JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

JULES BEUDON

Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles analogues aux systèmes d'équations du premier ordre en involution

Journal de mathématiques pures et appliquées 5e série, tome 5 (1899), p. 351-364.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1899_5_5__351_0>

Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles analogues aux systèmes d'équations du premier ordre en involution;

Par M. Jules BEUDON,
Professeur au lycée d'Alger.

L'objet de ce Travail est l'étude des systèmes S d'équations aux dérivées partielles d'ordre quelconque définissant une fonction z des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et dont la solution générale dépend d'une fonction arbitraire de ρ arguments et de constantes arbitraires en nombre fini.

Je démontre tout d'abord qu'on peut donner aux équations qui définissent les systèmes S une forme normale mettant en évidence l'existence de multiplicités caractéristiques dépendant d'un nombre fini de paramètres.

J'indique ensuite les opérations à effectuer pour arriver à l'intégration complète.

Je considère enfin les systèmes linéaires et du second ordre, et j'étudie les conditions d'intégrabilité; je n'envisage que les résultats pouvant être énoncés simplement.

1. A cause de la définition du système S d'ordre p, les équations qui le composent permettent d'évaluer toutes les dérivées d'ordre p où les dérivations ont été faites par rapport à quelques-unes des lettres $x_{\rho+1}, \ldots, x_n$ en fonction de celles où l'on n'a fait varier que $x_1, x_2, \ldots, x_\rho$, et des dérivées d'ordre inférieur à p.

Si l'on envisage, d'autre part, toutes les dérivées d'ordre $p-1$ de z, et si l'on ajoute successivement dans toutes ces dérivées l'unité aux indices relatifs aux $x_k (k = \rho + 1, \ldots, n)$, on obtient toutes les dérivées d'ordre p, où l'on a fait varier quelques-unes des lettres $x_{\rho+1}, \ldots, x_n$.

On peut donc mettre les équations du système S sous la forme

$$Z^p_{\alpha_1, \ldots, \alpha_h + 1, \ldots, \alpha_n} = \text{fonction des dérivées d'ordre } p \text{ prises par rapport à } \\ (h > \rho)\; x_1, \ldots, x_\rho \text{ et des dérivées d'ordre inférieur.}$$

En différentiant une fois toutes les équations du système S par rapport aux variables indépendantes, on est conduit à un nouveau système répondant à la même définition, mais dont les équations sont linéaires par rapport aux dérivées d'ordre le plus élevé; je ne m'occuperai donc que des systèmes linéaires.

2. On a tout d'abord le théorème suivant (¹) :

Si un système d'équations aux dérivées partielles définissant une fonction z de n variables $x_1, \ldots, x_n$, a une solution générale dépendant d'une fonction arbitraire de ρ arguments, et si l'on a pris soin de le rendre linéaire par une différenciation, les équations qui le définissent peuvent être mises sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} Z^p_{\alpha_1, \ldots, \alpha_\rho, \ldots, \alpha_h + 1, \ldots, \alpha_n} &= a^h_1 Z^p_{\alpha_1 + 1, \ldots, \alpha_n} + a^h_2 Z^p_{\alpha_1, \alpha_2 + 1, \ldots, \alpha_n} + \ldots \\ &\quad + a^h_\rho Z^p_{\alpha_1, \ldots, \alpha_\rho + 1, \ldots, \alpha_n} + A^h_{\alpha_1, \ldots, \alpha_\rho, \ldots, \alpha_n}, \end{aligned}$$
$$(\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = p - 1),$$

où l'on a posé

$$Z^k_{\lambda_1, \ldots, \lambda_n} = \frac{\partial^k z}{\partial x_1^{\lambda_1}, \ldots, \partial x_n^{\lambda_n}}.$$

Considérons, en premier lieu, les équations

$$\left.\begin{aligned} &(1) \qquad \frac{\partial^p z}{\partial x_i^{p-1}\, \partial x_k} = \ldots \\ &(2) \qquad \frac{\partial^p z}{\partial x_j^{p-1}\, \partial x_k} = \ldots \end{aligned}\right\} \quad i, j \leqq \rho, \quad k > \rho;$$

(¹) *Comptes rendus*, 31 janvier 1898.

en différentiant la première $p-1$ fois par rapport à x_j, et la seconde $p-1$ fois par rapport à x_i, on aura deux expressions de

$$\frac{\partial^{2p-1} z}{\partial x_i^{p-1}\,\partial x_j^{p-1}\,\partial x_k}$$

qui devront être identiques.

Par suite, l'équation (1) ne doit contenir que des dérivées d'ordre p où l'indice relatif à x_j est au moins égal à $p-1$; de même, l'équation (2) ne contiendra que des dérivées d'ordre p où l'indice relatif à x_i est au moins égal à $p-1$; on a donc

$$\frac{\partial^p z}{\partial x_i^{p-1}\,\partial x_k} = a_1^k \frac{\partial^p z}{\partial x_1\,\partial x_i^{p-1}} + \ldots + a_\rho^k \frac{\partial^p z}{\partial x_\rho\,\partial x_i^{p-1}} + \ldots,$$

$$\frac{\partial^p z}{\partial x_j^{p-1}\,\partial x_k} = \alpha_1^k \frac{\partial^p z}{\partial x_1\,\partial x_j^{p-1}} + \ldots + \alpha_\rho^k \frac{\partial^p z}{\partial x_\rho\,\partial x_j^{p-1}} + \ldots,$$

en achevant l'identification, on voit de suite que

$$a_1^k = \alpha_1^k, \qquad a_2^k = \alpha_2^k, \qquad \ldots, \qquad a_\rho^k = \alpha_\rho^k,$$

et, en opérant de proche en proche, on obtient

$$\frac{\partial^p z}{\partial x_1^{\alpha_1}, \ldots, \partial x_\rho^{\alpha_\rho}, \partial x_k} = a_1^k \frac{\partial^p z}{\partial x_1^{\alpha_1+1}, \ldots, \partial x_\rho^{\alpha_\rho}} + \ldots + a_\rho^k \frac{\partial^p z}{\partial x_1^{\alpha_1}, \ldots, \partial x_\rho^{\alpha_\rho+1}} + \ldots$$

Supposons la proposition établie pour toutes les équations où la somme $\alpha_{\rho+1} + \ldots + \alpha_n$ est inférieure ou égale à un nombre N, nous allons montrer qu'elle est vraie pour

$$\alpha_{\rho+1} + \ldots + \alpha_n = N + 1.$$

D'abord, étant donnée une dérivée d'ordre p, on peut l'exprimer linéairement en fonction des dérivées d'ordre p où la somme

$$\alpha_{\rho+1} + \ldots + \alpha_n$$

est inférieure à la valeur correspondante de la dérivée choisie.

Considérons alors les deux équations

$$(3)\quad Z^p_{\alpha_1,\ldots,\alpha_\rho,\ldots,\alpha_h+1,\ldots,\alpha_n} = a^h_1 Z^p_{\alpha_1+1,\ldots,\alpha_n} + \ldots + a^h_\rho Z^p_{\alpha_1,\ldots,\alpha_\rho+1,\ldots,\alpha_n} + \ldots,$$
$$\alpha_{\rho+1} + \ldots + \alpha_n = N - 1$$

et

$$(4)\quad Z^p_{\alpha_1,\ldots,\alpha_i-1,\ldots,\alpha_h+1,\ldots,\alpha_k+1,\ldots,\alpha_n} = \text{fonction des dérivées d'ordre } p,$$

où $\alpha_{\rho+1} + \ldots + \alpha_n = N - 1$.

Pour écrire les conditions d'intégrabilité, il faut différentier l'équation (3) par rapport à x_k et l'équation (4) par rapport à x_i; or l'équation (3) donne, pour les dérivées d'ordre $p+1$, l'expression

$$a^h_1 Z^p_{\alpha_1+1,\ldots,\alpha_k+1,\ldots,\alpha_n} + \ldots + a^h_\rho Z^p_{\alpha_1,\ldots,\alpha_\rho+1,\ldots,\alpha_k+1,\ldots,\alpha_n};$$

donc l'équation (4) est nécessairement de la forme

$$Z^p_{\alpha_1,\ldots,\alpha_i-1,\ldots,\alpha_h+1,\ldots,\alpha_k+1,\ldots,\alpha_n} = a^h_1 Z^p_{\alpha_1+1,\ldots,\alpha_i-1,\ldots,\alpha_h,\ldots,\alpha_k+1,\ldots,\alpha_n} + \ldots$$
$$+ a^h_\rho Z^p_{\alpha_1,\ldots,\alpha_i-1,\ldots,\alpha_\rho+1,\ldots,\alpha_h,\ldots,\alpha_k+1,\ldots,\alpha_n} + \ldots$$

et la proposition est établie.

Remarque. — L'équation qui donne la valeur de la dérivée

$$Z^p_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}$$

peut, en général, prendre $n-\rho$ formes différentes, car on peut écrire cette dérivée

$$Z^p_{\lambda_1,\ldots,\lambda_\rho,\ldots,(\lambda_h-1+1),\ldots,\lambda_n},$$
$$h = \rho+1,\ldots,n;$$

mais toutes ces formes sont équivalentes quand on exprime toutes les dérivées en fonction de celles où $x_1,\ldots,x_\rho$ seulement ont varié.

3. Le système S étant mis sous la forme normale, on peut grouper quelques-unes de ses équations de manière à mettre en évidence des multiplicités caractéristiques à une dimension.

Considérons, en effet, l'équation

$$(5)\quad \begin{cases} Z^p_{\alpha_1,\ldots,\alpha_\rho,\ldots,\alpha_h+1,\ldots,\alpha_n} = a^h_1 Z^p_{\alpha_1+1,\ldots,\alpha_\rho,\ldots,\alpha_n} + \ldots \\ \qquad + a^h_\rho Z^p_{\alpha_1,\ldots,\alpha_\rho+1,\ldots,\alpha_n} + A^h_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}, \end{cases}$$

et toutes celles que l'on obtient en faisant varier les indices de manière que

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = p - 1.$$

Envisageons, d'autre part, une multiplicité intégrale à n dimensions du système S; les équations différentielles suivantes :

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dx_h} = -a^h_1, \quad \dfrac{dx_2}{dx_h} = -a^h_2, \quad \ldots, \quad \dfrac{dx_\rho}{dx_h} = -a^h_\rho, \\ \dfrac{dx_k}{dx_h} = 0 \quad \begin{cases} k > \rho, \\ k \neq h \end{cases} \end{cases}$$

définissent sur cette multiplicité une famille de courbes; on a de plus, le long de ces courbes,

$$(7)\quad \frac{dZ^k_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}}{dx_h} = -a^h_1 Z^{k+1}_{\lambda_1+1,\ldots,\lambda_n} - \ldots - a^h_\rho Z^{k+1}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_\rho+1,\ldots,\lambda_n},$$
$$\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = k < p - 1,$$

et les équations (5) donnent

$$(8)\quad \frac{dZ^{p-1}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}}{dx_h} = A^h_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}.$$

L'ensemble des équations (6), (7), (8) définit une orientation d'éléments unis d'ordre $p-1$ le long d'une famille de courbes, et cela indépendamment de la multiplicité intégrale choisie. D'autre part, à cause du degré de généralité des intégrales du système S, on pourra toujours en faire passer une par un élément d'ordre $p-1$ arbitrairement choisi; les équations précédentes définissent une famille de caractéristiques à une dimension; en faisant varier h de $\rho+1$ à n, on obtient ainsi $n-\rho$ familles de caractéristiques à une dimension; et en les associant à la manière des caractéristiques des équations du premier ordre [1], on obtiendra des caractéristiques à $n-\rho$ dimensions.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Si le système S *est complètement intégrable, le système*

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_h} = -a_i^h, \qquad \frac{\partial Z^{p-1}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}}{\partial x_h} = A^h_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n},$$

$$\frac{\partial Z^k_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}}{\partial x_h} = -a_1^h Z^{k+1}_{\lambda_1+1,\ldots,\lambda_n} - \ldots - a_\rho^h Z^{k+1}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_\rho+1,\ldots,\lambda_n},$$

$$i = 1, 2, \ldots, \rho, \qquad h = \rho+1, \ldots, n$$

l'est aussi et définit les caractéristiques d'ordre $p-1$ *et à* $n-\rho$ *dimensions du système* S.

4. Avant d'aller plus loin, comptons le nombre des équations *distinctes* du système S. Si le premier membre d'une équation est une dérivée d'ordre p telle que la somme des indices des lettres $x_{\rho+1}, \ldots, x_n$ est $p-h$, la somme des indices des lettres $x_1, \ldots, x_\rho$ est h ; pour obtenir tous les premiers membres, il faudra, d'après la définition, prendre toutes les dérivées d'ordre $p-h$ de z par rapport à $x_{\rho+1}, \ldots, x_n$ et les différentier h fois par rapport à $x_1, \ldots, x_\rho$, ce qui donne $\Gamma^{p-h}_{n-\rho}\Gamma^h_\rho$ équations, et faire varier h de o à $p-1$, ce qui donne en tout

$$\Gamma^p_{n-\rho} + \Gamma^{p-1}_{n-\rho}\Gamma^1_\rho + \ldots + \Gamma^{p-h}_{n-\rho}\Gamma^h_\rho + \ldots + \Gamma^1_{n-\rho}\Gamma^{p-1}_\rho$$

équations.

Le degré de généralité du système S est représenté par une fonction arbitraire de ρ arguments ; d'une façon plus précise, si l'on se donne une multiplicité ponctuelle à ρ dimensions, il y a une infinité d'intégrales contenant cette multiplicité, dont l'ensemble dépend d'un nombre fini de paramètres.

On peut définir cette multiplicité ponctuelle à ρ dimensions en se donnant z, $x_{\rho+1}$ $\ldots$, x_n en fonction de $x_1, \ldots, x_\rho$; il s'agit de déter-

[1] *Voir* aussi J. Beudon, *Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles, etc.* (*Annales de l'École Normale,* Supplément 1896, p. 44).

miner sur cette multiplicité une orientation d'éléments d'ordre p unis vérifiant les équations du système S.

On aura

$$\frac{\partial Z^k_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}}{\partial x_i} = \sum_{h=\rho+1}^{n} Z^{k+1}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_h+1,\ldots,\lambda_n}\frac{\partial x_h}{\partial x_i} + Z^{k+1}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_i+1,\ldots,\lambda_n}$$

$$i = 1, 2, \ldots, \rho, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, p-1, \qquad \lambda_1 + \ldots + \lambda_n = k.$$

Ces équations permettent de calculer les Z^{k+1}, ... en fonction des $Z^{k+1}_{0,\ldots,0,\lambda_{\rho+1},\ldots,\lambda_n}$ et des dérivées des $Z^h\ldots$, où l'indice h est inférieur à $k+1$.

Si l'on remplace dans les équations du système S, il ne restera plus que :

1° Les

$$Z^p_{0,\ldots,0,\lambda_{\rho+1},\ldots,\lambda_n};$$

2° Les

$Z^{p-1}_{0,\ldots,0,\lambda_{\rho+1},\ldots,\lambda_n}$ et leurs dérivées du 1er ordre,

3° Les

$Z^{p-2}_{0,\ldots,0,\lambda_{\rho+1},\ldots,\lambda_n}$ et leurs dérivées du 1er et 2e ordre,

. . . . ;

$(h+1)$° Les

$Z^{p-h}_{0,\ldots,0,\lambda_{\rho+1},\ldots,\lambda_n}$ et leurs dérivées du 1er, 2e, ..., he ordre,

. . . . ;

p° Les

$Z^1_{0,\ldots,0,\lambda_{\rho+1},\ldots,\lambda_n}$ et leurs dérivées du 1er, 2e, ..., $p-1$e ordre.

Le nombre de l'ensemble des dérivées d'ordre supérieur de chacune des fonctions inconnues (avec l'ordre qui lui est attaché) est égal à

$$\Gamma^p_{n-\rho} + \Gamma^{p-1}_{n-\rho}\Gamma^1_\rho + \ldots + \Gamma^1_{n-\rho}\Gamma^{p-1}_\rho;$$

il est précisément égal au nombre des équations du système S ; on peut donc obtenir ces fonctions inconnues par l'intégration d'équations différentielles ordinaires.

L'intégration donnera des formules de la forme

$$(Z^k_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n})_0 = \text{fonction de } x_1^0, \ldots, x_\rho^0, C_1, C_2, \ldots.$$

D'autre part, en intégrant les équations des caractéristiques, on aura

$$\begin{aligned} z &= \text{fonction de } x_{\rho+1}, \ldots, x_n, x_1^0, \ldots, x_n^0, z^0, \ldots, (z^k_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n})_0, \ldots, \\ x_i &= \text{fonction de } x_{\rho+1}, \ldots, x_n, x_1^0, \ldots, x_n^0, z^0, \ldots, (z^k_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n})_0, \ldots, \\ & \qquad i = 1, 2, \ldots, \rho, \end{aligned}$$

ou, en remplaçant

$$\begin{aligned} z &= \text{fonction de } x_{\rho+1}, \ldots, x_n, x_1^0, \ldots, x_\rho^0, C_1, C_2, \ldots, \\ x_i &= \text{fonction de } x_{\rho+1}, \ldots, x_n, x_1^0, \ldots, x_\rho^0, C_1, C_2, \ldots, \\ i &= 1, 2, \ldots, \rho. \end{aligned}$$

En éliminant $x_1^0, \ldots, x_\rho^0$ entre ces $\rho + 1$ équations, on a l'ensemble des multiplicités intégrales qui passent par la multiplicité ponctuelle choisie.

On pourrait donner du résultat qui précède une démonstration purement analytique; je ne le ferai pas ici, pour éviter des longueurs, et je me contenterai de dire que la marche à suivre a été indiquée dans ma Thèse pour des systèmes analogues (¹).

5. Nous allons étudier maintenant les systèmes linéaires et du deuxième ordre. Les équations d'un tel système peuvent être mises sous la forme

$$\begin{aligned} p_{ih} &= a_1^h p_{i1} + a_2^h p_{i2} + \ldots + a_\rho^h p_{i\rho} + A_{ih}, \\ p_{hk} &= \sum_{i=1}^{\rho} a_i^h a_i^k p_{ii} + \sum_{i,j=1}^{\rho} (a_i^h a_j^k + a_j^h a_i^k) p_{ij} + A_{hk}, \\ & i = 1, 2, \ldots, \rho. \qquad h, k > \rho, \end{aligned}$$

(¹) *Loc cit.*, p. 23.

et provenant de la forme normale où l'on a exprimé les seconds membres en fonction des dérivées prises par rapport à $x_1, \ldots, x_\rho$.

Pour écrire les conditions d'intégrabilité, il faut différentier ces équations et identifier les dérivées du troisième ordre obtenues.

Nous avons vu déjà que, dans les seconds membres, les parties contenant les dérivées du troisième ordre étaient identiques; il n'y a plus qu'à identifier les expressions renfermant des dérivées du deuxième et du premier ordre.

Nous ne ferons le calcul que pour les expressions quadratiques par rapport aux dérivées du second ordre; dans tout ce qui suit, nous négligerons les termes pouvant fournir des expressions de degré 0 ou 1 par rapport à ces dérivées; nous pouvons donc faire en particulier les A nuls.

Soit une fonction Φ de $p_1, \ldots, p_n$, on a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = \sum_{\sigma=1}^{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial p_\sigma} p_{\sigma i} + \sum_{h=\sigma+1}^{n} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p_h} \sum_{\sigma=1}^{\rho} a_\sigma^h p_{\sigma i} \right),$$

si nous posons

$$\Lambda_\sigma f = \frac{\partial f}{\partial p_\sigma} + \sum_{h=\rho+1}^{n} \frac{\partial f}{\partial p_h} a_\sigma^h \qquad \sigma = 1, 2, \ldots, \rho,$$

nous aurons

$$(9) \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = \sum_{\sigma=1}^{\rho} p_{\sigma i} \Lambda_\sigma \Phi.$$

De même

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_h} = \sum_{j=1}^{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial p_j} p_{jh} + \sum_{k=\rho+1}^{n} \frac{\partial \Phi}{\partial p_k} p_{kh},$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_h} = \sum_{j=1}^{\rho} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p_j} \sum_{i=1}^{\rho} a_i^h p_{ji} \right) + \sum_{k=\rho+1}^{n} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial p_k} \left[\sum_{i=1}^{\rho} a_i^h a_i^k p_{ii} + \sum_{ij=1}^{\rho} (a_i^h a_j^k + a_j^h a_i^k) p_{ij} \right] \right\},$$

ou enfin

$$(10) \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial x_h} = \sum_{\tau=1}^{\rho} \left(\Lambda_\tau \Phi \sum_{\sigma}^{\rho} a_\sigma^h p_{\sigma\tau} \right) = \sum_{1=\sigma}^{\rho} \left(\Lambda_\sigma \Phi \sum_{\tau=1}^{\rho} a_\tau^h p_{\sigma\tau} \right).$$

Envisageons les deux équations

$$p_{ih} = \sum_{\sigma=1}^{\rho} a_\sigma^h p_{\sigma i},$$

$$p_{jh} = \sum_{\tau=1}^{\rho} a_\tau^h p_{\tau j},$$

elles donnent deux expressions identiques de P_{ijh}; on devra donc avoir, en particulier, en tenant compte de (9) et (10)

$$\sum_{\sigma=1}^{\rho}\left[p_{\sigma i}\sum_{\tau=1}^{\rho} p_{\tau j}\Lambda_\tau(a_\sigma^h)\right] = \sum_{\tau=1}^{\rho}\left[p_{\tau j}\sum_{\sigma=1}^{\rho} p_{\sigma i}\Lambda_\sigma(a_\tau^h)\right],$$

ce qui exige que

$$\Lambda_\tau(a_\sigma^h) = \Lambda_\sigma(a_\tau^h), \tag{11}$$

$$\tau,\ \sigma = 1,\ 2,\ \ldots,\ \rho, \qquad h = \rho+1,\ \ldots,\ n.$$

Prenons de même les deux équations

$$p_{hk} = \sum_{i=1}^{\rho} a_i^h a_i^k p_{ii} + \sum_{ij=1}^{\rho}(a_i^h a_j^k + a_j^h a_i^k)\, p_{ij}$$

et

$$p_{\lambda k} = \sum_{\mu=1}^{\rho} a_\mu^k p_{\lambda\mu},$$

elles donnent

$$\sum_{\mu=1}^{\rho}\left[p_{\lambda\mu}\sum_{ij=1}^{\rho} a_j^h p_{ij}\Lambda_i(a_\mu^k)\right] = \sum_{i=1}^{\rho}\left[a_i^k \sum_{\mu} p_{\lambda\mu}\Lambda_\mu(a_i^h) + a_i^h \sum_{\mu=1}^{\rho} p_{\lambda\mu}\Lambda_\mu(a_i^k)\right] p_{ii}$$
$$+ \sum_{ij=1}^{\rho} p_{ij}\left\{\begin{aligned} & a_i^h \sum_{\mu=1}^{\rho} p_{\lambda\mu}\Lambda_\mu(a_j^h) + a_j^k \sum_{\mu=1}^{\rho} p_{\lambda\mu}\Lambda_\mu(a_i^h) \\ & + a_j^k \sum_{\mu=1}^{\rho} p_{\lambda\mu}\Lambda_\mu(a_i^k) + a_i^k \sum_{\mu} p_{\lambda\mu}\Lambda_\mu(a_j^h) \end{aligned}\right\},$$

en identifiant les coefficients de $p_{\lambda\lambda}^2$ on obtient

$$a_\lambda^h A_\lambda(a_\lambda^k) = a_\lambda^k A_\lambda(a_\lambda^k) + a_\lambda^k A_\lambda(a_\lambda^h),$$

c'est-à-dire

$$A_\lambda(a_\lambda^h) = 0,$$

car nous supposons tous les a différents de zéro.

En tenant compte de ce résultat dans l'identification des coefficients de $p_{\lambda\mu}^2$, il vient

$$a_\mu^h A_\lambda(a_\mu^k) = a_\mu^k A_\mu(a_\lambda^h) + a_\mu^h A_\mu(a_\lambda^k),$$

c'est-à-dire, à cause des relations (11),

$$\text{(I)} \qquad A_\mu(a_\lambda^h) = 0 \qquad (\lambda, \mu = 1, 2, \ldots, \rho, \; h = \rho + 1, \ldots, n).$$

6. Le nombre des fonctions a qui figurent dans le système linéaire est égal $\rho(n-\rho)$; considérons $n-\rho$ fonctions particulières, par exemple,

$$a_1^{\rho+1}, \quad a_1^{\rho+2}, \quad \ldots, \quad a_1^n,$$

et une autre fonction a_α^β, différente des précédentes. On a

$$\begin{aligned}
A_\sigma(a_1^{\rho+1}) &= 0,\\
A_\sigma(a_1^{\rho+2}) &= 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\\
A_\sigma(a_1^n) \quad &= 0,\\
A_\sigma(a_\alpha^\beta) \quad &= 0;
\end{aligned}$$

ces équations constituent $n-\rho+1$ relations linéaires entre les lettres $a_\sigma^{\rho+1}, a_\sigma^{\rho+2}, \ldots, a_\sigma^n$; le déterminant des coefficients est donc nul, et l'on a

$$\frac{D(a_\alpha^\beta, a_1^{\rho+1}, a_1^{\rho+2}, \ldots, a_1^n)}{D(p_\sigma, p_{\rho+1}, p_{\rho+2}, \ldots, p_n)} = 0,$$

l'indice σ pouvant varier de 1 à p; par suite, a_α^β considéré comme fonction des lettres $p_1, p_2, \ldots, p_n$ est une fonction de $a_1^{\rho+1}, \ldots, a_1^n$. Donc

Les expressions $a(p_1, \ldots, p_n)$ sont des fonctions de $n-\rho$ d'entre *elles, et l'on a*

$$a_\alpha^\beta = \Phi_{\alpha\beta}(x_1, \ldots, x_n, z, a_1^{\rho+1}, a_1^{\rho+2}, \ldots, a_1^n).$$

Il ne reste plus qu'à étudier les équations

$$(12) \qquad A_\sigma(a_1^{\rho+1}) = 0, \quad \ldots, \quad A_\sigma(a_1^n) = 0 \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, \rho).$$

Supposons qu'il existe une fonction

$$U(a_1^{\rho+1}, a_1^{\rho+2}, \ldots, a_1^n, p_1, p_2, \ldots, p_n)$$

telle que, si l'on remplace les a par un système d'intégrales des équations (11), les quantités $p_1, p_2, \ldots, p_n$ disparaissent.

On devra avoir

$$(13) \qquad \sum_{h=\rho+1}^{n} \frac{\partial U}{\partial a_1^h} \frac{\partial a_1^h}{\partial p_\sigma} + \frac{\partial U}{\partial p_\sigma} = 0 \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, \rho),$$

$$(14) \qquad \sum_{h=\rho+1}^{n} \frac{\partial U}{\partial a_1^h} \frac{\partial a_1^h}{\partial p_k} + \frac{\partial U}{\partial p_k} = 0 \qquad (k = \rho + 1, \ldots, n).$$

Laissons σ fixe, multiplions l'équation (14) par a_σ^k, faisons varier k de $\rho + 1$ à n, et ajoutons; nous aurons, en tenant compte des relations (I) (p. 361),

$$(15) \qquad \frac{\partial U}{\partial p_\sigma} + \sum_{k=\rho+1}^{n} \frac{\partial U}{\partial p_k} a_\sigma^k = 0,$$

ce qui montre que la fonction U est donnée par un système complet.

Réciproquement, considérons $n - \rho$ intégrales indépendantes du système (15) $U_1, U_2, \ldots, U_{n-\rho}$ et écrivons les équations

$$U_1 \quad (a_1^{\rho+1}, \ldots, a_1^n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = \text{const.},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$U_{n-\rho}(a_1^{\rho+1}, \ldots, a_1^n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = \text{const.},$$

nous allons montrer que les valeurs des a tirées de ces équations constituent un système d'intégrales des équations (12).

On a en effet, en différentiant ces équations,

$$\sum_{h=\rho+1}^{n} \frac{\partial U_i}{\partial a_1^h} \frac{\partial a_1^h}{\partial p_\sigma} + \frac{\partial U_i}{\partial p_\sigma} = 0,$$

$$\sum_{h=\rho+1}^{n} \frac{\partial U_i}{\partial a_1^h} \frac{\partial a_1^h}{\partial p_k} + \frac{\partial U_i}{\partial p_k} = 0,$$

et, si l'on effectue la même combinaison que plus haut, il vient

$$\sum_{h=\rho+1}^{n} \frac{\partial U_i}{\partial a_1^h}\left(\frac{\partial a_1^h}{\partial p_\sigma} + \sum_{k=\rho+1}^{n} a_\sigma^k \frac{\partial a_1^h}{\partial p_k}\right) = 0,$$

et comme, par hypothèse, les équations proposées sont indépendantes,

$$\frac{D(U_1, U_2, \ldots, U_{n-\rho})}{D(a_1^{\rho+1}, \ldots, a_1^n)} \neq 0,$$

et, par suite,

$$\frac{\partial a_1^h}{\partial p_\sigma} + \sum_{k=\rho+1}^{n} a_\sigma^k \frac{\partial a_1^h}{\partial p_k} = 0.$$

C. Q. F. D.

Le système (14) s'intègre immédiatement et donne

$$p_k - a_1^k p_1 - a_2^k p_2, - \ldots - a_\rho^k p_\rho = \text{const.};$$

nous arrivons au théorème suivant :

Si le système

$$p_{ik} = a_1^k p_{i1} + a_2^k p_{i2} + \ldots + a_\rho^k p_{i\rho} + A_{ik},$$
$$p_{hk} = a_1^k p_{h1} + a_2^k p_{h2} + \ldots + a_\rho^k p_{h\rho} + A_{hk}$$

est complètement intégrable, les $\rho(n-\rho)$ *coefficients a sont des*

---

(1) Il y a exception pour les systèmes provenant de la différentiation d'un système du premier ordre en involution.

fonctions de $n-\rho$ *d'entre eux, de la fonction inconnue* z *et des variables indépendantes* (¹), *et l'on a en outre les relations*

$$p_n - a_1^k p_1 - \ldots - a_\rho^k p_\rho = \psi_k(x_1 \ldots, x_n, z).$$

7. Les équations

$$A_{\sigma} f = 0 \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, \rho)$$

constituent un système complet dont les coefficients sont tous des solutions du système; les résultats précédents nous conduisent donc au théorème :

Pour former tous les systèmes complets

$$\frac{\partial f}{\partial x_\sigma} + \sum_{h=\rho+1}^{n} a_\sigma^h \frac{\partial f}{\partial x_h} = 0,$$

dont les coefficients sont des intégrales du système lui-même, il suffit d'écrire les relations

$$x_k - a_1^k x_1 - \ldots - a_\rho^k x_\rho = \text{const.},$$

et de choisir $(\rho - 1)(n-\rho)$ *coefficients comme fonctions arbitraires des* $n-\rho$ *suivants.*