JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

LERCH

Formule pour le calcul rapide d'un certain potentiel

Journal de mathématiques pures et appliquées 5e série, tome 5 (1899), p. 427-433.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1899_5_5__427_0>

Formule pour le calcul rapide d'un certain potentiel;

PAR M. LERCH.

Dans son excellent Mémoire : *Développements en séries trigonométriques de certaines fonctions périodiques vérifiant l'équation* $\Delta F = 0$ (*Journal de Mathématiques*, 1886), M. Appell a obtenu quelques formules très élégantes permettant d'évaluer assez rapidement certains potentiels. L'une d'elles, qui correspond au cas le plus simple,

$$\mathfrak{S}_1 = \frac{1}{\sqrt{x^2+u}} + \sum_{-\infty}^{\infty}{}' \left[\frac{1}{\sqrt{(x-ma)^2+u}} - \frac{1}{\sqrt{m^2a^2}}\right],$$

présente cette circonstance que les coefficients de son développement ne sont pas exprimés sous forme finie. Il m'a semblé utile de chercher un développement à convergence rapide, différent de celui de l'illustre géomètre, et dont les termes seraient des fonctions élémentaires et simples.

J'y suis parvenu à l'aide de quelques invariants analytiques de formes quadratiques, lesquels j'avais considérés à maintes reprises. Mais les recherches correspondantes étant rédigées en tchèque, il me semble indispensable de présenter tous les développements sous la forme aussi élémentaire que possible.

Je prends pour point de départ une formule que j'avais obtenue autrefois ([1]) et qui se vérifie tout de suite :

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{[u+(w+m)^2]^s} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(s-\frac{1}{2})}{\Gamma(s)\,u^{s-\frac{1}{2}}} + \frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma(s)} \sum_{m=1}^{\infty} \cos 2m w\pi \int_0^{\infty} e^{-uz-\frac{m^2\pi^2}{z}} z^{s-\frac{3}{2}}\,dz. \end{aligned}\right.$$

En supposant $s > 1$, j'y pose $w = v$, puis je change u en $\frac{u+b(w+n)^2}{a}$, et j'ajoute les résultats pour $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Il vient

$$\begin{aligned} &\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{[u+a(v+m)^2+b(w+n)^2]^s} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(s-\frac{1}{2})}{\sqrt{a}\,\Gamma(s)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{[u+b(w+n)^2]^{s-\frac{1}{2}}} \\ &\quad + \frac{2\sqrt{\pi}}{a^s\Gamma(s)} \sum_{m=1}^{\infty} \cos 2mv\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\frac{u+b(w+n)^2}{a}z-\frac{m^2\pi^2}{z}} z^{s-\frac{3}{2}}\,dz; \end{aligned}$$

cela étant, échangeons les lettres a et b, puis v et w; le premier membre reste inaltéré par cette opération et disparaîtra en retranchant les expressions obtenues de cette manière. Il s'ensuit

$$\begin{aligned} &\frac{\Gamma(s-\frac{1}{2})}{\sqrt{ab}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\sqrt{a}}{[u+a(v+n)^2]^{s-\frac{1}{2}}} - \frac{\sqrt{b}}{[u+b(w+n)^2]^{s-\frac{1}{2}}} \right\} \\ &= \frac{2}{a^s} \sum_{m=1}^{\infty} \cos 2mv\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\frac{u+b(w+n)^2}{a}z-\frac{m^2\pi^2}{z}} z^{s-\frac{3}{2}}\,dz \\ &\quad - \frac{2}{b^s} \sum_{m=1}^{\infty} \cos 2mw\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\frac{u+a(v+n)^2}{b}z-\frac{m^2\pi^2}{z}} z^{s-\frac{3}{2}}\,dz. \end{aligned}$$

([1]) *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse,* t. III.

Dans cette équation posons $s = 1 + \rho$, ρ étant infiniment petit et positif; il vient

$$\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+\rho)}{\sqrt{ab}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{a^{-\rho}}{\left[\frac{u}{a} + (v+n)^2\right]^{\frac{1}{2}+\rho}} - \frac{b^{-\rho}}{\left[\frac{u}{b} + (w+n)^2\right]^{\frac{1}{2}+\rho}} \right\}$$

$$= \frac{2}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos 2 m v \pi \int_0^{\infty} e^{-\frac{u+b(w+n)^2}{a} z - \frac{m^2\pi^2}{z}} \frac{dz}{\sqrt{z}}$$

$$- \frac{2}{b} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos 2 m w \pi \int_0^{\infty} e^{-\frac{u+a(v+n)^2}{b} z - \frac{m^2\pi^2}{z}} \frac{dz}{\sqrt{z}}.$$

Les intégrales dans le second membre s'obtiennent à l'aide de la formule élémentaire

$$\int_0^{\infty} e^{-pz - \frac{q}{z}} \frac{dz}{\sqrt{z}} = \sqrt{\frac{\pi}{p}}\, e^{-2\sqrt{pq}},$$

de sorte que le second membre devient

$$\frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{ab}} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2 m v \pi}{\sqrt{\frac{u}{b} + (w+n)^2}}\, e^{-2m\pi \sqrt{\frac{b}{a}} \sqrt{\frac{u}{b} + (w+n)^2}}$$

$$- \frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{ab}} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2 m w \pi}{\sqrt{\frac{u}{a} + (v+n)^2}}\, e^{-2m\pi \sqrt{\frac{a}{b}} \sqrt{\frac{u}{a} + (v+n)^2}};$$

il se simplifie en effectuant la sommation par rapport à m qui se fait à l'aide de la formule

$$\sum_1^{\infty} 2 r^m \cos 2 m w \pi = \frac{\cos 2 w \pi - r}{\frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right) - \cos 2 w \pi},$$

et l'on aura

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}+\rho\right)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\frac{a^{-\rho}}{\left[\frac{u}{a}+(v+n)^2\right]^{\frac{1}{2}+\rho}}-\frac{b^{-\rho}}{\left[\frac{u}{b}+(w+n)^2\right]^{\frac{1}{2}+\rho}}\right\}$$

$$=\sqrt{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{u}{b}+(w+n)^2}}\,\frac{\cos 2v\pi-e^{-2\pi\sqrt{\frac{b}{a}}\sqrt{\frac{u}{b}+(w+n)^2}}}{\cos\operatorname{hyp}\left[2\pi\sqrt{\frac{b}{a}}\sqrt{\frac{u}{b}+(w+n)^2}\right]-\cos 2v\pi}$$

$$-\sqrt{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{u}{a}+(v+n)^2}}\,\frac{\cos 2w\pi-e^{-2\pi\sqrt{\frac{a}{b}}\sqrt{\frac{u}{a}+(v+n)^2}}}{\cos\operatorname{hyp}\left[2\pi\sqrt{\frac{a}{b}}\sqrt{\frac{u}{a}+(v+n)^2}\right]-\cos 2w\pi}.$$

Il s'agit maintenant de la limite de l'expression

$$U_\rho=\sum_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{a^{-\rho}}{\left[\frac{u}{a}+(v+n)^2\right]^{\frac{1}{2}+\rho}}-\frac{b^{-\rho}}{\left[\frac{u}{b}+(w+n)^2\right]^{\frac{1}{2}+\rho}}\right\}$$

pour $\rho=0$. En employant le développement $\left(\frac{b}{a}\right)^\rho=1+\rho\log\frac{b}{a}+(\rho^2)$, on aura

$$U_\rho=b^{-\rho}\sum_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{\left[\frac{u}{a}+(v+n)^2\right]^{\frac{1}{2}+\rho}}-\frac{1}{\left[\frac{u}{b}+(w+n)^2\right]^{\frac{1}{2}+\rho}}\right\}$$

$$+\,b^{-\rho}\sum\frac{\rho\log\frac{b}{a}+(\rho^2)}{\left[\frac{u}{a}+(v+n)^2\right]^{\frac{1}{2}+\rho}}.$$

Cela étant, la formule (1) fait voir que la quantité

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left[\frac{u}{a}+(v+n)^2\right]^{\frac{1}{2}+\rho}}$$

se réduit, pour ρ infiniment petit, à la quantité

$$\frac{\Gamma(\rho)}{\left(\frac{u}{a}\right)^{\rho}},$$

le reste étant fini. Il s'ensuit que l'on aura

$$\lim_{\rho=0} U_\rho = \sum_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\frac{u}{a} + (v+n)^2}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{u}{b} + (w+n)^2}} \right\} + \log\frac{b}{a},$$

d'où, par conséquent,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\frac{u}{a} + (v+n)^2}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{u}{b} + (w+n)^2}} \right\}$$

$$= \log\frac{a}{b} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{u}{b} + (w+n)^2}} \frac{\cos 2v\pi - e^{-2\pi\sqrt{\frac{b}{a}}\sqrt{\frac{u}{b}+(w+n)^2}}}{\cos\text{hyp}\left[2\pi\sqrt{\frac{b}{a}}\sqrt{\frac{u}{b}+(w+n)^2}\right] - \cos 2v\pi}$$

$$- \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{u}{a} + (v+n)^2}} \frac{\cos 2w\pi - e^{-2\pi\sqrt{\frac{a}{b}}\sqrt{\frac{u}{a}+(v+n)^2}}}{\cos\text{hyp}\left[2\pi\sqrt{\frac{a}{b}}\sqrt{\frac{u}{a}+(v+n)^2}\right] - \cos 2w\pi}.$$

Pour simplifier, changeons u en au, et posons $\frac{a}{b} = t^2$; si l'on écrit ensuite

$$(2) \qquad \psi(w, u) = \lim_{n=\infty}\left(\sum_{\nu=-n}^{n} \frac{1}{\sqrt{(w+\nu)^2 + u}} - 2\log n \right),$$

notre résultat prend la forme

$$(3) \left\{ \begin{aligned} &\psi(v, u) - \psi(w, t^2 u) \\ &\quad = \log t^2 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(w+n)^2 + t^2 u}} \frac{\cos 2v\pi - e^{-\frac{2\pi}{t}\sqrt{(w+n)^2+t^2 u}}}{\cos\text{hyp}\left[\frac{2\pi}{t}\sqrt{(w+n)^2 + t^2 u}\right] - \cos 2v\pi} \\ &\qquad - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(v+n)^2 + u}} \frac{\cos 2w\pi - e^{-2\pi t\sqrt{(v+n)^2+u}}}{\cos\text{hyp}\left[2\pi t\sqrt{(v+n)^2 + u}\right] - \cos 2w\pi}. \end{aligned} \right.$$

Cette formule qui résout le problème énoncé se simplifie en prenant $t = 1$, ce qui suffit, par exemple, pour évaluer le potentiel étudié par Riemann dans son Mémoire *Zur Theorie der Nobilischen Farbenringe;* on a

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\psi(v, u) - \psi(w, u) \\ &\quad = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(w+n)^2+u}} \, \frac{\cos 2v\pi - e^{-2\pi\sqrt{(w+n)^2+u}}}{\cos \mathrm{hyp}\left[2\pi\sqrt{(w+n)^2+u}\right] - \cos 2v\pi} \\ &\quad - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(v+n)^2+u}} \, \frac{\cos 2w\pi - e^{-2\pi\sqrt{(v+n)^2+u}}}{\cos \mathrm{hyp}\left[2\pi\sqrt{(v+n)^2+u}\right] - \cos 2w\pi}. \end{aligned}\right.$$

On peut obtenir une évaluation par l'intégrale définie, si l'on multiplie par dw et si l'on intègre de zéro à 1; on a pour ce but la formule qui s'obtient tout de suite au moyen de la définition (2)

$$\int_0^1 \psi(w, u)\, dw = \log \frac{4}{u},$$

et il s'ensuit

$$\psi(v, u) = \log \frac{4}{u} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2+u}} \, \frac{\cos 2v\pi - e^{-2\pi\sqrt{x^2+u}}}{\cos \mathrm{hyp}\left[2\pi\sqrt{x^2+u}\right] - \cos 2v\pi},$$

ou bien

$$(5)\quad \psi(v, u) = \log \frac{4}{a} + 2\int_0^{\infty} \frac{\cos 2v\pi - e^{-2\pi\sqrt{x^2+u}}}{\cos \mathrm{hyp}\left(2\pi\sqrt{x^2+u}\right) - \cos 2v\pi} \, \frac{dx}{\sqrt{x^2+u}},$$

formule qui peut s'écrire d'une manière encore plus simple, si l'on fait $\sqrt{x^2+u} = x'$,

$$(5^a)\quad \psi(v, u) = \log \frac{4}{u} + 2\int_{\sqrt{u}}^{\infty} \frac{\cos 2w\pi - e^{-2\pi x}}{\cos \mathrm{hyp}\, 2\pi x - \cos 2w\pi} \, \frac{dx}{\sqrt{x^2-u}}.$$

La formule (4) est d'une classe de relations qui sont assez nombreuses, et de laquelle je veux mentionner encore deux exemples, à savoir

$$\lim_{n=\infty} \sum_{\nu=-n}^{n} \left| \sqrt{(w_1+\nu)^2+u} - \sqrt{(w_2+\nu)^2+u} \right|$$

$$= w_1^2 - w_2^2 - \frac{1}{2\pi} \log \prod_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1 - 2e^{-2\pi\sqrt{(w_1+m)^2+u}} \cos 2w_2\pi + e^{-4\pi\sqrt{(w_1+m)^2+u}}}{1 - 2e^{-2\pi\sqrt{(w_2+m)^2+u}} \cos 2w_1\pi + e^{-4\pi\sqrt{(w_2+m)^2+u}}},$$

et puis

$$4\int_t^{\infty} \frac{\sqrt{x^2-t^2}\,dx}{e^{2x\pi}-1} = A t^2 - \frac{t}{\pi} \log P(t),$$

où l'on a posé

$$P(t) = \frac{1-e^{-2\pi t}}{1-e^{-2\pi}} \prod_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1-e^{-2\pi t\sqrt{m^2+1}}}{1-e^{-2\pi\sqrt{1+\frac{m^2}{t^2}}}} \right)^2,$$

et A représente une constante qui peut être définie par la limite

$$A = \frac{2}{3} + \log 2 + \lim_{n=\infty} \left(n^2 + n + \log n - \sum_{\nu=-n}^{n} \sqrt{\nu^2+1} \right).$$

On trouvera des démonstrations, avec d'autres développements, dans un Mémoire sur des développements à convergence rapide de certaines limites, qui va être présenté à l'Académie de Prague.