JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

CH.-J DE LA VALLÉE-POUSSIN

Réduction des intégrales multiples généralisées

Journal de mathématiques pures et appliquées 5e série, tome 5 (1899), p. 191-204.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1899_5_5__191_0>

Réduction des intégrales multiples généralisées;

PAR M. CH.-J. DE LA VALLÉE-POUSSIN.

I. — Définitions et objet du Mémoire.

1. J'ai publié en 1892, dans ce même Journal, un Mémoire étendu dans lequel j'ai étudié les propriétés des intégrales généralisées de fonctions illimitées. J'y ai recherché sous quelles conditions l'intégrale double étendue à une aire T

$$\mathbf{S}_{\mathrm{T}} f(x, y)\, d\mathrm{T}$$

est réductible à deux intégrales généralisées simples, consécutives, entre les limites de T.

Le cas le plus intéressant, les autres s'y ramènent d'ailleurs, est celui où la fonction $f(x, y)$ est toujours de même signe. Dans ce cas, moyennant une restriction (vérifiée dans toutes les applications que je connaisse), la condition nécessaire et suffisante pour que la réduction soit possible est qu'elle conduise à un résultat déterminé.

J'ai cherché à supprimer toute restriction à ce théorème : je n'y suis pas parvenu; mais la méthode nouvelle que je vais exposer conduit à des résultats plus généraux que celui-là. Il me paraît intéressant de les faire connaître, car ils jettent une certaine lumière sur une question importante et conduisent, en tous cas, à une solution générale du problème de la réduction des intégrales doubles.

2. Avant de préciser le résultat principal de cette étude, je dois rappeler les définitions des intégrales généralisées telles que je les ai données dans mon premier Mémoire.

A cet effet, j'associe à la fonction f à intégrer, supposée toujours positive, une fonction f_n définie comme il suit :

$$f_n = f \quad \text{si} \quad f \leqq n;$$
$$f_n = n \quad \text{si} \quad f \geqq n.$$

Je pose ensuite, par définition, l'intervalle (a, b) et l'aire T étant limités,

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx,$$

$$\lim_{n=\infty} \mathbf{S}_{\mathrm{T}} f_n(x,y)\,d\mathrm{T} = \mathbf{S}_{\mathrm{T}} f(x,y)\,d\mathrm{T}.$$

3. Ces relations ne sont bien déterminées que si la fonction $f_n(x)$ ou la fonction $f_n(x, y)$ sont intégrables, l'une dans l'intervalle (a, b) et l'autre dans l'aire T, quel que soit n. Dans le cas contraire, il y a une *intégrale par défaut* et une *intégrale par excès*, toutes les deux bien déterminées; je les représente par

$$\overset{\mathrm{D}}{\int_a^b} f_n(x)\,dx, \quad \overset{\mathrm{E}}{\int_a^b} f_n(x)\,dx;$$

$$\overset{\mathrm{D}}{\mathbf{S}}_{\mathrm{T}} f_n(x,y)\,d\mathrm{T}, \quad \overset{\mathrm{E}}{\mathbf{S}}_{\mathrm{T}} f_n(x,y)\,d\mathrm{T}.$$

Les intégrales par défaut et par excès de la fonction illimitée f seront par définition les limites de celles-là quand n tendra vers l'infini; celles-ci seront donc déterminées ou infinies. On aura, par exemple,

$$\overset{\mathrm{D}}{\int_a^b} f(x)\,dx = \lim_{n=\infty} \overset{\mathrm{D}}{\int_a^b} f_n(x)\,dx,$$

$$\overset{\mathrm{E}}{\mathbf{S}} f(x,y)\,d\mathrm{T} = \lim_{n=\infty} \overset{\mathrm{E}}{\mathbf{S}}_{\mathrm{T}} f_n(x,y)\,d\mathrm{T}.$$

4. J'appelle *discontinuité* de $f(x)$ au point x la limite de l'oscillation de $f(x)$ dans l'intervalle infiniment petit $(x-\delta, x+\delta)$ et je la représente par

$$\operatorname{disc} f(x).$$

De même, la discontinuité de $f(x,y)$ est la limite de l'oscillation de f dans une aire infiniment petite autour du point (x,y); je la désigne par

$$\operatorname{disc} f(x,y).$$

La discontinuité sera le plus souvent différente, si l'on considère $f(x,y)$ comme fonction de x seul ou de y seul; je représente ces deux *discontinuités partielles* par

$$\operatorname{disc}_x f(x,y), \quad \operatorname{disc}_y f(x,y).$$

Il résulte évidemment de cette définition de la discontinuité que la fonction $\operatorname{disc} f(x)$ est une fonction qui atteint sa limite supérieure dans tout intervalle.

5. *Définition de la fonction mf.* — La méthode que nous allons exposer repose sur les propriétés d'une fonction mf liée à la fonction f par les définitions suivantes :

1° Si $f(x)$ dépend d'une seule variable x,

$$mf(x)$$

désigne le minimum de $f(x)$ dans un intervalle infiniment petit comprenant le point x.

2° Si $f(x,y)$ dépend de deux variables x et y,

$$mf(x,y)$$

désigne le minimum de $f(x,y)$ dans une aire infiniment petite autour de (x,y).

6. ***Réduction des intégrales doubles.*** — La fonction mf permet de résoudre, dans le cas général, le problème de la réduction des inté-

grales doubles. Nous allons démontrer en effet que si, $f(x,y)$ étant $\gtrless 0$, l'intégrale double

$$\mathbf{S}_{\mathrm{T}} f(x,y)\,d\mathrm{T}$$

a une valeur déterminée : *elle est toujours égale au résultat de deux intégrations simples par défaut sur $m\,f(x\,y)$, effectuées, entre les limites de l'aire* T. Ainsi, si cette aire est limitée par les valeurs a et b de x et c et d de y, on aura

$$\mathbf{S}_{\mathrm{T}} f(x,y)\,d\mathrm{T} = \int_a^{\mathrm{D},b} dx \int_c^{\mathrm{D},d} m\,f\,dy = \int_c^{\mathrm{D},d} dy \int_a^{\mathrm{D},b} m\,f\,dx.$$

Ce théorème s'étend aux intégrales d'un ordre quelconque.

II. — Propriétés des fonctions mf.

7. *Propriétés de la fonction mf d'une seule variable.* — En désignant par $f(x)$ une fonction quelconque de x, la nouvelle fonction

$$m\,f(x)$$

jouit des propriétés suivantes :

1° Elle atteint sa limite inférieure dans tout intervalle (a, b) et cette limite est la même que celle de $f(x)$ dans l'intervalle $(a-0, b+0)$. Seulement cette limite peut être inaccessible pour $f(x)$.

2° Supposons que f soit $\gtreqless 0$ et puisse croître indéfiniment dans l'intervalle (a, b); décomposons l'intervalle (a, b) en intervalles infiniment petits Δx_i par les points $x_1, x_2, \ldots$; soit ξ_i le point de l'intervalle Δx_i où $m\,f$ atteint son minimum ; on aura, l'intégrale étant prise par défaut,

$$\int_a^{\mathrm{D},b} f(x)\,dx = \lim \sum_i m\,f(\xi_i)\,\Delta x_i.$$

D'une part, en effet, on a, quel que soit n,

$$\int_a^{\mathrm{D},b} f_n(x)\,dx > \sum m\,f_n(\xi_i)\,\Delta x_i,$$

donc, pour n infini,

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqq \sum m f(\xi_i)\,\Delta x_i,$$

et, en faisant tendre les Δx vers o,

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqq \lim \sum m f(\xi_i)\,\Delta x_i.$$

D'autre part, les Δx tendant vers zéro, on a

$$\int_a^b f_n(x)\,dx = \lim \sum m f_n(\xi_i)\,\Delta x_i \leqq \lim \sum m f(\xi_i)\,\Delta x_i;$$

donc, en faisant tendre n vers l'infini, et en ayant égard à l'inégalité obtenue d'abord,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim \sum m f(\xi_i)\,\Delta x_i.$$

Si au lieu de choisir les points ξ_i comme nous venons de le faire, on les prenait arbitrairement dans l'intervalle Δx_i, on aurait donc

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqq \lim \sum m f(\xi_i)\,\Delta x_i.$$

8. *Propriétés de la fonction mf de deux variables.* — Soit $f(x, y)$ une fonction de deux variables x et y dans un domaine T rectangulaire, limité par les valeurs a et b de x et c et d de y; la nouvelle fonction

$$m f(x, y)$$

atteindra sa limite inférieure dans toute portion de l'aire T et elle jouira, en outre, des propriétés suivantes :

1° En tout point (α, β) où mf est finie, on peut, quelque petit que soit ε, lui faire correspondre un nombre δ tel que la condition

$$m f(\alpha + h, \beta + k) - m f(\alpha, \beta) > -\varepsilon$$

ait lieu, pourvu que $|h|$ et $|k|$ soient $< \delta$.

C'est une conséquence de la définition de mf, car, si cette condition ne se réalisait pas, $mf(\alpha, \beta)$ ne serait pas la limite inférieure de $mf(x, y)$ ni, par suite, celle de $f(x, y)$ dans une aire infiniment petite autour de (α, β).

2° Si la fonction $mf(x, \beta)$ est limitée quand x varie dans l'intervalle (a, b), à tout nombre ε correspond un nombre δ assez petit pour qu'on ait, quel que soit x,

$$mf(x, \beta + k) - mf(x, \beta) > -\varepsilon - \operatorname{disc}_x mf(x + \theta\varepsilon, \beta)$$
$$(-1 < \theta < 1),$$

pourvu que l'on ait $|k| < \delta$.

Si cette condition ne se réalisait pas dans l'intervalle (a, b), cet intervalle contiendrait au moins un point X tel que la condition ne se réalisât pas non plus dans un au moins des deux intervalles arbitrairement petits $(X - \delta, X)$ ou $(X, X + \delta)$, par exemple dans le second. Mais ceci est faux, car on peut d'abord supposer δ assez petit pour que les deux inégalités

$$|mf(x, \beta) - mf(X, \beta)| < \operatorname{disc}_X mf(X, \beta) + \frac{\varepsilon}{2},$$
$$mf(x, \beta + k) - mf(X, \beta) > -\frac{\varepsilon}{2}$$

aient lieu, pourvu que $|x - X|$ et $|k|$ soient $< \delta$, l'une par la définition de la discontinuité au point X, l'autre en vertu de la propriété 1°. Cela fait, on aura, pour toute valeur de x dans l'intervalle $(X, X + \delta)$,

$$mf(x, \beta + k) - mf(x, \beta) > -\varepsilon - \operatorname{disc}_x mf(X, \beta).$$

Ce résultat contredit notre hypothèse, dès que δ devient $< \varepsilon$, car X peut alors se représenter par $x + \theta\varepsilon$.

3° Soient A et B deux nombres > 0, si $mf(x, \beta)$ est constamment $> A$ dans l'intervalle (a, b) de x, on peut supposer δ assez petit pour qu'on ait aussi dans cet intervalle

$$mf(x, \beta + k) > A - B,$$

pourvu qu'on ait $|k| < \delta$.

En effet, si la relation opposée $mf(x, \beta + k) \leqq A - B$ pouvait se vérifier pour des valeurs infiniment petites de k, les valeurs correspondantes de x auraient au moins un point limite ξ où l'on aurait

$$mf(\xi, \beta) \overset{=}{<} \mathrm{A} - \mathrm{B},$$

ce qui contredit l'hypothèse.

III. — Théorèmes fondamentaux.

9. Avant d'énoncer le théorème qui va jouer le rôle essentiel dans mon analyse, je dois encore démontrer le lemme suivant :

Soient $\varphi(x)$ une fonction limitée dans l'intervalle (a, b) et θ une fonction de x qui varie d'une manière arbitraire entre -1 et $+1$: on aura

$$\lim_{\varepsilon=0} \overset{\mathrm{E}}{\int_a^b} \operatorname{disc} \varphi(x + \theta\varepsilon)\, dx \overset{=}{<} \overset{\mathrm{E}}{\int_a^b} \operatorname{disc} \varphi(x)\, dx.$$

Soit d'abord η un nombre arbitrairement petit; décomposons (a, b) en intervalles successifs Δx_i par les points $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots$; soit ξ_i le point où $\operatorname{disc}\varphi(x)$ atteint son maximum dans l'intervalle Δx_i; on peut supposer tous ces intervalles suffisamment petits pour qu'on ait

$$\overset{\mathrm{E}}{\int_a^b} \operatorname{disc} \varphi(x)\, dx \overset{=}{>} \sum \operatorname{disc} \varphi(\xi_i) \Delta x_i - \eta.$$

D'ailleurs on peut toujours admettre que ξ_i désigne une des limites de l'intervalle Δx_i, car cette condition se réalisera toujours en ajoutant les points ξ_i aux premiers points de subdivision.

Les points x_i étant en nombre limité, on peut aussi supposer que ε est assez petit pour que l'on ait en chacun de ces points

$$\operatorname{disc}\varphi(x_i + \theta\varepsilon) \overset{=}{<} \operatorname{disc}\varphi(x_i) + \eta.$$

Cela fait, le maximum de $\operatorname{disc}\varphi(x + \theta\varepsilon)$ dans l'intervalle Δx_i ne pourra surpasser la quantité

$$\operatorname{disc}\varphi(\xi_i) + \eta,$$

et l'on aura, par conséquent,

$$\overset{\mathrm{E}}{\int_a^b} \operatorname{disc} \varphi(x + \theta\varepsilon)\, dx \mathrel{\overline{\overline{<}}} \sum \operatorname{disc} \varphi(\xi_i)\, \Delta x_i + \eta_1(b - a)$$
$$\mathrel{\overline{\overline{<}}} \overset{\mathrm{E}}{\int_a^b} \operatorname{disc} \varphi(x)\, dx + \eta + \eta_1(b - a).$$

Le nombre η étant aussi petit que l'on veut, le lemme est démontré. Voici maintenant mon théorème fondamental.

10. Théorème. — *Si l'intégrale par défaut*

$$\overset{\mathrm{D}}{\int_a^b} m f(x, \beta)\, dx$$

n'est pas infinie, à tout nombre positif ε *correspondent un nombre* n *et un nombre* δ *tels qu'on ait, pour* $|k| < \delta$,

$$\overset{\mathrm{E}}{\int_a^b} m f_n(x, \beta + k)\, dx > \overset{\mathrm{D}}{\int_a^b} m f(x, \beta)\, dx - \varepsilon,$$

et cette relation subsiste a fortiori *pour les valeurs plus grandes de* n.

Choisissons d'abord n assez grand pour qu'on ait

$$(1) \qquad \overset{\mathrm{D}}{\int_a^b} m f_n(x, \beta)\, dx > \overset{\mathrm{D}}{\int_a^b} m f(x, \beta)\, dx - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Choisissons maintenant un nombre ε' assez petit pour qu'on ait, θ désignant une fonction arbitraire comprise entre -1 et $+1$,

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\overset{\mathrm{E}}{\int_a^b} \operatorname{disc}_x m f_n(x + \theta\varepsilon', \beta)\, dx + \varepsilon'(b - a) \\ &\quad < \overset{\mathrm{E}}{\int_a^b} \operatorname{disc}_x m f_n(x, \beta)\, dx + \frac{\varepsilon}{2}; \end{aligned} \right.$$

cette condition peut se réaliser, en vertu du lemme du n° **9** qui précède.

Enfin, on peut prendre δ suffisamment petit pour qu'on ait constamment, pourvu que $|k|$ soit $< \delta$ (n° **8**, 2°),

$$m f_n(x, \beta + k) - m f_n(x, \beta) > -\varepsilon' - \operatorname{disc}_x m f_n(x + \theta\varepsilon', \beta).$$

On conclut de cette relation

$$\begin{aligned}\int_a^{\mathrm{E}, b} m f_n(x, \beta + k)\, dx \\ \geqq \int_a^{\mathrm{E}, b} [m f_n(x, \beta) - \operatorname{disc}_x m f_n(x + \theta\varepsilon', \beta) - \varepsilon']\, dx,\end{aligned}$$

et *a fortiori* [puisque $\max(\mathrm{A} - \mathrm{B}) \geqq \max \mathrm{A} - \max \mathrm{B}$]

$$\begin{aligned}\int_a^{\mathrm{E}, b} m f_n(x, \beta + k)\, dx \\ \geqq \int_a^{\mathrm{E}, b} m f_n(x, \beta)\, dx - \int_a^{\mathrm{E}, b} \operatorname{disc}_x m f_n(x + \theta\varepsilon', \beta)\, dx - \varepsilon'(b - a),\end{aligned}$$

enfin, *a fortiori*, en vertu de l'inégalité (2),

$$(3) \qquad \left\{\begin{aligned}\int_a^{\mathrm{E}, b} m f_n(x, \beta + k)\, dx \\ \geqq \int_a^{\mathrm{E}, b} m f_n(x, \beta)\, dx - \int_a^{\mathrm{E}, b} \operatorname{disc}_x m f_n(x, \beta)\, dx - \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}\right.$$

Ajoutons les inégalités (1) et (3) et observons que

$$\int_a^{\mathrm{E}, b} m f_n(x, \beta)\, dx - \int_a^{\mathrm{E}, b} \operatorname{disc}_x m f_n(x, \beta)\, dx = \int_a^{\mathrm{D}, b} m f_n(x, \beta)\, dx,$$

nous obtiendrons l'inégalité du théorème.

11. Théorème. — *Réciproquement, si l'intégrale par défaut*

$$\int_a^{\mathrm{D}, b} m f(x, \beta)\, dx = \infty,$$

on aura, k et n tendant arbitrairement vers leurs limites,

$$\lim_{\substack{k=0\\ n=\infty}} \int_a^b m f_n(x, \beta + k)\, dx = \infty.$$

Soient, en effet, H et K deux nombres arbitrairement grands; divisons l'intervalle (a, b) en p parties par les points $x_1, x_2, \ldots$; soit Δx_i un de ces intervalles et A_i le minimum de $mf(x, \beta)$ dans cet intervalle (si ce minimum était infini, A_i serait un nombre fini arbitraire). On peut supposer p assez grand pour qu'on ait

$$\sum A_i \Delta x_i > H + K;$$

ensuite on peut prendre δ assez petit pour que l'on ait, dans chaque intervalle Δx_i de x, pourvu que $|k|$ soit $< \delta$,

$$mf(x, \beta + k) > A_i - \frac{K}{b-a},$$

comme on l'a vu au n° **8**, 3°.

Cela fait, pourvu que n soit supérieur à la plus grande des quantités A_i, on aura, dans les mêmes conditions,

$$mf_n(x, \beta + k) > A_i - \frac{K}{b-a};$$

donc

$$\int_a^b mf_n(x, \beta + k)\, dx > \sum A_i \Delta x_i - K > H.$$

Cette relation, où H est arbitraire, se vérifiant pour n assez grand et δ assez petit, le théorème en résulte.

12. Théorème. — *Soit β_n le point où la fonction de y*

$$m \overset{E}{\int_a^b} mf_n(x, y)\, dx$$

atteint son minimum dans l'intervalle (c, d); on peut faire tendre *en même temps* β_n *vers une limite déterminée* β *et* n *vers l'infini; on aura*

$$\lim_{n=\infty} m \overset{\mathrm{E}}{\int_a^b} m f_n(x, \beta_n)\, dx \overset{=}{>} \overset{\mathrm{D}}{\int_a^b} m f(x, \beta)\, dx.$$

Si le second membre est infini, le premier le sera aussi en vertu du théorème précédent; supposons-le donc fini et déterminé.

Dans ce cas, quelque petit que soit ε, le théorème avant-précédent donnera, pour n suffisamment grand et $|\beta_n - \beta| < \delta$,

$$m \overset{\mathrm{E}}{\int_a^b} m f_n(x, \beta_n)\, dx \overset{=}{>} \overset{\mathrm{D}}{\int_a^b} m f(x, \beta)\, dx - \varepsilon.$$

On peut faire tendre à la fois n vers l'infini et ε vers zéro; à la limite, on obtient la relation à démontrer.

IV. — Réduction des intégrales doubles.

13. Théorème. — *Si la fonction* $f(x, y)$ *n'est jamais négative dans le rectangle* T, *limité par les valeurs* a *et* b *de* x *et* c *et* d *de* y, *l'expression*

$$\overset{\mathrm{D}}{\int_c^d} dy \overset{\mathrm{D}}{\int_a^b} m f(x, y)\, dx$$

est comprise entre les limites d'indétermination de l'intégrale double

$$\mathbf{S}_{\mathrm{T}} f(x, y)\, d\mathrm{T}.$$

D'une part, en effet, on a

$$\overset{\mathrm{D}}{\mathbf{S}}_{\mathrm{T}} f_n\, d\mathrm{T} = \overset{\mathrm{D}}{\mathbf{S}}_{\mathrm{T}} m f_n\, d\mathrm{T} \overset{=}{<} \overset{\mathrm{D}}{\int_c^d} dy \overset{\mathrm{D}}{\int_a^b} m f_n\, dx.$$

Donc, en faisant tendre n vers l'infini, et puisque f est au moins égal à f_n,

$$(1)\qquad {}^{\mathrm{D}}\mathbf{S}_{\mathrm{T}} f\,d\mathrm{T} \leqq \lim_{n=\infty} {}^{\mathrm{D}}\!\!\int_c^d dy\, {}^{\mathrm{D}}\!\!\int_a^b m\,f_n\,dx \leqq {}^{\mathrm{D}}\!\!\int_c^d dy\, {}^{\mathrm{D}}\!\!\int_a^b m\,f\,dx.$$

D'autre part, divisons (c, d) en intervalles consécutifs Δy_i par les points $y_1, y_2, \ldots$, et soit $\beta_{i,n}$ le point où

$$m\, {}^{\mathrm{E}}\!\!\int_a^b m\,f_n(x, y)\,dx$$

atteint son minimum dans l'intervalle Δy_i; on aura

$${}^{\mathrm{E}}\mathbf{S}_{\mathrm{T}} f_n d\mathrm{T} \geqq {}^{\mathrm{E}}\!\!\int_c^d dy\, {}^{\mathrm{E}}\!\!\int_a^b f_n\,dx \geqq \sum_i \Delta y_i\, m\, {}^{\mathrm{E}}\!\!\int_a^b m\,f_n(x, \beta_{i,n})\,dx.$$

On peut faire tendre n vers l'infini, et en même temps, dans chaque intervalle Δy_i, le point $\beta_{i,n}$ vers une limite β_i; le théorème du n° **12** s'applique à chacun de ces intervalles; il vient donc

$${}^{\mathrm{E}}\mathbf{S}_{\mathrm{T}} f\,d\mathrm{T} \geqq \sum \Delta y_i\, {}^{\mathrm{D}}\!\!\int_a^b m\,f(x, \beta_i)\,dx.$$

Faisons maintenant tendre tous les intervalles Δy_i vers zéro; il viendra (n° **7**, 2°)

$$(2)\qquad {}^{\mathrm{E}}\mathbf{S}_{\mathrm{T}} f\,d\mathrm{T} \geqq {}^{\mathrm{D}}\!\!\int_c^d dy\, {}^{\mathrm{D}}\!\!\int_a^b m\,f(x, y)\,dx.$$

Des relations (1) et (2) on conclut le théorème. Celui-ci donne alors immédiatement le suivant :

14. Théorème. — *Si l'intégrale double est déterminée dans l'aire* **T**, *on aura*

$$\mathbf{S}\, f\,d\mathrm{T} = {}^{\mathrm{D}}\!\!\int_a^b dx\, {}^{\mathrm{D}}\!\!\int_c^d m\,f\,dy = {}^{\mathrm{D}}\!\!\int_c^d dy\, {}^{\mathrm{D}}\!\!\int_a^b m\,f\,dx,$$

et l'intégrale double se réduit à deux intégrales simples consécutives, effectuées par défaut, dans un ordre arbitraire.

Remarques. — Dans tous les cas où l'on a

$$\int_c^d dy \int_a^b (f - mf)\, dx = 0,$$

en particulier dans tous les cas pratiques dans lesquels la différence $f - mf$ ne diffère de zéro qu'en certains points ou sur certaines lignes rectifiables en nombre limité, on aura aussi

$$\mathbf{S}_T f\, dT = {}^{\text{D}}\!\int_c^d dy\, {}^{\text{D}}\!\int_a^b f\, dx,$$

et l'intégrale double se réduira à deux intégrales simples par défaut, sans qu'il soit nécessaire de modifier la fonction

Dans tous ces cas aussi, on retrouve le théorème démontré dans mon premier Mémoire et l'*on peut réduire l'intégrale double à deux intégrales simples, effectuées sur la même fonction, pourvu qu'on trouve un résultat déterminé.*

15. *Généralité du théorème.* — Le théorème du n° **14** donne une solution tout à fait générale du problème de la réduction des intégrales doubles. En effet, dans tous les cas, f peut être considéré comme la différence de deux fonctions positives et, pourvu que le domaine d'intégration T soit limité, il sera intérieur à un rectangle T′ que l'on pourra prendre comme domaine d'intégration, à condition de poser $f = 0$ en dehors de T. Enfin, le cas où T serait infini se ramène au précédent par un changement de variables.

V. — Extension aux intégrales multiples quelconques.

16. Le théorème du n° **15** est général et s'applique à une intégrale multiple de n'importe quel ordre, effectué sur une fonction positive, comme nous allons l'expliquer très succinctement.

Soit une intégrale généralisée de l'ordre p

$$(1) \qquad \mathbf{S}_{T_p} f(x_1, x_1, \ldots, x_p)\, dT_p$$

étendue à un domaine T_p limité par les valeurs a_i et b_i de x_i ($i = 1, 2, \ldots, p$); si elle n'est pas déterminée, nous désignerons les limites d'indétermination ou les intégrales par défaut et par excès par les notations

$$(2) \qquad {}^{\mathrm{D}}\mathbf{S}_{T_p} f\, dT_p, \quad {}^{\mathrm{E}}\mathbf{S}_{T_p} f\, dT_p.$$

Soit ensuite, en chaque point mf, la limite inférieure de f dans un domaine infiniment petit autour de ce point, la valeur de l'expression

$$(3) \qquad {}^{\mathrm{D}}\!\int_{a_1}^{b_1} dx_1\, {}^{\mathrm{D}}\!\int_{a_2}^{b_2} dx_2 \ldots {}^{\mathrm{D}}\!\int_{a_p}^{b_p} m f\, dx_p$$

est comprise entre celles des expressions (2). En particulier, si l'intégrale (1) est déterminée, l'expression (3) lui sera égale.

On prouve le théorème, en montrant qu'il est vrai pour p variables s'il est vrai pour $(p-1)$.

La démonstration se fait alors exactement comme pour le cas de deux variables, en remplaçant dans tous les raisonnements l'intégrale simple

$$\int_a^b f\, dx$$

par une intégrale de l'ordre $(p-1)$. Il est bien inutile de la reprendre en détail.