JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LE ROUX

Sur les équations linéaires aux dérivées partielles

Journal de mathématiques pures et appliquées 5e série, tome 4 (1898), p. 359-408.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1898_5_4__359_0>

Sur les équations linéaires aux dérivées partielles;

Par M. J. LE ROUX,
Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Montpellier.

Introduction.

La plupart des propriétés des équations linéaires du second ordre, à deux variables indépendantes, peuvent s'étendre sans difficulté aux équations d'ordre supérieur. Guidé par cette idée j'avais déjà, dans ma Thèse, déposée au commencement de mars 1893 à la Faculté des Sciences de Paris, rédigé quelques-unes des démonstrations de manière à les rendre immédiatement applicables aux équations d'un ordre quelconque.

Je reprends, dans ce travail, l'étude générale des équations linéaires à deux variables indépendantes. Laissant de côté le problème de l'intégration sous forme finie, qui concerne seulement des cas très intéressants sans doute, mais tout à fait exceptionnels, j'ai cherché surtout à déterminer les principales propriétés analytiques des intégrales. Tel est le théorème sur la nature des courbes singulières accidentelles. La démonstration que j'en avais donnée dans ma Thèse exigeait quelques restrictions dans la forme des singularités. Je donne ici une démonstration nouvelle pour laquelle je me suis servi d'une idée ingénieuse de M. Delassus : la notion du *domaine d'un arc de courbe* que j'ai étendue au cas des variables complexes. Pour la détermination des intégrales sur les caractéristiques, j'ai démontré un théorème général permettant d'étendre aux équations d'ordre supérieur au second la notion des *intégrales principales* dans le cas des caractéristiques simples et même des caractéristiques multiples lorsque certaines conditions se trouvent réalisées. On peut obtenir ainsi une représentation des intégrales qui met en évidence leurs propriétés analytiques les plus importantes.

Il existe des cas où l'équation admet des intégrales particulières de la forme que j'ai appelée *la forme d'Euler*, s'exprimant linéairement à l'aide d'une fonction arbitraire d'une variable caractéristique et des dérivées de cette fonction en nombre déterminé. La méthode des intégrales principales, en mettant ce fait en évidence, permet en outre de reconnaître, par un nombre limité d'opérations, si ces intégrales particulières existent, et conduit directement à leur détermination effective.

On obtient des indications intéressantes sur la forme des singularités accidentelles lorsque la solution est donnée complètement par des intégrales principales; on reconnaît ainsi, par exemple, que dans le voisinage d'une caractéristique singulière accidentelle, l'intégrale ne peut pas, en général, être uniforme.

Comme dans le cas des équations du second ordre à caractéristiques distinctes, la connaissance d'une seule intégrale particulière dépendant d'un paramètre permettra d'obtenir, dans certains cas, soit l'intégrale générale de l'équation, soit une autre intégrale dépendant d'une ou de plusieurs fonctions arbitraires.

Tels sont les principaux résultats que j'ai établis dans ce travail.

La bienveillance avec laquelle on a accueilli mon Mémoire sur les équations du second ordre m'engage à publier encore cette étude, malgré les nombreuses lacunes qu'elle présente.

PREMIÈRE PARTIE.

1. Soit $D(z) = 0$ une équation linéaire aux dérivées partielles d'ordre n, à deux variables indépendantes, x et y

$$(1) \qquad D(z) = \Sigma A_{ik} \frac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i \partial y^k} \qquad i + k \leqq n.$$

Désignons par $\Delta(z)$ l'ensemble des termes qui contiennent les dérivées partielles d'ordre n

$$(2) \qquad \Delta(z) = A_{n,0}\frac{\partial^n z}{\partial x^n} + A_{n-1,1}\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1}\partial y} + \ldots + A_{0,n}\frac{\partial^n z}{\partial y^n},$$

et par $D_1(z)$ l'ensemble des termes qui ne contiennent pas ces dérivées.

L'équation

$$(3) \quad \begin{cases} A_{n,0}\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^n + A_{n-1,1}\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^{n-1}\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \qquad + A_{n-2,2}\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^{n-2}\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \ldots + A_{0,n}\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^n = 0 \end{cases}$$

admet n intégrales distinctes ou non

$$\varphi_1, \quad \varphi_2, \quad \ldots, \quad \varphi_n.$$

On sait que les courbes $\varphi_i =$ const. s'appellent les *caractéristiques* de l'équation (1).

En posant $\frac{\partial\varphi}{\partial x} : \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -u$ on a, pour déterminer u, l'équation

$$A_{n,0}u^n - A_{n-1,1}u^{n-1} + A_{n-2,2}u^{n-2} + \ldots + (-1)^n A_{0,n} = 0.$$

Soit u_i la racine qui correspond à la fonction φ_i; si u_i est une racine multiple d'ordre p (les variables x et y étant supposées quelconques), nous dirons que φ_i est une variable caractéristique d'ordre p, et les courbes $\varphi_i =$ const. seront des caractéristiques d'ordre p.

2. D'après le théorème fondamental de Cauchy on sait qu'une intégrale analytique de l'équation (1) se trouve déterminée, dans un certain domaine, lorsqu'on donne, sur une courbe analytique quelconque (C), les valeurs de l'intégrale et de ses $n-1$ premières *dérivées extérieures*. Cette expression de *dérivée extérieure* m'a paru commode pour exprimer le fait suivant. Supposons qu'on exprime les coordonnées des points du plan à l'aide de deux paramètres α et β, et que la courbe analytique (C) soit représentée par $\beta = \beta_0$. Les valeurs des données initiales sur cette courbe sont des fonctions de α. Or il est évident que la connaissance de z sur (C) entraîne celle de toutes ses dérivées, prises par rapport à la seule variable α, dérivées relatives à des déplacements effectués sur la courbe; mais les dérivées $\frac{\partial z}{\partial \beta}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial \beta^2}$, $\ldots$, relatives à des déplacements extérieurs, restent entièrement inconnues; ce sont ces dérivées que j'appelle *extérieures*.

Quand on connaît les valeurs de z et de ses $n-1$ premières dérivées extérieures, toutes les dérivées, jusqu'à l'ordre $n-1$ inclusivement, se trouvent déterminées en tout point de la courbe (C). L'équation considérée, jointe aux conditions initiales, permet de calculer les autres.

Posons $z_{ik} = \frac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i \partial y^k}$, et considérons un déplacement (dx, dy) effectué sur (C); nous avons

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l} dz_{n-1,0} = z_{n,0}\,dx + z_{n-1,1}\,dy, \\ dz_{n-2,1} = \ldots\ldots + z_{n-1,1}\,dx + z_{n-2,2}\,dy, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ dz_{0,n-1} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + z_{1,n-1}\,dx + z_{0,n}\,dy, \end{array}\right.$$

$$(5)\quad A_{n,0} z_{n,0} + A_{n-1,1} z_{n-1,1} + \ldots + A_{0,n} z_{0,n} + D_1(z) = 0.$$

Le déterminant des inconnues $z_{n,0}$, $z_{n-1,1}$, $\ldots$, $z_{0,n}$ est

$$\Delta = \begin{vmatrix} dx & dy & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & dx & dy & 0 & \ldots & \ldots & .. \\ .. & \ldots & \ldots & .. & \ldots & \ldots & .. \\ 0 & 0 & \ldots & .. & \ldots & dx & dy \\ A_{n,0} & A_{n-1,1} & \ldots & \ldots & \ldots & A_{1,n-1} & A_{0,n} \end{vmatrix}.$$

C'est le résultat obtenu en éliminant $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ entre les deux équations

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy = 0,$$

$$\Sigma A_{ik}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^i\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^k = 0; \qquad i + k = n.$$

Donc Δ s'annule seulement aux points où la courbe (C) touche une caractéristique, à moins que les coefficients $A_{ik}(i + k = n)$ ne s'annulent simultanément. Les points où cette dernière circonstance se présente sont des points singuliers que l'on peut provisoirement écarter. Nous sommes donc conduits, par la simple discussion des équations (3), à la considération des caractéristiques dont le rôle est si important dans la théorie des équations linéaires.

Lorsqu'on a $\Delta \neq 0$ le système (3) est déterminé. Il existe, pour les dérivées d'ordre n, un seul système de valeurs au point considéré de la courbe (C); les dérivées d'ordre supérieur à n sont déterminées dans les mêmes conditions; en effet, il est facile de voir que le déterminant du système d'équations linéaires auquel on est conduit pour calculer les dérivées d'ordre $n + p$ est égal à la puissance $(p + 1)^{\text{ième}}$ de Δ. On peut d'ailleurs calculer toutes les dérivées d'ordre supérieur par groupes de $n + 1$ au moyen d'équations linéaires dont le déterminant est toujours Δ; tel serait, par exemple, le groupe des dérivées d'ordre n de z_{ij}

$$\frac{\partial^n z_{ij}}{\partial x^n}, \quad \frac{\partial^n z_{ij}}{\partial x^{n-1}\partial y}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^n z_{ij}}{\partial y^n}.$$

Les valeurs ainsi calculées pour les dérivées des différents ordres conduisent à un développement convergent, d'après le théorème de Cauchy. On aperçoit donc cette propriété que, dans le voisinage de tout point de la courbe analytique (C), l'intégrale existera et sera holomorphe, sauf aux points qui satisfont à l'une des conditions suivantes :

1° La courbe (C) y est tangente à une caractéristique;

2° Les coefficients de toutes les dérivées d'ordre supérieur s'y annulent;

3° Les fonctions initiales ou les coefficients de l'équation n'y sont pas holomorphes.

3. Lorsque Δ s'annule, les équations (4) deviennent incompatibles, à moins qu'il n'existe entre les données initiales une certaine relation. Supposons, par exemple, $dy \neq 0$, et prenons comme déterminant principal celui qu'on obtient en supprimant dans Δ la première colonne et la dernière ligne; ce mineur est égal à dy^n. Le déterminant caractéristique correspondant est

$$\begin{vmatrix} dz_{n-1,0} & dy & 0 & \dots & \dots & 0 \\ dz_{n-2,1} & dx & dy & \dots & \dots & 0 \\ dz_{n-3,2} & 0 & dx & dy & \dots & 0 \\ \dots\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ dz_{0,n-1} & 0 & \dots & 0 & dx & dy \\ -D_1(z) & A_{n-1,1} & A_{n-2,2} & \dots & \dots & A_n \end{vmatrix} = \delta.$$

En l'égalant à zéro, on exprime simplement que les données doivent satisfaire à l'équation considérée.

Dans le cas de l'incompatibilité, l'intégrale n'étant plus, en général, développable, admet pour points singuliers les points où Δ s'annule, par exemple les points de contact de (C) avec une caractéristique. Lorsque la courbe (C) est elle-même une caractéristique, les n fonctions initiales ne peuvent plus être choisies arbitrairement, car elles doivent satisfaire à la condition $\delta = 0$; mais, dans ce cas, les équations forment un système indéterminé et l'intégrale ne se trouve pas complètement définie.

Nous étudierons ce cas plus loin.

4. Les calculs précédents peuvent s'étendre sans grandes modifications aux équations non linéaires à deux variables indépendantes.

Considérons une équation d'ordre n

$$(6) \qquad f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \dots, \frac{\partial^n z}{\partial x^n}, \frac{\partial^n z}{dx^{n-1}dy}, \dots\right) = 0.$$

Posons

$$(7)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^{\alpha+\beta} z}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} = p_{\alpha,\beta}, \qquad \dfrac{\partial f}{\partial p_{\alpha,\beta}} = \mathrm{P}_{\alpha,\beta}, \\ \left.\begin{aligned} \left(\dfrac{d}{dx}\right) &= \dfrac{\partial}{\partial x} + p_{1,0}\dfrac{\partial}{\partial z} + \sum p_{i+1,k}\dfrac{\partial}{\partial p_{i,k}} \\ \left(\dfrac{d}{dy}\right) &= \dfrac{\partial}{\partial y} + p_{0,1}\dfrac{\partial}{\partial z} + \sum p_{i,k+1}\dfrac{\partial}{\partial p_{i,k}} \end{aligned}\right\} i+k \leqq n-1. \end{cases}$$

Lorsqu'on donne sur une courbe (C) les valeurs de z et de ses $n-1$ premières dérivées extérieures, toutes les dérivées, jusqu'à l'ordre $n-1$ inclusivement se trouvent déterminées; pour calculer les dérivées d'ordre n, il faut joindre à l'équation (6) le système des n équations (4). Si le déterminant fonctionnel du système ainsi formé par rapport aux dérivées inconnues n'est pas identiquement nul, il y aura au moins un système de solutions. Ce déterminant fonctionnel est

$$\Delta = \begin{vmatrix} dx & dy & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & dx & dy & \dots & 0 & 0 \\ .. & \dots & \dots & \dots & .. & .. \\ 0 & 0 & \dots & \dots & dx & dy \\ \mathrm{P}_{n,0} & \mathrm{P}_{n-1,1} & \dots & \dots & \mathrm{P}_{1,n-1} & \mathrm{P}_{0,n} \end{vmatrix}$$
$$= \mathrm{P}_{0,n}dx^n - \mathrm{P}_{1,n-1}dx^{n-1}dy + \mathrm{P}_{2,n-2}dx^{n-2}dy^2 + \dots + (-1)^n \mathrm{P}_{n,0}dy^n.$$

Il s'annule quand $\dfrac{dy}{dx} = m$ est racine de *l'équation caractéristique*

$$(8)\qquad \mathrm{P}_{n,0}m^n - \mathrm{P}_{n,1}m^{n-1} + \mathrm{P}_{n,2}m^{n-2} + \dots + (-1)^n \mathrm{P}_{n,0} = 0.$$

3. Cherchons maintenant à calculer les dérivées d'ordre supérieur à n.

Nous avons, pour un déplacement effectué sur la courbe (C),

$$(\mathrm{A})\quad \begin{cases} dp_{n,0} = p_{n+1,0}dx + p_{n,1}dx, \\ dp_{n-1,1} = \dots\dots\dots + p_{n,1}dx + p_{n-1,2}dy, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ dp_{1,n-1} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots + p_{2,n}dx + p_{1,n}dy. \end{cases}$$

et

$$(A') \quad \begin{cases} dp_{n-1,1} = p_{n,1}\,dx + p_{n-1,2}\,dy, \\ dp_{n-2,2} = \ldots\ldots + p_{n-1,2}\,dx + p_{n-2,3}\,dy, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ dp_{0,n} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + p_{1,n}\,dx + p_{0,n+1}\,dy. \end{cases}$$

Le système (A) contient toutes les dérivées de $\frac{dz}{dx}$ et le système (A′) contient les dérivées de $\frac{dz}{dy}$.

D'autre part, la différentiation de l'équation (6) donne

$$(B) \qquad \left(\frac{df}{dx}\right) + \sum P_{i,n-i}\,p_{i+1,n-i} = 0,$$

$$(B') \qquad \left(\frac{df}{dy}\right) + \sum P_{n-k,k}\,p_{n-k,k+1} = 0.$$

Les deux systèmes [(A), (B)] et [(A′), (B′)] sont linéaires par rapport aux dérivées d'ordre $n+1$ et admettent tous les deux pour déterminant le déterminant fonctionnel Δ. Si le système de valeurs calculées pour les dérivées d'ordre n n'annule pas le déterminant fonctionnel, les dérivées d'ordre $n+1$ seront donc entièrement déterminées, et il en sera de même des dérivées d'ordre supérieur qui se calculeront de la même manière, par groupes de $n+1$, ainsi qu'il a été déjà indiqué pour les équations linéaires; le déterminant de chacun des systèmes considérés sera toujours Δ. On se trouve dans le cas général où le théorème de Cauchy est applicable.

Lorsque le déterminant Δ est constamment nul sur la courbe (C) avec les valeurs données des fonctions initiales, cette courbe (C) est une caractéristique. L'indétermination qui se présente alors dans le calcul des dérivées d'ordre supérieur peut s'étendre même aux dérivées d'ordre n. Cependant, le cas le plus ordinaire est celui où l'indétermination commence aux dérivées d'ordre $n+1$. Pour que les systèmes [(A), (B)] et [(A′), (B′)] soient compatibles, il faut, dans le cas où l'on a $\Delta = 0$, que tous les déterminants d'ordre $n+1$ de la matrice suivante soient nuls

$$
(9)\quad \begin{vmatrix}
dx & dy & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & dp_{n,0} & dp_{n-1,1} \\
0 & dx & dy & \dots & \dots & \dots & 0 & dp_{n-1,1} & dp_{n-2,2} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & \dots & \dots & \dots & dx & dy & dp_{1,n-1} & dp_{0,n} \\
P_{n,0} & P_{n-1,1} & \dots & \dots & \dots & P_{1,n-1} & P_{0,n} & -\left(\frac{df}{dx}\right) & -\left(\frac{df}{dy}\right)
\end{vmatrix} = 0.
$$

On a ainsi deux relations entre les différentielles $dp_{i,n-i}$. On peut donner à cette condition une forme qui la rapproche du système des équations différentielles des caractéristiques des équations du premier ordre. Il existe une même relation linéaire entre les éléments des différentes colonnes de la matrice (9); on peut donc écrire, en introduisant des indéterminées $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$,

$$
(10)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{dx}{P_{n,0}} &= \frac{dy + \lambda_1 dx}{P_{n-1,1}} = \frac{\lambda_1 dy + \lambda_2 dx}{P_{n-2,2}} = \dots = \frac{\lambda_{n-1} dy}{P_{0,n}} \\
&= \frac{dp_{n,0} + \lambda_1 dp_{n-1,1} + \lambda_2 dp_{n-2,2} + \dots + \lambda_{n-1} dp_{1,n-1}}{-\left(\frac{df}{dx}\right)} \\
&= \frac{dp_{n-1,1} + \lambda_1 dp_{n-2,2} + \dots + \lambda_{n-1} dp_{0,n}}{-\left(\frac{df}{dy}\right)}.
\end{aligned}
\right.
$$

On pourrait joindre au système (10) les équations qui se déduiraient des identités

$$
(11)\quad \left\{
\begin{aligned}
dz &= p_{1,0}\, dx + p_{0,1}\, dy, \\
dp_{\alpha,\beta} &= p_{\alpha+1,\beta}\, dx + p_{\alpha,\beta+1}\, dy.
\end{aligned}
\right.
$$

Les quantités $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$ sont susceptibles d'une expression simple : $\frac{dy}{dx} = m$ est une racine de l'équation caractéristique (8), et l'on déduit du système (10)

$$
\lambda_1 = \frac{P_{n-1,1}}{P_{n,0}} - m, \qquad \lambda_2 = \frac{P_{n-2,2}}{P_{n,0}} - m\lambda_1, \qquad \dots .
$$

On voit donc que λ_1 est la somme des racines de l'équation (8) autres que m, λ_2 la somme de leurs produits deux à deux, etc., de sorte que le polynome

$$P_{n,0}[t^{n-1} - \lambda_1 t^{n-2} + \lambda_2 t^{n-3} + \ldots + (-1)^{n-1}\lambda_{n-1}]$$

est le quotient par $t - m$ du polynome caractéristique

$$P_{n,0}t^n - P_{n-1,1}t^{n-1} + P_{n-2,2}t^{n-2} - \ldots + (-1)^n P_{0,n}.$$

Dans le cas des équations du second ordre, les équations de la forme (10) sont applicables; il s'y introduit un seul paramètre λ qui est égal à la seconde racine de l'équation caractéristique, la première étant égale à $\frac{dy}{dx}$.

Pour les équations du premier ordre, les équations (10) sont dégagées de tout paramètre λ et l'on retrouve la forme bien connue des équations différentielles des caractéristiques.

Le système (10) contient en général moins d'équations que d'inconnues, même en y adjoignant les identités (11). Cependant elles pourront dans certains cas admettre des combinaisons intégrables.

6. *Intégration par approximations successives.* — Revenons maintenant aux équations linéaires. L'élégante et féconde méthode d'approximations successives, que M. Picard a développée dans de nombreux Mémoires, nous fournira des indications précieuses sur le domaine d'existence des intégrales. Le principe de cette méthode a été indiqué par Cauchy, en 1840, dans une Note des *Comptes rendus* (¹). Il consiste en ceci :

Soit $D(z) = 0$ une équation linéaire que l'on décompose ainsi

$$\text{(A)} \qquad \Delta(z) = \Delta_1(z),$$

de telle façon que l'on sache intégrer l'équation $\Delta(z) = 0$. On pourra

(¹) Cauchy, *Œuvres*, 1re série, t. V (*Comptes rendus*, 5 juillet 1840).

également intégrer dans cette hypothèse l'équation avec second membre

$$\Delta(z) = f(x, y),$$

quelle que soit la fonction $f(x, y)$ ([1]).

Cela posé, cherchons à déterminer une intégrale de l'équation (A) satisfaisant à des conditions initiales données. Nous commençons par intégrer avec ces fonctions initiales l'équation

$$\Delta(u_0) = 0.$$

Puis nous considérons successivement les équations

$$\begin{aligned} \Delta(u_1) &= \Delta_1(u_0), \\ \Delta(u_2) &= \Delta_1(u_1), \\ &\dots\dots\dots\dots, \\ \Delta(u_n) &= \Delta_1(u_{n-1}), \\ &\dots\dots\dots\dots, \end{aligned}$$

que nous intégrons avec des valeurs initiales égales à zéro. Si la série

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots$$

est convergente, elle représente une intégrale de l'équation considérée, admettant les valeurs initiales données.

Pour les équations linéaires à deux variables indépendantes, M. Delassus indique la décomposition suivante ([2]). Supposons $A_{n,0} = 1$ et désignons par $a_1, a_2, \ldots, a_n$ les racines distinctes ou non de l'équation caractéristique; on pourra prendre

$$\Delta(z) = \left(\frac{\partial}{\partial x} - a_1 \frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} - a_2 \frac{\partial}{\partial y}\right)\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x} - a_n \frac{\partial}{\partial y}\right) z;$$

dans ce cas l'expression de

$$-\Delta_1(z) = D(z) - \Delta(z)$$

([1]) CAUCHY, *loc. cit.*

([2]) *Annales de l'École Normale*, 1895. *Supplément.*

en contiendra plus de dérivées d'ordre n. L'équation $\Delta(z) = 0$ est équivalente au système

$$(B)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} - a_n \dfrac{\partial z}{\partial y} = \theta_{n-1}, \\ \dfrac{\partial \theta_{n-1}}{\partial x} - a_{n-1} \dfrac{\partial \theta_{n-1}}{\partial y} = \theta_{n-2}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \dfrac{\partial \theta_1}{\partial x} - a_1 \dfrac{\partial \theta_1}{\partial y} = 0, \end{cases}$$

qui ne contient que des équations du premier ordre. La résolution de ce système se ramène donc à celle d'une série d'équations de la forme

$$(C)\qquad \frac{\partial u}{\partial x} - a \frac{\partial u}{\partial y} = b.$$

7. Avant d'aller plus loin, précisons les termes que nous avons à employer. Une *courbe analytique* est formée par l'ensemble des points dont l'une des coordonnées est une fonction analytique de l'autre (ou les deux coordonnées fonctions analytiques d'un même paramètre). La variable indépendante devant prendre des valeurs réelles ou imaginaires, nous prendrons pour *image* de la *courbe* une surface de Riemann, algébrique ou transcendante. J'appelle *ligne* ou *chemin* tracé sur cette courbe un système continu de points dont l'image est à une seule dimension. Une *portion de courbe* aura pour image une portion de la surface de Riemann limitée par un contour: nous n'excluons pas, d'ailleurs, le cas où ce contour pourrait avoir des points à l'infini.

8. Occupons-nous maintenant de l'équation (C). Le problème de l'intégration peut être défini ainsi :

Déterminer la valeur que doit prendre en un point arbitraire $M(x_0, y_0)$ du plan analytique l'intégrale de l'équation (C) qui prend des valeurs données sur une courbe analytique (Σ). Or la caractéristique qui passe au point M est une courbe analytique qui rencontre (Σ) en un point P et l'on a

$$u_M = u_P + \int_P^M b\,dx,$$

l'intégrale étant prise suivant un chemin quelconque tracé sur la caractéristique considérée et allant de P en M. La fonction u_M, ainsi définie, est, en général, multiforme, car le point d'intersection P n'est pas nécessairement unique, et, de plus, le choix du chemin d'intégration PM peut n'être pas indifférent pour la valeur du second terme.

Cela posé, considérons le système (B) et supposons qu'on connaisse les valeurs de z et de ses $n-1$ premières dérivées extérieures sur la droite $x = x_0$. On déduit de ces valeurs initiales celles des fonctions θ, ce qui permet de résoudre le système.

9. Ayant calculé, comme nous l'avons indiqué, le premier terme u_0 de la suite, il reste à étudier le système

$$\Delta(u_k) = \Delta_1(u_{k-1}),$$

chaque nouveau terme u_k étant maintenant calculé avec des valeurs initiales égales à zéro. Nous supposerons dans ce qui suit que les fonctions initiales aient été données en fonction de y pour $x = x_0$, de sorte que la courbe analytique (Σ) se réduit à la droite $x = x_0$.

Soient $C_1, C_2, \ldots, C_n$ les systèmes de caractéristiques définis par les équations

$$\frac{dy}{dx} + a_1 = 0, \qquad \frac{dy}{dx} + a_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \frac{dy}{dx} + a_n = 0.$$

Représentons par

$$\int_{x_0(C_i)}^{x} f(x, y)\, dx$$

l'intégrale de la fonction $f(x, y)$ prise suivant un chemin tracé sur une caractéristique C_i et allant d'un point d'abscisse x_0 à un point d'abscisse x, le chemin d'intégration ne passant par aucun point où la tangente soit parallèle à Oy ($x =$ const.).

Nous aurons

$$(12) \qquad u_k = \int_{x_0(C_n)}^{x} dx \int_{x_0(C_{n-1})}^{x} dx \ldots \int_{x_0(C_2)}^{x} dx \int_{x_0(C_1)}^{x} \Delta_1(u_{k-1})\, dx.$$

Pour étudier les propriétés des fonctions u_i, nous allons faire quelques hypothèses sur le domaine dans lequel varient x et y. Nous supposerons donc les conditions suivantes vérifiées : 1° dans ce domaine E les coefficients de l'équation sont holomorphes et les coefficients des dérivées d'ordre n ne s'y annulent pas simultanément; 2° les fonctions y de x définies par les équations des caractéristiques sont holomorphes dans tout le domaine, de sorte que la fonction y qui se réduit à y_0 pour $x = x_0$ n'admet qu'une seule valeur pour toute valeur de x; 3° chaque caractéristique qui passe en un point M de ce domaine rencontrant la droite $x = x_0$ en un point déterminé P, il est possible de joindre PM par un chemin tracé sur la caractéristique et situé tout entier dans le domaine considéré. Ce qui précède exclut du domaine tous les points de contact des caractéristiques avec des tangentes parallèles à Oy. Nous allons restreindre encore l'étendue de ce domaine.

Supposons que, pour $x = x_0$, les fonctions initiales soient holomorphes à l'intérieur d'un contour (A) du plan (y). L'ensemble des caractéristiques de chaque système se partage en deux catégories : celles qui rencontrent la droite analytique $x = x_0$ en un point dont l'ordonnée est figurée à l'intérieur de l'aire (A) et celles qui ne satisfont pas à cette condition. Les caractéristiques de tout point $M(x_1, y_1)$ de E devront satisfaire à la première catégorie; de plus, à tout chemin décrit par la variable x dans son plan et allant de x_1 en x_0 correspond un chemin tracé sur chaque caractéristique du point M; les points de ces divers chemins devront encore satisfaire à la condition que nous venons d'indiquer pour le point M.

Soit $P_1(x_0, y_0)$ le point d'intersection de la caractéristique (C_1) du point M avec la droite $x = x_0$. L'ordonnée y_0 du point P est une fonction holomorphe des coordonnées M et de même y_1 est une fonction holomorphe de x_1, x_0 et y_0. Donc les caractéristiques (C_1) de la première catégorie rencontreront la droite $x = x_1$ en des points dont les ordonnées seront figurées sur le plan y dans une aire (A_1) se déduisant de (A) par une déformation continue. Les caractéristiques des systèmes (C_2), (C_3), ... déterminent de même des aires (A_2), (A_3), ... Les aires (A_1), (A_2), (A_3), ... qui correspondent à une même abscisse ont une portion commune (Σ) dont le contour se déduit lui-même de celui de (A) par une déformation continue. On peut se faire une idée du domaine (E) précédemment défini en considérant l'ensemble (E') des points obtenus en associant à chaque valeur de x le système des valeurs de y représentées à l'intérieur de l'aire Σ correspondante. Toutefois cet ensemble E' peut être plus étendu que E : nous supprimons, bien entendu, du domaine ainsi défini toute la partie qui ne satisferait pas aux premières conditions.

10. Les fonctions u_i sont définies à l'intérieur du domaine E. Il est facile de démontrer qu'elles y sont, en général, holomorphes.

Désignons par $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ des fonctions holomorphes qui restent constantes sur les caractéristiques des systèmes respectifs $C_1, C_2, \ldots, C_n$. On peut prendre, par exemple, pour la fonction φ_i l'ordonnée $y_{i,0}$ du point où la caractéristique C_i rencontre la droite x_0. Chaque caractéristique (C_i) est représentée par l'équation $\varphi_i(x, y) = \text{const.}$

Considérons d'abord l'intégrale

$$u = \int_{x_0(C_i)}^{x} A f(x,y)\, dx,$$

où A désigne une fonction holomorphe connue et $f(x,y)$ une fonction arbitraire supposée holomorphe. Pour calculer cette intégrale, il faut remplacer y par sa valeur en fonction *uniforme* de x et de φ_i et intégrer ensuite, en regardant φ_i comme une constante; le chemin d'intégration relatif à x peut être, d'ailleurs, une ligne quelconque, pourvu que le chemin correspondant tracé sur la caractéristique C_0 soit intérieur au domaine (E). La déformation de ce chemin n'altère pas la valeur de l'intégrale.

On a

$$\frac{\partial u}{\partial x} = A f(x,y) + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \int_{x_0}^{x} \frac{(A'_y f + A f'_y)}{\varphi'_{i,y}}\, dx,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \int_{x_0}^{x} \frac{\dfrac{\partial}{\partial y}(Af)}{\varphi'_{i,y}}\, dx.$$

Tant que φ_i est holomorphe et $\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial y}$ différent de zéro, conditions qui sont vérifiées à l'intérieur du domaine E, les dérivées $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$ existent donc et la fonction u est elle-même holomorphe.

Les fonctions φ_i cessent en général d'être holomorphes aux points où deux racines ordinairement distinctes de l'équation caractéristique deviennent égales entre elles. Le lieu de ces points est une courbe que nous pouvons appeler la *courbe discriminante* de l'équation. Nous devons la supposer tout entière extérieure au domaine (E).

Ces résultats s'appliquent immédiatement aux expressions qui contiennent plusieurs signes d'intégration, soit

$$v = \int_{x_0(C_1)}^{x} A_1\,dx \int_{x_0(C_2)}^{x} A_2\,dx \ldots \int_{x_0(C_n)}^{x} A_n f(x, y)\,dx.$$

Les dérivées de cette fonction sont des sommes de termes de la même forme dans lesquels le dernier signe d'intégration à droite porte sur une expression linéaire de la fonction arbitraire f et de ses dérivées par rapport à y. Les termes qui figurent dans l'expression d'une dérivée quelconque d'ordre $p (p < n)$ contiennent au moins $n - p$ signes d'intégration.

11. Nous allons maintenant étudier la convergence de la série

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots.$$

Considérons l'expression de v. Soit S la longueur du chemin d'intégration décrit par la variable x dans son plan pour aller de x_0 en x. Nous supposerons que ce chemin soit le même pour toutes les quadratures effectuées. On pourra d'ailleurs supposer en général qu'il se réduit à la droite $\overline{x_0 x}$, ce qui donne

$$S = |x - x_0|.$$

Désignons par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, M les modules maxima de $A_1, A_2, \ldots, A_n, f(x,y)$ dans le domaine considéré; nous aurons

$$|v| \leqq \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \mathrm{M} \mathrm{S}^n.$$

12. On a donc une limite du module de v. Pour avoir de même une limite supérieure du module de chacune des dérivées, nous devons faire d'abord quelques remarques sur le calcul de v. Supposons que dans toutes les intégrations effectuées la variable x décrive le chemin rectiligne $\overline{x_0 x}$. La caractéristique (C_1) rencontre la droite $x = x_0$ en un point d'ordonnée y_0, et lorsque la variable x décrit le chemin rectiligne $\overline{x_0 x}$, le point analytique (x, y) décrit sur (C_1) un chemin déterminé L_1; c'est ce chemin que parcourt le point (x, y) dans le calcul de la dernière intégrale (la première à gauche); mais cela suppose qu'on connaît le résultat des $n-1$ premières intégrations en tout point de L. Or, pour avoir la $(n-1)^{\text{ième}}$ intégrale en un point (ξ, η), on doit faire parcourir au point (x, y) un chemin L_2 tracé sur la caractéristique (C_2) du point (ξ, η); on aura donc à considérer l'ensemble des chemins L_2 qui passent par les différents points de L_1 et ainsi de suite. J'appelle E_{xy} l'ensemble des points engendré par les divers chemins d'intégration qu'on aura dû considérer pour le calcul de la valeur de v au point xy. Ceux des points de cet ensemble dont l'abscisse est égale à un nombre donné ξ forment un ensemble partiel compris dans le domaine E et dont les ordonnées sont par conséquent figurées à l'intérieur du contour C_ξ qui limite dans le plan y les ordonnées des points de E dont l'abscisse est égal à ξ. Soit δ_ξ la distance minima des ordonnées de cet ensemble au contour C_ξ. Lorsque ξ varie de x_0 à x, suivant le chemin rectiligne $\overline{x_0 x}$, δ_ξ passe par un minimum δ que j'appellerai la distance de l'ensemble E_{xy} à la frontière du domaine E. Cela posé, si l'on donne un nombre positif ρ assez petit, il existera des points (x, y) tels que pour chacun d'eux la distance de l'ensemble E_{xy} à la frontière du domaine E sera supérieure à ρ. Je désigne leur ensemble par E_ρ. Soit (x, y_1) l'un d'entre eux; on pourra déterminer un nombre ε tel que tous les points (x_1, y) satisfaisant aux inégalités

$$|x - x_1| < \varepsilon, \qquad |y - y_1| < \varepsilon$$

appartiendront encore à l'ensemble E_ρ. Tous les points d'abscisse x_0, dont l'ordonnée est figurée à une distance supérieure à ρ du contour de l'aire A, appartiennent à cet ensemble.

A une suite de valeurs décroissantes attribuées au nombre ρ

$$\rho_1, \quad \rho_2, \quad \ldots, \quad \rho_p, \quad \ldots$$

correspondent des domaines

$$E_{\rho_1}, \quad E_{\rho_2}, \quad \ldots, \quad E_{\rho_p}, \quad \ldots,$$

dont chacun englobe le précédent.

13. La fonction $f(x, y)$ étant holomorphe à l'intérieur du domaine E et ayant pour maximum M, considérons un point (x_1, y_1) du domaine tel que l'affixe de y_1 soit située à une distance égale ou supérieure à ρ du contour de l'aire correspondante Σ; nous avons

$$\left|\frac{\partial^k f(x_1, y_1)}{\partial y_1^k}\right| < \frac{k!\,M}{\rho^n}.$$

Le calcul du n° **11**, relatif au module maximum de v, pourra donc se répéter pour les dérivées jusqu'à l'ordre $n-1$ inclusivement et même pour les combinaisons linéaires de ces dérivées, à l'intérieur du domaine E_ρ. Toute fonction linéaire de v et de ses dérivées jusqu'à l'ordre $n-1$ inclusivement, admettra pour la limite supérieure de son module une expression de la forme

$$\varphi\left(S, \frac{1}{\rho}\right) MS,$$

$\varphi\left(S, \frac{1}{\rho}\right)$ étant un polynome en S et $\frac{1}{\rho}$ $\left(\text{ou même en S et } \frac{S}{\rho}\right)$ à coefficients positifs, indépendants de la fonction $f(x, y)$ considérée.

14. Nous pouvons maintenant reprendre l'étude de la convergence de la série

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots.$$

Désignons par $\mathfrak{M}_n$ la limite supérieure du module de u_n dans le domaine E_ρ. L'égalité

$$u_{n+1} = \int_{x_0(C_n)}^{x} \int_{x_0(C_{n-1})}^{x} \cdots \int_{x_0(C_1)}^{x} \Delta(u_n)\,dx$$

donne, pour la limite supérieure du module de u_{n+1},

$$\mathfrak{M}_{n+1} = \varphi\left(S, \frac{1}{\rho}\right)\mathfrak{M}_n S,$$

et, par suite,

$$\mathfrak{M}_n = \overline{\varphi\left(S, \frac{1}{\rho}\right)}^n S^n \mathfrak{M}_0.$$

Quel que soit ρ, on peut prendre S assez petit pour que l'on ait

$$\varphi\left(S, \frac{1}{\rho}\right) S < 1.$$

Dans ces conditions, la série sera convergente.

Si l'on remplace ρ par un nombre plus petit ρ_1, il faudra également remplacer S par un nombre plus petit S_1, mais il ne sera évidemment nécessaire de diminuer la longueur du chemin d'intégration que pour les points de l'ensemble E_{ρ_1}, qui ne sont pas compris dans l'ensemble E_ρ. Cette remarque faite, nous pouvons faire tendre ρ vers zéro.

Soit R le domaine défini par les propriétés précédentes, tout point xy de ce domaine satisfait à la condition suivante : l'ensemble E_{xy} étant intérieur au domaine E, si l'on désigne par ρ sa distance à la frontière de ce domaine et par S la distance $\overline{xx_0}$, on a

$$\varphi\left(S, \frac{1}{\rho}\right) S < 1.$$

Soit (x_1, y_1) un point du domaine (R), on pourra déterminer un nombre ε tel que tous les points satisfaisant aux conditions

$$|x - x_1| < \varepsilon, \qquad |y - y_1| < \varepsilon$$

appartiendront encore à ce domaine. Tout point du chemin L_1 que décrit le point (x, y) sur la caractéristique C_1 quand x décrit le chemin rectiligne $\overline{xx_0}$ fait partie du domaine R. Ce domaine englobe entièrement la portion A de la droite analytique $x = x_0$; il est, de plus, indépendant des fonctions initiales. Nous avons donc ce théorème, extension de celui de M. Delassus.

THÉORÈME. — *A toute portion* (A) *de la droite analytique* $x = x_0$, *n'admettant aucune tangente caractéristique et située tout entière dans une région où les coefficients de l'équation sont holomorphes, on peut faire correspondre une région* (R) *telle que toute intégrale définie par des fonctions initiales holomorphes sur* (A) *soit aussi holomorphe dans le domaine entier* R.

On pourrait évidemment remplacer la droite analytique $x = x_0$ par une courbe analytique quelconque; l'aire (A) correspond alors à une *portion* de cette courbe qui ne devra contenir ni points singuliers, ni points à tangentes caractéristiques. Nous donnerons au domaine R correspondant le nom de *domaine régulier* de la portion de courbe considérée.

DEUXIÈME PARTIE.

DÉTERMINATION DES INTÉGRALES PAR DES FONCTIONS INITIALES SUR LES CARACTÉRISTIQUES. — INTÉGRALES PRINCIPALES.

13. La détermination des intégrales par leurs fonctions initiales sur une courbe non caractéristique nous a donné des indications sur le domaine d'existence de ces fonctions. Nous allons maintenant étudier les intégrales sur les caractéristiques, ce qui nous fera connaître d'une façon plus précise leur forme analytique et leur manière d'être.

Supposons que x soit une variable caractéristique d'ordre p et cherchons à déterminer l'intégrale en nous donnant sur la droite $x = x_0$ ses valeurs et celles d'un certain nombre de ses dérivées. La méthode d'approximations successives de Cauchy et de M. Picard s'applique encore à ce problème et nous conduit au théorème suivant :

THÉORÈME. — *On peut déterminer une intégrale* z *d'une équation linéaire en donnant :* 1° *sur une caractéristique multiple d'ordre* p *les valeurs de* z *et de ses* $n - p - 1$ *premières dérivées extérieures;* 2° *sur une seconde courbe coupant la caractéristique en un point* *non singulier les valeurs de z et de ses $p-1$ premières dérivées extérieures.*

L'équation pourra s'écrire

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}-a_1\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}-a_2\frac{\partial}{\partial y}\right)\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x}-a_{n-p}\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial^p z}{\partial y^p}=\Delta_1(z),$$

$\Delta_1(z)$ ne contenant plus que des dérivées d'ordre inférieur à n. Nous désignerons encore par $\Delta(z)$ le premier membre de l'équation précédente. Considérons d'abord l'équation

$$(1) \qquad \Delta(z)=0.$$

Posons $\frac{\partial^p z}{\partial y^p}=u$, et intégrons l'équation

$$(2) \qquad \left(\frac{\partial}{\partial x}-a_1\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}-a_2\frac{\partial}{\partial y}\right)\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x}-a_{n-p}\frac{\partial}{\partial y}\right)u=0.$$

La connaissance de z et de ses $n-p-1$ premières dérivées extérieures

$$\frac{\partial z}{\partial x},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\quad \ldots,\quad \frac{\partial^{n-p-1} z}{\partial x^{n-p-1}},$$

pour $x=x_0$ en fonction de y, détermine aussi u et ses $n-1$ premières dérivées par rapport à x. On peut donc calculer u, et la solution de l'équation (1) est alors représentée par l'expression

$$\int_{y_0}^{y}\frac{(y-t)^{n-1}}{(n-1)!}u(x,t)\,dt$$
$$+\varphi_0(x)+\frac{y-y_0}{1}\varphi_1(x)+\frac{(y-y_0)^2}{1.2}\varphi_2(x)+\frac{(y-y_0)^{p-1}}{(p-1)}\varphi_{p-1}(x),$$

$\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, ..., $\varphi_{p-1}(x)$ désignant les valeurs de z et de ses $n-1$ premières dérivées par rapport à y pour $y=y_0$. Ces p nouvelles fonctions sont également arbitraires.

Intégrons maintenant l'équation

$$(3) \qquad \Delta(z)=f(x,y),$$

$f(x, y)$ désignant une fonction holomorphe quelconque, de telle façon que l'on ait

$$z = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad \dots, \quad \frac{\partial^{n-p-1} z}{\partial x^{n-p-1}} = 0,$$

pour $x = x_0$, et

$$z = \frac{\partial z}{\partial y} = \dots = \frac{\partial^{p-1} z}{\partial y^{p-1}} = 0,$$

pour $y = y_0$.

Nous avons

$$z = \int_{y_0}^{y} dy \int_{y_0}^{y} dy \dots \int_{y_0}^{y} dy \int_{x_0 C_{n-p}}^{x} dx \int_{x_0 C_{n-p-1}}^{x} dx \dots \int_{x_0 C_1}^{x} f(x, y)\, dx.$$

Cette expression contient p signes d'intégrations relatifs à la variable y, les intégrations correspondantes devant être faites en supposant $x = \text{const.}$ Les $n - p$ intégrations relatives à x sont de la même nature que celles que nous avons déjà considérées dans la première Partie, et sont effectuées suivant les caractéristiques (C_1), (C_2), $\dots$, (C_{n-p}).

16. Ces préliminaires établis, nous pouvons maintenant appliquer la méthode d'approximations successives, comme dans le premier cas.

Soit u_0 l'intégrale particulière de l'équation (1) déterminée par les conditions suivantes; on donne :

1° Les valeurs de $z, \frac{\partial z}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^{n-p-1} z}{\partial x^{n-p-1}}$ en fonction de x pour $x = x_0$;

2° Celles de $z, \frac{\partial z}{\partial y}, \dots, \frac{\partial^{p} z}{\partial y^{p}}$, en fonction de x pour $y = y_0$.

Désignons ensuite par $u_1, u_2, \dots, u_n$, les intégrales des équations successives

$$\Delta(u_k) = \Delta_1(u_{k-1})$$

qui correspondent à des valeurs nulles des fonctions initiales. La série

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_m + \dots$$

admet un domaine de convergence dans le voisinage du point $x_0 y_0$.

En effet, les remarques que nous avons faites, relativement aux expressions de la forme v, sont encore applicables lorsque les intégrations sont effectuées en prenant comme variables d'intégration successivement x et y. Les dérivées de ces expressions sont des sommes de termes de la même forme dans lesquels le dernier signe d'intégration à droite porte sur une combinaison linéaire de la fonction arbitraire $f(x, y)$ et de ses dérivées par rapport à x et à y. Chacun des termes qui figure dans l'expression d'une dérivée d'ordre p contient au moins $n-p$ signes d'intégration.

Supposons donc que, dans un domaine E ne contenant aucun point singulier des coefficients de l'équation, ni aucun point de la courbe discriminante, les fonctions initiales soient développables suivant les puissantes croissantes de $x - x_0$ et $y - y_0$, avec des rayons de convergence égaux ou supérieurs à un nombre ρ. Chacune des fonctions u, déduite de u_0, sera développable dans ces conditions autour du point $x_0 y_0$ et admettra le même rayon de convergence, pourvu qu'il n'y ait dans le domaine considéré, sur les caractéristiques C_i, aucun point où la tangente soit parallèle à Oy. Cette dernière condition est, d'ailleurs, comprise dans l'hypothèse déjà faite, que la courbe discriminante est extérieure au domaine.

Soient M une limite supérieure du module $f(x, y)$ dans E, S une limite supérieure de la longueur de chacun des chemins d'intégration: le module de la fonction

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} w = & \int_{y_0}^{y} B_1\,dy \int_{y_0}^{y} B_2\,dy \ldots \\ & \int_{y_0}^{y} B_p\,dy \int_{x_0 C_{n-p}}^{x} A_1\,dx \int_{x_0 C_{n-p-1}}^{x} A_2\,dx \ldots \int_{x_0 C_1}^{x} A_{n-p} f(x, y)\,dx \end{aligned} \right.$$

a pour limite supérieure une expression de la forme

$$\mathrm{PMS}^n,$$

P étant indépendant de la fonction arbitraire $f(x, y)$.

Nous trouverons également pour limite supérieure du module de toute dérivée de w, d'ordre égal ou inférieur à $n-1$, ou de toute combinaison linéaire de w et de ces dérivées une expression de la forme

$$\varphi\left(\mathrm{S}, \frac{1}{\rho}\right)\mathrm{SM}.$$

Nous pouvons, par conséquent, répéter le raisonnement du n° **14** sur la convergence de la série. Donc les conditions énoncées définissent une intégrale bien déterminée dans le voisinage du point $x_0 y_0$.

17. Lorsque x est une variable caractéristique d'ordre p, les dérivées d'ordre n de l'équation considérée ne contiennent de différentiation par rapport à x que jusqu'à l'ordre $n-p$; mais parmi les dérivées des ordres inférieurs, $n-1$, $n-2$, ... qui figurent dans l'équation, peuvent se trouver les dérivées $\frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{n-1}}$, $\frac{\partial^{n-2} z}{\partial x^{n-2}}$, ... Supposons qu'on donne, sur une caractéristique d'ordre p, $x = x_0$, les valeurs de z, $\frac{\partial z}{\partial x}$, ..., $\frac{\partial^{n-2} z}{\partial x^{n-2}}$. Ces conditions pourraient suffire pour calculer toutes les dérivées d'ordre supérieur à $n-1$, et obtenir, par conséquent, les coefficients du développement de Taylor en un point $x_0 y_0$; or la série qu'on obtient ainsi est, en général, divergente, à moins que les $n-1$ fonctions initiales ne satisfassent à des conditions particulières. En général, sur les caractéristiques multiples d'ordre p, on ne peut donner arbitrairement que les valeurs de z et de ses dérivées extérieures jusqu'à l'ordre $n-p-1$. Ce résultat est bien connu pour l'équation de la propagation de la chaleur,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$

Sur une droite $x = x_0$, on ne peut, en général, se donner arbitrairement la valeur de z en fonction de y. Pour que la fonction choisie donne naissance à une intégrale analytique, il faut qu'elle soit holomorphe dans tout le plan de la variable y, et cette condition n'est même pas suffisante (1).

Des intégrales principales.

18. Dans l'étude des équations du second ordre, à caractéristiques distinctes, j'ai été conduit à introduire la notion de certaines intégrales

(1) *Voir* une Note de l'auteur sur cette équation dans le *Bulletin des Sciences mathématiques*; 1895.

particulières dépendant d'un paramètre variable et permettant de représenter par des quadratures l'intégrale générale de l'équation. Cette notion s'étend aux équations d'ordre supérieur.

Soit $z(x, y, \alpha)$ une intégrale de l'équation $D(z) = 0$, dépendant du paramètre arbitraire α. Nous dirons que c'est une intégrale principale s'il existe une fonction $\theta(x, y)$, essentiellement distincte d'une constante, telle que l'expression

$$\int_{\theta(x_0, y_0)}^{\theta(x, y)} f(\alpha)\, z(x, y, \alpha)\, d\alpha$$

soit encore une solution de l'équation considérée. Par un changement de variable, il est toujours possible de remplacer la fonction θ par la variable indépendante x. Nous allons donc chercher la condition pour que l'intégrale

$$z = \int_{x_0}^{x} f(\alpha)\, z(x, y, \alpha)\, d\alpha \tag{5}$$

satisfasse à l'équation (1), quelle que soit la fonction $f(\alpha)$.

Pour résoudre ce problème, nous mettrons l'équation (1) sous une nouvelle forme symbolique,

$$D = \varphi_0 \frac{\partial^n z}{\partial x^n} + \varphi_1 \frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{n-1}} + \ldots + \varphi_n z = 0,$$

où $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ sont des facteurs différentiels opératoires de la forme

$$\varphi_i = A_{n-i,i} \frac{\partial^i}{\partial y^i} + A_{n-i,i-1} \frac{\partial^{i-1}}{\partial y^{i-1}} + \ldots + A_{i,0};$$

de sorte que l'on a

$$\varphi_i \frac{\partial^{n-i} z}{\partial x^{n-i}} = A_{n-i,i} \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-i}\, \partial y^i} + A_{n-i,i-1} \frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{n-i}\, \partial y^{i-1}} + \ldots$$

Le degré de φ_i par rapport au symbole $\frac{\partial}{\partial y}$ est au plus égal à i.

Désignons par z_x, z'_x, ..., $z_x^{(p)}$ les fonctions suivantes :

$$z_x = z(x, y, \alpha)|_{\alpha=x}, \quad z'_x = \left.\frac{\partial z(x,y,\alpha)}{\partial x}\right|_{\alpha=x}, \quad \ldots, \quad z_x^{(p)} = \left.\frac{\partial^p z(x,y,\alpha)}{\partial x^p}\right|_{\alpha=x}.$$

Nous avons, en prenant les dérivées successives jusqu'à l'ordre n par rapport à x de la fonction Z :

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned}
Z &= \int_{x_0}^{x} f(\alpha)\, z(x,y,\alpha)\, d\alpha,\\
\frac{\partial Z}{\partial x} &= f(x)\, z_x + \int_{x_0}^{x} f(\alpha)\frac{\partial z(x,y,\alpha)}{\partial x}\, d\alpha,\\
\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}[f(x)\, z_x] + f(x)\, z'_x + \int_{x_0}^{x} f(\alpha)\frac{\partial^2 z(x,y,\alpha)}{\partial x^2}\, d\alpha,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\frac{\partial^p Z}{\partial x^p} &= \frac{\partial^{p-1}}{\partial x^{p-1}}[f(x)\, z_x] + \frac{\partial^{p-2}}{\partial x^{p-2}}[f(x)\, z'_x] + \ldots + \int_{x_0}^{x} f(\alpha)\frac{\partial^p z(x,y,\alpha)}{\partial x^p}\, d\alpha.\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{\partial^n Z}{\partial x^n} &= \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}[f(x)\, z_n] + \frac{\partial^{n-2}}{\partial x^{n-2}}[f(x)\, z'_x] + \ldots + \int_{x_0}^{x} f(\alpha)\frac{\partial^n z(x,y,\alpha)}{\partial x^n}\, d\alpha.
\end{aligned}\right.$$

Multiplions symboliquement par φ_0, φ_1, ..., φ_n et ajoutons membre à membre pour former $D(z)$. La fonction placée sous le signe d'intégration s'annule identiquement. Dans l'expression restante, il faut égaler à zéro séparément les coefficients de la fonction arbitraire f et de ses différentes dérivées. Le coefficient de $f^{(n-1)}(x)$ est $\varphi_0 z_x$. Nous avons donc deux cas à distinguer :

$$1^\circ \quad \varphi_0 \neq 0, \quad z_x = 0; \qquad\qquad 2^\circ \quad \varphi_0 = 0.$$

Considérons d'abord le premier cas et faisons $z_x = 0$. Le coefficient de $f^{(n-2)}(x)$ est alors $\varphi_0 z'_x$; d'où l'on déduit aussi $z'_x = 0$. On trouverait de la même façon $z''_x = z'''_x = \ldots = z_x^{(n-1)} = 0$. On arrive donc à cette conclusion que, sur la droite $x = \alpha$, l'intégrale particulière $z(x, y, \alpha)$ doit s'annuler, ainsi que ses dérivées prises par rapport à x, jusqu'à l'ordre $n - 1$,

$$\left.\frac{\partial z(x,y,\alpha)}{\partial x}\right|_{x=\alpha} = \left.\frac{\partial^2 z(x,y,\alpha)}{\partial x^2}\right|_{x=\alpha} = \ldots = \left.\frac{\partial^{n-1} z(x,y,\alpha)}{\partial x^{n-1}}\right|_{x=\alpha} = 0.$$

Comme, d'autre part, la condition $\varphi_0 \neq 0$ exprime que la droite $x = \alpha$ n'est pas une caractéristique, l'intégrale satisfaisant aux conditions initiales que nous venons d'indiquer, sur la droite $x = \alpha$, est identiquement nulle. La formule (5) ne donne donc que la solution o. Il reste à examiner la seconde hypothèse, $\varphi_0 = 0$. Nous trouvons dans ce cas :

$$
(7)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\varphi_1 z_x = 0, \qquad \left.\begin{aligned}&\varphi_1 z'_x + C^1_{n-2}\varphi_1 \frac{\partial z_x}{\partial x}\\ &\quad + \varphi_2 z_x\end{aligned}\right| = 0, \qquad \left.\begin{aligned}&\varphi_1 z''_x + C^1_{n-3}\varphi_1 \frac{\partial z'_x}{\partial x} + C^2_{n-2}\varphi_1 \frac{\partial^2 z_x}{\partial x^2}\\ &\qquad + \varphi_2 z'_x + C^1_{n-3}\varphi_2 \frac{\partial z_x}{\partial x}\\ &\qquad\qquad + \varphi_3 z_x\end{aligned}\right| = 0,\\
&\left.\begin{aligned}&C^0_{n-p-2}\varphi_1 z_x^{(p)} + C^1_{n-p-1}\varphi_1 \frac{\partial z_x^{(p-1)}}{\partial x} + \ldots + C^p_{n-2}\varphi_1 \frac{\partial^p z_x}{\partial x^p}\\
&\qquad C^0_{n-p-2}\varphi_2 z_x^{(n-1)} \qquad\qquad + C^{p-1}_{n-3}\varphi_2 \frac{\partial^{p-1} z_x}{\partial x^{p-1}}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + C^{p-2}_{n-4}\varphi_3 \frac{\partial^{p-2} z_x}{\partial x^{p-2}}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + C^0_{n-p-2}\varphi_p z_x
\end{aligned}\right| = 0,
\end{aligned}\right.
$$

C^n_m désignant le nombre de combinaisons de m quantités, n à n.

Si l'on suppose que dans φ_1 le coefficient de $\frac{\partial}{\partial y}$ soit différent de zéro, les équations (7) définissent successivement les valeurs de z, $\frac{\partial z}{\partial x}$, ..., $\frac{\partial^{n-2} z}{\partial x^{n-2}}$ en fonction de y, sur la caractéristique $x = \alpha$ à l'aide d'équations différentielles du premier ordre. Chacune d'elles se trouve entièrement déterminée quand on connaît sa valeur pour une valeur particulière y_0 de y, qui peut être, d'ailleurs, elle-même une fonction de α. D'autre part, dans cette hypothèse, x étant une variable caractéristique simple, il existe, d'après notre théorème fondamental des intégrales telles que, pour $x = \alpha$, les valeurs de

$$z, \quad \frac{\partial z}{\partial x}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{n-2} z}{\partial x^{n-2}}$$

soient égales à des fonctions données de y. Il y en a donc qui satisfont aux conditions initiales définies par les équations (7). Les intégrales principales dépendent encore d'une fonction arbitraire qui sera, par exemple, la valeur que prendra chacune d'elles sur la droite arbitraire $y = y_0$. Cette dernière donnée achève de déterminer les fonctions initiales définies par les équations (7).

Par conséquent, quand x est une variable caractéristique simple, il existe une famille correspondante d'intégrales principales. Chacune d'elles est entièrement déterminée par les valeurs qu'elle prend sur une courbe analytique quelconque autre que l'une des caractéristiques de la famille considérée.

Dans un domaine E, ne contenant aucun point critique des coefficients de l'équation, ni aucun point de la courbe discriminante, l'intégrale principale, dont la fonction initiale est holomorphe, est elle-même une fonction holomorphe, pourvu que la portion de courbe arbitraire sur laquelle cette fonction initiale se trouve déterminée n'admette aucune tangente caractéristique de la famille considérée.

19. *Développement des intégrales principales.* — Au lieu de calculer les valeurs initiales de z et de ses dérivées pour $x = \alpha$, nous pouvons procéder d'une façon différente et arriver à des équations dont la loi de formation est plus simple que celle des équations (7).

Considérant l'intégrale principale comme une fonction de α, cherchons à la développer en série ordonnée suivant les puissances croissantes de $x - \alpha$.

Soit

$$(8)\quad z(x, y, \alpha) = u_0 + u_1\frac{(x-\alpha)}{1} + u_2\frac{(x-\alpha)^2}{1.2} + \ldots + u_n\frac{(x-\alpha)^n}{n} + \ldots,$$

les u_i désignant des fonctions de x et de y.

On a

$$(9)\quad \frac{\partial^p z}{\partial x^p} = \frac{\partial^p u_0}{\partial x^p} + \frac{p}{1}\frac{\partial^{p-1} u_1}{\partial x^{p-1}} + \frac{p(p-1)}{1.2}\frac{\partial^{p-2} u_2}{\partial x^{p-2}} + \ldots + \frac{x-\alpha}{1}\left\{\frac{\partial^p u_1}{\partial x^p} + \frac{p}{1}\frac{\partial^{p-1} u_2}{\partial x^{p-2}} + \ldots\right\}.$$

Quand on fait $x = \alpha$, ou $\alpha = x$, les expressions de la forme (9) se réduisent à leur premier terme :

$$
(10)\qquad \left\{
\begin{aligned}
& z_x = u_0, \qquad z'_x = \frac{\partial u_0}{\partial x} + u_1 + \ldots, \\
& z_x^{(p)} = \frac{\partial^p u_0}{\partial x^p} + \frac{p}{1}\frac{\partial^{p-1} u_1}{\partial x^{p-1}} + \frac{p(p-1)}{1.2}\frac{\partial^{p-2} u_2}{\partial x^{p-2}} + \ldots
\end{aligned}
\right.
$$

Ces égalités démontrent d'abord que le système des fonctions initiales $z_x, z'_x, \ldots, z_x^{(n-2)}$ est équivalent, comme données, au système des fonctions $u_0, u_1, \ldots, u_{n-2}$.

En portant, dans les équations (7), les valeurs de $z_x, z'_x, \ldots$ en fonction des u_i, nous obtiendrons les conditions auxquelles doivent satisfaire ces nouvelles fonctions. Pour faciliter les calculs, nous allons introduire une nouvelle notation symbolique.

20. Nous pouvons écrire, d'après les équations (10),

$$z_x^{(p)} = \left(\frac{\partial}{\partial x} + u\right)^p,$$

en convenant de remplacer les exposants de u par des indices et u^0 par u_0; les puissances de $\frac{\partial}{\partial x}$ devront, bien entendu, être considérées comme des indices de différentiation; cependant, comme la signification différentielle du symbole $\frac{\partial}{\partial x}$ n'interviendra pas dans le calcul suivant, nous le remplacerons, pour plus de simplicité, par X, de sorte que z_x^p se trouvera remplacé par $(X + u)^p$.

L'équation générale du système (7) devient alors

$$
0 = \left.
\begin{array}{l}
\quad C_{n-2}^{p}\ \varphi_1 X^p \\
+ C_{n-3}^{p-1}\ \varphi_2 X^{p-1} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+ C_{n-i}^{p-i+2}\ \varphi_{i-i} X^{p-i+2} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+ C_{n-p-2}^{0}\ \varphi_p
\end{array}
\right| u^0 + \left.
\begin{array}{l}
C_{n-3}^{p-1}\ \varphi_1 X^{p-1} \\
+ C_{n-4}^{p-2}\ \varphi_2 X^{p-2} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+ C_{n-p-2}^{0}\ \varphi_{p-1}
\end{array}
\right| (X + u) + \ldots
$$

Dans ce développement, le coefficient de u^r est égal à

$$\begin{aligned}&\varphi_1 X^{p-r}\ (C^{p-r}_{n-r-2}C^r_r + C^{p-r-1}_{n-r-3}C^r_{r+1}+\ldots+C^{p-r-i}_{n-r-i-2}C^r_{r+i}+\ldots)\\ &+\varphi_2 X^{p-r-1}(C^{p-r-1}_{n-r-3}C^r_r + C^{p-r-2}_{n-r-4}C^r_{r+1}+\ldots)+\ldots.\end{aligned}$$

D'autre part, on a évidemment

$$C^r_r C^\nu_\mu + C^r_{r+1}C^\nu_{\mu-1}+\ldots+C^r_{r+\mu-\nu}C^\nu_\nu = C^{\nu+r+1}_{\mu+r+1},$$

ce qui donne, pour le coefficient de u^r,

$$\begin{aligned}&C^{p-r}_{n-1}\varphi_1 X^{p-r} + C^{p-r-1}_{n-2}\varphi_2 X^{p-r-1}+\ldots\\ &=\frac{1}{(n-1-p+r)!}[(n-1)(n-2)\ldots(p-r+1)\varphi_1 X^{p-r}\\ &\qquad+(n-2)(n-3)\ldots(p-r)\varphi_2 X^{p-r-1}+\ldots].\end{aligned}$$

La parenthèse est la dérivée par rapport à X du polynome suivant

$$\varphi_1 X^{n-1}+\varphi_2 X^{n-2}+\ldots+\varphi_n,$$

qu'on déduit de l'expression différentielle

$$D = \varphi_1\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}+\varphi_2\frac{\partial^{n-2}}{\partial x^{n-2}}+\ldots,$$

en remplaçant le symbole $\frac{\partial}{\partial x}$ par X.

Désignons par

$$D'_x,\quad D''_{x^2},\quad \ldots,\quad D^{(q)}_{x^q}$$

les dérivées successives de D par rapport au symbole $\frac{\partial}{\partial x}$.

$$D^{(q)}_{x^q}(u) = (n-1)(n-2)\ldots(n-q)\varphi_1\frac{\partial^{n-q-1}}{\partial x^{n-q-1}}+\ldots.$$

Il résulte alors des calculs précédents que l'équation générale du système (7) pourra s'écrire

$$\sum\frac{1}{(n-\mu)!}D^{(n-\mu)}_{x^{n-\mu}}(u_{p+1-\mu}) = 0.$$

Ce système devient donc

$$
(7')\quad \left\{
\begin{array}{l}
\dfrac{1}{(n-1)!} D^{(n-1)}_{x^{n-1}}(u_0) = 0, \qquad \dfrac{1}{(n-1)!} D^{(n-1)}_{x^{n-1}}(u_1) + \dfrac{1}{(n-2)!} D^{(n-2)}_{x^{n-2}}(u_0) = 0,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
\dfrac{1}{(n-1)!} D^{(n-1)}_{x^{n-1}}(u_p) + \dfrac{1}{(n-2)!} D^{(n-2)}_{x^{n-2}}(u_{p-1}) + \dots + \dfrac{1}{(n-p-1)!} D^{(n-p-1)}_{x^{n-p-1}}(u_0) = 0.
\end{array}
\right.
$$

Ces équations, dont la formation est très simple, définissent complètement les fonctions u quand on connaît leurs valeurs initiales pour $y = y_0$.

Les fonctions u_n, u_{n+1}, ..., satisfont à des équations en tout semblables à celles du système (7'). En écrivant que l'expression $z(x, y, \alpha)$, définie par la formule (8), satisfait à l'équation donnée on trouve, pour les coefficients dont l'indice est supérieur à $n-1$, la relation de récurrence

$$
(11)\quad \frac{1}{(n-1)!} D^{(n-1)}_{x^{n-1}}(u_{n+p-1}) + \frac{1}{(n-2)!} D^{(n-2)}_{x^{n-2}}(u_{n+p-2}) + \dots + D(u_p) = 0.
$$

On retrouve facilement le système (7') et l'équation (11) en partant de la fonction

$$
z_{n-1}(x, y, \alpha) = u_0 \frac{(x-\alpha)^{n-1}}{(n-1)!} + u_1 \frac{(x-\alpha)^n}{n!} + \dots + u_p \frac{(x-\alpha)^{n+p-1}}{(n+p-1)!} + \dots,
$$

qui doit être une solution de $D(z) = 0$, quelle que soit la constante arbitraire α.

Considérons, en effet, l'intégrale principale

$$
z(x, y, \alpha) = u_0 + u_1 \frac{(x-\alpha)}{1} + u_2 \frac{(x-\alpha)^2}{1.2} + \dots;
$$

en faisant, dans la formule (5),

$$
f(\alpha) = \frac{(\alpha - x_0)^{p-1}}{(p-1)!},
$$

on est conduit à l'intégrale nouvelle

$$
z_p(x, y, x_0) = u_0 \frac{(x-x_0)^p}{p!} + u_1 \frac{(x-x_0)^{p+1}}{(p+1)!} + \dots,
$$

qui est elle-même une intégrale principale, si l'on y regarde x_0 comme un paramètre; en faisant $p = n - 1$, on trouve l'intégrale z_{n-1}, à laquelle nous avons fait allusion plus haut.

Il est évident d'ailleurs que toute intégrale holomorphe qui s'annule avec toutes ses dérivées d'ordre inférieur à $n - 1$ pour $x = \alpha$; α désignant un paramètre variable est une intégrale principale; si l'on a pu trouver une pareille intégrale par un procédé quelconque, il suffira de la développer en série suivant les puissances de $x - \alpha$, les coefficients étant des fonctions de x et de y, pour avoir un système de valeurs des fonctions u_0, u_1, ...

Soit, par exemple, l'intégrale suivante, où l'on suppose $p \geqq n - 1$:

$$A_0 \frac{(x-\alpha)^p}{p!} + A_1 \frac{(x-\alpha)^{p+1}}{(p+1)!} + \ldots + A_r \frac{(x-\alpha)^{p+r}}{(p+r)!} + \ldots;$$

la suite des coefficients A_0, A_1, A_2, ... est l'un des systèmes de valeurs des coefficients u_0, u_1, u_2, ...

21. *Quand on connaît une intégrale principale particulière relative à la variable caractéristique x, on peut en déduire toutes les autres relatives à la même variable.*

En effet, soit $z(x, y, \alpha)$ l'intégrale considérée que je suppose différente de zéro pour $x = \alpha$. Dans l'expression

$$(12) \qquad Z = C z(x, y, x_0) + \int_{x_0}^{x} f(\alpha) z(x, y, \alpha)\, d\alpha$$

qui dépend du paramètre x_0, on peut disposer de la constante C et de la fonction arbitraire $f(\alpha)$, de telle façon que z devienne égale à une fonction arbitrairement choisie $\varphi(x)$ pour $y = y_0$. Cette proposition se trouve dans ma thèse (*Annales de l'École Normale*, p. 244; 1895). D'autre part, pour $x = x_0$, z et ses dérivées relatives à x satisfont aux conditions qui définissent les intégrales principales. Donc la formule (12) représente l'intégrale principale la plus générale relative à la caractéristique x.

Si l'on suppose $f(\alpha)$ holomorphe, elle est la somme d'éléments de la forme $C_r \frac{(\alpha - x_0)^{r-1}}{(r-1)!}$ et, par suite, l'intégrale considérée sera la somme d'éléments de la forme $C_r z_r(x, y, x_0)$

$$Z = C_0 z_0(x, y, x_0) + C_1 z_1 + C_2 z_2 + \ldots,$$

en écrivant z_0 au lieu de $z(x, y, x_0)$ pour plus d'uniformité. Donc les intégrales principales holomorphes sont développables en série linéaire de fonctions z_p.

D'autre part, il est évident que toute série convergente de cette forme représente une intégrale principale. Cette remarque s'appliquerait également aux séries ayant pour éléments des fonctions de la forme

$$z_\mu = u_0 \frac{(x-\alpha)^\mu}{\Gamma(\mu+1)} + u_1 \frac{(x-\alpha)^{\mu+1}}{\Gamma(\mu+2)} + \ldots + u_r \frac{(x-\alpha)^{\mu+r}}{\Gamma(\mu+r+1)} + \ldots,$$

μ désignant un nombre non entier quelconque supérieur à $n-2$. Mais les intégrales qu'on obtiendrait ainsi ne seraient plus holomorphes en x dans le voisinage de x_0.

Nous avons supposé que l'intégrale principale considérée était différente de zéro pour $x = \alpha$. Supposons maintenant qu'elle s'annule, tout en étant holomorphe; les dérivées de l'intégrale par rapport au paramètre α sont encore des intégrales principales jusques et y compris la première dérivée qui ne s'annule pas sur la caractéristique $x = \alpha$. On pourra donc en déduire également toutes les autres intégrales principales par la formule suivante :

$$Z = C_0 \frac{\partial^p z(x, y, x_0)}{\partial x_0^p} + C_1 \frac{\partial^{p-1} z}{\partial x_0^{p-1}} + \ldots + C_p z + \int_{x_0}^{x} f(\alpha) z(x, y, \alpha)\, d\alpha,$$

où p désigne l'ordre de la première dérivée qui ne s'annule pas pour $\alpha = x$.

En résumé, nous voyons qu'il existe des intégrales principales relatives aux différentes variables caractéristiques simples et que la connaissance d'une intégrale de chaque série permet de calculer toutes les autres de la même série. Soit ξ_i une variable caractéristique et $z(x, y, \alpha)$ une intégrale principale correspondante; l'intégrale

$$\int_{\theta_{i,0}}^{\theta_i} f(\alpha) z(x, y, \alpha)\, d\alpha$$

est une nouvelle solution de l'équation proposée, quelle que soit la fonction arbitraire $f(\alpha)$, θ_i désignant une fonction déterminée de ξ_i. On peut évidemment remplacer ξ_i par θ_i pour définir les caractéristiques, ou bien remplacer α par une fonction de α de telle façon que la limite supérieure de l'intégrale devienne ξ_i. Nous écrirons donc, en général,

$$\int_{\xi_{i,0}}^{\xi_i} f(\alpha) z(x, y, \alpha)\, d\alpha,$$

et nous appellerons *caractéristique paramétrique* de l'intégrale principale la caractéristique

$$\xi_i = \alpha.$$

22. *Des intégrales principales dans le cas des caractéristiques multiples.*

Envisageons maintenant le cas où x est une variable caractéristique double. Les coefficients des dérivées $\frac{\partial^n z}{\partial x^n}$ et $\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1} \partial y}$ sont nuls dans l'équation, mais $\frac{\partial^{n-1} z}{dx^{n-1}}$ peut avoir un coefficient différent de zéro. Ce coefficient, que nous avons appelé φ_1, ne contient plus d'indice de dérivation par rapport à y. Supposons donc $\varphi_1 \neq 0$. En nous reportant au calcul du n° **18**, nous trouvons

$$z_x = 0, \qquad z'_x = 0, \qquad \ldots, \qquad z_x^{(n-2)} = 0.$$

Or $x = \alpha$ étant une caractéristique du second ordre, on ne peut plus se donner arbitrairement sur cette caractéristique les valeurs de z et de ses $n-2$ premières dérivées extérieures : ces données, en général, ne correspondent à aucune intégrale holomorphe; mais, s'il en existe une qui y satisfasse, elle est entièrement déterminée. Dans le cas actuel, cette intégrale se réduit évidemment à zéro.

Soit maintenant $\varphi_1 = 0$. La dérivée $\frac{\partial^{n-1} x}{dx^{n-1}}$ ne figurant plus dans l'équation, les conditions trouvées au n° **18** donnent

$$
(13)\quad \left\{
\begin{array}{l}
\varphi_2 z_x = 0, \qquad \left. \begin{array}{r} \varphi_2 z'_x + C^1_{n-3}\varphi_2 \dfrac{\partial z_x}{\partial x} \\ + \varphi_3 z_x \end{array} \right| = 0. \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\left. \begin{array}{r} \varphi_2 z_x^{(n-2)} + C^1_{n-3}\varphi_2 \dfrac{\partial z_x^{(n-3)}}{\partial x} + C^2_{n-3}\varphi_2 \dfrac{\partial^2 z_x^{(n-4)}}{dx^2} + \dots \\ + \varphi_3 z_x^{(n-3)} \quad + C^2_{n-4}\varphi_3 \dfrac{\partial z_x^{(n-4)}}{\partial x} \\ + \varphi_4 z_x^{(n-4)}. \end{array} \right| = 0.
\end{array}
\right.
$$

Ce système définit successivement les fonctions $z_x, z'_x, z''_x, \dots, z_x^{(n-2)}$ par une équation différentielle du second ordre, quand on connaît toutes les précédentes. Pour achever de les déterminer, il faudra donc donner leurs valeurs initiales et celles de leurs dérivées premières par rapport à y, pour une valeur particulière y_0 de y. Ces valeurs seront elles-mêmes entièrement déterminées quand on connaîtra les valeurs de y, $\frac{\partial z}{\partial y}$, pour $y = y_0$ en fonction de x et de α.

Il existe donc dans le cas actuel, d'après notre second théorème fondamental, des intégrales principales dépendant de deux fonctions arbitraires.

Nous allons étudier le développement en série de ces intégrales. Les calculs du n° **21** sont applicables, car rien ne suppose dans l'établissement de nos formules que la dérivée symbolique $D^{(n-2)}_{x^{n-2}}$ soit du premier degré par rapport à y. Par conséquent, si l'on suppose l'intégrale développée suivant les puissances de $x - \alpha$, on trouvera, pour déterminer les coefficients du développement, la suite d'équations

$$
(14)\quad \left\{
\begin{array}{l}
\dfrac{1}{(n-2)!} D^{(n-2)}_{x^{n-2}}(u_0) = 0 \qquad \text{ou} \qquad \varphi_2(u_0) = 0, \\
\dfrac{1}{(n-2)!} D^{(n-2)}_{x^{n-2}}(u_1) + \dfrac{1}{(n-3)!} D^{(n-3)}_{x^{n-3}}(u_0) = 0, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\
\dfrac{1}{(n-2)!} D^{(n-2)}_{x^{n-2}}(u_p) + \dfrac{1}{(n-3)!} D^{(n-3)}_{x^{n-3}}(u_{p-1}) + \dots + \dfrac{1}{(n-r)!} D^{(n-r)}_{x^{n-r}}(u_{p-r-2}) + \dots = 0.
\end{array}
\right.
$$

Désignons par $f(x,\alpha)$, $\varphi(x,\alpha)$ les valeurs de z, $\frac{\partial z}{\partial y}$ pour $y=y_0$, et soient

$$f(x,\alpha)=f_0(x)+\frac{x-\alpha}{1}f_1(x)+\frac{(x-\alpha)^2}{1.2}f_2(x)+\ldots,$$

$$\varphi(x,\alpha)=\varphi_0(x)+\frac{x-\alpha}{1}\varphi_1(x)+\frac{(x-\alpha)^2}{1.2}\varphi_2(x)+\ldots;$$

les valeurs initiales des coefficients u et de leurs dérivées seront

$$u_i=f_i, \qquad \frac{\partial u_i}{\partial y}=\varphi_i.$$

23. *Systèmes fondamentaux.* — Soient $\zeta(x,y,\alpha)$, $\zeta'(x,y,\alpha)$ deux intégrales principales relatives à la caractéristique double x :

$$\zeta=u_0+\frac{x-\alpha}{1}u_1+\frac{(x-\alpha)^2}{1.2}u_2+\ldots,$$

$$\zeta'=v_0+\frac{x-\alpha}{1}v_1+\frac{(x-\alpha)^2}{1.2}v_2+\ldots.$$

Nous dirons qu'elles forment un système fondamental si le déterminant

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\zeta}{\partial y} & \frac{\partial\zeta'}{\partial y} \\ \zeta & \zeta' \end{vmatrix}$$

est différent de zéro. Nous supposerons même cette condition remplie pour $x=\alpha$; dans ce cas, les deux fonctions u_0 et v_0 forment elles-mêmes un système fondamental de solutions de l'équation

$$\varphi_2(u)=0.$$

Tel est le système défini par les fonctions initiales suivantes :

$$\zeta(x,y_0,\alpha)=1, \qquad \zeta'(x,y_0,\alpha)=0,$$

$$\left.\frac{\partial\zeta(x,y,\alpha)}{\partial y}\right|_{y=y_0}=0, \qquad \left.\frac{\partial\zeta'(x,y,\alpha)}{\partial y}\right|_{y=y_0}=1$$

et que nous appellerons un *système fondamental canonique* relatif à la courbe $y = y_0$.

Théorème. — *Lorsque ζ et ζ' sont deux intégrales principales relatives à x, formant un système fondamental, on peut disposer des fonctions arbitraires $f_1(\alpha)$ et $f_2(\alpha)$ et des constantes* C *et* C′ *de telle façon que l'expression*

$$(15)\quad \begin{cases} Z = C\zeta(x, y, x_0) + C'\zeta'(x, y, x_0) \\ \qquad + \int_{x_0}^{x} f_1(\alpha)\zeta(x, y, \alpha)\,d\alpha + \int_{x_0}^{x} f_2(\alpha)\zeta'(x, y, \alpha)\,d\alpha \end{cases}$$

satisfasse à des conditions initiales de la forme

$$(16)\quad \begin{cases} Z(x, y_0) = F(x), \\ \left.\dfrac{\partial Z}{\partial y}\right|_{y=y_0} = \Phi(x), \end{cases}$$

$F(x)$ *et* $\Phi(x)$ *désignant des fonctions arbitraires.*

Considérons, en effet, une équation du second ordre ne contenant aucune différentiation par rapport à x

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + P\frac{\partial z}{\partial y} + Qz = 0.$$

Soient z_1 et z_2 deux intégrales de cette équation formant un système fondamental; l'intégrale générale est

$$(17)\quad Z = z_1 X_1 + z_2 X_2,$$

X_1 et X_2 désignant deux fonctions arbitraires de x.

Prenons deux fonctions arbitraires $\varphi(x, \alpha)$, $\psi(x, \alpha)$ ne s'annulant pas pour $x = \alpha$ mais restant holomorphes. L'expression

$$(18)\quad Z = C_1 z_1 + C_2 z_2 + \int_{x_0}^{x} z_1 \varphi(x, \alpha) f_1(\alpha)\,d\alpha + \int_{x_0}^{x} z_2 \psi(x, \alpha)\,d\alpha$$

est équivalente à l'expression (17), car les intégrales

$$C_1 + \int \varphi(x, \alpha) f_1(\alpha)\, d\alpha,$$

$$C_2 + \int \psi(x, \alpha) f_2(\alpha)\, d\alpha$$

peuvent représenter des fonctions arbitrairement choisies de x.

Il résulte donc de là qu'on peut disposer des arbitraires de la forme (18) pour satisfaire aux conditions initiales (16), pourvu que le déterminant

$$\begin{vmatrix} z_1\varphi(x, x) & z_2\psi(x, x) \\ \dfrac{\partial}{\partial y}[z_1\varphi(x, x)] & \dfrac{\partial}{\partial y}[z_2\psi(x, x)] \end{vmatrix}$$

soit différent de zéro.

Comme nous n'avons fait aucune hypothèse sur les fonctions $\varphi(x, \alpha)$, $\psi(x, \alpha)$, qui ne s'applique aux fonctions $\zeta(x, y_0, \alpha)$, $\zeta'(x, y_0, \alpha)$, notre théorème est démontré.

Dans le cas où le système fondamental considéré est canonique pour la courbe $y = y_0$, la détermination des fonctions arbitraires qui satisfont aux conditions initiales (16) est immédiate.

Il est facile de déduire de ce qui précède l'expression générale des intégrales principales relatives à la caractéristique double. Il suffit de considérer, dans la formule (16), x_0 comme un paramètre, les constantes C, C' et les fonctions $f(\alpha)$, $\varphi(\alpha)$ pouvant elles-mêmes dépendre de ce paramètre. Les résultats qu'on en déduirait sont entièrement analogues à ceux que nous avons établis dans le cas des caractéristiques simples.

24. L'étude que nous venons de faire indique la marche à suivre pour l'étude des intégrales principales dans le cas des caractéristiques multiples d'ordre supérieur au second. Nous n'entreprendrons pas cette étude pour le cas général. Nous nous contenterons de signaler l'analogie qui existe entre la recherche des intégrales principales et celle des asymptotes des courbes algébriques. La détermination des caractéristiques peut être assimilée à celle des directions asymptotiques et les conditions d'existence des intégrales principales sont analogues à celles des asymptotes relatives à une direction donnée.

23. *Représentation de l'intégrale générale par les intégrales principales.*

Considérons une équation à caractéristiques toutes distinctes, et soient $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ un système de fonctions caractéristiques, $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ un système correspondant d'intégrales principales.

L'expression

$$(19) \qquad \sum_{i=1}^{i=n} \int_{\xi_{i,0}}^{\xi_i} f_i(\alpha)\zeta_i(x, y, \alpha)\,d\alpha,$$

où les $\xi_{i,0}$ désignent des valeurs initiales quelconques, représente une intégrale de l'équation $D(z) = 0$ dépendant de n fonctions arbitraires. Nous allons montrer que, moyennant certaines conditions, c'est l'intégrale générale. Nous considérerons pour cela, au lieu de l'expression (19), la suivante

$$(19') \qquad z = \sum C_i\zeta_i(x, y, \alpha_0) + \sum_{i=1}^{i=n} \int_{\xi_{i,0}}^{\xi_i} f_i(\alpha)\zeta_i(x, y, \alpha)\,d\alpha.$$

Il s'agit de faire voir qu'il est en général possible de disposer des arbitraires de la formule (19') de manière que, pour $y = y_0$, la fonction z et ses $n-1$ premières dérivées extérieures prennent des valeurs choisies arbitrairement. Quand on fait $y = y_0$, les ξ_i deviennent des fonctions de x que nous désignerons par ξ'_i; aucune d'entre elles ne se réduit à une constante. Les dérivées par rapport à y d'un terme quelconque de la formule (19') contiennent en général, en dehors du signe d'intégration, des termes dépendant de la fonction arbitraire et de ses dérivées. Pour éviter d'introduire ces termes dans les expressions que nous aurons à considérer, je suppose que les intégrales principales s'annulent sur les caractéristiques paramétriques, ainsi que leurs dérivées, jusqu'à l'ordre $n-2$ inclusivement, les dérivées d'ordre

$n-1$ n'étant pas toutes nulles. Négligeant alors les termes additionnels $\Sigma C_i \zeta_i(x, y, \alpha_0)$, je vais démontrer que l'on peut, en général, disposer des arbitraires de la formule (19) de manière que les dérivées

$$\frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{n-1}}, \quad \frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{n-2}\partial y}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{n-1} z}{\partial y^{n-1}},$$

prennent des valeurs données à l'avance, en fonction de x pour $y = y_0$. Nous supposerons que ces fonctions arbitraires s'annulent au point (x_0, y_0) : cette hypothèse ne restreint pas la généralité de la formule (19′) à cause des termes additionnels qui y figurent.

Nous avons à résoudre un système d'équations de la forme suivante:

$$(20) \qquad \varphi_k(x) = \sum_{i=1}^{i=n} \int_{\xi_{i0}}^{\xi'_i} f_i(\alpha) \frac{\partial^{n-1} \zeta_i(x, y, \alpha)}{\partial x^{n-k-1} \partial y^k} d\alpha \qquad (y = y_0).$$

Considérons une équation quelconque d'ordre n ne contenant aucune dérivée par rapport à x

$$(21) \qquad \frac{\partial^n z}{\partial y^n} + P_1 \frac{\partial^{n-1} z}{\partial y^{n-1}} + P_2 \frac{\partial^{n-2} z}{\partial y^{n-2}} + \ldots + P_n z = 0.$$

Toute intégrale de cette équation est une intégrale principale. Déterminons un système d'intégrales $u_i(x, y, \alpha)$ par la condition que l'on ait pour $y = y_0$

$$\frac{\partial^{n-1} u_i}{\partial x^{n-k-1} \partial y^k} = \frac{\partial^{n-1} \zeta_i(x, y, \alpha)}{\partial x^{n-k-1} \partial y^k}.$$

Si les intégrales u_i forment un système fondamental, l'intégrale générale de l'équation (21) est

$$(22) \qquad z = \sum C_i u_i(x, y, \alpha_{i,0}) + \sum_{i=0}^{i=n} \int_{\xi_{i0}}^{\xi'_i} f_i(\alpha) u_i(x, y, \alpha) \, d\alpha,$$

comme cela résulte de la remarque du n° **23** généralisée. On peut donc disposer des arbitraires de la formule, de manière que z prenne pour $y = y_0$, ainsi que ses $n-1$ premières dérivées extérieures, des valeurs données à l'avance en fonction de x. Par suite, les équations (20) peuvent elles-mêmes être résolues, pourvu que le déterminant

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^{n-1}\zeta_1}{\partial x^{n-1}} & \frac{\partial^{n-1}\zeta_2}{\partial x^{n-1}} & \cdots & \frac{\partial^{n-1}\zeta_n}{\partial x^{n-1}} \\ \frac{\partial^{n-1}\zeta_1}{\partial x^{n-2}\partial y} & \frac{\partial^{n-1}\zeta_2}{\partial x^{n-2}\partial y} & \cdots & \frac{\partial^{n-1}\zeta_n}{\partial x^{n-2}\partial y} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \frac{\partial^{n-1}\zeta_1}{\partial y^{n-1}} & \frac{\partial^{n-1}\zeta_2}{\partial y^{n-1}} & \cdots & \frac{\partial^{n-1}\zeta_n}{\partial y^{n-1}} \end{vmatrix}$$

soit différent de zéro.

Il est d'ailleurs possible de traiter directement ce problème, comme nous avons déjà traité le problème relatif à l'intégrale

$$\int f(\alpha)\varphi(x,\alpha)\,d\alpha,$$

dans notre Mémoire sur les équations du second ordre.

On voit donc que l'intégrale générale de l'équation $D(z) = 0$ est bien représentée par la formule (19′) ou par la formule suivante, où l'on suppose les limites inférieures indéterminées :

$$(23) \qquad z = \sum \int^{\xi_i} f(\alpha)\zeta_i(x,y,\alpha)\,d\alpha.$$

Lorsqu'il y a des caractéristiques multiples, l'intégrale n'est plus, en général, complètement représentable par cette formule, à moins qu'il n'existe un système fondamental d'intégrales principales.

26. Chaque terme de la formule (23) peut être développé en série ordonnée suivant les intégrales successives d'une fonction arbitraire.

Désignons par $S_n F(\xi)$ l'intégrale $n^{\text{ième}}$ de $F(\xi)$ prise à partir d'une limite inférieure quelconque

$$S_n F(\xi) = \int^{\xi} \frac{(\xi-\alpha)^{n-1}}{(n-1)!} F'(\alpha)\,d\alpha,$$

de telle façon que l'on ait

$$\frac{d^p S_n F(\xi)}{d\xi^p} = S_{n-p} F(\xi).$$

On a

$$(24)\quad \begin{cases} \displaystyle\int^{\xi} F'(\alpha)\zeta(x,y,\alpha)\,d\alpha \\ \displaystyle = \sum \int^{\xi} F'(\alpha) \frac{u_p(x,y)}{p}\, \frac{(\xi-\alpha)^p}{1}\,d\alpha \\ = u_0 F(\xi) + u_1 S_1 F(\xi) + u_2 S_2 F(\xi) + \ldots + u_n S_n F(\xi) + \ldots. \end{cases}$$

Toutes les intégrations sont faites à partir d'une même limite inférieure et la série précédente admet, en général, un domaine de convergence dans le voisinage de cette limite.

Dans le cas des caractéristiques distinctes, toute intégrale est la somme de n séries particulières de la forme (24). La fonction arbitraire de chaque série dépendant d'une variable caractéristique, il en résulte que la formule (23) [ou la formule équivalente (19)] met en évidence la portion de l'intégrale générale qui se trouve plus particulièrement liée à chacune de ces variables.

On sait que l'intégrale générale de l'équation $\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = 0$ est

$$z = F(x) + F_1(y);$$

la forme (19), (23), (24) peut être regardée comme la généralisation de cette formule. J'ai pensé, d'après ces considérations, que l'on pouvait donner au terme

$$\int^{\xi_i} f_i(\alpha)\zeta_i\,d\alpha$$

de l'intégrale générale le nom d'*intégrale partielle*, relative à la caractéristique ξ_i.

27. *Forme d'Euler.* — Parmi les intégrales principales relatives à une même caractéristique ξ, il peut quelquefois en exister dont le développement en série soit limité. Soit, par exemple,

$$\zeta(x,y,\alpha) = u_0 + u_1 \frac{\xi-\alpha}{1} + u_2 \frac{(\xi-\alpha)^2}{1.2} + \ldots + u_p \frac{(\xi-\alpha)^p}{p!}.$$

L'intégrale partielle correspondante devient

$$u_0 \mathrm{F}(\xi) + u_1 \mathrm{S}\,\mathrm{F}(\xi) + \ldots + u_p \mathrm{S}_p \mathrm{F}(\xi);$$

ou bien, en posant $\mathrm{S}_p \mathrm{F}(\xi) = \varphi(\xi)$,

$$u_0 \frac{d^p \varphi(\xi)}{d\xi^p} + u_1 \frac{d^{p-1}\varphi(\xi)}{d\xi^{p-1}} + \ldots + u_p \varphi(\xi).$$

Cette forme est bien connue pour les intégrales partielles des équations du second ordre, intégrables par la méthode de Laplace : nous l'appellerons la *forme d'Euler*.

Une intégrale de la forme d'Euler dérive toujours, nécessairement, d'une intégrale principale, quel que soit l'ordre de multiplicité de la caractéristique correspondante. Les équations de la forme (11) qui déterminent les coefficients successifs permettent de reconnaître si le développement peut se limiter. En égalant à zéro tous les coefficients dont l'indice est supérieur à p, nous avons le système suivant dans le cas d'une caractéristique simple x :

$$\frac{1}{(n-1)!} \mathrm{D}^{(n-1)}_{x^{n-1}}(u_0) = 0,$$

$$\frac{1}{(n-1)!} \mathrm{D}^{(n-1)}_{x^{n-1}}(u_1) + \frac{1}{(n-2)!} \mathrm{D}^{(n-2)}_{x^{n-2}}(u_0) = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{(n-1)!} \mathrm{D}^{(n-1)}_{x^{n-1}}(u_n) + \frac{1}{(n-2)!} \mathrm{D}^{(n-2)}_{x^{n-2}}(u_{n-1}) + \ldots + \mathrm{D}(u_1) = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{1}{(n-2)!} \mathrm{D}^{(n-2)}_{x^{n-2}}(u_p) + \frac{1}{(n-3)!} \mathrm{D}^{(n-3)}_{x^{n-3}}(u_{p-1}) + \ldots = 0,$$

$$\frac{1}{(n-3)!} \mathrm{D}^{(n-3)}_{x^{n-3}}(u_p) + \frac{1}{(n-4)!} \mathrm{D}^{(n-4)}_{x^{n-4}} u_{(p-1)} + \ldots = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\mathrm{D}(u_p) = 0.$$

Il sera nécessaire et suffisant que ces équations soient compatibles pour qu'il existe une intégrale de la forme considérée.

On pourrait trouver pour les équations de cette espèce une méthode de réduction analogue à celle de Laplace. Je la développerai dans un autre Mémoire.

TROISIÈME PARTIE

SINGULARITÉS ACCIDENTELLES.

28. Les points singuliers des intégrales d'une équation linéaire sont de deux sortes : 1° les points singuliers *propres*, dont la position est entièrement déterminée par les coefficients de l'équation; 2° les points singuliers *accidentels* qui dépendent des fonctions initiales.

J'ai déjà introduit ces dénominations dans mon Mémoire sur les équations du second ordre. Le nom de *singularités accidentelles* m'a paru propre à caractériser celles qui dépendent des conditions initiales. Ces singularités n'affectent pas d'une manière normale la généralité des intégrales : elles interviennent en quelque sorte accidentellement et varient d'une intégrale à l'autre. Lorsque les fonctions initiales dépendent de certains paramètres, les points singuliers accidentels correspondants peuvent également varier avec ces paramètres: nous les appellerons dans ce cas des *points singuliers mobiles*.

Dans le cas général où les caractéristiques sont partout simples, sauf sur la courbe discriminante, et où, par conséquent, l'intégrale est représentée par la formule (19'), la nature et la forme des singularités accidentelles sont immédiatement évidentes.

Considérons un terme de la formule

$$\int_{\xi_0}^{\xi} f(\alpha)\zeta(x, y, \alpha)\, d\alpha,$$

et soit $\alpha = t$ un point critique de la fonction $f(\alpha)$, le terme considéré admettra pour points critiques tous les points de la caractéristique $\xi = t$, sauf peut-être dans le cas où ces points seraient déjà des points critiques de l'intégrale principale ζ. Mais cette hypothèse peut toujours être exclue si la caractéristique $\xi = t$ n'est pas une ligne singulière propre des coefficients de l'équation.

Soit maintenant (x_1, y_1) un point critique accidentel de l'intégrale Z; ce sera nécessairement un point critique de l'un des termes, et comme il est permis de supposer l'intégrale principale correspondante holomorphe au point considéré, il faudra que le point $\alpha = \xi(x_1, y_1)$ soit un point critique de la fonction $f(\alpha)$; mais alors tous les points de la caractéristique

$$\xi(x, y) = \xi(x_1, y_1)$$

sont des points critiques de l'intégrale; nous avons donc ce théorème :

Lorsqu'un point P *est un point singulier accidentel d'une intégrale* z *d'une équation linéaire* $D(z) = 0$ *à caractéristiques distinctes, l'intégrale admet comme courbe singulière toute une caractéristique passant par* P.

Les lignes singulières accidentelles sont donc des caractéristiques, en nombre limité ou illimité, formant une suite continue ou discontinue.

29. Il est facile d'étendre cette propriété au cas où l'intégrale n'est pas entièrement représentable par la formule (23).

Considérons une courbe analytique (C) qui ne soit pas une ligne critique propre; si (C) n'est pas une caractéristique, nous pourrons trouver une portion P de la courbe qui ne contienne aucun point à tangentes caractéristiques, ni points singuliers des coefficients de l'équation, ni points de la courbe discriminante. Cette portion de courbe admet un *domaine régulier* Σ', l'englobant entièrement et n'ayant de commun avec elle que le contour. Prenons une seconde courbe analytique infiniment voisine (C′) ne coupant pas C sur la portion (P) et jouissant des mêmes propriétés. Soit Σ' le domaine régulier de (P′). Les deux domaines Σ et Σ' se déduisent l'un de l'autre par une déformation continue, car les coefficients du polynome (*voir* n° **14**)

$$\varphi\left(S, \frac{1}{\rho}\right)$$

sont des fonctions continues. Nous pouvons donc supposer (P′) assez voisin de (P) pour que Σ' contienne telle portion que nous voudrons de (P). Donc, si (P) contient des points singuliers accidentels, nous pourrons admettre que quelques-uns de ces points soient contenus dans Σ'. Les valeurs de l'intégrale et de ses $n-1$ premières dérivées extérieures ne seraient donc pas holomorphes sur (P'). Par conséquent (P') contiendrait également des points singuliers.

Il résulte de là que les points singuliers accidentels ne sont jamais isolés; si une courbe analytique en contient, toute courbe infiniment voisine en contient également, à moins que la première ne soit une *caractéristique*. Par conséquent :

Les courbes singulières accidentelles sont toujours des caractéristiques.

30. Je rappelle ici la démonstration que j'ai donnée dans ma thèse, de cette même propriété, en partant de considérations très simples, mais qui exigent toutefois quelques restrictions. Supposons que la droite $x=a$ soit une ligne singulière accidentelle; lorsque nous ferons tendre x vers a par un chemin déterminé de longueur finie, z et ses $n-1$ premières dérivées extérieures peuvent tendre vers des limites holomorphes en y, ou devenir infinies, ou ne tendre vers aucune limite sans devenir infinies. Laissons de côté ce dernier cas. Si les fonctions considérées tendent vers des limites holomorphes, elles déterminent une intégrale holomorphe, pourvu que $x=a$ ne soit pas une caractéristique; en retranchant de z cette intégrale holomorphe, nous aurons une intégrale qui s'annule sur la droite $x=a$.

Cela posé, considérons une fonction $\varphi(x,y)$ qui s'annule ou devient infinie pour $x=a$; les rapports $\frac{\varphi'_x}{\varphi}$, $\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}$ ne pourront tendre vers aucune limite finie. Cette propriété est évidente pour le premier rapport; elle l'est aussi pour le second, si l'on se reporte aux propriétés des équations linéaires du premier ordre. Soit, en effet, $\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}=\mathrm{B}(x,y)$; φ est alors une intégrale de l'équation

$$\varphi'_x-\mathrm{B}(x,y)\varphi'_y=0,$$

et toute intégrale de cette équation demeure constante sur une caractéristique quelconque. Cette considération m'a conduit à définir les fonctions *normales* sur une ligne singulière (¹). Pour les intégrales normales, la dérivée $\frac{\partial^n z}{\partial x^n}$ sera infinie par rapport à toutes les autres dérivées du même ordre ou d'ordre inférieur si la fonction z et ses $n-1$ premières dérivées extérieures sont nulles ou infinies pour $x=a$. Cette dérivée doit donc disparaître de l'équation et, par suite, la droite $x=a$ doit être une caractéristique.

31. Il importe de remarquer que le résultat auquel nous sommes parvenu relativement à la nature des lignes singulières accidentelles n'est pas en opposition avec les résultats connus dans le cas des variables réelles. On sait que les intégrales analytiques réelles d'équations du second ordre, à caractéristiques imaginaires, peuvent admettre comme lignes singulières accidentelles des courbes quelconques du plan réel : telle serait par exemple une fonction harmonique admettant comme coupure le cercle $x^2+y^2-1=0$. Mais si l'on restitue aux variables x et y le domaine entier des valeurs complexes (ce qui est permis, puisqu'il s'agit de fonctions analytiques), on trouve que le cercle considéré ne constitue pas une courbe singulière; seuls les points réels de ce cercle sont des points singuliers; les véritables *courbes* singulières sont des caractéristiques, c'est-à-dire les droites isotropes issues des différents points réels du cercle.

Considérons, au contraire, le cas où toutes les caractéristiques sont réelles et supposons que l'intégrale admette comme courbe singulière réelle, accidentelle, une certaine courbe C. L'une au moins des caractéristiques passant en chaque point de C sera une courbe singulière, et l'ensemble de ces caractéristiques couvrira le plan réel dans le voisinage de C. Donc l'intégrale ne sera pas analytique dans la région considérée.

32. Dans le cas où l'intégrale est complètement représentable par la formule (19′), la partie de cette intégrale qui dépend plus particulièrement de la variable caractéristique simple ξ est figurée par un

(¹) Voir mon Mémoire déjà cité sur les équations du second ordre.

terme de la forme

$$v = \int^{\xi} f(\alpha)\zeta(x, y, \alpha)\,d\alpha. \tag{1}$$

C'est donc l'étude de cette expression qui donnera la forme des singularités accidentelles.

Les résultats que j'ai obtenus à cet égard dans mon Mémoire sur les équations du second ordre sont évidemment applicables au cas qui nous occupe. Je me contente d'en rappeler les principaux points.

Supposons qu'une intégrale z s'annule sur la caractéristique singulière $\xi = \xi_0$, ainsi que ses dérivées extérieures jusqu'à l'ordre $n-2$ inclusivement, ou bien qu'elle croisse indéfiniment lorsque ξ tend vers ξ_0 suivant un chemin déterminé. Il existera alors ordinairement des fonctions $F(\xi)$ de ξ seul, telles que le rapport

$$\frac{z}{F(\xi)}$$

soit une fonction continue de x et de y lorsque ξ tend vers ξ_0 en suivant le chemin considéré.

L'intégrale principale $\zeta(x, y, \alpha)$ peut toujours, à cause des arbitraires dont elle dépend, être supposée holomorphe dans le voisinage de la caractéristique singulière étudiée, sauf en certains points de cette caractéristique. Soit

$$\zeta(x, y, \alpha) = u_0 + u_1\frac{(\xi-\alpha)}{1} + u_2\frac{(\xi-\alpha)^2}{1.2} + \ldots;$$

admettons que la fonction $f(\alpha)$ soit uniforme dans le domaine du point $\alpha = \xi_0$.

L'intégration de la formule (1) introduira alors en général un logarithme, et, pour que ce logarithme disparaisse, il faudra entre les coefficients u à l'infini des relations de la forme

$$a_0 u_0 + a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_n u_n + \ldots = 0,$$

les a désignant des fonctions de ξ; c'est-à-dire que l'on puisse développer o en série de fonctions u sur les caractéristiques $\xi =$ constante.

Nous arrivons donc à cette conclusion intéressante et inattendue que *l'intégrale d'une équation linéaire ne peut pas, en général, être uniforme dans le domaine d'une caractéristique singulière accidentelle.*

La condition pour qu'il existe des caractéristiques polaires accidentelles est facile à trouver.

Soit $z(x, y, t)$ une intégrale admettant la caractéristique singulière mobile $\xi = t$, t désignant un paramètre variable.

L'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int F(t)\, z(x, y, t)\, dt,$$

prise autour du point $t = \xi$, donnera une nouvelle solution de la forme suivante, dépendant de la fonction arbitraire $F(\xi)$

$$A_0 F(\xi) + A_1 F'(\xi) + \ldots + A_n F^{(n)}(\xi).$$

L'équation admet donc une intégrale partielle de la forme d'Euler; nous pouvons l'appeler, pour abréger, une *équation eulérienne*.

La réciproque est évidente : toute équation *eulérienne* admet une infinité d'intégrales possédant des *caractéristiques polaires* accidentelles, ou même des caractéristiques singulières pour lesquelles la singularité est de la nature des points singuliers essentiels d'une fonction d'une seule variable. Mais ces caractéristiques appartiennent toujours aux familles pour lesquelles l'équation présente le caractère eulérien, et l'ordre du pôle ne peut jamais être inférieur au *rang* de la solution partielle correspondante. Ce qui précède nous amène à nous poser la question suivante, que je n'ai pas résolue.

En dehors des *équations eulériennes*, y a-t-il des équations linéaires aux dérivées partielles admettant des intégrales uniformes dans le voisinage de caractéristiques singulières accidentelles? On pourrait considérer ces équations, s'il en existe, comme des cas limites d'équations eulériennes pour lesquelles le *rang* de la solution augmenterait indéfiniment.

33. Comme dans le cas du second ordre, les intégrales admettant des caractéristiques singulières mobiles peuvent servir à intégrer complètement ou partiellement l'équation aux dérivées partielles.

Soit $z(x, y, \alpha)$ une intégrale dépendant du paramètre α et telle qu'en la considérant comme fonction de α elle admette des points critiques $\alpha = \xi_i(x, y)$ $(i = 1, 2, \ldots)$.

En la considérant comme fonction de x et de y, elle admettra alors les courbes critiques

$$\xi_i(x, y) = \alpha.$$

Donc les ξ_i sont des variables caractéristiques qui peuvent être de même espèce ou d'espèces différentes.

Toute intégrale de la forme

$$\int f(\alpha)\, z(x, y, \alpha)\, d\alpha$$

prise autour d'un point critique $\alpha = \xi_i$ sera une solution particulière de l'équation aux dérivées partielles; elle dépend d'une fonction arbitraire $f(\alpha)$ placée sous un signe d'intégration.

Ces expressions donnent lieu à des remarques analogues à celles que nous avons déjà faites à l'occasion des équations du second ordre. On pourra, dans certains cas, comme nous l'avons indiqué, en déduire des intégrales principales relatives à une ou plusieurs des variables caractéristiques.