}|}+r \gtrless \frac{A+r|\theta-1|}{|\theta+e^{-\alpha i}|};$$

il n'y aurait donc aucun point singulier vérifiant l'inégalité

$$|z|-\theta|\lambda-z|<A+r|\theta-1|$$

et la limite supérieure de $\sqrt[n]{|\Delta_\nu^n|\frac{(n+\nu)!}{n!\,\nu!}\theta^\nu}$, pour $n=\infty$, serait au plus égale à

$$\frac{1}{A+r|\theta-1|}<\frac{1}{A}.$$

De même, lorsque $\theta=1$, si $z=\infty$ est un pôle ou un point ordinaire, il y a au moins un point singulier sur la courbe limite

$$|z|-\theta|\lambda-z|=A.$$

On peut, en effet, trouver une quantité positive B, telle qu'il n'y ait aucun point singulier dont le module soit supérieur à B, sauf le pôle $z=\infty$. Si aucun point de la branche d'hyperbole

$$|z|-\theta|\lambda-z|=A$$

n'était singulier, on pourrait trouver une quantité r telle qu'il n'y ait aucun point singulier à l'intérieur de chaque cercle de centre $\frac{\lambda}{1+e^{-\alpha i}}$ et de rayon $\frac{A}{|1+e^{-\alpha i}|}+r=\frac{A+2r\cos\frac{\alpha}{2}}{|1+e^{-\alpha i}|}$ où $-\pi<\alpha<\pi$. Considérons une circonférence de centre $\frac{\lambda}{1+e^{-\alpha i}}$ et de rayon $\frac{A'}{|1+e^{-\alpha i}|}$ où $A'>A$. Elle est tangente à la branche d'hyperbole $|z|-|\lambda-z|=A'$, et le point de contact, $\rho e^{\omega i}$, est déterminé par les relations

$$|\rho e^{\omega i}-\lambda|=\rho-A', \qquad \rho e^{\omega i}-\lambda=A'e^{\beta i}-\rho e^{(\omega-\alpha)i},$$

d'où l'on déduit

$$\beta=\omega-\alpha, \qquad |\lambda|=|\rho e^{\alpha i}+\rho-A'|,$$

$$4\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{l^2-A'^2}{\rho(\rho-A')}.$$

Si $4\cos^2\frac{\alpha}{2} < \frac{l^2 - A'^2}{B(B-A')}$, on a

$$\rho > B,$$

et le point de contact ne peut pas être singulier.

Si $4\cos^2\frac{\alpha}{2} \geqq \frac{l^2 - A'^2}{B(B-A')}$, on a

$$2r\cos\frac{\alpha}{2} \geqq r\sqrt{\frac{l^2 - A'^2}{B(B-A')}},$$

et aucun de ces points de contact ne sera singulier, si A' est choisi de façon que

$$A + r\sqrt{\frac{l^2 - A'^2}{B(B-A')}} > A' > A.$$

Si A' est la plus petite racine positive de l'équation

$$(A' - A)^2(A' - B)B = r^2(A'^2 - l^2),$$

racine qui est comprise entre A et l, il n'y a aucun point singulier tel que

$$|z| - |\lambda - z| < A'$$

et la limite supérieure de $\sqrt[n]{|\Delta_\nu^n| \frac{(n+\nu)!}{n!\,\nu!}}$ serait au plus égale à $\frac{1}{A'}$, qui est plus petit que $\frac{1}{A}$.

Cette démonstration suppose $A < l$, pour que $l > A' > A$. Mais si $A = l$, le point $z = +R$ est singulier et se trouve sur la courbe limite, qui se réduit à $\omega = 0$.

On peut dire que, dans tous les cas, pourvu que $A > 0$, il y a un point singulier sur la courbe limite $|z| - \theta|\lambda - z| = A$; mais, si $\theta = 1$, ce point peut être $z = \infty$, qui alors n'est pas un pôle.

7. λ étant supposé fixe, à chaque valeur de θ correspond une valeur de A, qui devient nulle lorsque $\frac{1}{A} = \infty$. Si θ augmente, A ne croît jamais. Si $A > 0$ il n'y a aucun point singulier, tel que

$$|z| - \theta|\lambda - z| < A.$$

Si z est un point singulier, on aura

$$A = 0$$

pour toute valeur de $\theta \geqq \left|\frac{z}{\lambda - z}\right|$. De même, si $z = \infty$ n'est pas un pôle ou un point ordinaire, lorsque $\theta > 1$, on a

$$A = 0.$$

Si $z = \lambda$ est le seul point singulier de $f(z)$, ce qui suppose $|\lambda| = R$, $z = \infty$ pouvant être un pôle, on aura

$$A = R,$$

quel que soit θ. Mais, s'il y a au moins un point singulier autre que $z = \lambda$, il existera une valeur de θ au delà de laquelle $A = 0$. Soit θ' cette valeur telle que $A > 0$ lorsque $\theta < \theta'$, et $A = 0$ lorsque $\theta > \theta'$. Il ne peut y avoir aucun point singulier tel que

$$|z| - \theta'|\lambda - z| < 0,$$

car autrement, à la valeur $\theta = \left|\frac{z}{\lambda - z}\right| < \theta'$ correspondrait $A = 0$. Si $\theta' > 1$, $z = \infty$ est un point ordinaire ou un pôle.

Il y a au moins un point singulier tel que

$$|z| = \theta'|\lambda - z|.$$

En effet, si $\theta' \gtrless 1$ et si aucun de ces points n'était singulier, on pourrait trouver une quantité r telle qu'il n'y ait aucun point singulier intérieur aux cercles de centre $z = \frac{\lambda\theta'}{\theta + e^{-\alpha i}}$ et de rayon r. Si $\theta - \theta'$ est assez petit, il n'y aura aucun point singulier intérieur aux cercles de centre $z = \frac{\lambda\theta}{\theta + e^{-\alpha i}}$ et de rayon $r - \left|\lambda \frac{\theta - \theta'}{(\theta + e^{-\alpha i})(\theta' + e^{-\alpha i})}\right|$ supposé positif, car ces cercles sont intérieurs aux précédents. Quel que soit α, ce rayon est au moins égal à

$$\frac{1}{|\theta + e^{-\alpha i}|}\left(r|\theta - 1| - \left|\lambda\frac{\theta - \theta'}{\theta' - 1}\right|\right);$$

il n'y aura donc aucun point singulier, tel que

$$|z| - \theta|\lambda - z| < r|\theta - 1| - \left|\lambda\frac{\theta - \theta'}{\theta' - 1}\right|,$$

pourvu que

$$r|\theta - 1||\theta' - 1| > |\lambda||\theta - \theta'|,$$

ce qui a lieu si $r(\theta' - 1) < l$,

$$\theta' < \theta < \frac{l\theta' - r(\theta' - 1)}{l - r(\theta' - 1)},$$

et l'on pourrait trouver une valeur $\theta > \theta'$, telle que

$$A > 0.$$

Si $\theta = 1$, le point $z = \infty$ peut être considéré comme situé sur la droite $|z| = |\lambda - z|$. Si $z = \infty$ est un pôle, et si aucun point de cette droite n'est singulier, on pourra trouver deux quantités B et r, telles qu'il n'y ait aucun point singulier vérifiant l'une des inégalités

$$\rho \leq B, \qquad \rho\cos(\omega - \gamma) < \frac{l}{2} + r, \qquad \text{où} \qquad \lambda = le^{\gamma i}.$$

Si l'on prend

$$1 < \theta < \frac{B}{\sqrt{B^2 - 2rl}} \qquad \text{et} \qquad A = B - \theta\sqrt{B^2 - 2rl} > 0,$$

il n'y a aucun point singulier tel que

$$|z| - \theta|\lambda - z| < A;$$

car, si $|z| < B$, on en déduit

$$2\rho\cos(\omega-\gamma) < \frac{l^2+B^2-\left(\frac{B-A}{\theta}\right)^2}{l} = l+2r.$$

On aurait donc

$$A > 0,$$

pour une valeur $\theta > 1$.

Il y a donc, dans tous les cas, au moins un point singulier sur la courbe limite $|z| = \theta'|\lambda - z|$. Mais, si $\theta = 1$, ce point peut être $z = \infty$.

8. Tant que $\theta \gtrless 1$, A varie d'une façon continue avec θ. Soient, en effet, deux valeurs $\theta_2 > \theta_1$, auxquelles correspondent A_2 et A_1, $A_1 \geqq A_2 > 0$. Les deux courbes c_1 et c_2

$$|z| - \theta_1|\lambda - z| = A_1, \qquad |z| - \theta_2|\lambda - z| = A_2,$$

se coupent toujours en deux points réels, symétriques par rapport au rayon qui passe par le point λ, qui ne peuvent être intérieurs à la circonférence de convergence; car autrement celle de ces courbes qui coupe la circonférence de convergence le plus près du point $z = -1$ ne contiendrait aucun point singulier. On a, pour ces points communs,

$$\rho_1 = \frac{A_1\theta_2 - A_2\theta_1}{\theta_2 - \theta_1},$$

et il faut

$$\rho_1 \geqq R.$$

Si $\theta_1 < 1$, le module ρ d'un point de la première courbe augmente jusqu'à la valeur $\frac{A_1 + l\theta_1}{1-\theta_1}$, et il faut $\rho_1 \leqq \frac{A_1 + l\theta_1}{1-\theta_1}$. On en déduit les deux conditions

$$(R - A_1)\frac{\theta_2 - \theta_1}{\theta_1} \leqq A_1 - A_2 \leqq (A_1 + l)\frac{\theta_2 - \theta_1}{1-\theta_1}.$$

Si $\theta_1 > 1$, on obtient de même la condition

$$\rho_1 \leqq \frac{l\theta_1 - A_1}{\theta_1 - 1}$$

et

$$(R - A_1)\frac{\theta_2 - \theta_1}{\theta_1} \leqq A_1 - A_2 \leqq (l - A_1)\frac{\theta_2 - \theta_1}{1 - \theta_1}.$$

Donc, si $\theta_1 \gtrless 1$, $A_1 - A_2$ tend vers zéro avec $\theta_2 - \theta_1$, et A varie d'une façon continue.

Soit $z = \rho e^{\omega i}$ un point de la courbe c_1, on a

$$\rho - \theta_1 |\lambda - z| = A_1 \qquad \text{et} \qquad \rho - \theta_2 |\lambda - z| = \frac{A_1\theta_2 - \rho(\theta_2 - \theta_1)}{\theta_1},$$

qui diminue quand ρ augmente. Donc sur la courbe c_1 il n'y a aucun point singulier tel que $\rho > \rho_1$ et il y en a au moins un tel que $\rho \leqq \rho_1$.

De même, sur la courbe c_2, il n'y a aucun point singulier tel que $\rho < \rho_1$, et il y en a au moins un tel que $\rho \geqq \rho_1$.

Soit une nouvelle valeur $\theta_3 > \theta_2$, pour laquelle on a

$$A_3 > 0,$$

et soit

$$\rho_2 = \frac{A_2\theta_3 - A_3\theta_2}{\theta_3 - \theta_2}.$$

Sur la courbe c_2 il n'y a aucun point singulier tel que $\rho > \rho_2$; on a donc

$$\rho_1 \leqq \rho_2,$$

d'où l'on déduit

$$\frac{\rho_1 - A_2}{\theta_2} \leqq \frac{\rho_1 - A_3}{\theta_3}, \qquad \begin{vmatrix} \theta_1 & A_1 & 1 \\ \theta_2 & A_2 & 1 \\ \theta_3 & A_3 & 1 \end{vmatrix} \leqq 0.$$

Si $\rho_1 = \rho_2$, l'un des deux points communs aux trois courbes est singulier, et la courbe c_2 ne contient pas d'autres points singuliers que ces deux points symétriques, définis par les équations

$$\rho = \rho_1, \qquad |\lambda - z| = \frac{A_1 - A_2}{\theta_2 - \theta_1}.$$

La circonférence de convergence peut remplacer la première des courbes c, et si

$$\rho_1 = \frac{A_1\theta_2 - A_2\theta_1}{\theta_2 - \theta_1} = R,$$

l'un des deux points $Re^{(\gamma \pm \Omega)i}$ est singulier, Ω étant donné par la relation

$$4lR\sin^2\frac{\Omega}{2} = \left(\frac{R - A_1}{\theta_1}\right)^2 - (l - R)^2.$$

θ ayant une valeur donnée, s'il y a un point singulier tel que

$$|z| - \theta|\lambda - z| \leqq 0,$$

on aura

$$A = 0.$$

Si non, A sera égal à la plus petite des valeurs de $|z| - \theta|\lambda - z|$, où z est l'un quelconque des points singuliers de $f(z)$. Il ne peut y avoir d'exception à cette règle que pour $\theta = 1$, si $z = \infty$ est un point singulier; dans ce cas, l'hyperbole $|z| - |\lambda - z| = A$ passe par $z = \infty$ quel que soit A, et cela n'indique rien sur la valeur de A.

9. Pour simplifier la discussion, supposons λ réel, ce qui revient à changer de variable de façon à augmenter ω de γ.

Si $z = -R$ est un point singulier, pourvu que $\rho \geqq R$ et $\theta < 1$, on a

$$\rho - \theta|l - \rho e^{\omega i}| \geqq \rho - \theta(l + \rho) \geqq R - \theta(l + R),$$

alors

$$A = R - \theta(l + R),$$

et, si $\theta > \dfrac{R}{l + R}$,

$$A = 0.$$

Dans ce cas, toutes les courbes c sont intérieures à la circonférence de convergence.

z étant un point singulier quelconque de $f(z)$, posons

$$|z| = \rho, \qquad |l - z| = M.$$

Soit $z_0 = Re^{\pm\omega_0 i}$ le point singulier de la circonférence de convergence le plus rapproché de $z = -R$, que nous supposons non singulier. Posons, pour plus de symétrie dans les formules,

$$R = \rho_0, \qquad |t - z_0| = M_0.$$

Si tous les points singuliers sont tels que $\frac{\rho}{M} \geqq \frac{\rho_0}{M_0}$, pourvu que $\theta < \frac{\rho_0}{M_0}$, on a

$$\rho - \theta M \geqq \rho_0 - \theta M_0;$$

car si $M > M_0$, on a

$$\rho - \theta M \geqq M\left(\frac{\rho_0}{M_0} - \theta\right) > \rho_0 - \theta M_0,$$

si $M \leqq M_0$, comme $\rho \geqq \rho_0$, on a encore

$$\rho - \theta M \geqq \rho_0 - \theta M_0.$$

Il en résulte que

$$A = \rho_0 - \theta M_0,$$

et, si $\theta \geqq \frac{\rho_0}{M_0}$,

$$A = 0.$$

S'il y a des points singuliers tels que $\frac{\rho}{M} < \frac{\rho_0}{M_0}$, supposons d'abord qu'ils soient tous isolés, et représentons-les par des points de coordonnées ρ, M, par rapport à deux axes rectangulaires. Considérons une droite issue du point $\rho_0 M_0$ parallèle à l'axe des M dans le sens positif, et faisons-la tourner autour de ce point, vers l'axe des ρ, jusqu'à ce qu'elle rencontre un point singulier $\rho_1 M_1$. Si plusieurs points sont sur cette première droite, on choisira la plus grande valeur de ρ_1. On fera ensuite tourner cette droite autour du point $\rho_1 M_1$ jusqu'à ce qu'elle passe par un autre point singulier $\rho_2 M_2$, et ainsi de suite tant que $\frac{M}{\rho}$ va en croissant. On forme ainsi un polygone convexe de sommets

$$\rho_0 M_0, \quad \rho_1 M_1, \quad \ldots, \quad \rho_k M_k,$$

tels que

$$\frac{M_0}{\rho_0} < \frac{M_1}{\rho_1} < \ldots < \frac{M_k}{\rho_k}, \qquad \rho_0 < \rho_1 < \ldots < \rho_k, \qquad M_0 < M_1 < \ldots < M_k.$$

Si $\rho_{\nu-1}M_{\nu-1}$ et $\rho_\nu M_\nu$ sont deux sommets consécutifs, ρM un point singulier quelconque, on a

$$\begin{vmatrix} \rho_\nu & M_\nu & 1 \\ \rho_{\nu-1} & M_{\nu-1} & 1 \\ \rho & M & 1 \end{vmatrix} \geqq 0, \qquad \frac{M}{\rho} \leqq \frac{M_k}{\rho_k}.$$

Soit

$$\theta_1 = \frac{\rho_1 - \rho_0}{M_1 - M_0}, \quad \theta_2 = \frac{\rho_2 - \rho_1}{M_2 - M_1}, \quad \ldots, \quad \theta_k = \frac{\rho_k - \rho_{k-1}}{M_k - M_{k-1}}, \quad \theta_{k+1} = \frac{\rho_k}{M_k},$$

on a

$$0 < \theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_k < \theta_{k+1}.$$

Soit

$$\theta_\nu < \theta < \theta_{\nu+1}.$$

Si, par le point $\rho_\nu M_\nu$, on mène une droite parallèle à la direction $\rho = M\theta$, tous les points singuliers (ρ, M) sont situés du même côté de cette droite, celui de $\rho = +\infty$, et l'on a

$$\rho - M\theta > \rho_\nu - M_\nu \theta.$$

Donc, si $0 < \theta \leqq \theta_1$, on a

$$A = \rho_0 - M_0 \theta;$$

en général, si $\theta_\nu \leqq \theta \leqq \theta_{\nu+1}$,

$$A = \rho_\nu - M_\nu \theta,$$

et, si $\theta \geqq \theta_{k+1}$,

$$A = 0.$$

Si les points singuliers de $f(z)$ ne sont pas tous isolés, le polygone convexe que nous avons formé sera remplacé, en totalité ou en partie, par une courbe convexe, lieu d'une suite de points (ρ, M). A un point de cette courbe correspond la valeur $\theta = \frac{d\rho}{dM}$, pour laquelle $A = \rho - M\theta$.

Si $\theta_{k+1} > 1$, A varie d'une façon continue, même pour les valeurs voisines de $\theta = 1$. Il en est de même si $\theta_{k+1} = 1$, ρ_k étant fini, car alors, si θ tend vers 1, A tend vers zéro, et $A = 0$ lorsque $\theta \geqq 1$. Mais, si tous les points singuliers sont tels que $\frac{\rho}{M} > 1$, $z = x$ étant singulier, le dernier côté du polygone sera une droite passant par le point (ρ_{k-1}, M_{k-1}) et parallèle à la direction $\rho = M$. Alors, si $\theta_{k-1} \leqq \theta < 1$,

$$A = \rho_{k-1} - \theta M_{k-1},$$

lorsque θ tend vers 1, A tend vers $\rho_{k-1} - M_{k-1} > 0$; si $\theta > 1$,

$$A = 0;$$

et pour $\theta = 1$, A peut avoir l'une quelconque des valeurs comprises entre zéro et $\rho_{k-1} - M_{k-1}$. Il en est de même si le polygone devient une courbe convexe asymptote à la droite $\rho - M = A' > 0$, car A tend vers A' lorsque θ tend vers 1. Si $A' = 0$, A reste continu pour $\theta = 1$.

Inversement, si l'on connaît la valeur A qui correspond à chaque valeur θ, on aura une série de courbes c,

$$\rho - \theta M = A.$$

Deux courbes infiniment voisines se coupent en deux points symétriques déterminés par les valeurs

$$M = -\frac{dA}{d\theta}, \qquad \rho = A - \theta \frac{dA}{d\theta}.$$

L'un de ces deux points est singulier. Ces points peuvent former une suite continue, ou une série de points isolés. Dans ce dernier cas, on réunira deux points consécutifs par la courbe $\rho - \theta M = A$ qui passe par ces points. La dernière courbe ainsi obtenue sera $\rho = \theta' M$. On obtient ainsi une courbe, ou une suite de courbes, qui limite une région du plan dans laquelle la fonction ne peut avoir aucun point singulier.

10. Cherchons, en particulier, les points singuliers de la circonférence de convergence. On a vu que $\frac{R - A}{\theta}$ ne décroît jamais, quand θ croît. Supposons que θ tende vers zéro.

Si, pour deux valeurs θ_1 et θ_2,

$$\frac{R - A_1}{\theta_1} = \frac{R - A_2}{\theta_2},$$

$\frac{R - A}{\theta}$ reste constant entre o et θ_2, et l'un des deux points tels que $|z| = R$, $|\lambda - z| = \frac{R - A_1}{\theta_1}$ est singulier.

Soit $\lambda = le^{\gamma i}$,

$$4Rl \sin^2\frac{\Omega}{2} = \left(\frac{R - A_1}{\theta_1}\right)^2 - (l - R)^2,$$

il n'y a aucun point singulier sur la circonférence de convergence entre les points d'argument $\gamma + \Omega$ et $2\pi + \gamma - \Omega$. Il n'y a même aucun point singulier intérieur à la courbe $|z| - \theta_2|\lambda - z| = A_2$. Au point où cette courbe coupe la circonférence de convergence, l'angle V des deux tangentes est donné par la relation

$$\operatorname{tang} V = \frac{d\rho}{\rho\, d\omega} = \frac{\theta_2 l \sin\Omega}{|l - Re^{\Omega i}| + \theta_2(l\cos\Omega - R)},$$

si $\Omega > o$, $V > o$.

Si $R = l$, on a

$$\operatorname{tang} V = \frac{\theta \cos\frac{\Omega}{2}}{1 - \theta\sin\frac{\Omega}{2}} \quad \text{et} \quad V > o,$$

pourvu que $\theta > o$.

Si $R - l \gtrless o$ et $\Omega = o$, on a

$$A = R - \theta|R - l| \quad \text{et} \quad \theta < \frac{R}{|R - l|};$$

la courbe $|z| - \theta|\lambda - z| = A$ est tangente à la circonférence de convergence au point $z = Re^{\gamma i}$. Son rayon de courbure en ce point est

$$r = \frac{R|R - l|}{|R - l| - \theta R}.$$

Si $\theta < \frac{|R - l|}{R}$, une circonférence tangente à la circonférence de convergence au point $Re^{\gamma i}$ aura les parties voisines de ce point comprises entre la courbe et la circonférence de convergence, pourvu que son rayon soit plus petit que r. Cela a même lieu pour toute cette circonférence si son rayon est assez petit.

Lorsque θ tend vers zéro, si $\frac{R-A}{\theta}$ ne reste jamais constant, cette quantité décroît constamment et a une limite L. On a alors

$$4Rl\sin^2\frac{\Omega}{2} = L^2 - (l-R)^2.$$

L'un des points $Re^{(\gamma\pm\Omega)i}$ est singulier et n'est pas isolé; il y a des points singuliers infiniment voisins entre la circonférence et toute droite, non tangente, issue de ce point, du côté du point $Re^{\gamma i}$.

Si $L = |l-R|$, on a

$$\Omega = 0,$$

$Re^{\gamma i}$ est le seul point singulier de la circonférence de convergence. Si $\frac{R-A}{\theta}$ ne devient égal à L qu'à la limite, ce point singulier n'est pas isolé. Si $l = R$, il y a des points singuliers infiniment voisins entre la circonférence de convergence et deux droites symétriques non tangentes issues de ce point. Si $l \gtrless R$, il y a même des points singuliers infiniment voisins entre la circonférence de convergence et toute circonférence de rayon plus grand, tangente en ce point singulier.

Réciproquement, pour exprimer que la circonférence de convergence ne contient aucun point singulier entre ceux d'argument α et $\alpha+\beta$, l'un de ces deux points étant singulier, on choisira

$$\lambda = le^{\left(\alpha+\frac{\beta}{2}-\pi\right)i};$$

il est alors nécessaire et suffisant que $\frac{R-A}{l}$ ait, pour $\theta = 0$, une limite égale à

$$(l-R)^2 + 4Rl\cos^2\frac{\beta}{4}.$$

Pour que la circonférence de convergence ne contienne que le point singulier $Re^{\gamma i}$, il faut et il suffit que $\frac{R-A}{\theta}$ ait pour limite $|l-R|$, pour $\theta=0$, lorsque $\lambda = l e^{\gamma i}$. On a même

$$\frac{R-A}{\theta} = |l-R|,$$

pourvu que θ soit assez petit, sans être nul, lorsque ce point singulier est isolé dans une région comprise entre la circonférence de convergence et une circonférence tangente, si $l \gtrless R$. Si $l=R$, $R-A$ devient égal à zéro, sans que θ soit nul, pourvu que $Re^{\gamma i}$ soit un point singulier isolé entre la circonférence de convergence et deux directions non tangentes.

11. Pour montrer comment on peut appliquer ces résultats, considérons le cas où a_n est une fonction rationnelle de n.

Soit la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n+a},$$

a pouvant être réel ou imaginaire.

Le terme z^{-a} étant supprimé dans le cas où a est entier négatif. On a, en prenant $\lambda = 1$:

$$\Delta_1^n = \frac{-1}{(n+a)(n+a+1)},$$

$$\Delta_2^n = \Delta_1^{n+1} - \Delta_1^n = \frac{2}{(n+a)(n+a+1)(n+a+2)},$$

et, en général,

$$\Delta_\nu^n = (-1)^\nu \frac{\nu!}{(n+a)(n+a+1)\ldots(n+a+\nu)}.$$

Si $|a| = \alpha$,

$$|\Delta_\nu^n| \frac{(n+\nu)!}{n!\,\nu!}\theta^\nu < \frac{(n+\nu)!}{n!(n-\alpha)(n+1-\alpha)\ldots(n+\nu-\alpha)}\theta^\nu.$$

Si $\theta < 1$ et $n > \frac{\alpha}{1-\theta}$, cette expression diminue quand ν augmente;

on a donc

$$A = 1.$$

Si la partie réelle de a est positive,

$$\left|\frac{n+\nu}{n+\nu+a}\right| < 1,$$

$|\Delta_\nu^n| \frac{(n+\nu)!}{n!\,\nu!}$ diminue quand ν augmente, et $A = 1$ pour $\theta = 1$.

Si la partie réelle de a est négative,

$$\left|\frac{n+\nu}{n+\nu+a}\right| > 1,$$

pourvu que n dépasse un nombre déterminé fixe, $|\Delta_\nu^n| \frac{(n+\nu)!}{n!\,\nu!}$ augmente indéfiniment avec ν et $A = 0$ pour $\theta = 1$.

De même, si $\theta > 1$, $A = 0$, quel que soit a.

La fonction ne peut avoir aucun point singulier en dehors de la partie positive de l'axe OX; car si $z = \rho e^{\omega i}$ est singulier, lorsque $1 > \theta > \frac{\rho - 1}{|z-1|}$, on a

$$A \leqq \rho - \theta |1 - z| < 1.$$

$z = 1$ est le seul point singulier de la circonférence de convergence. $z = \infty$ est aussi singulier; autrement on pourrait trouver une valeur $\theta > 1$ pour laquelle A ne serait pas nul.

Il est du reste facile de vérifier que ces deux points singuliers sont les seuls de la fonction, car elle vérifie l'équation différentielle

$$z\frac{dy}{dz} + ay = \frac{1}{1-z}.$$

Soit la série

$$\sum \frac{z^n}{(n+a)^p},$$

où p est entier. En formant les différences successives, on a

$$\Delta_\nu^n = \frac{(-1)^\nu \nu!}{(n+a)(n+a+1)\ldots(n+\alpha+\nu)} \sum \frac{1}{n_1 . n_2 \ldots n_{p-1}},$$

où $n_1, n_2, \ldots, n_{p-1}$ représentent $p-1$ des $\nu+1$ quantités $n+a$, $n+a+1, \ldots, n+a+\nu$, et Σ la somme de toutes ces expressions, deux ou plusieurs de ces quantités $n_1, n_2, \ldots$ pouvant être égales dans un même terme. α étant le module de a, on a

$$|\Delta''_\nu| \frac{(n+\nu)}{n!\,\nu!}\theta^\nu < \frac{(n+\nu)\theta^\nu}{n!(n-\alpha)\ldots(n-\alpha+\nu)}\frac{(p+\nu-1)!}{\nu!(p-1)!(n-\alpha)^{p-1}}.$$

Si $\theta < 1$ et $\nu > \frac{\theta(p-1)}{1-\theta}+\varepsilon$, cette expression diminue quand ν augmente, pourvu que n soit assez grand. Il en résulte que $A=1$.

Si $\theta > 1$, en posant $a = \alpha e^{\beta i}$, on a

$$\frac{1}{n+a+\mu} = \frac{n+\mu+\alpha e^{-\beta i}}{(n+\mu)^2+\alpha^2+2\alpha(n+\mu)\cos\beta},$$

dont l'argument $\omega < \frac{\alpha}{n+\mu-\alpha}$, car $\tang\omega = \frac{-\alpha\sin\beta}{n+\mu+\alpha\cos\beta}$. Chacun des termes $\frac{1}{n_1.n_2\ldots n_{p-1}}$ a donc un argument plus petit en valeur absolue que $\frac{\alpha(p-1)}{n-\alpha}$ et un module plus grand que $\frac{1}{(\nu+n+\alpha)^{p-1}}$; il en résulte que $\sum\frac{1}{n_1.n_2\ldots n_{p-1}}$ a un module plus grand que

$$\frac{(p+\nu-1)!}{\nu!(p-1)!}\frac{1}{(\nu+n+\alpha)^{p-1}}\cos\frac{\alpha(p-1)}{n-\alpha}$$

et

$$|\Delta''_\nu|\frac{(n+\nu)!}{n!\,\nu!}\theta^\nu > \frac{(n+\nu)!\,\theta^\nu}{n!(n+\alpha)\ldots(n+\alpha+\nu)}\frac{(p+\nu-1)!}{\nu!(p-1)!}\frac{\cos\frac{\alpha(p-1)}{n-\alpha}}{(\nu+n+\alpha)^{p-1}},$$

expression qui augmente indéfiniment avec ν. Donc $A=0$. Il en résulte que la fonction n'a aucun point singulier en dehors de l'axe OX, et que les deux points $z=1$ et ∞ sont singuliers.

Si a_n est une fraction rationnelle de n, que l'on décompose en fractions simples, Δ''_ν est la somme des différences de ces fractions; il en résulte que $A=1$ lorsque $\theta<1$, et qu'il n'y a aucun point singulier en dehors de la partie positive de OX; $z=1$ est singulier.

Cet exemple permet d'expliquer pourquoi le calcul des différences n'indique rien sur la nature des points situés sur OX entre les deux points singuliers $z = 1$ et $+\infty$. La fonction $\sum_0^\infty \frac{z^n}{n+a}$ vérifie l'équation différentielle

$$z\frac{dy}{dz} + ay = \frac{1}{1-z},$$

dont la solution générale est

$$y = \sum \frac{z^n}{n+a} + Cz^{-a}.$$

Si z peut varier arbitrairement, lorsqu'on aura fait le tour du point $z = +1$, la fonction change de nature, le terme cz^{-a} s'ajoutant à la série, et $z = 0$ devient un point singulier. Les résultats que nous avons obtenus ne s'appliquent donc à la fonction qu'à condition de considérer l'axe OX, entre $+1$ et $+\infty$, comme une coupure. Si non, la fonction ne serait même pas développable en série.

Par exemple, si $a = \frac{1}{2}$, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{z}} L \frac{1+\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}},$$

où, pour $z = 0$,

$$L 1 = 0;$$

lorsque la variable z fait le tour du point $z = 1$ dans le sens positif, la fonction est augmentée de $\frac{-2\pi i}{\sqrt{z}}$ et $z = 0$ devient un point singulier.

12. Pour chercher la limite supérieure de $\sqrt[n]{|\Delta_\nu^n| \frac{(n+\nu)!}{n!\,\nu!}\theta^\nu}$, nous avons supposé que ν prenait toutes les valeurs positives pour chaque valeur de n. Cela peut être évité lorsque $\theta < \frac{R}{R+l}$. Dans ce cas, en effet, si n est assez grand, on a

$$|\Delta_\nu^n| < \left(\frac{1}{R} + \varepsilon\right)^n \left(1 + \frac{l}{R} + l\varepsilon\right)^\nu$$

et

$$|\Delta_\nu^n|\frac{(n+\nu)!}{n!\,\nu!}\theta^\nu < \left(\frac{1}{R}+\varepsilon\right)^n \frac{(n+\nu)!}{n!\,\nu!}\theta^\nu\left(1+\frac{l}{R}+l\varepsilon\right)^\nu,$$

expression qui augmente avec ν, tant que $\frac{n+\nu}{\nu}\theta\left(1+\frac{l}{R}+l\varepsilon\right) > 1$, puis elle diminue.

En remarquant que $n^n\nu^\nu\frac{(n+\nu)!}{n!\,\nu!}$ est un des termes du développement de $(n+\nu)^{n+\nu}$, on a

$$\frac{(n+\nu)!}{n!\,\nu!} < \frac{(n+\nu)^{n+\nu}}{n^n\nu^\nu}.$$

Si l'on ne donne à ν que des valeurs telles que

$$\frac{\nu}{n} \leqq k < \theta\frac{R+l}{R-\theta(R+l)},$$

$\frac{n+\nu}{\nu}\theta\left(1+\frac{l}{R}\right)$ reste supérieur à 1, et l'on a

$$|\Delta_\nu^n|\frac{(n+\nu)!}{n!\,\nu!}\theta^\nu < \left(\frac{1}{R}+\varepsilon\right)^n(1+k)^n\left[\frac{1+k}{k}\theta\left(1+\frac{l}{R}+l\varepsilon\right)\right]^{kn},$$

et la limite supérieure, pour $n=\infty$, de $\sqrt[n]{|\Delta_\nu^n|\frac{(n+\nu)!}{n!\,\nu!}\theta^\nu}$, où $\nu\leqq kn$, sera au plus égale à

$$\frac{1+k}{R}\left(\frac{1+k}{R}\theta\frac{R+l}{k}\right)^k.$$

De même, si $\frac{\nu}{n}\geqq k > \theta\frac{R+l}{R-\theta(R+l)}$, on peut supposer ε assez petit pour que $\frac{n+\nu}{\nu}\theta\left(1+\frac{l}{R}+l\varepsilon\right)$ reste plus petit que 1. On a alors

$$|\Delta_\nu^n|\frac{(n+\nu)!}{n!\,\nu!}\theta^\nu < \left(\frac{1}{R}+\varepsilon\right)^n(1+k)^n\left[\frac{1+k}{k}\theta\left(1+\frac{l}{R}+l\varepsilon\right)\right]^{kn},$$

et si ν ne prend que des valeurs telles que $\nu\geqq kn$, la limite supérieure de $\sqrt[n]{|\Delta_\nu^n| \frac{(n+\nu)!}{n!\,\nu!}\theta^\nu}$ sera au plus égale à

$$\frac{1+k}{R}\left(\frac{1+k}{R}\theta\frac{R+l}{k}\right)^k.$$

Posons

$$\left(\frac{1+k}{R}\right)^{1+k}\left(\theta\frac{R+l}{k}\right)^k = \frac{1}{A'},$$

où

$$R - \theta|l - R| \geq A' \geq R - \theta(l + R).$$

L'expression $(1+k)\mathrm{L}\frac{1+k}{R} + k\mathrm{L}\theta\frac{R+l}{k}$ a pour dérivée par rapport à k

$$\mathrm{L}\theta\frac{1+k}{k}\,\frac{R+l}{R},$$

qui est positif lorsque $k < \frac{R+l}{R-\theta(R+l)}$.

Quand k croît de zéro à cette valeur, $\left(\frac{1+k}{R}\right)^{1+k}\left(\theta\frac{l+R}{k}\right)^k$ croît de $\frac{1}{R}$ à $\frac{1}{R-\theta(R+l)}$; si k continue à croître, elle décroît et tend vers zéro pour $k=\infty$. Elle prend donc la valeur $\frac{1}{A'}$ pour deux valeurs k' et k'', l'une inférieure, l'autre supérieure à $\theta\frac{R+l}{R-\theta(R+l)}$. Lorsque ν ne prend que des valeurs non comprises entre $k'n$ et $k''n$, $\sqrt[n]{|\Delta_\nu^n| \frac{(n+\nu)!}{n!\,\nu!}\theta^\nu}$ a une limite supérieure au plus égale à $\frac{1}{A'}$. Donc si, lorsque ν reste compris entre $k'n$ et $k''n$, on trouve une limite supérieure égale à $\frac{1}{A'}$, ou plus grande, elle restera la même quel que soit ν.

En particulier, l'équation $\left(\frac{1+k}{R}\right)^{1+k}\left(\theta\frac{l+R}{k}\right)^k = \frac{1}{R-\theta|l-R|}$ a deux racines positives k' et k''; dans tous les cas, pourvu que $\theta < \frac{R}{R+l}$, il suffit, pour calculer A, de donner à ν des valeurs comprises entre $k'n$ et $k''n$. Il faut seulement remarquer que, si l'on trouvait ainsi une valeur plus grande que $R - \theta \,|\, l - R \,|$, on devrait prendre

$$A = R - \theta \,|\, l - R \,|$$

lorsque ν est arbitraire, car A ne peut pas dépasser cette valeur.

Si $l = R$, cette équation devient

$$(1 + k)^{1+k} \left(\frac{2\theta}{k}\right)^k = 1,$$

$k' = 0$ et k'' ne dépend que de θ et croît avec θ. Il suffit alors de faire varier ν entre 0 et kn, en prenant $\theta \leqq \frac{k}{2(1+k)^{1+\frac{1}{k}}}$, valeur qui est plus grande que $\frac{k}{2e(1+k)}$.

13. Nous allons appliquer les théories précédentes à un cas assez général où la série n'a qu'un point singulier sur la circonférence de convergence.

Supposons le rayon de convergence égal à 1. $\frac{L\,|a_n|}{n}$ aura pour limite supérieure zéro, pour $n = \infty$. Supposons, en outre, que a_n soit une fonction analytique $F(n)$, n'ayant aucun point singulier, autre que $n = \infty$, dans un espace limité par deux droites symétriques issues de O, qui forment avec OX des angles aigus, et extérieur à une circonférence de rayon fini. C'est-à-dire que le point $n = \rho e^{\omega i}$ ne sera jamais singulier pour $F(n)$ si $\rho > B$ et $|\omega| \leqq \alpha$, où $\sin\alpha = r < 1$, r et B étant fixes. Enfin, la fonction F est supposée telle que $\frac{L\,|F(\rho e^{\omega i})|}{\rho}$ ait pour limite supérieure zéro, pour $\rho = \infty$, ω prenant toutes les valeurs comprises entre $-\alpha$ et $+\alpha$.

Pourvu que n soit assez grand, et que $\frac{\nu}{n} \leqq r$, $a_{n+\nu}$ pourra se développer sous la forme

$$a_{n+\nu} = A_0 + A_1 \frac{\nu}{n} + \ldots + A_k \left(\frac{\nu}{n}\right)^k + \ldots,$$

où les coefficients A ne dépendent que de n. Représentons par D_h^k ce que devient Δ_h^n quand on y remplace $a_{n+\nu}$ par ν^k, en supposant $\lambda = 1$,

$$D_h^k = h^k - \frac{h}{1}(h-1)^k + \frac{h(h-1)}{1.2}(h-2)^k - \ldots + (-1)^{h-1}\frac{h}{1}1^k,$$

d'où l'on déduit

$$D_h^k = h(D_h^{k-1} + D_{h-1}^{k-1}),$$

$$D_h^1 = 0 \quad \text{si } h > 1, \qquad D_h^2 = h(D_h^1 + D_{h-1}^1) = 0 \quad \text{si } h > 2,$$

et, en général,

$$D_h^k = 0 \quad \text{si } h > k, \qquad D_h^h = h D_{h-1}^{h-1} = h!$$

Enfin, en laissant $k-h$ fixe, on obtient la relation

$$D_h^k = h!\left[1 + D_2^{k-h+1} + \frac{1}{2!}D_3^{k-h+2} + \frac{1}{3!}D_4^{k-h+3} + \ldots + \frac{1}{(h-1)!}D_h^{k-1}\right]$$

et

$$D_h^k > 0 \quad \text{si } k > h.$$

Soit M le maximum du module de $F(n + nre^{\omega i})$, où ω est arbitraire. Dans le développement de $a_{n+\nu}$, on a

$$|A_k|\, r^k \leqq M.$$

Si $h < rn$, on peut remplacer $a_{n+\nu}$ par son développement dans Δ_h^n, et l'on a

$$\Delta_h^n = A_h\frac{D_h^h}{n^h} + \frac{A_{h+1}}{n^{h+1}}D_h^{h+1} + \ldots,$$

$$|\Delta_h^n| < M\sum_{k=h}^{\infty}\frac{1}{(nr)^k}D_h^k = M\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{h}{nr}\right)^k - \frac{h}{1}\left(\frac{h-1}{nr}\right)^k + \ldots + (-1)^{h-1}\frac{h}{1}\left(\frac{1}{nr}\right)^k$$

$$= M\left[\frac{h}{nr-h} - \frac{h}{1}\,\frac{h-1}{nr-h+1} + \frac{h(h-1)}{1.2}\,\frac{h-2}{nr-h+2} - \ldots + (-1)^{h-1}\frac{h}{1}\,\frac{1}{nr-1}\right]$$

$$= M\frac{h!}{(nr-1)(nr-2)\ldots(nr-h)}.$$

Prenons $\theta \leqq \dfrac{r}{2(1+r)^{1+\frac{1}{r}}}$. Pour calculer A, il suffit de donner à ν des valeurs comprises entre o et $rn-1$, et

$$|\Delta_\nu^n|\frac{(n+\nu)!}{n!\nu!}\theta^\nu < M\theta^\nu\frac{(n+1)(n+2)\dots(n+\nu)}{(nr-1)(nr-2)\dots(nr-\nu)},$$

expression qui diminue, si ν augmente, lorsque $\nu < n\frac{r-\theta}{1+\theta}$, puis augmente avec ν; et qui sera maximum pour $\nu = 0$, ou lorsque

$$nr-1 \geqq \nu > nr-2.$$

Dans ce dernier cas, on a

$$|\Delta_\nu^n|\frac{(n+\nu)!}{n!\nu!}\theta^\nu \leqq M\theta^\nu\frac{(n+\nu)!}{n!\nu!} < M\theta^\nu\frac{(n+\nu)^{n+\nu}}{n^n\nu^\nu}$$
$$< M(1+r)^n\left(\theta\frac{n+nr-2}{nr-2}\right)^{nr-2} < M(1+r)^{\frac{2}{r}}\left[\frac{r}{2\left(r-\frac{2}{n}\right)}\right]^{nr-2} < M,$$

pourvu que n soit assez grand.

Comme $\frac{1}{\rho}L|F(\rho e^{\omega i})|$ a pour limite supérieure o, $\frac{LM}{n}$ a aussi pour limite supérieure o, pour $n=\infty$, et $A=1$. La série $\Sigma z^n F(n)$ n'a donc aucun point singulier, tel que

$$|z|-\theta|1-z|<1, \qquad \theta = \frac{r}{2(1+r)^{1+\frac{1}{r}}},$$

et $z=+1$ est le seul point singulier de la circonférence de convergence.

14. Ces conditions sont remplies si a_n est une fonction algébrique continue; c'est-à-dire si, à partir d'un rang fini, il existe entre n et a_n une relation algébrique entière, a_n représentant toujours la même branche de cette fonction où n croît d'une façon continue par des valeurs réelles.

Considérons encore la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n e^{n[-1+\cos(Ln)\alpha]} \qquad \text{où} \qquad 0<\alpha<1,$$

$(Ln)^\alpha$ représentant la valeur réelle et positive. a_n est une fonction de n qui n'a que les points singuliers o, 1, ∞. Si $n = \rho e^{\omega i}$, $\frac{L|F(\rho e^{\omega i})|}{\rho}$ est la partie réelle de

$$e^{\omega i}[-1 + \cos(L\rho + i\omega)^\alpha],$$

ou de

$$\cos\omega[-1 + \cos(L\rho)^\alpha] - 2e^{\omega i}\sin\frac{(L\rho + i\omega)^\alpha - (L\rho)^\alpha}{2}\sin\frac{(L\rho + i\omega)^\alpha + (L\rho)^\alpha}{2}.$$

Lorsque ρ devient infini, ω restant fini,

$$(L\rho + i\omega)^\alpha - (L\rho)^\alpha = \frac{\left(1 + \frac{i\omega}{L\rho}\right)^\alpha - 1}{\left(\frac{1}{L\rho}\right)^\alpha}$$

tend vers zéro.

Il en résulte que son sinus tend vers o et $\sin\frac{(L\rho + i\omega)^\alpha + (L\rho)^\alpha}{2}$ reste fini. La limite supérieure de $\frac{1}{\rho}L|F(\rho e^{\omega i})|$ pour $\rho = \infty$ est donc la même que celle de $\cos\omega[-1 + \cos(L\rho)^\alpha] \leqq 0$ si $|\omega| < \frac{\pi}{2}$.

La série précédente n'a donc que le point singulier $z = 1$ sur la circonférence de convergence. Soit une suite de termes tels que

$$e^{(2k\pi+\varepsilon)^{\frac{1}{\alpha}}} \leqq n \leqq e^{(2k\pi+2\pi-\varepsilon)^{\frac{1}{\alpha}}},$$

ε étant fixe et k augmentant indéfiniment. Pour ces termes, on a

$$\frac{L|a_n|}{n} = -1 + \cos(Ln)^\alpha < -1 + \cos\varepsilon.$$

La série qui ne contiendrait que ces termes, les autres étant nuls, aurait un rayon de convergence égal à

$$e^{1-\cos\varepsilon} > 1.$$

Si l'on supprime tous ces termes, en ne conservant que ceux tels que

$$e^{(2k\pi-\varepsilon)^{\frac{1}{\alpha}}} < n < e^{(2k\pi+\varepsilon)^{\frac{1}{\alpha}}},$$

on ne change pas les points singuliers de la circonférence de rayon 1. Si n et n' sont deux termes de deux groupes consécutifs, on a

$$\frac{n'}{n} > e^{(2k\pi+2\pi-\varepsilon)^{\frac{1}{\alpha}}-(2k\pi+\varepsilon)^{\frac{1}{\alpha}}} > e^{2\frac{\pi-\varepsilon}{\alpha}(2k\pi)^{\frac{1}{\alpha}-1}},$$

qui augmente indéfiniment avec k.

Quand on forme Δ_ν^n, pour calculer A, il suffit de prendre $\nu < nr$, si θ est assez petit; et les termes de deux groupes différents n'entreront jamais dans la même différence. Si l'on supprime un nombre quelconque de ces groupes de termes, on a donc encore une série qui n'a que le point singulier $z = 1$ sur la circonférence de rayon 1. Dans cette série, $a_n = 0$, sauf pour des suites de termes consécutifs tels que

$$2k\pi - \varepsilon < (\mathrm{L}n)^\alpha < 2k\pi + \varepsilon,$$

où k prend une suite de valeurs entières, en nombre infini.

On arrive au même résultat en partant de la série plus générale

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n \mathrm{F}(n) e^{n[-1+\cos(\mathrm{L}n)^\alpha]},$$

où $\mathrm{F}(n)$ remplit les conditions posées au n° **13**, et peut être une fonction rationnelle ou algébrique.

15. Ce dernier résultat peut être présenté sous une forme un peu générale. Soit la série

$$\Sigma a_n b_n z^n.$$

Soit

$$D_\nu^n = \lambda'^\nu a_{n+\nu} - \frac{\nu}{1}\lambda'^{\nu-1} a_{n+\nu-1} + \ldots + (-1)^\nu a_n,$$

$$d_\nu^n = \lambda''^\nu b_{n+\nu} - \frac{\nu}{1}\lambda''^{\nu-1} b_{n+\nu-1} + \ldots + (-1)^\nu b_n,$$

et

$$\Delta_\nu^n = \lambda^\nu a_{n+\nu} b_{n+\nu} - \frac{\nu}{1}\lambda^{\nu-1} a_{n+\nu-1} b_{n+\nu-1} + \ldots + (-1)^\nu a_n b_n$$

où $\lambda = \lambda'\lambda''$, λ' et λ'' pouvant être arbitraires. En remplaçant les b en fonction de leurs différences, on a

$$\Delta''_\nu = \lambda'^\nu D_0^{n+\nu} d''_\nu + \frac{\nu}{1}\lambda'^{\nu-1} D_1^{n+\nu-1} d''_{\nu-1} + \frac{\nu(\nu-1)}{1.2}\lambda'^{\nu-2} D_2^{n+\nu-2} d''_{\nu-2} + \ldots + D''_\nu d''_0.$$

Si $\sqrt[n]{|D''_\nu| \frac{(n+\nu)!}{n!\nu!}\theta'^\nu}$ a pour limite supérieure $\frac{1}{A'}$, pour $n=\infty$, $\frac{1}{A''}$ étant celle de $\sqrt[n]{|d''_\nu| \frac{(n+\nu)!}{n!\nu!}\theta''^\nu}$, pourvu que n soit assez grand, on aura

$$|D''_\nu| < \frac{n!\nu!}{(n+\nu)!}\left(\frac{1}{\theta'}\right)^\nu\left(\frac{1}{A'-\varepsilon}\right)^n, \qquad |d''_\nu| < \frac{n!\nu!}{(n+\nu)!}\left(\frac{1}{\theta''}\right)^\nu\left(\frac{1}{A''-\varepsilon}\right)^n$$

et

$$|\Delta''_\nu| < \sum_{\mu=0}^{\nu}\frac{\nu!}{\mu!(\nu-\mu)!}|\lambda'|^\mu |D_{\nu-\mu}^{n+\mu} d''_\mu|$$
$$< \frac{n!\nu!}{(n+\nu)!}\frac{1}{(A'-\varepsilon)^n(A''-\varepsilon)^n}\left(\frac{1}{\theta'}\right)^\nu \sum_{\mu=0}^{\nu}\left|\frac{\lambda'\theta'}{\theta''(A'-\varepsilon)}\right|^\mu.$$

Si $|\lambda'|\theta' < A'\theta''$, et si ε est assez petit, on aura

$$|\Delta''_\nu|\frac{(n+\nu)!}{n!\nu!}\theta'^\nu < \frac{1}{(A'A''-2\varepsilon)^n\left[1-\frac{|\lambda'|\theta'}{\theta''(A'-\varepsilon)}\right]};$$

$\sqrt[n]{|\Delta''_\nu|\frac{(n+\nu)!}{n!\nu!}\theta'^\nu}$ a alors une limite supérieure au plus égale à $\frac{1}{A'A''}$, de sorte que $A \geqq A'A''$ pour $\theta = \theta'$.

Supposons $|\lambda'|$ et $|\lambda''|$ égaux aux rayons de convergence R', R'' des deux séries $\Sigma a_n z^n$, $\Sigma b_n z^n$. Si la seconde série n'a, sur sa circonférence de convergence, qu'un point singulier $z=\lambda''$, supposé isolé, on aura

$$A'' = R'',$$

pourvu que θ'' soit assez petit. Si $z = -\lambda'$ n'est pas un point singulier de la première série, on a

$$A' > R'(1 - 2\theta'),$$

pourvu que θ' soit assez petit. On peut supposer $\theta'' > \frac{\theta'}{1 - 2\theta'}$ et $\theta = \theta'$; alors $A \geqq A'A'' > R'R''(1 - 2\theta')$, et le point $z = -\lambda'\lambda''$ n'est pas un point singulier pour la série $\Sigma a_n b_n z^n$.

On a toujours $R \geqq R'R''$, et s'il y a des valeurs de n telles que $\sqrt[n]{|a_n|}$ et $\sqrt[n]{|b_n|}$ tendent en même temps vers $\frac{1}{R'}$ et $\frac{1}{R''}$, $R = R'R''$. Si la série $\Sigma b_n z^n$ n'a que le point singulier $z = 1$ sur la circonférence de convergence de rayon $R'' = 1$, un point $z = R'e^{\omega i}$ non singulier pour la série $\Sigma a_n z^n$ ne peut pas être singulier pour $\Sigma a_n b_n z^n$. Mais un point singulier de la première série peut n'être pas singulier pour la seconde. Si les deux séries $\sum b_n z^n$ et $\sum \frac{1}{b_n} z^n$ n'ont que le point singulier $z = 1$ sur leurs circonférences de convergence, les deux séries $\Sigma a_n z^n$, $\Sigma a_n b_n z^n$ auront les mêmes points singuliers sur leurs circonférences de convergence.

Si les deux séries $\Sigma a_n z^n$, $\Sigma b_n z^n$ n'ont chacune qu'un point singulier, λ', λ'', sur leurs circonférences de convergence, la série $\Sigma a^n b_n z^n$ ne peut avoir que le point singulier $\lambda'\lambda''$ sur la circonférence de rayon $R'R''$; et, si $R = R'R''$, ce point est singulier.

16. Supposons $R = 1$, et $\lambda = e^{\gamma i}$. Si $A = 1$, $z = e^{\gamma i}$ est le seul point singulier de la circonférence de convergence. Si $A = 1 - 2\theta$, $z = e^{(\pi+\gamma)i}$ est singulier; si $A > 1 - 2\theta$, ce point n'est pas singulier.

Supposons maintenant que $\sqrt[n]{|\Delta_\nu^n| \frac{(n+\nu)!}{n!\,\nu!} \theta_1^\nu}$ ait pour limite supérieure 1, pour $n = \infty$, lorsque n prend une suite illimitée de valeurs particulières, ν prenant toutes les valeurs entières pour chacune de ces valeurs de n. On a, pour ces valeurs,

$$|\Delta_\nu^n| \frac{(n+\nu)!}{n!\,\nu!} \theta_1^\nu < (1 + \varepsilon)^n,$$

où ε est aussi petit que l'on voudra, pourvu que n soit assez grand.

Soit $\lambda' = e^{\gamma' i}$; représentons par $\Delta_\nu(e^{\gamma' i})$, ou Δ'_ν, ce que devient Δ''_ν, quand λ y est remplacé par λ'. On a

$$\lambda^\nu a_{n+\nu} = \Delta''_0 + \frac{\nu}{1}\Delta''_1 + \frac{\nu(\nu-1)}{1.2}\Delta''_2 + \ldots + \Delta''_\nu,$$

$$\Delta'_\nu = \lambda'^\nu a_{n+\nu} - \frac{\nu}{1}\lambda'^{\nu-1} a_{n+\nu-1} + \ldots + (-1)^\nu a_n,$$

d'où l'on déduit

$$\lambda^\nu \Delta'_\nu = \Delta''_0(\lambda'-\lambda)^\nu + \frac{\nu}{1}\Delta''_1\lambda'(\lambda'-\lambda)^{\nu-1} + \frac{\nu(\nu-1)}{1.2}\Delta''_2\lambda'^2(\lambda'-\lambda)^{\nu-2} + \ldots + \Delta''_\nu\lambda'^\nu.$$

Si, n étant fixe et ν arbitraire, on suppose que

$$|\Delta''_\nu|\frac{(n+\nu)!}{n!\,\nu!}\theta^\nu < (1+\varepsilon)^n,$$

il en résulte

$$|\Delta'_\nu|\frac{(n+\nu)!}{n!\,\nu!}\theta^\nu < (1+\varepsilon)^n \sum_{\mu=0}^{\nu}\frac{(n+\nu)!}{(n+\mu)!(\nu-\mu)!}\theta^{\nu-\mu}|\lambda'-\lambda|^{\nu-\mu} < (1+\varepsilon)^n[1+\theta|\lambda'-\lambda|]^{n+\nu}.$$

Soit $\theta' = \dfrac{\theta}{1+\theta|\lambda'-\lambda|}$ où $\theta \leqq \theta_1$; en ne donnant à n que la suite de valeurs que nous avons considérées, $\sqrt[n]{|\Delta'_\nu|\dfrac{(n+\nu)!}{n!\,\nu!}\theta'^\nu}$ aura, pour $n=\infty$, une limite supérieure au plus égale à

$$1+\theta|\lambda'-\lambda| = \frac{1}{1-\theta'|\lambda'-\lambda|} < \frac{1}{1-2\theta'\cos\frac{\alpha}{2}}$$

si $\alpha - \pi < \gamma' - \gamma < \pi - \alpha$.

Donnons maintenant à γ' les valeurs $2k\frac{\pi}{N}$; on a

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{-kh\frac{2\pi i}{N}}\Delta_\nu\left(e^{2k\frac{\pi i}{N}}\right) = N\sum_\mu(-1)^{\nu-\mu}\frac{\nu!}{\mu!(\nu-\mu)!}a_{n+\mu},$$

où μ ne prend que les valeurs de la forme $h + k\mathrm{N}$ comprises entre 0 et ν. Si $\mathrm{N} > \frac{\nu}{2}$, $\nu - \mathrm{N} < h < \mathrm{N}$, on a

$$\frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1} e^{-hk\frac{2\pi i}{\mathrm{N}}} \Delta_\nu\left(e^{2k\frac{\pi i}{\mathrm{N}}}\right) = (-1)^{\nu-h} \frac{\nu!}{h!(\nu-h)!} a_{n+h}.$$

Supposons que le point $z = e^{\gamma i}$ ne soit pas singulier. On peut trouver une quantité positive β, assez petite pour qu'il n'y ait aucun point singulier tel que $|z| - \theta\,|e^{(\pi+\gamma)i} - z| < 1 - 2\theta + \beta$; car, si β est assez petit, ceux de ces points qui sont hors du cercle de convergence seront aussi voisins que l'on voudra de $z = e^{\gamma i}$. On peut même trouver un arc α, tel qu'il n'y ait aucun point singulier vérifiant l'inégalité

$$|z| - \theta\,|e^{\gamma' i} - z| < 1 - 2\theta + \beta$$

si $+\alpha > \gamma' - \gamma - \pi > -\alpha$; alors, la limite supérieure de

$$\sqrt[n]{|\Delta'_\nu| \frac{(n+\nu)!}{n!\,\nu!} \theta^\nu}$$

sera au plus égale à $\frac{1}{1-2\theta+\beta}$; et, si γ' n'est pas compris entre $\pi + \gamma \pm \alpha$, n ne prenant que les valeurs considérées, $\sqrt[n]{|\Delta'_\nu \frac{(n+\nu)!}{n!\,\nu!} \theta'^\nu}$ aura une limite supérieure au plus égale à $\frac{1}{1 - 2\theta' \cos\frac{\alpha}{2}}$, où θ' peut être fixe, pourvu que $\theta \leqq \frac{\theta_1}{1+2\theta_1}$. Alors, quel que soit λ', $\sqrt[n]{|\Delta'_\nu| \frac{(n+\nu)!}{n!\,\nu!} \theta'^\nu}$ aura, pour ces valeurs de n, une limite supérieure plus petite que $\frac{1}{1-2\theta'}$, de même que $\sqrt[n]{|a_{n+h}| \frac{(n+\nu)!}{n!\,h!(\nu-h)!} \theta'^\nu}$.

$\frac{(n+\nu)!}{n!\,\nu!} n^n \nu^\nu$ étant le plus grand terme du développement de $(n+\nu)^{n+\nu}$, on a

$$\frac{(n+\nu)!}{n!\,\nu!} > \frac{1}{n+\nu+1} \frac{(n+\nu)^{n+\nu}}{n^n \nu^\nu},$$

$$\frac{(n+\nu)^{n+\nu}}{n^n h^h (\nu-h)^{\nu-h}} > \frac{(n+\nu)!}{n!\,\nu!} \frac{\nu!}{h!(\nu-h)!} > \frac{1}{(n+\nu+1)(\nu+1)} \frac{(n+\nu)^{n+\nu}}{n^n h^h (\nu-h)^{\nu-h}}.$$

Supposons que ν et h varient avec n, de façon que $\frac{\nu}{n}$ ait pour limite $\frac{2\theta'}{1-2\theta'}$, $\frac{h}{\nu}$ tendant vers $\frac{1}{2}$ $\sqrt[n]{\frac{(n+\nu)!}{n!\,h!\,(\nu-h)!}\theta'^{\nu}}$ aura pour limite $\frac{1}{1-2\theta'}$, et $\sqrt[n]{|a_{n+h}|}$ aura une limite supérieure plus petite que 1. Pour que $\theta' \leqq \frac{\theta_1}{1+2\theta_1}$, il suffit que $\frac{h}{n}$ ait une limite positive égale à $\frac{\theta'}{1-2\theta'} \leqq \theta_1$.

Donc, si $\sqrt[n+h]{|a_{n+h}|}$ a pour limite supérieure 1, lorsque n ne prend que les valeurs particulières considérées, et $n\varepsilon < h < n\theta_1$, où ε est fixe, le point $z = e^{\gamma i}$ est singulier.

Supposons maintenant que, à chaque valeur de n, corresponde un arc γ; on forme Δ_ν^n, où ν est arbitraire, $\lambda = e^{\gamma i}$ variant avec n, qui prend toutes les valeurs entières. Supposons que, dans ces conditions, $\sqrt[n]{|\Delta_\nu^n|\frac{(n+\nu)!}{n!\,\nu!}\theta^{\nu}}$ ait pour limite supérieure 1, pour $n=\infty$. Si un arc ω est tel que, pourvu que n soit assez grand, aucun des arcs γ ne soit compris entre $\omega-\alpha$ et $\omega+\alpha$, en prenant $\lambda = e^{\gamma i}$, $\lambda' = e^{(\pi+\omega)i}$, et θ' assez petit, on voit que la limite supérieure de $\sqrt[n]{|\Delta'_\nu|\frac{(n+\nu)!}{n!\,\nu!}\theta'^{\nu}}$ est au plus égale à $\frac{1}{1-2\theta'\cos\frac{\alpha}{2}} < \frac{1}{1-2\theta'}$, et $z = e^{\omega i}$ n'est pas singulier.

Les seuls points de la circonférence de convergence, qui peuvent être singuliers, sont ceux dont les arguments sont les limites de γ. Tous ces points limites sont singuliers, si $\sqrt[n]{|a_n|}$ tend vers 1, pour une suite de valeurs $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$ telles que $\frac{n_{k+1}-n_k}{n_k}$ reste plus petit qu'une quantité inférieure à θ. Dans tous les cas, un point $e^{\omega i}$ est singulier si l'on peut trouver une suite de valeurs de n telles que γ tende vers ω, pour $n=\infty$, $\sqrt[n+\nu]{|a_{n+\nu}|}$ ayant pour limite supérieure 1, pour ces valeurs infinies de n, lorsque $n\varepsilon < \nu < \theta n$.

17. Soit la série $\Sigma z^n e^{i n(\varphi n)}$, où $\varphi(n)$ est réel lorsque n est entier; $\varphi(z)$ étant une fonction analytique qui n'a aucun point singulier, à distance finie, $z = \rho e^{\omega i}$ tel que $\rho > \beta$, $|\omega| < \alpha$. Supposons en outre que $\rho\varphi'(\rho e^{\omega i})$ tende vers zéro lorsque ρ devient infini, pourvu que $|\omega| < \alpha$.

Pour chaque valeur de n, prenons $\lambda = e^{-i\varphi(n)}$. Alors $|\Delta_\nu^n|$ aura la même valeur que lorsque $a_{n+\nu}$ est remplacé par $a'_{n+\nu} = e^{i(n+\nu)[\varphi(n+\nu)-\varphi(n)]}$, avec $\lambda = 1$. On peut alors développer $a'_{n+\nu}$ suivant les puissances de $\frac{\nu}{n}$, comme au n° 13, si $\frac{\nu}{n} < r = \sin\alpha$. Soit

$$F(n+\nu) = e^{i(n+\nu)[\varphi(n+\nu)-\varphi(n)]},$$

si $n+\nu = \rho e^{\omega i}$, $\left|\frac{\nu}{n}\right| < r$, $\frac{\mathrm{L}|F(\rho e^{\omega i})|}{\rho} < |\varphi(n+\nu) - \varphi(n)|$ qui tend vers o, ainsi que $\rho\varphi'(\rho e^{\omega i})$. Les points singuliers de la série situés sur la circonférence de convergence ont alors pour arguments les limites de $-\varphi(n)$.

Par exemple, si $\varphi(n) = \alpha(\mathrm{L}n)^\theta$, on a

$$\rho\varphi'(\rho e^{\omega i}) = \frac{\alpha\theta}{e^{\omega i}(\mathrm{L}\rho + i\omega)^{1-\theta}},$$

qui tend vers zéro si $\theta < 1$. Comme $\varphi(n)$ augmente indéfiniment avec n, tous les points de la circonférence sont singuliers.

Si $\varphi(n) = \alpha\sin(\mathrm{L}n)^\theta$, où $0 < \theta < 1$, tous les points compris entre les arcs $-\alpha$ et $+\alpha$ sont singuliers. Si $\alpha < \pi$, les autres points de la circonférence de convergence ne sont pas singuliers.

On arrive au même résultat pour la série $\Sigma a_n z^n e^{in\varphi(n)}$ si les deux séries $\sum a_n z^n$, $\sum \frac{1}{a_n} z^n$ n'ont que le point singulier $z = 1$ sur leur circonférence de convergence; ou encore si a_n est une fonction analytique remplissant les conditions indiquées au n° 13.

18. Dans la série $f(z) = \sum a_n z^n$, posons $\frac{z}{z-\lambda} = x$.

$$\begin{aligned}\left(1 - \frac{z}{\lambda}\right)f(z) &= -\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\lambda x)^n (x-1)^{-n-1} \\ &= \sum x^n\left(a_0 - \frac{n}{1}\lambda a_1 + \frac{n(n-1)}{1.2}\lambda^2 a_2 + \ldots + (-1)^n a_n \lambda^n\right) \\ &= \sum (-x)^n \Delta_n^0.\end{aligned}$$

Représentons par $\Delta_\nu'^n$ les différences des coefficients de cette fonction de x, pour $\lambda = 1$. On a

$$\Delta_\nu'^n = (-1)^{n+\nu}\left[\Delta_{n+\nu}^0 + \frac{\nu}{1}\Delta_{n+\nu-1}^0 + \frac{\nu(\nu-1)}{1.2}\Delta_{n+\nu-2}^0 + \ldots + \Delta_n^0\right];$$

or

$$\lambda\Delta_\nu^{n+1} = \Delta_\nu^n + \Delta_{\nu+1}^n,$$

et l'on en déduit

$$\lambda^\mu\Delta_\nu^{n+\mu} = \Delta_\nu^n + \mu\Delta_{\nu+1}^n + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}\Delta_{\nu+2}^n + \ldots + \Delta_{\nu+\mu}^n$$

et

$$\Delta_\nu'^n = (-1)^{n+\nu}\lambda^\nu\Delta_n^\nu.$$

Appliquons à la fonction $\left(1 - \frac{z}{\lambda}\right)f(z)$, développée suivant les puissances de x, les théorèmes précédemment démontrés. $x = \infty$ correspond à $z = \lambda$, $x = 1$ à $z = \infty$. La condition $|z| - \theta|\lambda - z| < A$ est équivalente à $|x| - \frac{A}{|\lambda|}|1 - x| < \theta$. En permutant n et ν, on obtient les résultats suivants :

Si $\sqrt[\nu]{|\Delta_\nu'^n|\frac{(n+\nu)!}{n!\,\nu!}A^n}$, où n est arbitraire, a, pour $\nu = \infty$, une limite supérieure finie $\frac{1}{\theta}$, il n'y a aucun point singulier tel que

$$|z| - \theta|\lambda - z| < A,$$

et il y en a au moins un tel que $|z| - \theta|\lambda - z| = A$.

Si $|\lambda| = R$, et si $\theta > 0$ pour $A > R$, le point $z = \lambda$ est un pôle; il n'y a aucun autre point singulier sur la circonférence de convergence, et même dans un cercle de rayon $\frac{A - \theta R}{1 - \theta}$, si $\theta < 1$. Si $\theta = 1$, il ne peut y avoir aucun point singulier autre que $z = \infty$, et le pôle $z = \lambda$.

19. Si $|\lambda| = R = 1$, $\theta < \frac{1}{2}$, et si la limite supérieure, pour $n = \infty$, de $\sqrt[n]{|\Delta_\nu'^n|\frac{(n+\nu)!}{n!\,\nu!}\theta^\nu}$ est $\frac{1}{1-2\theta}$, le point $z = -\lambda$ est singulier.

Supposons ν pair, soit $\nu = 2\mu$ et $n + \mu = m$. Dans $\Delta_\nu'^n$, le plus grand coefficient est celui du terme moyen $\frac{(2\mu)!}{(\mu!)^2}$. Prenons $\lambda = -1$, et mettons ce coefficient maximum en facteur, en posant

$$\varphi_m = a_m + \frac{\mu}{\mu+1}(a_{m+1} + a_{m-1}) + \frac{\mu(\mu-1)}{(\mu+1)(\mu+2)}(a_{m+2} + a_{m-2}) + \ldots + \frac{(\mu!)^2}{(2\mu)!}(a_{m+\mu} + a_{m-\mu}),$$

on a

$$\Delta_\nu^n = \frac{(2\mu)!}{(\mu!)^2}\varphi_m.$$

Or,

$$\frac{(n+2\mu)^{n+2\mu}}{n^n(\mu)^{2\mu}} > \frac{(n+2\mu)!}{n!\,\mu!\,\mu!} > \frac{1}{(n+2\mu+1)(2\mu+1)}\,\frac{(n+2\mu)^{n+2\mu}}{n^n\mu^{2\mu}},$$

et, si μ varie avec n, de façon que $\frac{\mu}{n}$ tende vers $\frac{\theta}{1-2\theta}$, ou $\frac{\mu}{m}$ vers $\frac{\theta}{1-\theta}$, $\sqrt[n]{\frac{(n+2\mu)!}{n!\,\mu!\,\mu!}\theta^{2\mu}}$ a pour limite $\frac{1}{1-2\theta}$.

Si, pour une suite de valeurs de m, $\sqrt[m]{|\varphi_m|}$ a pour limite supérieure 1, $\sqrt[n]{|\varphi_m|}$ aura la même limite supérieure, et $\sqrt[n]{\Delta_\nu^n \frac{(n+\nu)!}{n!\,\nu!}\theta^\nu}$ aura pour limite supérieure $\frac{1}{1-2\theta}$, et cela quel que soit n, car $A \geqq 1 - 2\theta$. Comme θ est arbitraire, on voit que, dans φ_m, μ est un nombre entier arbitraire, qui varie avec m, pourvu que $\frac{\mu}{m}$ ne tende pas vers o. Si alors $\sqrt[m]{|\varphi_m|}$ a pour limite supérieure 1, le point $z = 1$ est singulier.

Cette fonction φ_m peut remplacer celle que j'avais introduite dans les deux Mémoires déjà cités, et permet de retrouver tous les résultats auxquels j'ai été conduit précédemment.