JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. BOUSSINESQ

Complément à une étude récente concernant la théorie de la bicyclette : influence, sur l'équilibre, des mouvements latéraux spontanés du Cavalier

Journal de mathématiques pures et appliquées 5e série, tome 5 (1899), p. 217-232.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1899_5_5__217_0>

Complément à une étude récente concernant la théorie de la bicyclette [1] *: influence, sur l'équilibre, des mouvements latéraux spontanés du cavalier;*

PAR M. J. BOUSSINESQ.

---

§ IV. — Déplacements du centre de gravité général par les mouvements latéraux que s'imprime le bicycliste sur la selle.

11. Le Mémoire inséré aux pages 117 à 136 de ce Volume contient (p. 124) une équation, (9), qui relie le mouvement d'inclinaison de la bicyclette à son mouvement de progression, dans l'hypothèse d'un cavalier fixé sur sa machine, ou, plutôt, n'y exécutant que les deux manœuvres des pédales et du guidon, négligeables au point de vue des inerties exigées par leur production. Or, en réalité, le cavalier a besoin, dans les *virages*, comme on a vu à la page 134, de se pencher du côté de la concavité de la trajectoire sur laquelle il veut s'engager; et il y a lieu d'admettre que le centre de gravité du système, situé à une distance h, ordinairement constante, de la base a de la bicyclette, et presque confondu avec celui du corps du bicycliste, sort alors du plan médian du cadre pour s'en éloigner de petites distances λ, en se

(1) *Voir* p. 117 à 136 de ce Volume. Le présent Complément a été résumé dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (t. CXXVIII, p. 766 et 859; 27 mars et 4 avril 1899). Les paragraphes et les numéros, tant du texte que des formules, feront suite, ici, à ceux de l'étude précédente.

portant vers le centre de la courbure $\frac{1}{R}$ de la trajectoire à décrire sur le sol.

Les petites déformations que s'imprime à cet effet le cavalier, et les variations, plus ou moins complexes, qui en résultent généralement pour l'angle θ d'inclinaison du plan médian du cadre par rapport à la verticale, ont des effets en grande partie faciles à prévoir et à exprimer analytiquement, si l'on admet que ces mouvements du cavalier sur la bicyclette soient rapides, ou comme instantanés, et séparés par des intervalles relativement longs, durant lesquels il restera fixé à la machine.

12. Produits alors par de vives actions et réactions intérieures au système, les mouvements dont il s'agit auront, d'une part, assez peu de durée, pour qu'on puisse y négliger la progression de la bicyclette sur le sol, et, d'autre part, trop peu d'amplitude dans le sens vertical, pour que le travail de la pesanteur y soit sensible. Ils se réduiront ainsi à des rotations de la bicyclette autour de sa base, avec rotations inverses du cavalier accompagnées de déformations, et la loi de la conservation des aires les régira.

Le cavalier, pour y opérer un petit transport définitif λ du centre de gravité de tout le système hors du plan médian du cadre, pourra, par exemple, y imprimer successivement à ce plan médian deux rotations égales et contraires, qui nécessiteront deux rotations inverses et à aires équivalentes de l'ensemble de son corps. S'il a soin d'abaisser ou de plier un peu celui-ci, pendant sa rotation dirigée vers le centre de la courbure $\frac{1}{R}$ qu'il veut donner à la trajectoire, et, au contraire, de l'élever ou l'étendre durant la rotation inverse, les aires correspondant à la première rotation, décrites par des rayons vecteurs moindres, constitueront des secteurs plus ouverts, ou de plus grand angle, que les aires décrites dans le sens rétrograde; en sorte que, lorsque le cadre aura retrouvé sa première inclinaison θ sur la verticale, le cavalier conservera, par rapport au plan médian, une partie de son déplacement latéral. Et, par suite, le centre de gravité général du système se trouvera bien à une petite distance voulue λ de ce plan médian.

Nous admettrons d'ailleurs que le cavalier ait repris sa première forme et sa première distance à l'axe a, afin que la loi des aires donne alors à l'ensemble la même vitesse de rotation $\frac{d\theta}{dt}$ qu'avant la rapide perturbation subie. Sans cela, il y aurait bien (dans l'hypothèse, nullement indispensable, que nous faisons ici pour plus de simplicité) conservation de l'inclinaison θ du cadre, mais non de sa dérivée $\frac{d\theta}{dt}$, dont le changement serait, il est vrai, insignifiant, vu la petitesse supposée de la déformation du système.

Le cavalier restant dès lors fixe sur la selle, les coordonnées relatives b, h, λ du centre de gravité par rapport au cadre persisteront, jusqu'à ce qu'il juge devoir retrouver, par une manœuvre inverse non moins rapide, sa primitive disposition où λ était nul, ou jusqu'à ce qu'il préfère en adopter une nouvelle.

15. Il importe d'observer que les deux rotations rapides du cadre, égales et contraires, dont il vient d'être question, n'ont rien d'obligé. Elles ne constituent que la manière probablement la plus simple de concevoir comment le centre de gravité du système peut sortir, presque brusquement, du plan médian, sans que l'inclinaison θ de celui-ci, ni sa vitesse d'inclinaison $\frac{d\theta}{dt}$, soient, en définitive, modifiées. Le même but pourrait être atteint par des déformations du système qui n'altéreraient la dérivée $\frac{d\theta}{dt}$, ni, par suite (vu la brièveté du phénomène), l'inclinaison θ, *à aucun moment de la perturbation*.

En effet, représentons-nous, exprimées en fonction du temps t, les coordonnées relatives de chaque point matériel du système par rapport au plan médian du cadre, coordonnées définissant la configuration de l'ensemble et appelées i, j, l dans le premier Mémoire (p. 118), où elles sont comptées à partir d'un point G qui figurera maintenant, sur le plan médian, non plus le centre de gravité, mais seulement sa situation habituelle ([1]). Alors, si l'on donne les fonctions i, j, l, le

([1]) Il est clair que notre plan de repère KAG (figure de la page 118) mené, à travers le cadre de la bicyclette, suivant la droite des deux points de contact des roues avec le sol et par la situation habituelle G du centre de gravité du système, ne se confond généralement pas, *en toute rigueur*, avec le plan médian du système pourra être construit à tout instant t, pourvu que la place de la base a sur le sol et l'inclinaison θ du plan médian y soient connues. La situation actuelle, à l'époque t, de la base a dépend du mouvement de progression, c'est-à-dire de la vitesse V du bas de la roue motrice et du rayon de courbure R de sa trajectoire, fonctions de t censées à la disposition du cavalier (grâce aux pédales et au guidon). Il suffit ainsi de déterminer les variations successives de θ, et, à cet effet, de former une équation du mouvement d'où soient éliminées à la fois les réactions du sol et les actions intérieures.

Or l'équation des moments, par rapport à la droite du sol qui coïncide présentement avec la base a, est justement dans ce cas. Elle sera donc la *seule* équation *différentielle* du mouvement à faire vérifier par les coordonnées, dans l'espace, des points du système. Mais il est naturel qu'on puisse y satisfaire, pendant le court intervalle de temps où i, j, l sont variables, aussi bien en faisant changer convenablement ces innombrables coordonnées relatives i, j, l, et en posant $\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$, qu'en y faisant, au contraire, varier $\frac{d\theta}{dt}$. Et le problème restera très indéterminé, vu la multitude des inconnues i, j, l, si l'on ajoute la condition que le centre de gravité du système éprouve en même temps tel petit déplacement relatif qu'on voudra, notamment le petit écart désiré λ d'avec le plan médian du cadre. Ainsi, le cavalier doit pouvoir, de bien des manières, déplacer le centre de gravité du système par rapport au plan médian, même sans altérer le mouvement actuel de celui-ci.

§ V. — Calcul de ces déplacements dans deux hypothèses simples.

14. Donnons en détail un exemple de la théorie exposée ici.

Pour qu'il soit facile et simple, nous supposerons la masse du cava-

---

cadre. Mais il est assez voisin de celui-ci pour que nous ayons pu, pour abréger, lui en attribuer le nom; et il jouit, avec autant d'approximation, pour le moins, que le vrai plan médian du cadre, de la propriété, que nous avons admise, de se comporter comme un plan de symétrie général de la masse du système, dans l'évaluation approchée des moments d'inertie de celle-ci.

lier condensée en son centre de gravité. Cette hypothèse restrictive aura, il est vrai, l'inconvénient grave d'ôter à notre problème une grande partie de son intérêt pratique; car elle exigerait évidemment, pour s'appliquer avec une approximation suffisante, un cavalier à corps aussi ramassé et à membres aussi grêles, proportionnellement, que l'est l'araignée. De plus, en réduisant à trois seulement les coordonnées relatives i, j, l *variables*, seules quantités disponibles pour la production des effets voulus, elle diminuera outre mesure la généralité de la question et ne permettra même plus de se donner, comme condition accessoire, la conservation de la vitesse $\frac{d\theta}{dt}$ de rotation du plan médian.

Mais, en revanche, les formules s'y obtiendront presque sans calculs, et les résultats s'en dégageront d'une manière à peu près intuitive. D'ailleurs, la même hypothèse, rendue encore plus radicale par la concentration fictive des deux masses du cavalier et de la bicyclette en un seul point G, s'est montrée féconde et utile : car elle m'a fait connaître [1] la vraie forme de l'équation différentielle (9) du mouvement, avec b' et h' réduits à b et h; en sorte qu'il a suffi d'y changer les valeurs numériques de ces deux constantes b et h pour rendre l'équation applicable au cas effectif de dissémination plus ou moins grande des masses dont il s'agit. Il y a donc lieu de penser que la réduction, au point de vue des calculs d'inerties, du cavalier à un seul point, n'empêchera pas les résultats d'indiquer, tout au moins, le véritable sens suivant lequel se produiront les phénomènes, dans les circonstances réelles les plus simples.

15. Pour fixer les idées, bornons-nous au cas où la bicyclette, de masse μ et d'un rayon de gyration donné r autour de sa base a, décrit sur le sol une trajectoire rectiligne, et où son plan médian est initialement vertical, se confondant ainsi avec le plan, alors fixe, à partir duquel sera comptée sa rotation ultérieure θ autour de l'horizontale du sol parcourue par la base a. Appelant d'ailleurs μ' la masse du cavalier,

---

[1] Voir les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CXXVII, p. 843; 28 novembre 1898.

concentrée, comme on a dit, en son centre de gravité, à une certaine distance r' de la base a, contentons-nous d'étudier les mouvements qu'il exécutera sans renversements de vitesses, c'est-à-dire ceux où son rayon vecteur r', abaissé perpendiculairement sur la base a, prendra sa petite inclinaison θ' par rapport à la verticale (ou au plan vertical *origine*) en tournant toujours dans un même sens; de manière à balayer des aires élémentaires $\frac{1}{2}\mu' r'^2 d\theta'$ de même signe, ne s'entre-détruisant pas en majeure partie. Cela permettra, sur r', les petites erreurs relatives qui deviendraient inadmissibles, ou fausseraient grandement le résultat définitif, dans le cas de rotations successives en sens contraires.

Ainsi, la distance r' du cavalier à la base a de la bicyclette pourra, *ici*, être supposée invariable.

16. Désignons par Δ le déplacement latéral *angulaire* que s'imprimera le cavalier sur la selle, c'est-à-dire le petit angle $\theta' - \theta$ qu'il fera naître entre son rayon vecteur r' et le plan médian de la bicyclette, angle mesurant (au facteur constant près r') son déplacement relatif par rapport au plan de symétrie de son support, et dont il dispose à son gré entre certaines limites.

D'une part, nous aurons

$$\theta' - \theta = \Delta. \tag{18}$$

D'autre part, le principe de conservation de la somme des aires décrites $\frac{1}{2}\mu r^2 \theta$, $\frac{1}{2}\mu' r'^2 \theta'$ donnera

$$\mu r^2 \theta + \mu' r'^2 \theta' = 0. \tag{19}$$

Il vient donc

$$\frac{\theta'}{\mu r^2} = \frac{\theta}{-\mu' r'^2} = \frac{\theta' - \theta}{\mu r^2 + \mu' r'^2} \quad \text{ou} \quad \frac{\Delta}{\mu r^2 + \mu' r'^2};$$

et, par suite,

$$\theta' = \frac{\mu r^2}{\mu r^2 + \mu' r'^2}\Delta, \qquad \theta = \frac{-\mu' r'^2}{\mu r^2 + \mu' r'^2}\Delta. \tag{20}$$

Dès lors, si ρ désigne la distance, à la base a, du centre de gravité de la bicyclette, distance plus petite que le rayon de gyration r, les petits écarts survenus, $\rho\theta$, $r'\theta'$, des deux masses μ, μ', au plan vertical mené suivant la base a, se trouvent déterminés; et celui, que j'appellerai δ, du centre de gravité général au même plan, est enfin

$$(21) \qquad \delta = \frac{\mu\rho\theta + \mu' r'\theta'}{\mu + \mu'} = \frac{\mu\mu' r'(r^2 - \rho r')}{(\mu + \mu')(\mu r^2 + \mu' r'^2)}\Delta.$$

L'introduction de l'écart λ du centre de gravité général d'avec le plan médian, à la place de l'écart angulaire donné Δ de la masse μ', ou de son écart linéaire et effectif $r'\Delta$, simplifie assez notablement cette formule (21). Comme l'écart linéaire analogue de la masse μ (située dans le plan) est nul, celui, λ, du centre de gravité des deux masses μ et μ' sera la moyenne

$$(22) \qquad \lambda = \frac{\mu' r'\Delta}{\mu + \mu'}.$$

Il vient donc, au lieu de (21),

$$(23) \qquad \delta = \frac{\mu(r^2 - \rho r')}{\mu r^2 + \mu' r'^2}\lambda.$$

17. Il semble convenable, dans la pratique, pour altérer le moins possible l'expression des vrais rapports mécaniques des deux masses μ, μ', de réduire, au point de vue des inerties, la bicyclette à son centre de gravité, comme on y a réduit le cavalier. Alors il vient

$$(24) \qquad r = \rho, \qquad r^2 - \rho r' = -\rho(r' - \rho);$$

et le facteur $r^2 - \rho r'$, dans (21), est négatif, vu que la différence $r' - \rho$ exprime l'élévation, toujours positive et très notable, du centre de gravité du cavalier au-dessus du centre de gravité de la bicyclette. Donc Δ, δ ont signes contraires. En d'autres termes, *le cavalier, pour incliner le centre de gravité général du système vers la droite, doit porter son buste à gauche, et* vice versa.

Ce résultat subsiste sans qu'on ait besoin de réduire r à ρ. En effet, si l'on appelle $\rho + \Delta\rho$ la distance, à la base a, d'un élément quelconque $d\mu$ de la masse μ de la bicyclette, le moment d'inertie μr^2 de celle-ci sera $\int(\rho+\Delta\rho)^2 d\mu$, c'est-à-dire

$$\mu\rho^2 + 2\rho\int(\Delta\rho)\,d\mu + \int(\Delta\rho)^2 d\mu = \mu\rho^2 + \int(\Delta\rho)^2 d\mu.$$

Or ρ est approximativement la moitié de la hauteur de la selle; d'où il suit que $\Delta\rho$ n'excède qu'à de rares endroits (si même il y en a de tels) ρ en valeur absolue, et que le terme $\int(\Delta\rho)^2 d\mu$ n'atteint pas, à beaucoup près, la valeur $\mu\rho^2$. Donc μr^2 est bien moindre que $2\mu\rho^2$, et l'on a

$$(25)\qquad r^2 < 2\rho^2, \qquad r^2 - \rho r' < \rho(2\rho - r').$$

Mais le centre de gravité du cavalier se trouve sensiblement au-dessus de la selle, et sa hauteur r' excède, par conséquent, la hauteur, 2ρ environ, de celle-ci. Donc le facteur $r^2 - \rho r'$ est encore négatif.

18. Il suit de là, sous la réserve nécessitée par la concentration fictive de la masse μ' du bicycliste en un simple point, que *le cavalier, lorsqu'il ne s'imprime pas des rotations alternatives se neutralisant en majeure partie, avec variations de sa distance r' à la base, doit se porter du côté opposé à celui vers lequel il veut faire pencher la bicyclette.*

A la page 106 du Tome I (intitulé : *Équilibre et direction*) de son *Nouveau traité des bicycles et bicyclettes,* M. Bourlet a remarqué qu'il en est bien ainsi dans le *lâche-mains,* alors que le cavalier n'agit directement sur la bicyclette que par la moitié inférieure de son corps et en s'appuyant principalement sur les pédales.

Lorsque, au contraire, le cavalier tient en mains le guidon, auquel la partie supérieure de son corps communique des impulsions indépendantes (jusqu'à un certain point) de celles qu'exerce sur les pédales et même sur la selle la partie inférieure, ce n'est plus, on le conçoit, à un point unique, mais à un groupe de deux points *pour le moins,* comportant des rotations θ' distinctes, un pour chaque moitié supérieure ou inférieure du corps, que le bicycliste doit être assimilé. De là, une variété bien plus grande des résultats, variété rendant possibles, sans renversement de vitesses, des effets qui, dans le cas d'un bicycliste réductible à un seul point, auraient exigé deux rotations successives de sens contraires.

Parmi ces effets, y a-t-il celui qui consiste dans la parité de signe pour le déplacement angulaire relatif Δ du haut du corps et pour le déplacement linéaire absolu δ du centre de gravité général? ou bien, dans la pratique, une telle parité est-elle effectivement obtenue, en définitive (c'est-à-dire à la fin de la manœuvre), par deux rotations inverses du cavalier, se succédant rapidement, comme il a été expliqué au n° **12**? C'est ce qu'une étude plus complète permettra seule d'élucider.

19. Contentons-nous ici d'ébaucher l'étude dont il s'agit.

Si l'on considère comme deux points distincts les deux moitiés supérieure et inférieure $\frac{1}{2}\mu'$ du corps, soient : r' le rayon vecteur du premier de ces deux points, mesurant sa distance à la base a, Δ la rotation de ce rayon vecteur par rapport au plan médian, r le rayon vecteur ou de gyration de la moitié inférieure $\frac{1}{2}\mu'$, approximativement égal à celui de la bicyclette et moindre que r', enfin Δ_1 la rotation relative, analogue à Δ, de ce second rayon vecteur.

Les trois aires décrites par les rayons vecteurs des masses μ, $\frac{1}{2}\mu'$ (inférieure) et $\frac{1}{2}\mu'$ (supérieure) sont alors, évidemment,

$$\tfrac{1}{2}\mu r^2\theta,\quad \tfrac{1}{4}\mu' r^2(\theta+\Delta_1),\quad \tfrac{1}{4}\mu' r'^2(\theta+\Delta).$$

Leur somme étant nulle d'après le principe des aires, il viendra

$$(26)\qquad [2\mu r^2 + \mu'(r^2 + r'^2)]\theta + \mu'(r^2\Delta_1 + r'^2\Delta) = 0.$$

Cette équation fera connaître l'inclinaison θ prise par le plan médian : car on devra donner Δ et Δ_1, déplacements angulaires relatifs que s'imprime volontairement le cavalier sur ses appuis.

D'autre part, en assimilant, comme on l'a fait pour les deux moitiés du corps du cavalier, la masse μ de la bicyclette à un point, son rayon vecteur se confondra avec le rayon de gyration r, et les trois distances des masses μ, $\frac{1}{2}\mu'$, $\frac{1}{2}\mu'$ au plan vertical mené suivant la base a seront respectivement $r\theta$, $r(\theta+\Delta_1)$, $r'(\theta+\Delta)$. L'écart δ cherché qu'aura éprouvé, relativement au même plan vertical, le centre de gravité du système, égalera leur moyenne

$$\frac{2\mu r\theta + \mu' r(\theta + \Delta_1) + \mu' r'(\theta + \Delta)}{2(\mu + \mu')}.$$

On aura donc

$$(27) \qquad 2(\mu + \mu')\delta = [2\mu r + \mu'(r + r')]\theta + \mu'(r\Delta_1 + r'\Delta).$$

Portons, dans (27), la valeur de θ tirée de (26); puis divisons par $\mu'\Delta$, en mettant en évidence le rapport $\frac{\delta}{\Delta}$, que nous nous proposons de rendre positif. Il vient

$$(28) \qquad 2\left(1 + \frac{\mu}{\mu'}\right)\frac{\delta}{\Delta} = \frac{\mu' r r'(r' - r)}{2\mu r^2 + \mu'(r^2 + r'^2)}\left(\frac{\Delta_1}{\Delta} - 1 - \frac{2\mu}{\mu'}\right).$$

Comme 2 fois le rapport de la masse μ de la bicyclette à celle, μ', du cavalier sera une petite fraction, on voit, par cette formule, que le cavalier devra, pour assurer au centre de gravité général un déplacement δ de même sens que le déplacement angulaire relatif Δ de la moitié supérieure de son corps, imprimer à la moitié inférieure un déplacement angulaire relatif Δ_1 encore de même signe et sensiblement plus fort que celui, Δ, de la partie supérieure.

Un tel mode de déformation paraît facile à produire, δ, Δ et Δ_1 restant, en général, extrêmement petits. Dans les cas exceptionnels où le déplacement angulaire relatif Δ_1 de la moitié inférieure du corps devrait, au contraire, devenir trop grand pour être praticable, le bicycliste, même ayant le guidon en mains, recourrait sans doute de préférence, quoique peut-être inconsciemment, à deux rotations alternatives imprimées à bref intervalle, comme il a été expliqué au n° **12** (p. 218).

§ VI. — Leur influence sur l'équilibre; leur rôle essentiel dans les virages.

20. Voyons maintenant quelle loi régit le mouvement durant les intervalles de temps, relativement longs, où le déplacement linéaire relatif λ du centre de gravité, devenu différent de zéro, ne varie pas.

Le bras de levier du poids mg de tout le système, c'est-à-dire la distance de cette force à la base a de la bicyclette, n'est plus $h\sin\theta$, mais, évidemment, $h\sin\theta + \lambda\cos\theta$, ou, sensiblement, $h\theta + \lambda$; et, malgré la petitesse du déplacement latéral λ, le moment

$$mg(h\theta + \lambda) \tag{29}$$

du poids se trouve ainsi changé *dans un rapport notable;* car θ et $h\theta$ sont petits aussi. Au contraire, les autres termes de l'équation des moments, termes dus, en somme, à des inerties où la direction de la verticale ne joue aucun rôle appréciable, gardent très sensiblement leurs expressions relatives au cas $\lambda = 0$; car la configuration de l'ensemble est restée à peu près la même. Et leur valeur totale approchée est encore

$$-mh\left(h'\frac{d^2\theta}{dt^2} + b'\frac{d\frac{V}{R}}{dt} + \frac{V^2}{R}\right), \tag{30}$$

où V désigne la vitesse de progression de la bicyclette sur le sol, h' la longueur du pendule formé par le système autour de la base a, et b' la constante, peu différente de b, que définit la seconde formule (7) de la page 123.

La somme des deux expressions (29) et (30) étant nulle, on aura donc, en divisant par mhh', l'équation du mouvement, à *cinq* termes,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{b'}{h'}\frac{d\frac{V}{R}}{dt} = \frac{g}{h'}\theta - \frac{V^2}{h'R} + \frac{g}{h'}\frac{\lambda}{h}. \tag{31}$$

21. Le déplacement latéral, λ à peu près, que s'est donné le cavalier sur sa machine, ajoute le cinquième terme. Et l'on voit que ce terme, au moment d'un virage, est très propre, en l'absence de toute courbure actuelle $\frac{1}{R}$ de la trajectoire, et à partir d'un état de verticalité parfaite du cadre, à faire naître précisément l'inclinaison positive θ qui motivera une manœuvre du guidon déviant la trajectoire du côté voulu.

Cet effet aurait lieu, d'ailleurs, quand bien même la perturbation initiale, qui a produit l'écart λ, n'aurait pas conservé la verticalité du cadre, ou aurait altéré θ, pourvu qu'elle eût suffi à faire sortir du plan vertical de la base a le centre de gravité du système, dans le sens indiqué.

Cela arrivera si le déplacement δ, que donne, par exemple, la formule (21), est positif; car on remarquera que ce petit déplacement δ n'est autre chose que le bras de levier $h\theta + \lambda$ du poids de tout le système. Et, en effet, la distance h du centre de gravité général à la base a étant, dans le cas de la formule (21), la moyenne $\frac{\mu\rho + \mu' r'}{\mu + \mu'}$ de ρ et de r', les expressions (20) et (22) de θ et de λ donnent identiquement, pour $h\theta + \lambda$, la dernière valeur (21) de δ. Le second membre de l'équation (31) revient ainsi, quand le rayon R de courbure de la trajectoire est infini, à $\frac{g}{h'}\frac{\delta}{h}$. Et c'est le signe de δ qui règle alors celui de la dérivée seconde $\frac{d^2\theta}{dt^2}$.

L'hypothèse, que j'ai faite au § IV, de la constance (au moins en moyenne) de la dérivée $\frac{d\theta}{dt}$ pendant chaque perturbation, n'est donc pas nécessaire. Elle offre seulement l'avantage de simplifier le plus possible la transition d'un intervalle à l'autre et, par suite, le calcul de θ.

§ VII. — Loi générale du mouvement; multiplicité des moyens d'action qu'elle offre au cavalier.

22. En résumé, la fonction arbitraire qui doit généralement exprimer (p. 135), dans l'équation du mouvement de la bicyclette, l'influence des déplacements que s'imprime le cavalier sur la selle, est réduite ici à une suite de valeurs λ constantes, figurant seules, chacune à son tour, dans un cinquième terme de l'équation. Ce terme tend donc à devenir une petite fonction arbitraire du temps, quand les époques des déplacements spontanés du bicycliste se rapprochent de plus en plus. Et l'on peut admettre que les mouvements *moyens* du cadre se confondent alors, sensiblement, avec ce qu'ils seraient sous une certaine action continue du cavalier, savoir, une action donnant lieu aux mêmes écarts successifs λ du centre de gravité du système, à droite ou à gauche du plan médian du cadre, et conservant sans cesse l'expression (30) au moment total des inerties, grâce à des déformations appropriées.

Du reste, dès que l'action du cavalier devient assez graduelle, la petitesse et la *lenteur* de ces déformations suffisent évidemment, par elles-mêmes, à assurer au moment total des inerties l'expression approchée (30). L'équation du mouvement sera dès lors (31), avec θ continu, et il suffira que la suite voulue des *très petits* écarts λ du centre de gravité se produise effectivement.

Mais la manière dont le bicycliste devra s'y prendre, pour les réaliser ainsi avec continuité sans altérer sensiblement θ, est encore obscure; ou, plutôt, le degré de lenteur qu'il devra y mettre reste difficile à fixer. Aussi est-ce par une expérimentation confuse ou de sentiment, comme, d'ailleurs, presque toutes celles d'où sont dérivées nos habitudes premières, qu'il en apprendra la manœuvre, et qu'il parviendra à régler, d'après les circonstances, la fonction arbitraire par laquelle s'exprime, dans l'équation du mouvement, l'effet de ses déplacements d'ensemble sur la selle.

23. Quoi qu'il en soit, l'action totale du cavalier se traduit, on le voit, par trois fonctions arbitraires V, R et λ du temps, en rapport, respectivement, avec les trois manœuvres : 1° des pédales, d'où dépend la vitesse V de progression; 2° du guidon, d'où dépend le rayon de courbure R de la trajectoire, et 3° de l'ensemble du corps sur la selle, d'où dépend le transport, à un moment donné, du centre de gravité du système à droite ou à gauche du plan médian du cadre, pouvant se faire sans que l'inclinaison θ du plan et sa dérivée première $\frac{d\theta}{dt}$ cessent de varier graduellement. C'est précisément le nombre d'*arbitraires* dont on pouvait prévoir, *a priori*, la nécessité, pour qu'un cavalier parfaitement habile et attentif pût régler à sa volonté les *trois* éléments principaux d'une course projetée, savoir : la *trajectoire* à suivre, la *vitesse* du trajet, et aussi, afin d'éviter les chutes, la petite *inclinaison* θ de la machine.

Cette multiplicité des moyens d'action d'un cavalier un peu expérimenté explique la facilité relative de l'usage de la bicyclette. Le troisième moyen, employé avec une habileté suffisante, doit permettre, en particulier, de suivre sans déviation appréciable un chemin *même rectiligne*, sur lequel la valeur infinie du rayon R rend illusoires les deux premiers, en faisant évanouir les termes de l'équation (31) où figurent V et R. Ce troisième moyen, surtout avec l'aide d'un balancier facilitant les déplacements latéraux λ, suffit bien au funambule, qui n'a guère, lui aussi, comme le bicycliste, que deux points d'appui (et pas d'une manière continue), sur son chemin de corde si étroit et si peu ferme.

§ VIII. — Analogie des organes d'un être vivant avec la bicyclette, en tant qu'ils réclament aussi une direction; comment se pose, au point de vue mécanique, le mystérieux problème de l'organisme.

24. Lorsque l'habitude aura rendu instinctive, sur une machine toujours la même et à frottements aussi adoucis que possible, la triple manœuvre des pédales, du guidon et des mouvements d'ensemble du cavalier sur la selle, cette manœuvre, en donnant une prise si variée au bicycliste, trouvera la machine docile aux impulsions les plus diverses et, pour ainsi dire, aux désirs et jusqu'aux caprices de son cavalier. Elle deviendra donc, en l'absence de toute résistance notable, presque aussi inconsciente que l'est de bonne heure, pour chaque être vivant (en santé), le maniement de son propre organisme; et la bicyclette sera comme un prolongement du corps de son cavalier, suivant une expression qui semble être familière aux connaisseurs.

A l'inverse, chaque organisme vivant n'est guère, dans sa presque totalité, qu'un ensemble de rouages analogues à la bicyclette, c'est-à-dire admettant, dans les équations de leurs mouvements perceptibles et même imperceptibles, des fonctions arbitraires du temps t, que déterminent à mesure les légères impulsions parties de quelques centres nerveux, seuls sièges des pouvoirs directeurs de tout le corps.

25. Mais ces centres nerveux eux-mêmes, qu'il serait irrationnel et peu conforme à l'expérience de soustraire aux lois générales de la matière, sont-ils régis exclusivement, dans la suite de leurs phénomènes internes (physico-chimiques ou mécaniques) et des impulsions qu'ils envoient autour d'eux, par les équations différentielles du mouvement; en sorte que les impulsions dont il s'agit se trouveraient, en définitive, uniquement fonction, à chaque instant, de l'état actuel, statique ou dynamique, du système et du milieu ambiant, sans aucune influence (directe) même des états antérieurs? Alors il faudrait regarder comme illusion pure, non seulement la *spontanéité* apparente de la *vie*, mais, aussi, le sentiment intime de nos actes prétendus *initiateurs* (¹) et libres, de nos interventions *personnelles* pour orienter parfois les choses vers un *but* à atteindre, vers un avenir *voulu* à réaliser. Il n'y aurait plus qu'en apparence, même chez l'homme, des *causes finales*, des aspirations véritablement actives vers des *fins* désirées.

Ou bien, au contraire, ces centres nerveux, dont l'excessive instabilité physico-chimique est évidente, n'exigeraient-ils pas, pour vivre et fonctionner, des conditions d'existence choisies justement de telle manière, que les équations différentielles du mouvement y ouvriraient plusieurs voies aux phénomènes, dès lors soustraits (ou pouvant l'être) à la domination exclusive de l'état mécanique présent? Grâce à ces conditions *singulières* (comme serait, dans un autre ordre d'idées, le tracé d'un canal d'arrosage, à la surface de la terre, suivant une ligne de *faîte* ou de partage des eaux), et tellement spéciales ou délicates qu'elles sont inimitables artificiellement, au point de rendre impossible la génération spontanée des organismes même les plus rudimentaires, les centres nerveux se trouveraient, ainsi, constitués de manière que la raison déterminante de certaines impulsions émises par eux serait, non dans les équations du mouvement, *toujours obéies cependant*, mais dans des principes *directeurs* étrangers à la pure physique et inspirés par des lois d'ordre *physiologique* ou *moral*. Ces principes directeurs auraient alors comme rôle, non de déployer de la force évaluable en grammes ou de produire du travail exprimable en fraction de kilogrammètre, mais d'utiliser l'exceptionnelle ou singulière indétermination mécanique des phénomènes, pour *aiguiller* ceux-ci, quand ils sont purement vitaux, dans les sens indiqués par les lois physiologiques, et, quand ils sont libres, dans le sens qu'aura choisi la volonté. La rareté relative de leur manifestation dans le monde, comparée à l'universelle présence des causes physico-chimiques (non moins mystérieuses d'ailleurs), s'expliquerait par l'étroitesse même de leur champ d'action, c'est-à-dire par la singularité extrême des circonstances amenant l'indétermination mécanique, qui, seule, pourrait les révéler.

(¹) C'est-à-dire créateurs de phénomènes qui soient des *commencements*, non de simples suites de phénomènes antérieurs.

Bref, il y aurait place, dans l'Univers visible, pour deux espèces de *causes motrices :* d'une part, les *forces* des mécaniciens, physiciens et chimistes, représentées dans les équations différentielles du mouvement par leurs effets, qui sont les *accélérations;* d'autre part, les *principes directeurs,* savoir, la *vie* et la *volonté,* échappant à ces équations différentielles et, par conséquent, irréductibles aux forces ou incapables d'entrer en conflit avec elles. Et le domaine des principes directeurs serait suffisant pour sauvegarder les deux essentielles distinctions de l'*inorganique* et de l'*organique,* du *Physique* et du *Moral.*

26. Telle est la grave et troublante question, posée sous d'autres formes dès l'origine de la Philosophie ou même de la réflexion humaine, que j'ai abordée il y a un quart de siècle, et où j'ai découvert et fait connaître la seconde alternative, nullement soupçonnée, ce semble, jusqu'alors (¹).

Le bon sens la tranche plutôt en faveur de cette seconde alternative. Car il regarde volontiers la vie et la volonté comme des principes d'action *distincts,* qu'il oppose même aux forces physico-chimiques, c'est-à-dire, au fond, mécaniques, sans toutefois les considérer nécessairement comme de nature analogue, c'est-à-dire comme ayant avec elles une commune mesure. De plus, il lui répugne, non moins qu'à la morale, de ne faire, dans le domaine du réel, aucune part à la *contingence,* et de voir partout une nécessité absolue, un enchaînement de causes et d'effets tellement serré, qu'il n'admettrait, dans sa trame, l'insertion possible d'aucune initiative, d'aucune spontanéité.

(¹) Après une hésitation de plusieurs années, je me décidai à publier et à développer cette idée en 1877 (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* 19 février et 3 avril 1877, t. LXXXIV, p. 362 et 944; Journal *Les Mondes,* du 22 mars 1877, et *Revue scientifique,* du 14 avril 1877; *Comptes rendus de l'Académie des Sciences morales et politiques,* mai 1878, t. IX, p. 696 à 757; *Mémoires de la Société des Sciences de Lille,* année 1879, t. VI, p. 1 à 141, et année 1880, t. VIII, p. 332 à 370; Journal *Les Mondes,* du 28 novembre 1878 et *Revue philosophique,* de janvier 1879, p. 58).