JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

E. JAHNKE

Nouvelles expressions des éléments d'un système orthogonal par les fonctions sigma d'un seul argument et leur application à la rotation de corps solides liés l'un à l'autre

Journal de mathématiques pures et appliquées 5e série, tome 5 (1899), p. 155-174.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1899_5_5__155_0>

Nouvelles expressions des éléments d'un système orthogonal par les fonctions sigma d'un seul argument et leur application à la rotation de corps solides liés l'un à l'autre;

PAR M. E. JAHNKE.

Dans un Mémoire, couronné par l'Académie des Sciences, M^me^ de Kowalevsky a ramené aux quadratures un nouveau cas important du problème de la rotation d'un corps solide pesant autour d'un point fixe. Dès lors, l'attention des géomètres les plus distingués s'est dirigée vers d'autres cas du même problème.

M^me^ de Kowalevsky a réussi à exprimer, au moyen des fonctions hyperelliptiques de deux arguments, les trois composantes de la vitesse de rotation suivant les axes rectangulaires fixes, et trois des neuf cosinus directeurs. Cependant, à cause des difficultés du calcul, elle s'est dispensée de représenter les six autres cosinus et les trois composantes de rotation suivant les axes mobiles. C'est M. F. Kötter qui a comblé les lacunes laissées par M^me^ de Kowalevsky.

De plus, M. A. Wangerin et, quelques années plus tard, M. V. Volterra ont traité un cas très intéressant et important de la rotation de corps solides liés l'un à l'autre. M. Wangerin a montré que ce cas se ramène aux quadratures, et M. Volterra a représenté, au moyen des fonctions sigma de Weierstrass, les trois composantes de rotation suivant les axes mobiles, et trois des neuf cosinus directeurs, mais les expressions *définitives* des six autres cosinus directeurs et des trois composantes de rotation suivant les axes fixes manquent encore.

Dans ce Mémoire je m'occupe du même problème pour en donner la solution *complète*. En même temps je ferai voir qu'on peut obtenir tous les éléments dudit problème d'un seul coup et presque sans aucun calcul, de sorte que la solution en paraît être réduite à un haut degré de simplicité et d'élégance.

Dans ce but, j'ai adopté une méthode toute différente de celle qu'ont employée M[me] de Kowalevsky et MM. F. Kötter, A. Wangerin, V. Volterra, W. Stekloff, A. Ljapunoff et R. Liouville. Ces géomètres ont pris pour point de départ les principes de la Mécanique afin d'en déduire les équations différentielles, et en ont cherché les intégrales par des raisonnements ingénieux. La nouvelle méthode, due à M. F. Caspary, sépare nettement la partie analytique de la solution de celle qui appartient à la Mécanique, et elle est fondée sur un théorème analytique très général découvert par M. F. Caspary. Ce théorème lie les neuf cosinus a_{mn} d'un système orthogonal et les six quantités

$$\begin{aligned} p_h &= -(a_{1k}da_{1l} + a_{2k}da_{2l} + a_{3k}da_{3l}) \\ r_h &= \quad a_{k1}da_{l1} + a_{k2}da_{l2} + a_{k3}da_{l3} \end{aligned} \qquad \left(h, k, l = \begin{matrix} 1, 2, 3 \\ 2, 3, 1 \\ 3, 1, 2 \end{matrix} \right),$$

que M. F. Caspary a appelé les quinze *éléments* d'un système orthogonal, aux fonctions thêta d'un nombre quelconque d'arguments. Les expressions des *éléments* d'un système orthogonal par les fonctions thêta se déduisent d'identités algébriques au moyen des transformations du second degré. Elles satisfont à certaines équations, tantôt algébriques, tantôt différentielles. Les unes se présentent dans les problèmes de la Mécanique dont on cherche les intégrales, tandis que les autres fournissent les relations algébriques par lesquelles ces intégrales sont liées entre elles; les unes et les autres renferment encore des arguments et des fonctions quelconques qui se déterminent par les données de la question proposée.

Pour illustrer sa méthode, M. F. Caspary en a donné deux applications : l'une relative au problème de la rotation d'un corps solide, où il retrouve les résultats dus à Jacobi, Lottner, Dumas, Halphen et à MM. Hermite, Darboux et Hess; l'autre relative au mouvement d'un corps solide dans un liquide, où il obtient les résultats de M. H. Weber.

En adoptant cette méthode féconde, j'en ai donné d'autres applications. On sait que M. F. Kötter a établi un système orthogonal dont découlent les solutions de divers problèmes de la Mécanique. Ce géomètre exprime, au moyen des fonctions thêta de deux arguments, les neuf cosinus directeurs et les trois composantes de rotation suivant les axes fixes. Il manque seulement les expressions *définitives* des trois composantes de rotation suivant les axes du système mobile. J'ai déduit tous les *éléments* de ce système orthogonal, dans un Mémoire inséré au Tome CXIX du *Journal* de M. L. Fuchs et dont cet illustre géomètre a bien voulu présenter un résumé à l'Académie des Sciences de Berlin.

En poursuivant ces recherches, j'ai été conduit à généraliser la notion usuelle de composition en composant un système orthogonal (A) avec *quatre* systèmes orthogonaux ($\mathfrak{A}$), ($\mathfrak{B}$), ($\mathfrak{C}$), (E), dont les deux ($\mathfrak{A}$), ($\mathfrak{B}$) sont *adjoints* au système ($\mathfrak{C}$). Ce nouveau système, que j'ai eu l'honneur de communiquer récemment à l'Académie, joue un rôle important dans l'étude des problèmes de Dynamique. En effet, c'est de ce résultat que découle, comme conséquence immédiate, une généralisation de ce célèbre théorème de Jacobi qui permet de décomposer le mouvement d'un corps grave de révolution, suspendu par un point de son axe, en deux mouvements à la Poinsot. De l'autre côté, si on laisse le système (E) quelconque et que l'on exprime les éléments des trois autres systèmes ($\mathfrak{A}$), ($\mathfrak{B}$), ($\mathfrak{C}$) par les fonctions thêta de deux arguments, on retrouve le système découvert par M. F. Kötter. En supposant, au contraire, les coefficients du système ($\mathfrak{C}$) et, par conséquent, des systèmes ($\mathfrak{A}$) et ($\mathfrak{B}$) constants, et en représentant les éléments du système (E) par les fonctions thêta, on obtient de nouveaux systèmes orthogonaux qui renferment les solutions de nouveaux problèmes de Dynamique. Particulièrement, en introduisant les fonctions sigma de Weierstrass, on parvient à résoudre le problème de la rotation de corps solides liés l'un à l'autre, dans le cas traité par MM. Wangerin et Volterra.

Le présent Mémoire se divise en deux parties, partie analytique et partie dynamique.

Dans la partie analytique, j'exprime identiquement les quinze *éléments* d'un système orthogonal par les *éléments* de quatre systèmes orthogonaux, et je déduis de ces identités, au moyen des résultats dus à M. F. Caspary, le théorème I qui lie d'une façon nouvelle les *éléments* d'un système orthogonal aux fonctions sigma (n° **1**).

Puis j'en tire les relations caractéristiques et les équations différentielles de premier ordre qui existent entre les *éléments* de ce système orthogonal. En introduisant une fonction quadratique T qui s'exprime dans deux formes différentes, je réduis, dans le théorème II, les équations différentielles à une forme très simple qui se présente, d'ailleurs, dans une classe très étendue de problèmes de Mécanique (n° **2**).

Le théorème III donne les relations qui lient les intégrales de ces équations différentielles (n° **3**).

Il est évident qu'il existe encore bien d'autres équations différentielles. Je signale parmi elles les équations aux dérivées partielles ayant la forme de celles qui se présentent aussi dans la rotation d'un corps solide pesant autour d'un point fixe et dans le mouvement d'un corps solide dans un liquide (n° **4**).

Dans la partie dynamique, les deux formes que j'ai données à la fonction T me conduisent à soumettre les coefficients qui entrent dans les expressions du théorème I à deux systèmes différents de conditions. Ainsi j'arrive aux deux formes des équations différentielles appartenant au problème mentionné ci-dessus de trouver le mouvement de n corps solides pesants dont l'un tourne autour de son centre de gravité et les autres $n-1$ corps de révolution autour d'axes fixés au premier corps. De plus, lesdites équations de condition donnent naissance à deux expressions différentes de la force vive T qui sont identiques à celles que l'on doit à MM. Wangerin et Volterra (n° **6**).

Afin que les expressions établies dans le théorème I fournissent, comme cas spécial, la solution *complète* dudit problème de rotation, je détermine encore par les données des équations différentielles les quantités quelconques qui y entrent (n° **7**).

Toutes les formules que j'ai données dans les théorèmes I, II, III peuvent être généralisées de façon à obtenir la solution d'un problème de rotation plus général (n^{os} **5**, **8**).

PREMIÈRE PARTIE.

1. *Théorème relatif aux fonctions sigma.* — Soient $\mathfrak{c}_{ij}(i, j = 1, 2, 3, 4)$ les coefficients du système orthogonal $(\mathfrak{C})$ liés entre eux par les relations

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{c}_{i1}\mathfrak{c}_{j1} + \mathfrak{c}_{i2}\mathfrak{c}_{j2} + \mathfrak{c}_{i3}\mathfrak{c}_{j3} + \mathfrak{c}_{i4}\mathfrak{c}_{j4} &= 0 \\ \mathfrak{c}_{1i}\mathfrak{c}_{1j} + \mathfrak{c}_{2i}\mathfrak{c}_{2j} + \mathfrak{c}_{3i}\mathfrak{c}_{3j} + \mathfrak{c}_{4i}\mathfrak{c}_{4j} &= 0 \\ \mathfrak{c}_{i1}^2 + \mathfrak{c}_{i2}^2 + \mathfrak{c}_{i3}^2 + \mathfrak{c}_{i4}^2 &= \mathfrak{C} \\ \mathfrak{c}_{1i}^2 + \mathfrak{c}_{2i}^2 + \mathfrak{c}_{3i}^2 + \mathfrak{c}_{4i}^2 &= \mathfrak{C} \end{aligned}\right\} \quad (i \neq j;\ i, j = 1, 2, 3, 4).$$

et $\mathfrak{a}_{mn}$, $\mathfrak{b}_{mn}\,(m \neq n;\ m, n = 1, 2, 3)$ ceux des systèmes orthogonaux $(\mathfrak{A})$, $(\mathfrak{B})$, liés entre eux par les relations analogues.

Désignons par

$$\mathfrak{c}_{ij}^{rs} = \mathfrak{c}_{ri}\mathfrak{c}_{sj} - \mathfrak{c}_{rj}\mathfrak{c}_{si}$$

les mineurs de deuxième ordre du déterminant $|\mathfrak{c}_{ij}|$ et posons

$$(1) \quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{C}\mathfrak{a}_{1h} &= \mathfrak{c}_{h4}^{14} - \mathfrak{c}_{h4}^{23}, & \mathfrak{C}\mathfrak{b}_{1h} &= \mathfrak{c}_{h4}^{14} + \mathfrak{c}_{h4}^{23} \\ \mathfrak{C}\mathfrak{a}_{2h} &= \mathfrak{c}_{h4}^{24} - \mathfrak{c}_{h4}^{31}, & \mathfrak{C}\mathfrak{b}_{2h} &= \mathfrak{c}_{h4}^{24} + \mathfrak{c}_{h4}^{31} \\ \mathfrak{C}\mathfrak{a}_{3h} &= \mathfrak{c}_{h4}^{34} - \mathfrak{c}_{h4}^{12}, & \mathfrak{C}\mathfrak{b}_{3h} &= \mathfrak{c}_{h4}^{34} + \mathfrak{c}_{h4}^{12} \end{aligned}\right\} \quad (h = 1, 2, 3).$$

J'ai appelé les systèmes $(\mathfrak{A})$ et $(\mathfrak{B})$ *adjoints* au système $(\mathfrak{C})$ [1].

---

[1] Dans le Mémoire *Ueber einen Zusammenhang zwischen den Elementen orthogonaler Neuner-und Sechzehnersysteme* (*Journal für die reine und angew. Math.*, t. CXVIII, p. 225, 230).

Soient, de plus, $e_{mn}(m \neq n; m, n = 1, 2, 3)$,

$$\begin{aligned} p_h(e) &= -(e_{1h}de_{1l} + e_{2h}de_{2l} + e_{3h}de_{3l}) \\ c_h(e) &= e_{k1}de_{l1} + e_{k2}de_{l2} + e_{k3}de_{l3} \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{r} h, k, l = 1, 2, 3 \\ 2, 3, 1 \\ 3, 1, 2 \end{array} \right\}$$

les quinze *éléments* du système orthogonal (E).

D'après un théorème que j'ai établi antérieurement (*Comptes rendus*, t. CXXVI, p. 1013-1016; *voir* aussi le *Journal* de M. L. Fuchs, t. CXIX, p. 240), un nouveau système orthogonal (A) peut être composé des quatre systèmes orthogonaux ($\mathfrak{A}$), ($\mathfrak{B}$), ($\mathfrak{C}$), (E), dont les deux, ($\mathfrak{A}$) et ($\mathfrak{B}$), sont *adjoints* au système ($\mathfrak{C}$). En supposant les coefficients $\mathfrak{c}_{ij}$ et, par conséquent, les coefficients $\mathfrak{a}_{mn}$ et $\mathfrak{b}_{mn}$ constants, les *éléments* du nouveau système orthogonal s'obtiennent de la manière suivante :

$$(\mathrm{A}) \left\{ \begin{aligned} \mathrm{A}(a_{1h} + ia_{2h}) &= \mathrm{E}\mathfrak{A}[(e_{11} + ie_{21})\mathfrak{a}_{h1} + (e_{12} + ie_{22})\mathfrak{a}_{h2} + (e_{13} + ie_{23})\mathfrak{a}_{h3}], \\ \mathrm{A}(a_{1h} - ia_{2h}) &= \mathrm{E}\mathfrak{B}[(e_{11} - ie_{21})\mathfrak{b}_{h1} + (e_{12} - ie_{22})\mathfrak{b}_{h2} + (e_{13} - ie_{23})\mathfrak{b}_{h3}], \\ \mathrm{A}a_{3h} &= \mathrm{E}(e_{31}\mathfrak{c}_{h1} + e_{32}\mathfrak{c}_{h2} + e_{33}\mathfrak{c}_{h3} - i\mathfrak{c}_{h4}), \\ \mathrm{A} &= i\mathrm{E}(e_{31}\mathfrak{c}_{41} + e_{32}\mathfrak{c}_{42} + e_{33}\mathfrak{c}_{43} - i\mathfrak{c}_{44}); \\ \mathrm{A}p_h &= \mathrm{E}[p_1(e)\mathfrak{c}_{h1} + p_2(e)\mathfrak{c}_{h2} + p_3(e)\mathfrak{c}_{h3} - ic_3(e)\mathfrak{c}_{h4}], \\ \mathrm{A}c_3 &= i\mathrm{E}[p_1(e)\mathfrak{c}_{41} + p_2(e)\mathfrak{c}_{42} + p_3(e)\mathfrak{c}_{43} - ic_3(e)\mathfrak{c}_{44}], \\ \mathrm{A}(c_1 + ic_2) &= \mathrm{E}\mathfrak{A}[c_1(e) + ic_2(e)], \\ \mathrm{A}(c_1 - ic_2) &= \mathrm{E}\mathfrak{B}[c_1(e) - ic_2(e)], \end{aligned} \right.$$

où

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{A}\mathfrak{B},$$

et les facteurs E, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ relatifs aux coefficients e_{mn}, $\mathfrak{a}_{mn}$, $\mathfrak{b}_{mn}$ jouent le même rôle que le facteur A relatif aux coefficients a_{mn}.

Or, M. F. Caspary (¹) a représenté les quinze *éléments* d'un système orthogonal par les fonctions sigma de Weierstrass. Si l'on rem-

(¹) *Journ. de Math.*, 4ᵉ série, t. VI, p. 376. C'est M. Caspary qui a établi le premier lesdites expressions en représentant les quinze *éléments* au moyen de quatre paramètres quelconques.

place les *éléments* du système orthogonal (E) par ces expressions, on obtient le théorème :

I. *Soient* u *et* v *deux arguments quelconques; soient* G *une fonction quelconque et* $i=\sqrt{-1}$. *Soient* $\mathfrak{c}_{ij}(i,j=1,2,3,4)$ *les seize coefficients constants d'un système orthogonal et* $\mathfrak{a}_{mn}$ *et* $\mathfrak{b}_{mn}(m,n=1,2,3)$ *respectivement les neuf coefficients des systèmes* adjoints. *Alors les fonctions sigma de Weierstrass sont liées aux éléments d'un système orthogonal de la manière suivante :*

$$A(a_{1h}+ia_{2h})=-\;G\mathfrak{A}\,[\varepsilon_1\mathfrak{a}_{h1}\sigma_1(\mathrm{u}+\mathrm{v})+\varepsilon_2\mathfrak{a}_{h2}\sigma_2(\mathrm{u}+\mathrm{v})+\varepsilon_3\mathfrak{a}_{h3}\sigma_3(\mathrm{u}+\mathrm{v})],$$

$$A(a_{1h}-ia_{2h})=-G^{-1}\mathfrak{B}[\varepsilon_1\mathfrak{b}_{h1}\sigma_1(\mathrm{u}-\mathrm{v})+\varepsilon_2\mathfrak{b}_{h2}\sigma_2(\mathrm{u}-\mathrm{v})+\varepsilon_3\mathfrak{b}_{h3}\sigma_3(\mathrm{u}-\mathrm{v})],$$

$$Aa_{3h}=\;i(\varepsilon_1\mathfrak{c}_{h1}\sigma_1\mathrm{u}\sigma_1\mathrm{v}+\varepsilon_2\mathfrak{c}_{h2}\sigma_2\mathrm{u}\sigma_2\mathrm{v}+\varepsilon_3\mathfrak{c}_{h3}\sigma_3\mathrm{u}\sigma_3\mathrm{v}-\mathfrak{c}_{h4}\sigma\mathrm{u}\sigma\mathrm{v}),$$

$$A=-(\varepsilon_1\mathfrak{c}_{41}\sigma_1\mathrm{u}\sigma_1\mathrm{v}+\varepsilon_2\mathfrak{c}_{42}\sigma_2\mathrm{u}\sigma_2\mathrm{v}+\varepsilon_3\mathfrak{c}_{43}\sigma_3\mathrm{u}\sigma_3\mathrm{v}-\mathfrak{c}_{44}\sigma\mathrm{u}\sigma\mathrm{v});$$

$$Ap_h=\;\varepsilon_1m_1\mathfrak{c}_{h1}\sigma_1\mathrm{u}\sigma_1\mathrm{v}+\varepsilon_2m_2\mathfrak{c}_{h2}\sigma_2\mathrm{u}\sigma_2\mathrm{v}+\varepsilon_3m_3\mathfrak{c}_{h3}\sigma_3\mathrm{u}\sigma_3\mathrm{v}-m_0\mathfrak{c}_{h4}\sigma\mathrm{u}\sigma\mathrm{v},$$

$$Av_3=i[\varepsilon_1m_1\mathfrak{c}_{41}\sigma_1\mathrm{u}\sigma_1\mathrm{v}+\varepsilon_2m_2\mathfrak{c}_{42}\sigma_2\mathrm{u}\sigma_2\mathrm{v}+\varepsilon_3m_3\mathfrak{c}_{43}\sigma_3\mathrm{u}\sigma_3\mathrm{v}-m_0\mathfrak{c}_{44}\sigma\mathrm{u}\sigma\mathrm{v}],$$

$$A(v_1+iv_2)=\;G\mathfrak{A}\sigma(\mathrm{u}+\mathrm{v})\,d(\mathrm{u}+\mathrm{v}),$$

$$A(v_1-iv_2)=G^{-1}\mathfrak{B}\sigma(\mathrm{u}-\mathrm{v})\,d(\mathrm{u}-\mathrm{v})$$

$$(h=1,2,3),$$

où

$$m_s=\frac{\sigma'_s\mathrm{v}}{\sigma_s\mathrm{v}}d\mathrm{u}+\frac{\sigma'_s\mathrm{u}}{\sigma_s\mathrm{u}}d\mathrm{v}+d\log G\qquad(s=0,1,2,3),$$

$$\varepsilon_1=\frac{1}{\sqrt{e_3-e_1}\sqrt{e_1-e_2}},\quad\varepsilon_2=-\frac{1}{\sqrt{e_1-e_2}\sqrt{e_2-e_3}},\quad\varepsilon_3=\frac{1}{\sqrt{e_2-e_3}\sqrt{e_3-e_1}}.$$

2. *Relations caractéristiques. Équations différentielles.* — Les expressions que je viens d'établir satisfont à des équations différentielles de premier ordre. Afin de les déduire, je profite des relations caractéristiques qui existent entre les éléments du système orthogonal (E) représentés au moyen des fonctions sigma, savoir (¹)

$$p_h(e)=-im_he_{3h},\qquad v_3(e)=-im_0\qquad(h=1,2,3).$$

(¹) *Voir* F. Caspary, *loc. cit.*, p. 378.

Or il suit du système (A)

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{C}Ee_{3h} &= A(\mathfrak{c}_{1h}a_{31} + \mathfrak{c}_{2h}a_{32} + \mathfrak{c}_{3h}a_{33} - i\mathfrak{c}_{4h}\\ -i\mathfrak{C}E &= A(\mathfrak{c}_{14}a_{31} + \mathfrak{c}_{24}a_{32} + \mathfrak{c}_{34}a_{33} - i\mathfrak{c}_{44}\end{aligned}\right\}\qquad (h = 1, 2, 3),$$

et

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{C}Ep_h(e) &= A(\mathfrak{c}_{1h}p_1 + \mathfrak{c}_{2h}p_2 + \mathfrak{c}_{3h}p_3 - i\mathfrak{c}_{4h}v_3)\\ \mathfrak{C}Ev_3(e) &= A(\mathfrak{c}_{14}p_1 + \mathfrak{c}_{24}p_2 + \mathfrak{c}_{34}p_3 - i\mathfrak{c}_{44}v_3)\end{aligned}\right\}\qquad (h = 1, 2, 3).$$

La substitution de ces expressions transforme lesdites relations caractéristiques en les suivantes :

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} -i\mathfrak{C}a_{3h} &= l_{h1}p_1 + l_{h2}p_2 + l_{h3}p_3 - il_{h4}v_3\\ -\mathfrak{C} \quad &= l_{41}p_1 + l_{42}p_2 + l_{43}p_3 - il_{44}v_3\end{aligned}\right\}\qquad (h = 1, 2, 3),$$

où les coefficients l_{ij} sont définis par les égalités

$$(5)\qquad l_{ij} = \frac{\mathfrak{c}_{i1}\mathfrak{c}_{j1}}{m_1} + \frac{\mathfrak{c}_{i2}\mathfrak{c}_{j2}}{m_2} + \frac{\mathfrak{c}_{i3}\mathfrak{c}_{j3}}{m_3} - i\frac{\mathfrak{c}_{i4}\mathfrak{c}_{j4}}{m_0} = l_{ji}\qquad (i, j = 1, 2, 3, 4).$$

Posons, de plus,

$$(6)\qquad 2T = \sum_{m,n}^{1,2,3} l_{mn}p_mp_n - l_{44}v_3^2 - 2iv_3(l_{14}p_1 + l_{24}p_2 + l_{34}p_3),$$

ou, en faisant usage de la dernière des relations (4) et en désignant par

$$l_{ij}^{rs} = l_{ri}l_{sj} - l_{rj}l_{si}\qquad (i, j, r, s = 1, 2, 3, 4)$$

les mineurs de deuxième ordre du déterminant symétrique $|l_{ij}|$,

$$(6')\qquad 2l_{44}T = \sum_{m,n}^{1,2,3} l_{m4}^{n4}p_mp_n + \mathfrak{C}^2.$$

Alors les relations (4) prennent la forme simple

$$(4') \qquad \left\{ \begin{aligned} -i\mathfrak{C}a_{3h} &= \frac{\partial T}{\partial p_h}, \\ i\mathfrak{C} \quad &= \frac{\partial T}{\partial v_3}. \end{aligned} \right.$$

Si l'on substitue encore les valeurs de T et de a_{3h} dans les identités différentielles

$$da_{3h} = a_{3k}p_l - a_{3l}p_k,$$

on en tire le théorème :

II. *Les nouvelles expressions au moyen des fonctions sigma établies au théorème I satisfont aux équations différentielles*

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial p_h} = p_l\frac{\partial T}{\partial p_k} - p_k\frac{\partial T}{\partial p_l} \qquad (h, k, l = 1, 2, 3;\ 2, 3, 1;\ 3, 1, 2),$$

où

$$2T = \sum_{m,n}^{1,2,3} l_{mn}p_mp_n - l_{44}v_3^2 - 2iv_3\sum_{h=1}^{3} l_{h4}p_h = \frac{1}{l_{44}}\left(\sum_{m,n}^{1,2,3} l''_{m4}p_mp_n + \mathfrak{C}^2\right).$$

3. *Relations entre les intégrales.* — Je vais établir maintenant les relations qui lient les intégrales établies au théorème I. Elles découlent des identités algébriques

$$a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 = 1, \qquad a_{31}p_1 + a_{32}p_2 + a_{33}p_3 = v_3$$

combinées aux relations (4). En posant

$$L_{ij} = l_{i1}l_{j1} + l_{i2}l_{j2} + l_{i3}l_{j3} + l_{i4}l_{j4} = L_{ji} \qquad (i, j = 1, 2, 3, 4),$$

ou, eu égard à la formule (5),

$$(7) \qquad L_{ij} = \mathfrak{C}\left(\frac{c_{i1}c_{j1}}{m_1^2} + \frac{c_{i2}c_{j2}}{m_2^2} + \frac{c_{i3}c_{j3}}{m_3^2} + \frac{c_{i4}c_{j4}}{m_0^2}\right),$$

on trouve le théorème :

III. *Les relations entre les intégrales des équations différen-*

tielles données au théorème II sont les suivantes :

$$l_{41}p_1 + l_{42}p_2 + l_{43}p_3 - il_{44}v_3 = -\mathfrak{C},$$

$$\sum_{m,n}^{1,2,3} \mathrm{L}_{mn}p_m p_n - \mathrm{L}_{44}v_3^2 - 2iv_3\sum_{i=1}^{4} l_{i4}(l_{i1}p_1 + l_{i2}p_2 + l_{i3}p_3) = 0,$$

$$\sum_{h=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} p_h l_{kh} a_{3k} - iv_3\sum_{k=1}^{3} l_{k4}a_{3k} = -i\mathfrak{C},$$

$$\sum_{m,n}^{1,2,3} l_{mn}p_m p_n + l_{44}v_3^2 + 2i\mathfrak{C}v_3 = 0.$$

La quatrième relation peut être mise sous l'autre forme

$$\sum_{m,n}^{1,2,3} l_{m4}^{n4} p_m p_n + \mathfrak{C}^2 = 0.$$

4. *Équations aux dérivées partielles.* — Le théorème I fait reconnaître que les quantités v_1, v_2 dépendent des deux variables u et v et sont des fonctions linéaires de du et dv dont j'appellerai les coefficients v_1^{u}, v_1^{v} ; v_2^{u}, v_2^{v}. Posons (¹)

$$v_1 = v_1^{\mathrm{u}}\,d\mathrm{u} + v_1^{\mathrm{v}}\,d\mathrm{v},$$
$$v_2 = v_2^{\mathrm{u}}\,d\mathrm{u} + v_2^{\mathrm{v}}\,d\mathrm{v}.$$

On trouve immédiatement

$$v_1^{\mathrm{u}} \pm iv_2^{\mathrm{u}} = \pm(v_1^{\mathrm{v}} \pm iv_2^{\mathrm{v}}),$$
$$v_1^{\mathrm{v}} \pm iv_2^{\mathrm{v}} = \pm(v_1^{\mathrm{u}} \pm iv_2^{\mathrm{u}}),$$

en choisissant simultanément les signes supérieurs ou inférieurs, d'où il suit

$$v_1^{\mathrm{u}} = \quad iv_2^{\mathrm{v}},$$
$$v_2^{\mathrm{u}} = -\,iv_1^{\mathrm{v}}.$$

(¹) *Voir* F. Caspary, *loc. cit.*, p. 377.

Alors les identités différentielles

$$da_{3h} = -a_{1h}v_2 + a_{2h}v_1 \qquad (h = 1, 2, 3)$$

conduisent aux équations aux dérivées partielles

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial a_{3h}}{\partial \mathrm{u}} &= i\left(a_{3l}\frac{\partial a_{3k}}{\partial \mathrm{v}} - a_{3k}\frac{\partial a_{3l}}{\partial \mathrm{v}}\right) \\ \frac{\partial a_{3h}}{\partial \mathrm{v}} &= i\left(a_{3l}\frac{\partial a_{3k}}{\partial \mathrm{u}} - a_{3k}\frac{\partial a_{3l}}{\partial \mathrm{u}}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (h, k, l = 1, 2, 3;\ 2, 3, 1;\ 3, 1, 2).$$

Ces équations ont la même forme que celles que l'on doit à M. F. Kötter (¹) et que j'ai généralisées dans un Mémoire présenté à l'Académie des Sciences de Berlin (²).

5. *Généralisation des théorèmes I, II, III.* — La représentation des éléments d'un système orthogonal, établie en (A), et, par conséquent, toutes les formules qui en découlent, peuvent être généralisées de la manière suivante.

Lions au système orthogonal (A) un autre système orthogonal (A′) par des relations analogues à celles qui lient le système (E) au système (A) et qui sont données en (2) et (3), savoir

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}'\mathrm{A}a_{3h} &= \mathrm{A}'(\mathfrak{c}'_{1h}a'_{31} + \mathfrak{c}'_{2h}a'_{32} + \mathfrak{c}'_{3h}a'_{33} - i\mathfrak{c}'_{4h}), \\ -i\mathfrak{C}'\mathrm{A} &= \mathrm{A}'(\mathfrak{c}'_{14}a'_{31} + \mathfrak{c}'_{24}a'_{32} + \mathfrak{c}'_{34}a'_{33} - i\mathfrak{c}'_{44}) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}'\mathrm{A}p_h &= \mathrm{A}'(\mathfrak{c}'_{1h}p'_1 + \mathfrak{c}'_{2h}p'_2 + \mathfrak{c}'_{3h}p'_3 - i\mathfrak{c}'_{4h}v'_3), \\ \mathfrak{C}'\mathrm{A}v_3 &= \mathrm{A}'(\mathfrak{c}'_{14}p'_1 + \mathfrak{c}'_{24}p'_2 + \mathfrak{c}'_{34}p'_3 - i\mathfrak{c}'_{44}v'_3) \end{aligned}$$

en posant

$$\mathfrak{C}' = \mathfrak{c}'^2_{i1} + \mathfrak{c}'^2_{i2} + \mathfrak{c}'^2_{i3} + \mathfrak{c}'^2_{i4} = \mathfrak{c}'^2_{1i} + \mathfrak{c}'^2_{2i} + \mathfrak{c}'^2_{3i} + \mathfrak{c}'^2_{4i}$$

et en désignant par $\mathfrak{c}'_{ij}$ $(i, j = 1, 2, 3, 4)$ les seize coefficients constants

---

(¹) *Sitzungsber. der Berl. Ak.*, p. 811; 1895. — *Journ. f. d. reine und angew. Math.*, t. CXVI, p. 226.

(²) *Sitzungsber. der Berl. Ak.*, p. 1029, 1030; 1896. — *Journ. f. d. reine und angew. Math.*, t. CXIX, p. 251, 252.

d'un système orthogonal ($\mathfrak{C}'$). La substitution de ces expressions change les relations (2) et (3) en les suivantes :

$$\begin{aligned}\mathfrak{C}\mathfrak{C}'\mathrm{E}e_{3h} &= \mathrm{A}'[(\mathfrak{cc}')_{1h}a'_{31} + (\mathfrak{cc}')_{2h}a'_{32} + (\mathfrak{cc}')_{3h}a'_{33} - i(\mathfrak{cc}')_{4h}],\\ -i\mathfrak{C}\mathfrak{C}'\mathrm{E} &= \mathrm{A}'[(\mathfrak{cc}')_{14}a'_{31} + (\mathfrak{cc}')_{24}a'_{32} + (\mathfrak{cc}')_{34}a'_{33} - i(\mathfrak{cc}')_{44}]\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mathfrak{C}\mathfrak{C}'\mathrm{E}p_h(e) &= \mathrm{A}'[(\mathfrak{cc}')_{1h}p'_1 + (\mathfrak{cc}')_{2h}p'_2 + (\mathfrak{cc}')_{3h}p'_3 - i(\mathfrak{cc}')_{4h}v'_3],\\ \mathfrak{C}\mathfrak{C}'\mathrm{E}v_3(e) &= \mathrm{A}'[(\mathfrak{cc}')_{14}p'_1 + (\mathfrak{cc}')_{24}p'_2 + (\mathfrak{cc}')_{34}p'_3 - i(\mathfrak{cc}')_{44}v'_3],\end{aligned}$$

où

$$(8)\qquad (\mathfrak{cc}')_{ij} = \mathfrak{c}_{1j}\mathfrak{c}'_{i1} + \mathfrak{c}_{2j}\mathfrak{c}'_{i2} + \mathfrak{c}_{3j}\mathfrak{c}'_{i3} + \mathfrak{c}_{4j}\mathfrak{c}'_{i4}.$$

De la même manière, je lie au système (A′) un troisième système orthogonal (A″), au système (A″) un quatrième système orthogonal (A‴), et en continuant ce procédé je déduis les relations suivantes :

$$(2')\qquad \left\{\begin{aligned}\mathfrak{S}\mathrm{E}e_{3h} &= \mathrm{A}^{(\nu)}[c_{1h}a^{(\nu)}_{31} + c_{2h}a^{(\nu)}_{32} + c_{3h}a^{(\nu)}_{33} - ic_{4h}],\\ -i\mathfrak{S}\mathrm{E} &= \mathrm{A}^{(\nu)}[c_{14}a^{(\nu)}_{31} + c_{24}a^{(\nu)}_{32} + c_{34}a^{(\nu)}_{33} - ic_{44}],\end{aligned}\right.$$

et

$$(3')\qquad \left\{\begin{aligned}\mathfrak{S}\mathrm{E}p_h(e) &= \mathrm{A}^{(\nu)}[c_{1h}p^{(\nu)}_1 + c_{2h}p^{(\nu)}_2 + c_{3h}p^{(\nu)}_3 - ic_{4h}v^{(\nu)}_3],\\ \mathfrak{S}\mathrm{E}v_3(e) &= \mathrm{A}^{(\nu)}[c_{14}p^{(\nu)}_1 + c_{24}p^{(\nu)}_2 + c_{34}p^{(\nu)}_3 - ic_{44}v^{(\nu)}_3]\end{aligned}\right.$$

$$(\nu = 0, 1, 2, \ldots),$$

où

$$\mathfrak{S} = c^2_{i1} + c^2_{i2} + c^2_{i3} + c^2_{i4} = c^2_{1i} + c^2_{2i} + c^2_{3i} + c^2_{4i}$$

et

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{C}\mathfrak{C}'\mathfrak{C}''\ldots\mathfrak{C}^{(\nu)}.$$

Les coefficients constants

$$c_{ij} = (\mathfrak{c}\mathfrak{c}'\mathfrak{c}''\ldots\mathfrak{c}^{(\nu)})_{ij}\qquad (i, j = 1, 2, 3, 4)$$

s'obtiennent en composant, d'une manière définie par l'équation (8), le système orthogonal ($\mathfrak{C}\mathfrak{C}'$) au système orthogonal ($\mathfrak{C}''$), le système ($\mathfrak{C}\mathfrak{C}'\mathfrak{C}''$) au système ($\mathfrak{C}'''$) et, ainsi de suite, le système ($\mathfrak{C}\mathfrak{C}'\ldots\mathfrak{C}^{(\nu-1)}$) au système ($\mathfrak{C}^{(\nu)}$).

Désignons, de plus, les coefficients *adjoints* aux coefficients c_{ij} ($i, j = 1, 2, 3, 4$) par α_{mn} et β_{mn} ($m, n = 1, 2, 3$), et posons

$$\mathfrak{S} = \mathcal{A}\mathcal{B}.$$

Alors on reconnaît aisément le théorème :

IV. *Les formules établies aux théorèmes I, II, III, subsistent encore, si l'on remplace*

$$\mathrm{A},\ a_{mn},\ p_h,\ v_h;\quad \mathfrak{A},\ \mathfrak{a}_{mn},\ \mathfrak{B},\ \mathfrak{b}_{mn},\ \mathfrak{C},\ \mathfrak{c}_{ij};\quad l_{ij},\ \mathrm{L}_{ij},\ \mathrm{T}$$

respectivement par

$$\mathrm{A}^{(\nu)},\ a_{mn}^{(\nu)},\ p_h^{(\nu)},\ v_h^{(\nu)};\quad \mathcal{A},\ \alpha_{mn},\ \mathcal{B},\ \beta_{mn},\ \mathfrak{S},\ c_{ij};\quad \mathfrak{l}_{ij},\ \mathfrak{L}_{ij},\ \mathfrak{T}.$$

Les quantités $\mathfrak{l}_{ij}$, $\mathfrak{L}_{ij}$, $\mathfrak{T}$ *découlent des quantités* l_{ij}, L_{ij}, T *par la substitution de* c_{ij} *au lieu de* $\mathfrak{c}_{ij}$.

Ainsi tous les problèmes auxquels conduisent les équations différentielles

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial p_h^{(\nu)}} = p_l^{(\nu)}\frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial p_k^{(\nu)}} - p_k^{(\nu)}\frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial p_l^{(\nu)}},$$

où

$$2\mathfrak{T} = \sum_{m,n}^{1,2,3}\mathfrak{l}_{mn}\,p_m^{(\nu)}p_n^{(\nu)} - \mathfrak{l}_{44}\,v_3^{(\nu)2} - 2iv_3^{(\nu)}\sum_{h=1}^{3}\mathfrak{l}_{h4}\,p_h^{(\nu)} = \frac{1}{\mathfrak{l}_{44}}\left(\sum_{m,n}^{1,2,3}\mathfrak{l}_{m4}^{n4}\,p_m^{(\nu)}p_n^{(\nu)} + \mathfrak{c}^2\right)$$

$$(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

sont résolus complètement par les expressions des éléments $a_{mn}^{(\nu)}$, $p_h^{(\nu)}$, $v_h^{(\nu)}$ caractérisées au théorème IV, si l'on y détermine encore les quantités u, v, G, c_{ij}, α_{mn}, β_{mn} par les données des équations différentielles.

SECONDE PARTIE.

6. *Problème de la rotation de n corps liés l'un à l'autre. Équations différentielles.* — Les nouvelles expressions établies dans le théorème I comprennent, comme *cas spécial*, la solution du problème qui consiste à trouver la rotation de n corps solides dont l'un tourne autour d'un point fixe et les autres $n-1$ corps de révolution autour d'axes fixés au premier corps, soit qu'aucune force accélératrice ne les sollicite, soit que le point fixe coïncide avec le centre de gravité et que la pesanteur agisse seule (¹).

Afin d'établir les équations différentielles de ce problème, supposons d'abord l'argument v constant et posons

$$u = n(t - t_0),$$
$$m_s = \mathrm{m}_s dt, \qquad l_{ij} dt = \mathrm{l}_{ij}.$$

En ce cas, il suit du théorème I

$$G = e^{\left(\frac{\mathrm{m}_s}{n} - \frac{\sigma'_s \nu}{\sigma_s \nu}\right) u} \qquad (s = 0, 1, 2, 3). \tag{9}$$

Posons encore

$$\left\{\begin{aligned} &p_1 = p\, dt, && p_2 = q\, dt, && p_3 = r\, dt, && v_3 = v\, dt, \\ &\mathrm{l}_{14} = \alpha, && \mathrm{l}_{24} = \beta, && \mathrm{l}_{34} = \gamma, && \mathrm{l}_{44} = \delta. \end{aligned}\right. \tag{10}$$

et soumettons les coefficients l_{ij} aux conditions

$$\left\{\begin{aligned} &\mathrm{l}^{34}_{24} = \mathrm{l}^{12}_{34} = 0, && \mathrm{l}^{14}_{34} = \mathrm{l}^{23}_{12} = 0, && \mathrm{l}^{24}_{14} = \mathrm{l}^{31}_{23} = 0, \\ &\qquad \mathrm{l}^{14}_{14} = \mathrm{A}, && \qquad \mathrm{l}^{24}_{24} = \mathrm{B}, && \qquad \mathrm{l}^{34}_{34} = \mathrm{C}, \end{aligned}\right. \tag{W}$$

(¹) Les conditions de ce problème se trouvent réalisées dans l'appareil connu sous le nom de *gyroscope* de Bohnenberger-Foucault.

ou aux conditions

$$(\mathrm{V})\qquad \begin{cases} \mathrm{I}_{23} = 0, & \mathrm{I}_{31} = 0, & \mathrm{I}_{12} = 0, \\ \mathrm{I}_{11} = \mathrm{A}, & \mathrm{I}_{22} = \mathrm{B}, & \mathrm{I}_{33} = \mathrm{C}, \end{cases}$$

où α, β, γ, δ, A, B, C désignent des constantes.

Alors j'obtiens les relations caractéristiques (4) dans les deux formes différentes

$$(\mathrm{W}_1)\qquad \begin{cases} -i\mathfrak{C}\delta_{44}a_{31} = \mathrm{A}p + \alpha(\alpha p + \beta q + \gamma r - i\delta_{44}v), \\ -i\mathfrak{C}\delta_{44}a_{32} = \mathrm{B}q + \beta(\alpha p + \beta q + \gamma r - i\delta_{44}v), \\ -i\mathfrak{C}\delta_{44}a_{33} = \mathrm{C}r + \gamma(\alpha p + \beta q + \gamma r - i\delta_{44}v) \end{cases}$$

ou

$$(\mathrm{V}_1)\qquad \begin{cases} -i\mathfrak{C}a_{31} = \mathrm{A}p - i\alpha v, \\ -i\mathfrak{C}a_{32} = \mathrm{B}q - i\beta v, \\ -i\mathfrak{C}a_{33} = \mathrm{C}r - i\gamma v, \end{cases}$$

de sorte que les équations différentielles deviennent

$$(\mathrm{W}_2)\qquad \begin{cases} \mathrm{A}\dfrac{dp}{dt} = (\mathrm{B}-\mathrm{C})qr - \mathfrak{C}(\beta r - \gamma q), \\ \mathrm{B}\dfrac{dq}{dt} = (\mathrm{C}-\mathrm{A})rp - \mathfrak{C}(\gamma p - \alpha r), \\ \mathrm{C}\dfrac{dr}{dt} = (\mathrm{A}-\mathrm{B})pq - \mathfrak{C}(\alpha q - \beta p) \end{cases}$$

ou

$$(\mathrm{V}_2)\qquad \begin{cases} \mathrm{A}\dfrac{dp}{dt} = (\mathrm{B}-\mathrm{C})qr - iv(\beta r - \gamma q) + i\alpha\dfrac{dv}{dt}, \\ \mathrm{B}\dfrac{dq}{dt} = (\mathrm{C}-\mathrm{A})rp - iv(\gamma p - \alpha r) + i\beta\dfrac{dv}{dt}, \\ \mathrm{C}\dfrac{dr}{dt} = (\mathrm{A}-\mathrm{B})pq - iv(\alpha q - \beta p) + i\gamma\dfrac{dv}{dt}. \end{cases}$$

Les relations qui existent entre les intégrales de ces équations différentielles prennent la forme

$$
(\mathrm{W}_3)\quad \left\{\begin{aligned}
&\alpha p + \beta q + \gamma r - i\delta_{11} v = -\mathfrak{C},\\
&(\mathrm{A}p - \mathfrak{C}\alpha)^2 + (\mathrm{B}q - \mathfrak{C}\beta)^2 + (\mathrm{C}r - \mathfrak{C}\gamma)^2 = -\delta_{11}^2\mathfrak{C}^2,\\
&(\mathrm{A}p - \mathfrak{C}\alpha)a_{31} + (\mathrm{B}q - \mathfrak{C}\beta)a_{32} + (\mathrm{C}r - \mathfrak{C}\gamma)a_{33} = -i\mathfrak{C}\delta_{11},\\
&\mathrm{A}p^2 + \mathrm{B}q^2 + \mathrm{C}r^2 = -\mathfrak{C}^2
\end{aligned}\right.
$$

ou

$$
(\mathrm{V}_3)\quad \left\{\begin{aligned}
&\alpha p + \beta q + \gamma r - i\delta_{11} v_3 = -\mathfrak{C},\\
&(\mathrm{A}p - i\alpha v_3)^2 + (\mathrm{B}q - i\beta v_3)^2 + (\mathrm{C}r - i\gamma v_3)^2 = -\mathfrak{C}^2,\\
&(\mathrm{A}p - i\alpha v_3)a_{31} + (\mathrm{B}q - i\beta v_3)a_{32} + (\mathrm{C}r - i\gamma v_3)a_{33} = -i\mathfrak{C},\\
&\mathrm{A}p^2 + \mathrm{B}q^2 + \mathrm{C}r^2 + \delta_{11} v^2 + 2i\mathfrak{C}v = 0.
\end{aligned}\right.
$$

Supposons maintenant, dans le cas de deux corps, que A, B, C désignent les quotients des principaux moments d'inertie du système et du moment d'inertie du deuxième corps, et α, β, γ les cosinus directeurs de l'axe autour duquel le deuxième corps tourne. Si l'on remplace α, β, γ par α, α_1, α_2, $\mathfrak{C}$ par $-\omega$ et $-i\delta_{11}v$ par $\frac{d\delta}{dt}$, en désignant par δ l'angle qui détermine la position instantanée de ce corps, les équations différentielles (W_2) deviennent identiques à celles que M. Wangerin (¹) a établies.

De l'autre côté, si l'on remplace $-v$ par ω, en désignant maintenant par ω la vitesse angulaire du deuxième corps, les équations (V_2) deviennent celles dues à M. Volterra (²).

Dans le cas général de n corps liés l'un à l'autre de la manière indiquée ci-dessus, on peut généraliser aisément l'interprétation mécanique desdits coefficients.

7. *Détermination des constantes à l'aide des équations différentielles.* — Je vais déterminer les coefficients $\mathfrak{c}_{ij}$ et les quantités

---

(¹) *Ueber die Rotation mit einander verbundener Körper* (*Univers. Schr. Halle*, 1889, p. 17, 18). Je dois un exemplaire de ce Mémoire rare à la bienveillance de M. E. Lampe. — *Voir* aussi P. Serf, *Diss. Bonn*, 1890.

(²) *Sulla rotazione di un corpo in cui esistono sistemi policiclici* (*Ann. di Mat.*, t. XXIV, p. 37). — *Voir* aussi *Atti di Torino*, t. XXX.

$\frac{\sigma_1 \mathrm{V}}{\sigma \mathrm{V}}$, $\frac{\sigma_2 \mathrm{V}}{\sigma \mathrm{V}}$, $\frac{\sigma_3 \mathrm{V}}{\sigma \mathrm{V}}$; $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$, $\mathfrak{m}_3$, $\mathfrak{m}_0$ par A, B, C, α, β, γ, δ_{44}, ainsi que la fonction G et l'argument u comme fonction de t. Voici les calculs :

Entre les coefficients l_{ij} et $\mathfrak{c}_{ij}$ existent les relations (5), dont il suit

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{C}\frac{\mathfrak{c}_{1j}}{m_j} &= l_{11}\mathfrak{c}_{1j} + l_{12}\mathfrak{c}_{2j} + l_{13}\mathfrak{c}_{3j} + l_{14}\mathfrak{c}_{4j}\\
\mathfrak{C}\frac{\mathfrak{c}_{2j}}{m_j} &= l_{21}\mathfrak{c}_{1j} + l_{22}\mathfrak{c}_{2j} + l_{23}\mathfrak{c}_{3j} + l_{24}\mathfrak{c}_{4j}\\
\mathfrak{C}\frac{\mathfrak{c}_{3j}}{m_j} &= l_{31}\mathfrak{c}_{1j} + l_{32}\mathfrak{c}_{2j} + l_{33}\mathfrak{c}_{3j} + l_{34}\mathfrak{c}_{4j}\\
-i\,\mathfrak{C}\frac{\mathfrak{c}_{4j}}{m_j} &= l_{41}\mathfrak{c}_{1j} + l_{42}\mathfrak{c}_{2j} + l_{43}\mathfrak{c}_{3j} + l_{44}\mathfrak{c}_{4j}
\end{aligned}\right\}\quad \left(\begin{matrix} j = 1, 2, 3, 4\\ m_4 = m_0\end{matrix}\right).$$

Dans le cas caractérisé par (W), elles prennent la forme

$$(\mathrm{W}_4)\quad\left\{\begin{aligned}
\mathfrak{C}\delta_{44}\frac{\mathfrak{c}_{1j}}{\mathfrak{m}_j} &= \mathrm{A}\mathfrak{c}_{1j} - i\mathfrak{C}\delta_{44}\alpha\frac{\mathfrak{c}_{4j}}{\mathfrak{m}_j},\\
\mathfrak{C}\delta_{44}\frac{\mathfrak{c}_{2j}}{\mathfrak{m}_j} &= \mathrm{B}\mathfrak{c}_{2j} - i\mathfrak{C}\delta_{44}\beta\frac{\mathfrak{c}_{4j}}{{}_j\mathfrak{m}},\\
\mathfrak{C}\delta_{44}\frac{\mathfrak{c}_{3j}}{\mathfrak{m}_j} &= \mathrm{C}\mathfrak{c}_{3j} - i\mathfrak{C}\delta_{44}\gamma\frac{\mathfrak{c}_{4j}}{\mathfrak{m}_j},\\
-i\mathfrak{C}\delta_{44}\frac{\mathfrak{c}_{4j}}{\mathfrak{m}_j} &= \delta_{44}(\alpha\mathfrak{c}_{1j} + \beta\mathfrak{c}_{2j} + \gamma\mathfrak{c}_{3j} + \delta_{44}\mathfrak{c}_{4j});
\end{aligned}\right.$$

dans le cas caractérisé par (V), l'autre forme

$$(\mathrm{V}_4)\quad\left\{\begin{aligned}
\mathfrak{C}\frac{\mathfrak{c}_{1j}}{\mathfrak{m}_j} &= \mathrm{A}\mathfrak{c}_{1j} + \alpha\mathfrak{c}_{4j},\\
\mathfrak{C}\frac{\mathfrak{c}_{2j}}{\mathfrak{m}_j} &= \mathrm{B}\mathfrak{c}_{2j} + \beta\mathfrak{c}_{4j},\\
\mathfrak{C}\frac{\mathfrak{c}_{3j}}{\mathfrak{m}_j} &= \mathrm{C}\mathfrak{c}_{3j} + \gamma\mathfrak{c}_{4j},\\
-i\,\mathfrak{C}\frac{\mathfrak{c}_{4j}}{\mathfrak{m}_j} &= \alpha\mathfrak{c}_{1j} + \beta\mathfrak{c}_{2j} + \gamma\mathfrak{c}_{3j} + \delta_{44}\mathfrak{c}_{4j}.
\end{aligned}\right.$$

La résolution de ces systèmes d'équations linéaires conduit à l'équation biquadratique

$$(11)\qquad \mathrm{M}(\lambda) = 0,\qquad \lambda = \mathfrak{m}_j^{-1},$$

où, dans le premier cas,

$$M = \begin{vmatrix} A - \mathfrak{C}\delta_{44}\lambda & 0 & 0 & -i\mathfrak{C}\alpha\lambda \\ 0 & B - \mathfrak{C}\delta_{44}\lambda & 0 & -i\mathfrak{C}\beta\lambda \\ 0 & 0 & C - \mathfrak{C}\delta_{44}\lambda & -i\mathfrak{C}\gamma\lambda \\ \delta_{44}\alpha & \delta_{44}\beta & \delta_{44}\gamma & \delta_{44} + i\mathfrak{C}\lambda \end{vmatrix};$$

dans l'autre cas ([1]),

$$M = \begin{vmatrix} A - \mathfrak{C}\lambda & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & B - \mathfrak{C}\lambda & 0 & \beta \\ 0 & 0 & C - \mathfrak{C}\lambda & \gamma \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta_{44} + i\mathfrak{C}\lambda \end{vmatrix}.$$

Les racines de ces équations biquadratiques fournissent les valeurs de m_1, m_2, m_3, m_0. Si l'on désigne encore les mineurs de troisième ordre du déterminant M par M_{ij}, on a

$$\frac{\epsilon_{ij}}{\epsilon_{44}} = \frac{M_{ij}}{M_{44}}, \tag{12}$$

d'où les coefficients *adjoints* a_{mn} et b_{mn} se déterminent à l'aide des équations (1).

Après avoir trouvé les valeurs de m_1, m_2, m_3, m_0, on tire du théorème I les égalités

$$m_1 = n\left(\frac{\sigma'_1 v}{\sigma_1 v} + d\log G\right),$$

$$m_2 = n\left(\frac{\sigma'_2 v}{\sigma_2 v} + d\log G\right),$$

$$m_3 = n\left(\frac{\sigma'_3 v}{\sigma_3 v} + d\log G\right),$$

$$m_0 = n\left(\frac{\sigma' v}{\sigma v} + d\log G\right),$$

([1]) *Voir* Volterra, *Sul moto di un sistema nel quale susistono moti interni stazionari* (*Atti di Torino*, t. XXX).

qui, au moyen de relations connues ([1]), conduisent aux équations

$$\mathrm{m}_2 - \mathrm{m}_3 = \frac{n\varepsilon_1}{\varepsilon_2\varepsilon_3}\,\frac{\sigma v\,\sigma_1 v}{\sigma_2 v\,\sigma_3 v},$$

$$\mathrm{m}_3 - \mathrm{m}_1 = \frac{n\varepsilon_2}{\varepsilon_3\varepsilon_1}\,\frac{\sigma v\,\sigma_2 v}{\sigma_3 v\,\sigma_1 v},$$

$$\mathrm{m}_1 - \mathrm{m}_2 = \frac{n\varepsilon_3}{\varepsilon_1\varepsilon_2}\,\frac{\sigma v\,\sigma_3 v}{\sigma_1 v\,\sigma_2 v},$$

$$\frac{\varepsilon_h(\mathrm{m}_h - \mathrm{m}_k)(\mathrm{m}_l - \mathrm{m}_h)}{\varepsilon_k\varepsilon_l(\mathrm{m}_h - \mathrm{m}_0)} = -\frac{n}{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}\,\frac{\sigma^3 v}{\sigma_1 v\,\sigma_2 v\,\sigma_3 v} \qquad \left\{ h, k, l = \begin{matrix} 1, 2, 3 \\ 2, 3, 1 \\ 3, 1, 2 \end{matrix} \right\};$$

d'où il suit

$$(13)\qquad \begin{cases} i\varepsilon_1\sigma_1 v : i\varepsilon_2\sigma_2 v : i\varepsilon_3\sigma_3 v : \sigma v \\ \quad = (\mathrm{m}_2 - \mathrm{m}_3)^{\frac{1}{2}} : (\mathrm{m}_3 - \mathrm{m}_1)^{\frac{1}{2}} : (\mathrm{m}_1 - \mathrm{m}_2)^{\frac{1}{2}} : \left(\dfrac{\varepsilon_h(\mathrm{m}_h - \mathrm{m}_k)(\mathrm{m}_l - \mathrm{m}_h)}{\varepsilon_k\varepsilon_l(\mathrm{m}_h - \mathrm{m}_0)}\right)^{\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

Il reste enfin à déterminer la constante n. Des équations établies ci-dessus

$$\frac{\mathrm{m}_1}{n} - \frac{\sigma'_1 v}{\sigma_1 v} = \frac{\mathrm{m}_2}{n} - \frac{\sigma'_2 v}{\sigma_2 v} = \frac{\mathrm{m}_3}{n} - \frac{\sigma'_3 v}{\sigma_3 v} = \frac{\mathrm{m}_0}{n} - \frac{\sigma' v}{\sigma v},$$

on obtient ([2]), en profitant d'une relation connue,

$$(14)\qquad \varepsilon_h n^2 = \varepsilon_k\varepsilon_l(\mathrm{m}_0 - \mathrm{m}_h)(\mathrm{m}_k - \mathrm{m}_l),$$

où d'après (W_1)

$$\mathrm{m}_1 = \frac{\mathfrak{C}\delta_{44}}{\mathrm{A}}\left(1 + i\alpha\frac{c_{41}}{c_{11}}\right),$$

$$\mathrm{m}_2 = \frac{\mathfrak{C}\delta_{44}}{\mathrm{B}}\left(1 + i\beta\frac{c_{42}}{c_{22}}\right),$$

$$\mathrm{m}_3 = \frac{\mathfrak{C}\delta_{44}}{\mathrm{C}}\left(1 + i\gamma\frac{c_{43}}{c_{33}}\right),$$

$$\mathrm{m}_0 = -\frac{i\mathfrak{C}c_{44}}{\alpha c_{14} + \beta c_{24} + \gamma c_{34} + \delta_{44}c_{44}},$$

([1]) *Voir* WEIERSTRASS-SCHWARZ, *Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen*, p. 29; et F. CASPARY, *loc. cit.*, p. 395. 396.

([2]) *Voir* VOLTERRA, *loc. cit.*

d'après (V_4)

$$\mathfrak{m}_1 = \frac{\mathfrak{C} c_{11}}{A c_{11} + \alpha c_{41}},$$
$$\mathfrak{m}_2 = \frac{\mathfrak{C} c_{22}}{B c_{22} + \beta c_{42}},$$
$$\mathfrak{m}_3 = \frac{\mathfrak{C} c_{33}}{C c_{33} + \gamma c_{43}},$$
$$\mathfrak{m}_0 = - \frac{i \mathfrak{C} c_{44}}{\alpha c_{14} + \beta c_{24} + \gamma c_{34} + \delta_{44} c_{44}}.$$

8. *Généralisation du problème.* — Le problème de rotation que je viens de traiter peut être généralisé de la manière suivante : Soient un corps et les $n - 1$ corps correspondants définis plus haut (p. 168); je considère dans chacun de ces $n - 1$ corps une série de $\mathfrak{m}$ corps de révolution tels que chacun de ces $\mathfrak{m}$ corps tourne autour d'un axe fixé au corps qui le précède. Les expressions des éléments du système orthogonal qui détermine le mouvement de ce système dynamique découlent immédiatement du théorème IV, si l'on y choisit encore convenablement les quantités $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, G; c_{ij}, a_{mn}, b_{mn} par la méthode employée dans le numéro **7**.

Ce système dynamique appartient à ceux que H. von Helmholtz a appelés *systèmes polycycliques*.