JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ÉMILE PICARD

Sur les intégrales doubles de seconde espèce dans la théorie des surfaces algébriques (premier mémoire)

Journal de mathématiques pures et appliquées 5e série, tome 5 (1899), p. 5-54.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1899_5_5__5_0>

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

Sur les intégrales doubles de seconde espèce dans la théorie des surfaces algébriques

(Premier Mémoire);

PAR M. ÉMILE PICARD.

On sait combien, dans la théorie des courbes algébriques, la distinction des intégrales abéliennes en *trois* espèces joue un rôle important. Dans un grand nombre de questions, les intégrales de *première* et de *seconde* espèce sont particulièrement intéressantes à considérer. Il est naturel de chercher à faire pour les intégrales doubles attachées à une surface algébrique, c'est-à-dire pour les intégrales doubles

$$\int\int R(x, y, z)\,dx\,dy \qquad [f(x, y, z) = 0]$$

(où R est rationnelle en x, y et z), une classification plus ou moins analogue. On a considéré, depuis longtemps, les intégrales doubles de *première* espèce attachées à une surface, et ces intégrales jouent un rôle très important quand on présente sous une forme analytique les célèbres travaux de M. Nœther sur les surfaces. On n'a jamais cherché jusqu'ici à établir une classification plus complète. Je me propose, dans ce premier Mémoire, de poser les bases d'une théorie des intégrales doubles *de seconde espèce* dans la théorie des surfaces algébriques, et de montrer comment la notion d'intégrale de seconde espèce conduit à un nombre invariant, qui paraît distinct de ceux qui ont été considérés jusqu'ici. Dans un second Travail, j'approfondirai quelques-uns des problèmes qui se posent d'eux-mêmes, les propositions fondamentales une fois établies; nous montrerons alors la connexion intime qui existe entre la théorie des intégrales doubles de seconde espèce et l'étude des cycles linéaires sur une surface, étude dont je me suis occupé dans mes recherches antérieures et en particulier dans ma *Théorie des fonctions algébriques de deux variables*. Les points essentiels du Mémoire actuel ont été indiqués succinctement dans les *Comptes rendus* (6 décembre 1897, 24 janvier 1898 et 24 octobre 1898).

I. — Des intégrales doubles de seconde espèce.

1. Considérons une surface algébrique

$$f(x, y, z) = 0$$

et soit une intégrale double relative à cette surface

$$\iint R(x, y, z)\,dx\,dy, \tag{1}$$

R étant rationnelle en x, y et z. Nous allons tout d'abord définir ce que nous entendons par *intégrale double de seconde espèce* (¹).

Prenons sur la surface un point arbitraire A, que l'on peut toujours, par une transformation préalable, supposer à distance finie. Si le

(¹) Nous donnerons dans la Section IX une autre définition des intégrales de seconde espèce, provenant de la considération des *résidus* de l'intégrale double.

point A est un point simple, nous dirons que l'intégrale (1) présente le *caractère* d'une intégrale de seconde espèce, si l'on peut trouver deux fonctions rationnelles U et V de x, y, z, telles que, après avoir formé l'intégrale double

$$\int\int\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}\right)dx\,dy, \tag{2}$$

la différence des intégrales (1) et (2) reste finie au voisinage de A (on considère, bien entendu, z comme fonction de x et y quand on prend les dérivées partielles de U et V par rapport à x et y). Si le point A est un point multiple de f, on sait que l'on peut partager le voisinage de A en un certain nombre de régions, telles que chacune d'elles corresponde birationnellement à une région R située sur une surface F, et ne comprenant que des points simples de F; l'intégrale (1) présentera en A le caractère d'une intégrale de seconde espèce, si ses transformées, par chacune des substitutions birationnelles à employer, présentent, en tous les points de la région correspondante R de la surface correspondante F, le caractère d'une intégrale de seconde espèce. Si, en tout point A de la surface f (à distance finie ou à l'infini), l'intégrale (1) présente le caractère d'une intégrale de seconde espèce, *cette intégrale sera dite une intégrale double de seconde espèce*. Il est clair que les fonctions rationnelles U et V à employer pourront varier avec le point A.

2. Il importe tout d'abord de s'assurer que la forme des expressions (2) est de nature *invariante* relativement aux transformations birationnelles. On s'en assure de la manière suivante. Envisageons d'abord l'intégrale

$$\int\int\frac{D(P,Q)}{D(x,y)}dx\,dy, \tag{3}$$

où $\frac{D(P,Q)}{D(x,y)}$ représente le déterminant fonctionnel des deux fonctions P et Q de x et y; si l'on remplace les variables x et y par de nouvelles variables x' et y', l'intégrale devient évidemment

$$\int\int\frac{D(P,Q)}{D(x',y')}dx'\,dy'$$

et garde par suite la même forme. Or, l'intégrale (3) rentre manifestement dans le type (2), puisqu'on peut l'écrire

$$\iint\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\mathrm{P}\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\mathrm{P}\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x}\right)\right]dx\,dy.$$

Ceci posé, on peut donner à (2) la forme suivante

$$\iint\frac{\mathrm{D}(\mathrm{U},y)}{\mathrm{D}(x,y)}\,dx\,dy+\iint\frac{\mathrm{D}(x,\mathrm{V})}{\mathrm{D}(x,y)}\,dx\,dy;$$

en faisant un changement de variables, on aura

$$\iint\frac{\mathrm{D}(\mathrm{U},y)}{\mathrm{D}(x',y')}\,dx'\,dy'+\iint\frac{\mathrm{D}(x,\mathrm{V})}{\mathrm{D}(x',y')}\,dx'\,dy'$$

et, d'après ce que nous venons de dire, chaque terme de cette somme et, par suite, la somme se mettent sous la forme

$$\iint\left(\frac{\partial \mathrm{U}_1}{\partial x'}+\frac{\partial \mathrm{V}_1}{\partial y'}\right)dx'\,dy'.$$

L'intégrale (2) a donc conservé la même forme quand on a remplacé les variables x et y par les variables x' et y'; c'est l'*invariance que nous voulions établir*.

3. Remarquons, avant de continuer, qu'une définition analogue à celle que nous venons de donner pour les intégrales doubles de seconde espèce peut être adoptée pour les intégrales simples de seconde espèce dans la théorie des courbes algébriques. Si l'on a la courbe

$$f(x,y)=0,$$

les intégrales abéliennes de seconde espèce

$$\int \mathrm{R}(x,y)\,dx,$$

relatives à cette courbe sont telles que, pour tout point A de la courbe, on peut trouver une fonction rationnelle $\mathrm{U}(x,y)$, telle que la différence

$$\int \mathrm{R}(x,y)\,dx - \int \frac{d\mathrm{U}}{dx}\,dx$$

reste finie dans le voisinage de A.

4. On sait que, pour une courbe algébrique, il n'existe qu'un nombre *limité* d'intégrales abéliennes de seconde espèce, c'est-à-dire qu'il existe un nombre *limité* d'intégrales abéliennes J de seconde espèce, dont aucune combinaison linéaire n'est de la forme

$$(\alpha) \qquad \int \frac{d\mathrm{U}}{dx}\,dx$$

(U étant rationnelle en x et y), et telles que toute autre intégrale de seconde espèce est une combinaison linéaire des intégrales J, à un terme additif près de la forme (α).

Nous devons nous demander s'il en est de même dans la théorie des surfaces algébriques. Nous allons montrer, pour répondre à cette question, qu'*il existe un nombre limité* ρ *d'intégrales* J *de seconde espèce, dont aucune combinaison linéaire n'est de la forme*

$$(\beta) \qquad \int\int \left(\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial y}\right) dx\,dy$$

(P et Q étant rationnelles en x, y et z), *et telles que toute autre intégrale de seconde espèce est une combinaison linéaire des intégrales* J, *à un terme additif près de la forme* (β). La démonstration de ce résultat sera la conséquence d'une longue suite de transformations de calculs qui vont faire l'objet des Sections suivantes. Nous aurons ensuite à montrer qu'une intégrale double de seconde espèce relative à une surface f se change, quand on transforme birationnellement f en une surface F, en une intégrale de seconde espèce de la surface F. Ce fait ne résulte pas immédiatement du calcul du § 2 et demandera quelques explications.

II. — Remarques générales.

5. Commençons par étudier les intégrales de seconde espèce ayant la forme particulière

$$(4)\qquad \int\int \frac{P(x, y, z)\, dx\, dy}{(x-a)^{\alpha} f'_z} \qquad (\alpha > 0 \text{ et P étant un polynome}),$$

en supposant, comme il est permis, que la surface de degré m

$$f(x, y, z) = 0$$

occupe une position arbitraire par rapport aux axes de coordonnées. Envisageons l'intégrale simple

$$(5)\qquad \int \frac{P(x, \bar{y}, z)\, dx}{(x-a)^{\alpha} f'_z}$$

relative à la courbe entre x et z

$$f(x, \bar{y}, z) = 0,$$

où y est un paramètre. On sait que, par la soustraction d'une expression de la forme

$$\int \frac{d}{dx}\left(\frac{Q(x, z)}{(x-a)^{\alpha-1}}\right) dx,$$

on peut ramener l'intégrale (5) à une intégrale analogue, où α est remplacé par $\alpha - 1$. Toutefois les coefficients du polynome $Q(x, z)$ en x et z étant des fractions rationnelles de y, il figurera dans la nouvelle intégrale, au dénominateur, un polynome en y. Il importe d'examiner de quelle manière y figure dans ce dénominateur. Soient z_1, z_2, ..., z_m les m racines de l'équation

$$f(a, \bar{y}, z) = 0;$$

le polynome $Q(x, z)$ est seulement assujetti à vérifier les équations

$$(\alpha-1) f_z(a, \bar{y}, z_i) Q(a, z_i) + P(a, \bar{y}, z_i) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Il suffira de prendre pour $Q(x, z)$ un polynome en z de degré $m-1$, et il est clair que ses coefficients contiendront, en dénominateur, le résultant des deux équations

$$f(a, y, z) = 0, \qquad f'_z(\ , y, z) = 0.$$

Notre dénominateur admettra donc pour racines simples les valeurs de y correspondant aux points de la courbe

$$f(a, y, z) = 0,$$

où la tangente est parallèle à l'axe des z, et pour racines doubles les valeurs de y correspondant aux points doubles de cette courbe, si la courbe n'a que des points doubles. Soit d'une manière générale $\Delta(y)$ ce résultant; l'intégrale (4), par la soustraction d'une intégrale de la forme

$$\int\int \frac{\partial U}{\partial x} dx\, dy$$

(où U est rationnelle en x, y, z), se trouve ramenée à une intégrale de la forme

$$\int\int \frac{P(x, y, z)\, dx\, dy}{(x-a)^{\alpha-1} \Delta(y) f'_z}.$$

En continuant de la même manière, on arrivera évidemment à une intégrale de la forme

$$\int\int \frac{P(x, y, z)\, dx\, dy}{(x-a)[\Delta(y)]^{\alpha-1} f'_z},$$

P étant toujours un polynome.

6. Puisque l'intégrale précédente est de seconde espèce, on peut,

dans le voisinage d'un point arbitraire de la courbe (¹)

$$(\gamma) \qquad x = a, \qquad f(x, y, z) = 0,$$

retrancher une intégrale double de la forme

$$\int\int\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right) dx\, dy$$

de telle sorte que la différence reste finie dans le voisinage du point. Les fractions rationnelles U et V sont nécessairement de la forme

$$U = \frac{A(x, y, z)}{(x-a)^{\lambda}}, \qquad V = \frac{B(x, y, z)}{(x-a)^{\mu}},$$

A et B étant encore des fractions rationnelles, mais qui ne deviennent pas infinies, et supposons que B ne s'annule pas identiquement sur la courbe γ.

Si λ est supérieur à $\mu - 1$, A s'annule nécessairement pour $x = a$, et par suite on peut, de proche en proche, réduire λ à $\mu - 1$. On peut d'ailleurs dans tous les cas supposer

$$\lambda = \mu - 1$$

en multipliant, s'il est nécessaire, les deux termes de U par une puissance de $x - a$.

Nous avons donc l'expression

$$(\delta) \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{A(x, y, z)}{(x-a)^{\mu-1}}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{B(x, y, z)}{(x-a)^{\mu}}\right].$$

Si μ est supérieur à *un*, la différence

$$-(\mu - 1)A(x, y, z) + \frac{\partial}{\partial y} B(x, y, z)$$

(¹) On peut supposer que cette courbe est indécomposable, car, les axes de coordonnées étant arbitrairement choisis, les plans

$$x = \text{const.}$$

coupent tous la surface suivant une seule courbe, en laissant de côté la surface de Steiner et les surfaces réglées.

s'annulera nécessairement pour la courbe (γ), c'est-à-dire que l'on aura

$$-(\mu-1)A(a,y,\zeta)+\frac{\partial}{\partial y}B(a,y,\zeta)=0 \quad [\text{avec } f(a,y,\zeta)=0].$$

On en conclut que l'expression (δ), qui peut s'écrire

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{A(x,y,z)}{(x-a)^{\mu-1}}-\frac{1}{\mu-1}\frac{\partial}{\partial y}\frac{B(x,y,z)}{(x-a)^{\mu-1}}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{B(x,y,z)}{(x-a)^{\mu}}+\frac{1}{\mu-1}\frac{\partial}{\partial x}\frac{B(x,y,z)}{(x-a)^{\mu-1}}\right]$$

est de même forme que (δ), sauf que μ y est remplacé par $\mu-1$. Donc, en allant de proche en proche, on peut supposer $\mu=1$, et, par suite, la différence

$$\frac{P(x,y,z)}{[\Delta(y)]^{\alpha-1}f'_z}-\frac{\partial}{\partial y}B(x,y,z)$$

doit s'annuler pour $x=a$. On en conclut que

$$\frac{P(a,y,\zeta)}{[\Delta(y)]^{\alpha-1}f'_\zeta}=\frac{\partial}{\partial y}B(a,y,\zeta),$$

ζ étant la fonction de y définie par $f(a,y,\zeta)=0$. La fonction rationnelle $B(a,y,\zeta)$ pourra nécessairement se mettre sous la forme

$$\frac{S(y,\zeta)}{U(y)},$$

S et U étant des polynomes, et les racines de $U(y)$ appartenant à $\Delta(y)$. Ceci posé, formons la différence

$$\iint\frac{P(x,y,z)\,dx\,dy}{(x-a)(\Delta y)^{\alpha-1}f'_z}-\iint\frac{\partial}{\partial y}\frac{S(y,z)}{(x-a)\,U(y)}\,dx\,dy.$$

Elle sera de la forme

$$\iint\frac{Q(x,y,z)}{W(y)}\frac{dx\,dy}{f'_z},$$

Q et V étant des polynomes et les racines de $W(y)$ appartenant à $\Delta(y)$.

III. — Première réduction, dans le cas des surfaces sans singularités.

7. Les transformations précédentes vont bientôt nous être utiles. Nous allons maintenant revenir à l'intégrale

$$\int\int \frac{P(x,y,z)}{(x-a)^\alpha f'_z}\,dx\,dy,$$

supposée de seconde espèce, en supposant que la surface n'ait pas de singularités. Considérons d'abord le cas où le plan $x=a$ n'est pas tangent à la surface. Il va être facile dans ce cas d'effectuer une réduction en supposant $\alpha > 1$. Je dis qu'on peut déterminer deux *polynomes* $A(x,y,z)$ et $B(x,y,z)$, de telle sorte que l'intégrale

$$\int\int \left[\frac{P(x,y,z)}{(x-a)^\alpha f'_z} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{A(x,y,z)}{(x-a)^{\alpha-1}} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{B(x,y,z)}{(x-a)^\alpha}\right] dx\,dy$$

soit de même forme que l'intégrale initiale, α étant remplacé par $\alpha-1$. Il suffira que

$$P+(\alpha-1)A f'_z - \left(f'_z\frac{\partial B}{\partial y} - f'_y\frac{\partial B}{\partial z}\right)$$

passe par la courbe $x=a$, $f(x,y,z)=0$.

Prenons pour A et B des polynomes en y et ζ; on doit avoir

$$P(a,y,\zeta)+(\alpha-1)A f'_\zeta - \left(f'_\zeta\frac{\partial B}{\partial y} - f'_y\frac{\partial B}{\partial \zeta}\right)$$

divisible par $f(a,y,\zeta)$; ou bien encore y et ζ étant deux lettres indépendantes, il faut mettre le polynome $P(a,y,\zeta)$ sous la forme

$$P(a,y,\zeta)=\lambda f'_y+\mu f'_\zeta+\nu f \qquad [\text{où } f \text{ désigne } f(a,y,\zeta)],$$

λ, μ et ν étant des polynomes en y et ζ.

Or, puisque le plan $x=a$ n'est pas tangent à la surface, la courbe $f(a,y,\zeta)=0$ n'a pas de points multiples, les trois polynomes f, f'_y, f'_ζ ne s'annulent pas simultanément. De plus on peut toujours supposer que les solutions communes aux deux équations

$$f = 0, \qquad f'_\zeta = 0$$

sont des solutions *simples;* il suffit que l'axe des ζ ne soit pas parallèle à une tangente d'inflexion de la courbe $f(a, y, \zeta) = 0$. Ceci posé, on peut choisir le polynome $\lambda(y, \zeta)$ de manière que la différence

$$P(a, y, \zeta) - \lambda f'_y$$

s'annule pour les points communs à

$$f = 0, \qquad f'_\zeta = 0.$$

On aura donc

$$P(a, y, \zeta) - \lambda f'_y = \mu f'_\zeta + \nu f,$$

μ et ν étant des polynomes en y et ζ, et de là se tirent A et B.

Nous pouvons donc conclure que, sous les hypothèses faites, *l'intégrale proposée se ramène à*

$$\iint \frac{P(x, y, z)\,dx\,dy}{(x - a) f'_z}.$$

8. L'intégrale étant de seconde espèce, nous pouvons faire une réduction encore plus complète. En raisonnant comme au n° **6**, on voit que l'on doit avoir

$$\frac{P(a, y, \zeta)}{f'_\zeta} = \frac{\partial}{\partial y} B(a, y, \zeta) \qquad [f(a, y, \zeta) = 0].$$

La fraction rationnelle $B(a, y, \zeta)$ sera nécessairement un polynome $S(y, \zeta)$ en y et ζ [la courbe $f(a, y, \zeta) = 0$ n'ayant pas de point double]. Si l'on considère alors la différence

$$\iint \left[\frac{P(x, y, z)}{(x - a) f'_z} - \frac{\partial}{\partial y}\, \frac{S(y, z)}{x - a}\right] dx\,dy,$$

elle sera de la forme

$$\iint \frac{P(x, y, z)\,dx\,dy}{f'_z},$$

où P est un polynome. Nous arrivons donc à la conclusion suivante :

La surface $f(x, y, z) = 0$ n'ayant pas de singularités, et le plan $x = a$ n'étant pas tangent à la surface, une intégrale de seconde espèce de la forme

$$\int\int \frac{P(x, y, z)\, dx\, dy}{(x-a)^\alpha f'_z} \qquad \text{(P étant un polynome)}$$

se ramène par la soustraction d'intégrales du type

$$\int\int \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right) dx\, dy \qquad \text{(U et V rationnels en } x, y \text{ et } z\text{)}$$

à une intégrale de la forme

$$\int\int \frac{P(x, y, z)\, dx\, dy}{f'_z},$$

P *étant toujours un polynome.*

9. Le même théorème subsiste si le plan $x = a$ est tangent à la surface. Nous pouvons le démontrer très facilement en nous reportant au résultat du nº **6**. Par la soustraction d'une intégrale de forme convenable, nous avons ramené l'intégrale

$$\int\int \frac{P(x, y, z)\, dx\, dy}{(x-a)^\alpha f'_z}$$

à la forme

$$\int\int \frac{Q(x, y, z)\, dx\, dy}{W(y) f'_z},$$

chaque racine b de $W(y)$ correspondant à un point où la courbe

$$f(a, y, z) = 0$$

a sa tangente parallèle à l'axe des z. Or, les axes occupant une position arbitraire par rapport à la surface, on peut supposer qu'aucun des plans $y = b$ n'est tangent à la surface. Nous sommes donc ramené au cas précédent (x et y étant permutés), et *nous avons le théorème énoncé à la fin du numéro précédent, même si le plan $x = a$ est tangent à la surface.*

10. Nous avons supposé que les axes occupent une position arbitraire par rapport à la surface; les plans considérés $x = a$ coupaient alors la surface suivant une courbe irréductible. Il est facile d'examiner le cas où il en serait autrement. Supposons que le plan $x = a$ coupe la surface suivant une courbe décomposable en *deux* autres, et soit A un point commun à ces deux courbes. Reprenons l'intégrale

$$\int\int \frac{P(x, y, z)\, dx\, dy}{(x-a)^{\alpha} f'_z}.$$

Nous pouvons d'ailleurs, comme plus haut, faire les réductions qui nous ramèneront à l'intégrale

$$\int\int \frac{P(x, y, z)\, dx\, dy}{(x-a)\, W(y) f'_z}.$$

On peut, dans le voisinage de A, retrancher une intégrale double de la forme

$$\int\int \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right) dx\, dy,$$

de telle sorte que la différence reste finie dans le voisinage du point. En raisonnant, comme au n° **6**, on voit que cette dernière intégrale est de la forme

$$\int\int \frac{1}{x-a} \frac{\partial}{\partial y} B(x, y, z)\, dx\, dy,$$

la fraction rationnelle $B(x, y, z)$ ne devenant pas identiquement infinie sur la section plane $x = a$. Il n'y a dans tout ceci aucune différence avec le n° **6**, si ce n'est que dans ce numéro nous nous placions au voisinage d'un point *quelconque* de la section plane, tandis que nous nous plaçons ici au voisinage du point *particulier* A; d'ailleurs, la courbe désignée (*loc. cit.*) par (γ) est l'ensemble des deux courbes passant par le point A. On aura donc

$$\frac{P(a, y, z)}{W(y) f'_z(a, y, z)} = \frac{\partial}{\partial y} B(a, y, z),$$

pour l'une et l'autre courbe que définit l'équation $f(a, y, z) = 0$. Or, on peut toujours mettre la fonction rationnelle $B(x, y, z)$ sous la forme

$$B(x, y, z) = \frac{Q(x, y, z)}{R(x, y)} \qquad (\text{Q étant un polynome}),$$

le polynome $R(x, y)$ ne contenant pas $(x - a)$ en facteur (sinon B serait infinie au moins sur une des courbes de la section $x = a$). Si donc de l'intégrale proposée

$$\int\int \frac{P(x, y, z)\, dx\, dy}{(x-a) W(y) f'_z}$$

on retranche

$$\int\int \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{x-a} \frac{Q(x, y, z)}{R(a, y)}\right] dx\, dy,$$

on aura une intégrale de la forme

$$\int\int \frac{Q(x, y, z)\, dx\, dy}{W(y) f'_z},$$

$W(y)$ étant un polynome en y. Comme le plan des zx peut être supposé avoir une direction arbitraire, on peut admettre qu'aucun plan de la forme

$$y = C$$

ne coupe la surface suivant une courbe décomposable (en faisant abstraction de la surface de Steiner et des surfaces réglées), et finalement nous arrivons à la même conclusion qu'au numéro précédent.

Les considérations précédentes peuvent servir, d'une manière plus générale, à faire la réduction de l'intégrale de seconde espèce

$$\int\int \frac{P(x, y, z)\, dx\, dy}{(x-a)^{\alpha} R(x, y) f'_z},$$

le polynome $R(x,y)$ ne contenant pas $x-a$ en facteur; on ramènera cette intégrale, par la soustraction d'une intégrale de la forme déjà tant de fois indiquée, à l'intégrale

$$\int\int \frac{P(x,y,z)\,dx\,dy}{V(y)\,R(x,y)\,f'_z}.$$

11. En restant toujours dans le cas d'une surface sans singularités, nous allons enfin considérer une intégrale arbitraire de seconde espèce. Les axes étant pris arbitrairement, nous pouvons supposer que l'intégrale reste en général finie dans le voisinage d'un point pour lequel $f'_z = 0$; de plus C étant une ligne irréductible de la surface pour les points de laquelle l'intégrale peut devenir infinie, soit

$$R(x,y) = 0$$

la courbe irréductible qui est la projection de la ligne C sur le plan des xy. La surface cylindrique

$$R(x,y) = 0$$

pourra couper la surface f suivant une autre ligne irréductible que la ligne C.

Soit Γ cette seconde ligne; les courbes C et Γ ont au moins un point commun à distance finie que nous désignerons par A. L'intégrale double considérée peut évidemment se mettre sous la forme d'une somme d'intégrales du type

$$(\varepsilon) \qquad \int\int \frac{P(x,y,z)\,dx\,dy}{W(y)[R(x,y)]^\alpha f'_z}.$$

En effet, toute fraction rationnelle de x, y, z peut s'écrire

$$\frac{A(x,y,z)}{B(x,y)},$$

A et B étant deux polynomes, le premier en x, y, z, le second en x

et y. En regardant

$$\frac{1}{B(x, y)}$$

comme une fraction rationnelle de x, on la décomposera en fractions plus simples, dont les dénominateurs, en tant que polynomes en x, soient premiers entre eux et puissances d'un polynome en x et y; mais dans cette décomposition pourront s'introduire au dénominateur des polynomes en y, figurés par $V(y)$. Considérons donc l'intégrale (ε); dans le voisinage du point A, on doit pouvoir trouver deux fractions rationnelles $S(x, y, z)$ et $T(x, y, z)$ telles que la différence

$$\int\int \left\{ \frac{P(x, y, z)}{f'_z W(y)[R(x, y)]^\alpha} - \frac{\partial S}{\partial x} - \frac{\partial T}{\partial y} \right\} dx\, dy$$

reste finie dans le voisinage de A. En décomposant S et T en fractions simples, nous avons, pour la somme $\frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y}$, des éléments de la forme

$$\frac{H(x, y, z)}{W_1(y)[\rho(x, y)]^\lambda f'_z}.$$

En se bornant, dans S et T, au terme renfermant nécessairement en dénominateur une puissance de R, nous avons une intégrale de la forme

$$\int\int \frac{P(x, y, z)\, dx\, dy}{W(y)[R(x, y)]^\beta f'_z},$$

qui, dans le voisinage de A (ce point pouvant être exclu), ne devient pas infinie sur la courbe

$$R(x, y) = 0,$$

c'est-à-dire sur les deux courbes C et Γ; il faut donc que

$$\frac{P(x, y, z)}{[R(x, y)]^\beta}$$

reste finie pour $R(x, y) = 0$, dans le voisinage de A, et, par suite, soit un polynome en x, y et z (on peut appliquer ici un théorème classique de Nœther, puisque C et Γ forment l'intersection complète de $R = 0$ avec la surface f).

On voit donc que finalement l'intégrale sera ramenée à

$$(\eta)\qquad \int\int \frac{P(x, y, z)\,dx\,dy}{W(y) f'_z},$$

et finalement à

$$\int\int \frac{P(x, y, z)\,dx\,dy}{f'_z}.$$

Nous avons donc la proposition fondamentale suivante :

Si l'équation

$$f(x, y, z) = 0$$

représente une surface sans singularités, toutes les intégrales de seconde espèce relatives à cette surface sont de la forme

$$\int\int \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right) dx\,dy + \int\int \frac{P(x, y, z)}{f'_z}\,dx\,dy,$$

U et V étant des fonctions rationnelles en x, y et z, et $P(x, y, z)$ représentant un polynome.

IV. — Même réduction pour les surfaces quelconques.

12. Le théorème que nous venons d'établir est général. Une partie de la démonstration précédente subsiste entièrement; c'est celle qui est contenue dans le numéro précédent et qui s'arrête à la forme (η). En permutant x et y, nous voyons donc que toutes les intégrales de seconde espèce se ramènent aux intégrales

$$\int\int \frac{P(x, y, z)\,dx\,dy}{W(x) f'_z},$$

et nous devons donc étudier les intégrales de la forme

$$\int\int \frac{P(x, y, z)\,dx\,dy}{(x - a)^{\alpha} f'_z}.$$

La surface, nous pouvons le supposer, n'a que des singularités ordinaires (une ligne double avec points triples). On peut, de plus, admettre que l'intégrale initiale ne devient pas, *en général*, infinie le long de la ligne double (il suffirait, s'il en était autrement, de faire une transformation birationnelle convenable); *il en résulte que* P *s'annule le long de la courbe double*. Enfin les axes de coordonnées ont une position arbitraire par rapport à la surface.

Supposons d'abord que le plan $x = a$ ne passe pas par un point-pince ou par un point triple de la courbe double. Il y a alors peu de modifications à faire à la réduction du n° **7**. Reprenons les notations et les calculs de ce numéro; nous devons chercher à mettre $P(a, y, \zeta)$ sous la forme

$$\lambda f'_y + \mu f'_\zeta + \nu f.$$

Le polynome $P(a, y, \zeta)$ s'annule d'ailleurs pour les points doubles de la courbe

$$f(a, y, \zeta) = 0.$$

Ici les trois polynomes f, f'_y, f'_ζ s'annulent simultanément, mais on peut supposer que f et f'_y n'ont de tangente commune en aucun de leurs points de rencontre. Il s'agit alors de savoir si l'on peut déterminer un polynome μ en y et ζ, de telle sorte que la différence

$$P - \mu f'_\zeta$$

soit de la forme $\lambda f'_y + \nu f$. Les points communs à

$$f = 0 \qquad \text{et} \qquad f'_y = 0$$

sont de deux sortes; les uns sont des points simples de f et n'appartiennent pas, par suite, à $f'_\zeta = 0$. On peut choisir le polynome μ de telle sorte que la différence $P - \mu f'_\zeta$ s'annule en ces points. Les autres sont points doubles de f; la différence précédente s'annule en ces points; mais il faut de plus que, pour chacun de ces points, la courbe

$$P - \mu f'_\zeta = 0$$

ait même tangente que la courbe $f'_y = 0$, et il est clair que l'on peut choisir μ de façon qu'il en soit ainsi, puisque $f'_y = 0$ et $f'_\zeta = 0$ ne sont pas tangentes en ces points.

Nous pouvons donc encore conclure que *le cas de α quelconque se ramène à $\alpha = 1$.*

13. On ne peut pas faire la même réduction si le plan $x = a$ *passe par un point-pince*. Pour qu'elle soit possible, c'est-à-dire pour qu'on puisse mettre $P(a, y, \zeta)$ sous la forme voulue, il faut et il suffit que la tangente à la courbe

$$P(a, y, \zeta) = 0,$$

au point-pince, soit la tangente au point de rebroussement dans la section plane $x = a$ (¹).

Or, pour l'intégrale considérée

$$\int\int \frac{P(x, y, z)\,dx\,dy}{(x-a)^\alpha f'_z},$$

la condition relative à la tangente pour la courbe $P(a, y, \zeta) = 0$ n'est pas remplie en général. Nous allons montrer que l'on peut, par une soustraction convenable, être ramené à une intégrale de même forme, mais où la condition voulue sera remplie. Commençons par quelques remarques très importantes pour la suite.

(¹) On établit facilement que, si

$$f(x, y) = 0$$

représente une courbe ayant des points doubles et des points de rebroussement ordinaires, la condition nécessaire et suffisante pour qu'un polynome $P(x, y)$ soit susceptible de se mettre sous la forme

$$\lambda f + \mu f'_y + \nu f'_x \qquad (\lambda, \mu, \nu \text{ étant des polynomes}),$$

est que la courbe $P = 0$ passe par les points doubles de f, et aussi par les points de rebroussement avec la tangente à f en ces derniers points comme tangente.

14. J'envisage les expressions de la forme

$$(\alpha)\qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{U}{f'_z}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{V}{f'_z}\right),$$

U et V étant des polynomes en x, y, z.

Cherchons à quelle condition cette expression est de la forme

$$(\beta)\qquad \frac{M(x,y,z)}{f'_z},$$

$M(x, y, z)$ étant un polynome en x, y et z. En développant l'expression ci-dessus, on a

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial y}}{f'_z}+\frac{\frac{\partial V}{\partial x}}{f'_z}-\frac{\frac{\partial U}{\partial z}f'_y}{f'^2_z}-\frac{\frac{\partial V}{\partial z}f'_x}{f'^2_z}-\frac{U}{f'^2_z}\left(f''_{zy}-f''_{z^2}\frac{f'_y}{f'_z}\right)-\frac{V}{f'^2_z}\left(f''_{zx}-f''_{z^2}\frac{f'_x}{f'_z}\right).$$

Il n'y aura pas de terme en $\frac{1}{f'^3_z}$ si $Uf'_y+Vf'_x$ est divisible par f'_z, c'est-à-dire si l'on a l'identité en x, y et z,

$$(\gamma)\qquad Uf'_y+Vf'_x=Af'_z+Bf,$$

A et B étant deux polynomes. Nous allons voir que, dans ces conditions, l'expression proposée a la forme demandée. Il suffit de montrer qu'il ne reste pas alors de terme en $\frac{1}{f'^2_z}$; or le coefficient de $\frac{1}{f'^2_z}$ est égal à

$$-\frac{\partial U}{\partial z}f'_y-\frac{\partial V}{\partial z}f'_x-Uf''_{zy}-Vf''_{zx}+Af''_{z^2}.$$

En différentiant par rapport à z l'identité à laquelle satisfont U et V, on voit de suite que ce coefficient est de la forme

$$Kf'_z+Hf,$$

K et H étant des polynomes, et l'on a

$$K=-\frac{\partial A}{\partial z}-B.$$

Donc, l'expression (α) *sera de la forme* (β), *si* U *et* V *satisfont à l'identité* (γ) *en* x, y *et* z.

15. Revenons maintenant au n° **13**. Pour pouvoir ramener au cas de $\alpha = 1$, en suivant la méthode employée aux n°s **7** et **12**, il faudrait que dans l'expression

$$\iint \frac{P(x, y, z)\,dx\,dy}{(x-a)^\alpha f'_z},$$

le polynome $P(x, y, z)$ qui s'annule le long de la courbe double fût tel que la courbe

$$P(a, y, z) = 0$$

eût, comme tangente au point-pince, la tangente au point de rebroussement de la courbe $f(a, y, z) = 0$. S'il n'en est pas ainsi, nous allons montrer qu'on peut faire une première transformation réalisant cette condition. Formons la combinaison

$$\frac{P(x, y, z)}{(x-a)^\alpha f'_z} - \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{U}{(x-a)^{\alpha-1} f'_z}\right] - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{V}{(x-a)^{\alpha-1} f'_z}\right],$$

qui peut s'écrire

$$\frac{P(x, y, z) + (\alpha - 1)V}{(x-a)^\alpha f'_z} - \frac{1}{(x-a)^{\alpha-1}}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{U}{f'_z}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{V}{f'_z}\right)\right].$$

Prenons pour U un polynome tel que la surface $U = 0$ passe par la courbe double et par la courbe simple de rencontre de $f = 0$ et $f'_z = 0$; de même prenons pour V un polynome satisfaisant aux mêmes conditions, en ajoutant en plus la condition que la surface

$$P(x, y, z) + (\alpha - 1)V = 0,$$

soit tangente au point-pince à la tangente à $f(a, y, z) = 0$ dans le plan $x = a$, et cette dernière condition peut évidemment être réalisée. D'autre part la surface

$$U f'_y + V f'_x = 0$$

a pour ligne double la courbe double de f et passe, comme $U = 0$ et $V = 0$, par la ligne *simple* de rencontre de $f = 0$ et $f'_z = 0$; on a donc

$$U f'_y + V f'_x = A f'_z + K f.$$

Enfin $\frac{U}{f'_z}$ et $\frac{V}{f'_z}$ restant en général finies sur la courbe double, l'expression

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{U}{f'_z}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{V}{f'_z}\right)$$

sera de la forme

$$\frac{M(x, y, z)}{f'_z},$$

M étant un polynome s'annulant sur la courbe double. Donc, par la soustraction effectuée, l'intégrale

$$\int\int \frac{P(x, y, z)\,dx\,dy}{(x-a)^\alpha f'_z},$$

est remplacée par l'intégrale

$$\int\int \frac{Q(x, y, z)\,dx\,dy}{(x-a)^\alpha f'_z},$$

où α a la même valeur mais où le polynome Q satisfait à la condition nécessaire pour notre réduction ultérieure, condition à laquelle ne satisfaisait pas P.

Nous concluons de là que, *si le plan $x = a$ passe par un point-pince, l'intégrale*

$$\int\int \frac{P(x, y, z)\,dx\,dy}{(x-a)^\alpha f'_z}$$

peut, comme quand le plan ne passait pas par un point-pince, être ramenée au cas de $\alpha = 1$.

Une démonstration analogue s'applique, avec peu de modifications, au cas où le plan $x = a$ passe par un point triple de la courbe double, et nous pouvons par conséquent conclure que *toutes les intégrales de seconde espèce se ramènent à la forme*

$$\int\int \frac{B(x, y, z)}{(x-a) f'_z}\,dx\,dy.$$

16. Allons encore plus loin, et établissons que l'on peut faire disparaître le facteur $x - a$ du dénominateur. Nous partons de l'intégrale supposée de seconde espèce

$$\int\int \frac{P(x, y, z)\,dx\,dy}{(x-a)f'_z},$$

[$P(x, y, z)$ s'annulant sur la courbe double].

Nous savons (n° 6) que dans le voisinage d'un point de la section plane $x = a$, on obtiendra une intégrale restant finie dans le voisinage de ce point en retranchant de l'intégrale précédente une intégrale de la forme

$$\int\int \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{B(x, y, z)}{x-a}\right] dx\,dy,$$

[$B(x, y, z)$ étant une fonction rationnelle de x, y et z ne devenant pas identiquement infinie pour $x = a$]. Il résulte de là que l'on a

$$\frac{P(a, y, \zeta)}{f'_\zeta} = \frac{\partial}{\partial y}[B(a, y, \zeta)] \qquad [f(a, y, \zeta) = 0].$$

La courbe $f(a, y, \zeta) = 0$ ayant des points singuliers, nous ne pouvons pas conclure, comme au n° **8**, que $B(a, y, \zeta)$ est un polynome en y et ζ, mais il résulte des théorèmes les plus simples sur les fonctions algébriques d'une variable, que l'on peut écrire

$$B(a, y, \zeta) = \frac{M(y, \zeta)}{f'_\zeta},$$

$M(y, \zeta)$ étant un polynome en y et ζ qui s'annule pour les points de la courbe $f(a, y, \zeta) = 0$, qui correspondent à $f'_\zeta = 0$ (si la courbe a un point triple, la courbe $M(y, \zeta) = 0$, aura ce point comme point double). Ceci posé, nous allons chercher à former un polynome $Q(x, y, z)$ tel que la surface

$$Q(x, y, z) = 0,$$

passe par les deux courbes de rencontre des surfaces

$$f = 0, \qquad f'_z = 0,$$

(dont l'une est la courbe double que nous appellerons Γ, tandis que l'autre C représentera le lieu des points simples de la surface où le plan tangent est parallèle à l'axe des z), et que l'on ait

$$Q(a, y, z) = M(y, z) + \theta(y, z) f(a, y, z),$$

$\theta(y, z)$ étant un polynome arbitraire, et où, comme nous l'avons dit, le polynome $M(y, z)$ s'annule aux points doubles de la courbe

$$f(a, y, z) = 0,$$

et aux points simples de cette courbe où la tangente est parallèle à Oz. [Dans le cas où le plan $x = a$ passerait par un point commun à C et Γ, la tangente à la courbe $M(y, z) = 0$ en ce point serait parallèle à l'axe des z]. La question revient à trouver une surface

$$Q(x, y, z) = 0,$$

passant par C et Γ, et coupant *à distance finie* le plan $x = a$ seulement suivant la courbe $M(y, z) + \theta(y, z) f(a, y, z) = 0$.

La possibilité de cette recherche résulte du théorème général suivant dû à M. Castelnuovo sur les systèmes linéaires de surfaces : *Un système linéaire complet de surfaces défini par des lignes-bases et par des points-bases découpe sur un plan arbitraire un système* complet (*régulier*) *de courbes, pourvu que le degré des surfaces dépasse une certaine limite.* Nous appliquerons ce théorème au système linéaire complet Σ des surfaces de degré λ passant simplement par C et Γ, et aux sections par le plan $x = a$. Le système linéaire Σ découpe sur le plan $x = a$ le système complet σ des courbes de ce plan passant par les points où il rencontre C et Γ (si $x = a$ passe par un point P commun à C et à Γ les courbes du système plan ont une tangente déterminée, intersection du plan tangent à la surface en P avec le plan $x = a$), pourvu que le degré λ des surfaces soit assez grand. Parmi les courbes du système σ se trouve, si λ est pris assez grand, la courbe composée formée de la courbe

$$(\alpha) \qquad M(y, z) + \theta(y, z) f(a, y, z) = 0$$

et de la droite à l'infini répétée un nombre convenable de fois. Il y aura donc, d'après le théorème de M. Castelnuovo, une surface

$$Q(x, y, z) = 0,$$

coupant le plan $x = a$ suivant la courbe (α) et la droite à l'infini avec un certain degré de multiplicité; le polynome Q remplira les conditions requises.

On voit alors que l'intégrale à soustraire peut être prise égale à

$$\int\int \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{Q(x, y, z)}{(x-a)f'_z}\right] dx\, dy.$$

D'ailleurs, l'expression

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{Q(x, y, z)}{f'_z}\right]$$

sera de la forme

$$\frac{R(x, y, z)}{f'_z} \qquad \text{(R étant un polynome)}$$

puisque le polynome Qf'_y sera nécessairement de la forme $Af'_z + Kf$ (n° **14**), notre intégrale, par la soustraction de l'intégrale ci-dessus, est donc ramenée à

$$\int\int \frac{P(x, y, z)\, dx\, dy}{f'_z}.$$

Nous arrivons donc finalement au théorème déjà obtenu pour les surfaces sans singularités :

Étant donnée une surface

$$f(x, y, z) = 0$$

que l'on peut supposer à singularités ordinaires (une ligne double avec des points triples), toutes les intégrales doubles de seconde espèce relatives à cette surface, se ramènent par la soustraction *d'une intégrale de la forme*

$$\int\int\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}\right)dx\,dy$$

(U et V rationnelles en x, y et z) *au type*

$$\int\int\frac{P(x,y,z)\,dx\,dy}{f'_z},$$

$P(x, y, z)$ *étant un polynome qui s'annule pour la courbe double.*

V. — Théorème fondamental sur le nombre limité des intégrales de seconde espèce.

17. Il s'agit maintenant de montrer que les intégrales de *seconde espèce*

$$\text{(I)} \qquad \int\int\frac{P(x,y,z)\,dx\,dy}{f'_z}$$

se ramènent à un nombre *limité* d'entre elles. Nous ferons cette réduction en retranchant de l'intégrale précédente une intégrale

$$\int\int\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{U}{f'_z}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{V}{f'_z}\right)\right]dx\,dy,$$

où U et V sont des polynomes.

18. Partons de l'intégrale (I), où le polynome

$$P(x,y,z)$$

est de degré p, et désignons par $P_1(x,y,z)$ l'ensemble des termes homogènes et de degré p dans P. Posons

$$(\alpha) \qquad \begin{cases} U = yP_1 + H, \\ V = xP_1 + K, \end{cases}$$

H et K étant des polynomes de degré p en x, y et z. *On peut choisir, si p est assez grand, les polynomes* H *et* K *de degré p, de telle manière que l'on ait l'identité*

$$Uf'_y + Vf'_x = Af'_z + Bf \qquad \text{(A et B étant des polynomes)},$$

identité qui peut s'écrire

$$P_1(yf'_y + xf'_x) + Hf'_y + Kf'_x = Af'_z + Bf.$$

Pour légitimer cette assertion, nous n'avons qu'à nous appuyer sur la proposition de M. Castelnuovo dont nous avons déjà fait usage (n° **16**). Considérons la surface Φ représentée par l'équation

$$(\Phi) \qquad Uf'_y + Vf'_x = 0.$$

Elle passe par les deux courbes définies par les équations

$$f'_x = 0, \qquad f'_y = 0.$$

L'une de ces courbes Γ est la ligne double de f; désignons l'autre par C. Les axes ayant été pris arbitrairement, on peut supposer que C et Γ sont des lignes simples de rencontre de $f'_x = 0$, $f'_y = 0$. Ensuite Φ coupe le plan de l'infini, suivant la ligne

$$(\gamma) \qquad t = 0, \qquad P_1(y\varphi'_y + x\varphi'_x) = 0,$$

en introduisant la quatrième coordonnée homogène t, et en désignant par φ l'ensemble des termes homogènes de plus haut degré m dans f. Réciproquement, toute surface de degré p passant par les courbes C et Γ et contenant la ligne plane (γ) a le premier membre de son équation de la forme

$$Uf'_y + Vf'_x,$$

où U et V sont des polynomes de la forme (α).

D'autre part, la surface Φ est aussi représentée par l'équation

$$Af'_z + Bf = 0.$$

Elle passe donc par la courbe simple D de la surface f, définie par les équations

$$f = 0, \qquad f'_z = 0.$$

De plus, elle passe, comme nous le savions déjà, par la ligne double, mais nous voyons maintenant que Φ est tangent à la surface

$$f'_z = 0,$$

le long de la ligne double Γ; réciproquement, toute surface passant par D et par Γ, et étant tangente à $f'_z = 0$ le long de Γ, a le premier membre de son équation de la forme

$$\mathrm{A}f'_z + \mathrm{B}f.$$

Considérons alors le système linéaire Σ des surfaces de degré $m+p$ défini par les lignes bases simples C, D et Γ, avec la condition que le long de Γ ces surfaces soient tangentes à $f'_z = 0$. Si p est assez grand, et par suite $m+p$, ce système linéaire découpera sur le plan de l'infini

$$t = 0$$

le système linéaire *complet* de courbes de degré $m+p$, caractérisé par les points-bases simples qui sont les intersections du plan de l'infini avec les courbes C, D et Γ, avec la condition supplémentaire qu'aux points d'intersection du plan de l'infini avec la courbe Γ, la courbe soit tangente à la surface $f'_z = 0$. Or la courbe (γ), considérée plus haut, définie par les équations

$$t = 0, \qquad \mathrm{P}_1(y\varphi'_y + x\varphi'_x) = 0,$$

satisfait bien à ces diverses conditions, car la courbe

$$t = 0, \qquad y\varphi'_y + x\varphi'_x = 0$$

qu'elle contient partiellement, passe par les points à l'infini de C, D et Γ. Les points à l'infini de Γ satisfaisant aux équations

$$t = 0, \qquad \varphi'_z = 0, \qquad \varphi = 0,$$

la courbe $y\varphi'_y + x\varphi'_x = 0$ dont l'équation peut s'écrire

$$-z\varphi'_z + m\varphi = 0$$

est bien tangente à $\varphi'_z = 0$ aux points doubles de φ.

Donc, si p est assez grand, nous pourrons certainement trouver une surface du système linéaire Σ, donnée soit par l'équation

$$Uf'_y + Vf'_x = 0,$$

soit par l'équation qui lui est identique

$$Af'_z + Bf = 0,$$

où U et V ont la forme (α).

19. Nous allons facilement achever la démonstration. Après avoir déterminé U et V comme il vient d'être dit, formons la différence

$$\frac{P(x, y, z)}{f'_z} - \frac{1}{p-m+3}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{U}{f'_z}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{V}{f'_z}\right)\right];$$

nous allons voir qu'elle est de la forme

$$\frac{Q(x, y, z)}{f'_z},$$

où Q est seulement de degré $p-1$, tandis que P était de degré p. On a l'identité en x, y, z

$$Uf'_y + Vf'_x = Af'_z + Bf,$$

A et B étant des polynomes respectivement de degré $p+1$ et p. D'après le calcul du n° **14**, on a sur la surface $f = 0$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{U}{f'_z}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{V}{f'_z}\right) = \frac{\dfrac{\partial U}{\partial y} + \dfrac{\partial V}{\partial x} - \dfrac{\partial A}{\partial z} - B}{f'_z}.$$

Or, soient dans U, V, A, B les termes homogènes de plus haut degré en x, y, z représentés respectivement par u, v, a, b; on aura d'abord

$$u = y\mathrm{P}_1, \qquad v = x\mathrm{P}_1,$$

donc

$$\mathrm{P}_1(y\varphi'_y + x\varphi'_x) = a\varphi'_z + b\varphi,$$

d'où l'on déduit

$$\mathrm{P}_1(-z\varphi'_z + m\varphi) = a\varphi'_z + b\varphi,$$

d'où se conclut

$$\left.\begin{aligned} a &= -\mathrm{P}_1 z + \lambda\varphi \\ b &= m\mathrm{P}_1 - \lambda\varphi'_z \end{aligned}\right\} (\lambda \text{ polyn. homog. en } x, y, z \text{ de degré } p+1-m).$$

On aura donc, comme on le vérifie immédiatement,

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial z} - b = (p - m + 3)\mathrm{P}_1 + \frac{\partial\lambda}{\partial z}\varphi.$$

On pourra par suite, *sur la surface f*, écrire

$$\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial z} - \mathrm{B} = (p - m + 3)\mathrm{P}_1(x, y, z) + \mathrm{Q}(x, y, z),$$

$\mathrm{Q}(x, y, z)$ étant un polynome de degré $p - 1$ au plus. Nous concluons donc de là qu'on peut passer de l'intégrale

$$\iint \frac{\mathrm{P}(x, y, z)\,dx\,dy}{f'_z},$$

où P est un polynome de degré p, à une intégrale de même forme où P sera seulement de degré $p - 1$, pourvu que p dépasse une certaine limite.

20. Nous pouvons enfin déduire de toutes les transformations précédentes le théorème fondamental relatif au nombre limité des intégrales distinctes de seconde espèce. Convenons de dire que *des intégrales de seconde espèce sont distinctes*, si aucune combinaison linéaire de ces intégrales n'est de la forme

$$\int\int\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}\right)dx\,dy,$$

U et V étant rationnelles en x, y, z.

Le théorème fondamental sur les intégrales doubles de seconde espèce est alors le suivant :

Il n'y a pour une surface algébrique qu'un nombre limité d'intégrales doubles distinctes de seconde espèce.

Ou encore :

Il existe pour une surface algébrique un certain nombre ρ *d'intégrales doubles distinctes de seconde espèce*

$$I_1,\quad I_2,\quad \ldots,\quad I_\rho,$$

telles que toute autre intégrale double de seconde espèce est de la forme

$$\alpha_1 I_1+\alpha_2 I_2+\ldots+\alpha_\rho I_\rho+\int\int\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}\right)dx\,dy,$$

les α *étant des constantes, et* U *et* V *des fonctions rationnelles de* x, y, z.

21. La démonstration précédente s'applique à tous les cas. Pour établir que toutes les intégrales

$$\int\int\frac{P(x,y,z)\,dx\,dy}{f'_z}$$

se réduisent à un nombre fini d'entre elles, on pourrait se borner au cas où la surface est la plus générale de son degré.

En prenant pour $f(x,y,z)$ *un polynome arbitraire* de degré m, on peut chercher facilement une limite du degré p. Reprenons l'identité fondamentale

$$Uf'_y+Vf'_x=Af'_z+Bf,$$

en supposant que U et V sont de degré $p+1$. On a alors

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{U}{f'_z}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{V}{f'_z}\right)=\frac{Q(x,y,z)}{f'_z},$$

Q étant un polynome de degré p. Nous avons vu que dans $Q(x, y, z)$ l'ensemble des termes homogènes de degré p sera égal à un polynome homogène donné $P_1(x, y, z)$, si l'on a

$$\left.\begin{array}{l} U=yP_1+H \\ V=xP_1+K \end{array}\right\} \quad (\text{H et K polynomes de degré } p).$$

Formons alors l'identité

$$(\Phi) \qquad P_1(yf'_y+xf'_x)+Hf'_y+Kf'_x=Af'_z+Bf.$$

Dans $Hf'_y+Kf'_x$, où H et K sont des polynomes arbitraires de degré p, le nombre des arbitraires est égal à

$$2\frac{(p+1)(p+2)(p+3)}{6}-\frac{(p-m+2)(p-m+3)(p-m+4)}{6}.$$

D'autre part, pour avoir une identité de la forme (Φ), il faut et il suffit que la surface obtenue en égalant à zéro le premier membre de cette identité, que nous appellerons la surface Φ, passe par la courbe gauche

$$(\gamma) \qquad f=0, \qquad f'_z=0.$$

Or, on sait que le nombre des conditions exprimant qu'une surface de degré μ passe par une courbe gauche sans point singulier de degré d et de genre π est égal à

$$\mu d-\pi+1,$$

si μ est assez grand; dans le cas où la courbe est l'intersection complète de deux surfaces de degrés α et β, on doit avoir

$$\mu \geqq \alpha+\beta-3.$$

Dans la question actuelle

$$\mu = p + m, \qquad \pi = \frac{m(m-1)(2m-5)}{2} + 1.$$

De plus, la surface Φ a, quels que soient les arbitraires qui y figurent, un nombre de points communs avec la courbe (γ) égal à $m(m-1)$, et qui sont les $m(m-1)$ points à l'infini de (γ); le nombre des conditions est donc à diminuer de $m(m-1)$. Le nombre des paramètres sera au moins égal au nombre des conditions qui expriment que la surface Φ passe par la courbe (γ), si l'on a

$$\frac{(p+1)(p+2)(p+3)}{3} - \frac{(p-m+2)(p-m+3)(p-m+4)}{6} > (p+m-1)m(m-1) - \frac{m(m-1)(2m-5)}{2}.$$

Si p_0 désigne le plus grand nombre entier positif *pour lequel cette inégalité n'est pas vérifiée*, on pourra ramener toute intégrale

$$\iint \frac{P(x,y,z)\,dx\,dy}{f'_z}$$

à une intégrale de même forme, où le degré de P sera au plus p_0. On ne peut trouver pour p_0 une expression simple, mais on vérifie facilement que

$$p_0 \leqq 2m - 4,$$

et l'on est par suite assuré *de pouvoir réduire à $2m-4$ le degré du polynome* qui figure au numérateur de l'intégrale double.

VI. — Recherche des conditions pour qu'une intégrale double soit de seconde espèce.

22. Nous venons de montrer que toutes les intégrales de seconde espèce se ramènent par une soustraction convenable à la forme

$$\iint \frac{P(x,y,z)\,dx\,dy}{f'_z}$$

(le polynome P s'annulant sur la courbe double), où le degré p du polynome P est limité. Mais toutes les intégrales doubles de cette forme ne sont pas de *seconde espèce*. Il faut maintenant exprimer que cette intégrale est de seconde espèce.

Nous n'avons rien à exprimer pour ce qui regarde les points à distance finie de la surface

$$f(x, y, z) = 0.$$

Nous avons seulement à examiner les points à l'infini, en supposant d'ailleurs, comme il est permis, qu'avant toute réduction on ait fait une transformation homographique.

Posons

$$x = \frac{1}{X}, \qquad y = \frac{Y}{X}, \qquad z = \frac{Z}{X};$$

et soit alors $F(X, Y, Z) = 0$ l'équation de la surface transformée. L'intégrale prendra la forme

$$\iint \frac{1}{X^{p-(m-4)}} \frac{H(X, Y, Z)}{F'_Z} dX\, dY,$$

$H(X, Y, Z)$ désignant un polynome qui s'annule pour la courbe double de F. Si p est au plus égal à $m-4$, l'intégrale est de première espèce. Soit donc

$$p > m - 4.$$

Par la soustraction d'une intégrale convenable de la forme (n^{os} **7** et **12**)

$$\iint \left\{ \frac{\partial}{\partial X}\left[\frac{A(X, Y, Z)}{X^{p-(m-3)}}\right] + \frac{\partial}{\partial Y}\left[\frac{B(X, Y, Z)}{X^{p-(m-4)}}\right] \right\} dX\, dY,$$

on obtient une intégrale

$$\iint \frac{1}{X} \frac{K(X, Y, Z)\, dX\, dY}{F'_Z},$$

$K(X, Y, Z)$ étant un polynome s'annulant pour la courbe double. D'après le n° **16**, pour que cette intégrale ait sur la ligne $X = 0$ le caractère d'une intégrale de seconde espèce, il faut et il suffit que l'expression

$$\frac{\mathrm{K}(o, \mathrm{Y}, \mathrm{Z})}{\mathrm{F}'_{\mathrm{Z}}(o, \mathrm{Y}, \mathrm{Z})} \qquad |\mathrm{F}(o, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}) = o|,$$

soit la dérivée d'une fonction rationnelle de Y et Z. On pourra reconnaître s'il en est effectivement ainsi, ce qui entraînera en général

$$2\pi + m - 1$$

conditions, en désignant par π le genre d'une section plane quelconque de la surface et par suite de la courbe $\mathrm{F}(o, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}) = o$. Les conditions reviennent en effet à écrire que l'intégrale abélienne

$$\int \frac{\mathrm{K}(o, \mathrm{Y}, \mathrm{Z})\, d\mathrm{Y}}{\mathrm{F}'_{\mathrm{Z}}(o, \mathrm{Y}, \mathrm{Z})} \qquad |\mathrm{F}(o, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}) = o|,$$

est algébrique; les 2π périodes cycliques doivent être donc nulles, et les m résidus relatifs aux points à l'infini, qui donnent seulement $m - 1$ conditions. On sait d'ailleurs que toutes ces conditions s'expriment sous forme algébrique.

23. Toutes ces conditions étant remplies, nous sommes assuré que pour les points à l'infini de la surface

$$f(x, y, z) = o$$

qui correspondent à

$$\mathrm{X} = o, \qquad \mathrm{Y} = \text{une valeur finie},$$

les conditions pour que l'intégrale proposée soit de seconde espèce se trouvent vérifiées. Si l'on avait posé

$$x = \frac{\mathrm{X}_1}{\mathrm{Y}_1}, \qquad y = \frac{1}{\mathrm{Y}_1}, \qquad z = \frac{\mathrm{Z}_1}{\mathrm{Y}_1},$$

on aurait eu l'intégrale

$$\iint \frac{1}{\mathrm{Y}_1^{p-(m-3)}} \frac{\mathrm{H}_1(\mathrm{X}_1, \mathrm{Y}_1, \mathrm{Z}_1)}{\mathrm{F}'_{1,\mathrm{Z}_1}} d\mathrm{X}_1\, d\mathrm{Y}_1 \qquad |\mathrm{F}_1(\mathrm{X}_1, \mathrm{Y}_1, \mathrm{Z}_1) = o|.$$

Pour les points de la courbe $Y_1 = 0$, elle devrait en général avoir le caractère d'une intégrale de seconde espèce, puisque cette courbe correspond à $X = 0$. Donc pour tous les points à l'infini de la surface F_1 qui correspondent à $Y_1 = 0$ et à une valeur finie de X_1 se trouvent vérifiées les conditions pour que l'intégrale soit de seconde espèce. Mais on a

$$X_1 = \frac{1}{Y}, \qquad Y_1 = \frac{X}{Y},$$

donc aux points de F exclus plus haut pour lesquels

$$X = 0, \qquad Y = \infty,$$

correspondent sur F_1

$$X_1 = 0, \qquad Y_1 = 0$$

et par suite pour les points à l'infini de la surface f pour lesquels

$$X = 0, \qquad Y = \infty$$

les conditions relatives à la nature de l'intégrale double sont bien vérifiées.

Il reste enfin à examiner les points à l'infini de la surface f pour lesquels

$$x = \text{une valeur finie}, \qquad y = \infty;$$

comme ils correspondent nécessairement sur F_1 à des points pour lesquels

$$Y_1 = 0, \qquad X_1 = 0,$$

la conclusion est immédiate, et les conditions voulues sont vérifiées.

Ainsi donc *nous savons exprimer que l'intégrale double*

$$\iint \frac{P(x, y, z)\,dx\,dy}{f'_z}$$

(le polynome P s'annulant sur la courbe double) *est une intégrale double de seconde espèce.*

Ceci revient à exprimer qu'une certaine intégrale abélienne est algébrique; *le nombre des conditions est en général égal à*

$$2\pi + m - 1,$$

π désignant le genre d'une section plane quelconque de la surface.

VII. — Caractère invariant de l'intégrale de seconde espèce.

24. Nous avons maintenant à montrer qu'une intégrale double de seconde espèce reste une intégrale de seconde espèce quand on effectue sur la surface une transformation birationnelle. Nous avons déjà vu (nº **2**) que *la forme* des expressions

$$(1) \qquad \iint \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right) dx\, dy$$

est invariante relativement à toute transformation birationnelle, mais cela ne suffit pas pour établir l'invariance des intégrales de seconde espèce. La difficulté provient des points fondamentaux que peuvent posséder les transformations birationnelles. Soit, sur la surface

$$f(x, y, z) = 0,$$

un point A, que l'on peut évidemment supposer simple, qui soit un point fondamental de la transformation, c'est-à-dire qu'au point A de f correspond sur la surface transformée

$$F(X, Y, Z) = 0$$

une certaine ligne. Envisageons une intégrale I de seconde espèce de la surface F et recherchons si sa transformée i relative à la surface f possède au point A le caractère d'une intégrale double de seconde espèce. L'intégrale i pourra devenir infinie le long de certaines lignes

$$\Gamma_1, \quad \Gamma_2, \quad \ldots, \quad \Gamma_k$$

passant par le point A; il résulte de ce que i est la transformée d'une intégrale de seconde espèce de la surface F que l'on peut retrancher de l'intégrale i une intégrale double de la forme

$$(h = 1, 2, \ldots, k) \qquad \iint \left(\frac{\partial U_h}{\partial x} + \frac{\partial V_h}{\partial y}\right) dx\, dy \qquad \left\{ \begin{array}{l} (U_h \text{ et } V_h \text{ ration-} \\ \text{nelles en } x, y \text{ et } z) \end{array} \right.$$

telle que la différence de ces deux intégrales reste finie dans le voisinage de A sur la courbe Γ_h (en dehors de A). Nous allons voir que cela suffit pour affirmer que l'intégrale i présente en A le caractère d'une intégrale de seconde espèce.

Les axes de coordonnées étant supposés arbitrairement situés par rapport à la surface, nous écrirons i sous la forme

$$(i) \qquad \iint \frac{A(x, y, z)}{[R_1(x, y)]^{\alpha_1} \ldots [R_k(x, y)]^{\alpha_k} f'_z}\, dx\, dy,$$

les polynomes R de x et y étant irréductibles et premiers entre eux, et s'annulant en A, tandis que $A(x, y, z)$ est une fraction rationnelle de x, y, z qui reste finie en ce point. On peut, par hypothèse, retrancher de i une intégrale

$$\iint \left(\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y}\right) dx\, dy,$$

telle que la différence des deux intégrales reste finie dans le voisinage de A sur la ligne Γ_1 (en dehors de A); nous supposons que pour Γ_1 on ait $R_1(x, y) = 0$. En décomposant, comme nous l'avons fait tant de fois, U_1 et V_1 en éléments simples, nous ferons ainsi disparaître R_1 du dénominateur, mais en introduisant à la place une certaine puissance de $x - a$ (on désigne par a l'abscisse de A). En continuant ainsi de proche en proche, nous retranchons de i une intégrale de la forme

$$\iint \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right) dx\, dy,$$

de telle sorte que la différence soit de la forme

$$(j) \qquad \iint \frac{B(x, y, z)}{(x - a)^{\alpha} f'_z}\, dx\, dy,$$

la fraction rationnelle B étant finie en A. Cette dernière intégrale j est évidemment telle que l'on peut en retrancher une intégrale de la forme tant de fois considérée, de façon que la différence reste finie dans le voisinage de A (en dehors de A) sur la ligne $x = a$.

En faisant les réductions les plus élémentaires, nous sommes ramené au cas de $\alpha = 1$ et nous avons, par suite, en ayant fait seulement des soustractions du type voulu, l'intégrale

$$\int\int \frac{C(x, y, z)}{(x-a)f'_z}\,dx\,dy, \tag{2}$$

$C(x, y, z)$ étant finie et déterminée en A. Nous pouvons d'ailleurs supposer que la courbe pour laquelle on a

$$\frac{1}{C(x, y, z)} = 0,$$

ne rencontre pas le plan $x = a$ en un point dont la coordonnée y soit égale à b (en désignant par b la seconde coordonnée de A); dans le cas contraire, en effet, il suffirait de faire tourner les axes Oy et Oz dans le plan des zy sans changer l'axe Ox.

Ceci posé, d'après nos hypothèses, on peut retrancher de l'intégrale (2) une intégrale de la forme

$$\int\int \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{R(x, y, z)}{x-a}\right] dx\,dy$$

[où $R(x, y, z)$ est une fonction rationnelle], et telle que la différence des deux intégrales reste finie dans le voisinage de A (en dehors de A) sur la ligne $x = a$. Ceci entraîne l'identité

$$\frac{C(a, y, \zeta)}{f'_\zeta(a, y, \zeta)} = \frac{\partial}{\partial y} R(a, y, \zeta) \qquad [\text{sur la courbe } f(a, y, \zeta) = 0].$$

D'après ce que nous avons dit, la fonction rationnelle $C(a, y, \zeta)$ reste finie pour les points de la courbe $f(a, y, \zeta) = 0$, qui correspondent à $y = b$. Donc, on peut mettre l'expression

$$R(a, y, \zeta),$$

sous la forme

$$\frac{M(y, \zeta)}{R(y)},$$

M étant un polynome en y et ζ, et $R(y)$ ne s'annulant pas pour $y = b$. Par suite, si l'on retranche de l'intégrale (2) l'intégrale

$$\int\int \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{M(y, z)}{(x-a)R(y)}\right] dx\, dy,$$

on aura une différence qui sera de la forme

$$\int\int S(x, y, z) dx\, dy,$$

la fraction rationnelle S étant finie et déterminée au point A. Ceci montre que l'intégrale (2) et, *par suite, l'intégrale initiale i présentent en* A *ce que nous avons appelé le caractère d'une intégrale double de seconde espèce.*

Ainsi se trouve établi *le caractère invariant de l'intégrale double de seconde espèce;* le nombre désigné par ρ au n° **20** est donc *un nombre invariant* pour toute transformation birationnelle.

VIII. — Quelques exemples.

25. Nous avons dit au début, que nous nous proposions seulement dans ce premier Mémoire de poser les bases de la théorie des intégrales doubles de seconde espèce, qui sera développée dans un second Travail. Indiquons donc seulement deux exemples, pour ne pas rester uniquement dans les généralités.

Considérons d'abord les intégrales de fonctions rationnelles

$$(1) \qquad \int\int S(x, y) dx\, dy,$$

S étant une fonction rationnelle de deux variables indépendantes x et y. Il résulte immédiatement du théorème général du n° **11**, que de telles intégrales, quand elles sont de seconde espèce, peuvent par la soustraction d'une expression

$$(2) \qquad \iint \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) dx\, dy,$$

être ramenées à la forme

$$(3) \qquad \iint P(x, y)\, dx\, dy,$$

P étant un polynome. En effet, on peut regarder (1) comme une intégrale relative à la surface

$$z = ax + by + c.$$

D'autre part, il est manifeste que l'intégrale (3) peut s'écrire

$$\iint \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\, dy,$$

Q étant un polynome en x et y, car on peut toujours poser $P = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

Donc, *toutes les intégrales doubles de seconde espèce de fonctions rationnelles de x et y sont de la forme* (2). Le nombre désigné plus haut par ρ est ici égal à zéro.

Il ne sera pas inutile de reprendre directement la démonstration du résultat précédent, sans s'appuyer sur aucun théorème général. Soit

$$S(x, y) = \frac{P(x, y)}{[R_1(x, y)]^{\alpha_1} \ldots [R_m(x, y)]^{\alpha_m}},$$

les R étant des polynomes irréductibles en x et y, que nous pouvons supposer contenir à la fois x et y, et premiers entre eux. Puisque l'intégrale (1) est de seconde espèce par hypothèse, on doit pouvoir retrancher de (1) une intégrale de la forme (2), telle que la différence reste finie dans le voisinage d'un point appartenant à la courbe

$$R_1(x, y) = 0.$$

Si nous décomposons U et V en éléments simples par rapport à y, relativement à chacun des polynomes R, nous avons

$$U = \sum \frac{A_i(x, y)}{[R_i(x, y)]^{k_i}}, \qquad V = \sum \frac{B_i(x, y)}{[R_i(x, y)]^{k_i}},$$

A_i et B_i étant des polynomes en y à coefficients rationnels en x. La différence

$$S(x, y) - \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{A_1(x, y)}{[R_1(x, y)]^{k_1}}\right\} - \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{B_1(x, y)}{[R_1(x, y)]^{k_1}}\right\}$$

ne doit pas être identiquement infinie dans le voisinage d'un point arbitraire satisfaisant à la relation

$$R_1(x, y) = 0.$$

Par cette soustraction, nous faisons donc disparaître R_1 du dénominateur, en introduisant cependant à la place un polynome en x seul. En opérant maintenant relativement à R_2, et ainsi de suite, nous voyons que, par la soustraction d'une intégrale (2), nous ramenons l'intégrale de seconde espèce (1) à l'intégrale

$$\int\int \frac{P(x, y)}{V(x)}\, dx\, dy,$$

P étant un polynome en x et y, et $V(x)$ un polynome en x.

Cette dernière intégrale est la somme d'intégrales

$$\int\int R(x) y^m\, dx\, dy,$$

[où $R(x)$ est une fraction rationnelle de x, et m un entier positif] que l'on peut écrire

$$\frac{1}{m+1}\int\int \frac{\partial}{\partial y}[R(x) y^{m+1}]\, dx\, dy;$$

elle est donc de la forme (2), et nous retrouvons bien le résultat annoncé.

26. Prenons encore, comme exemple, les surfaces qui correspondent birationnellement à l'ensemble de deux courbes φ et ψ, c'est-à-dire les surfaces pour lesquelles on a

$$\begin{aligned} x &= R_1(\alpha, \beta, \alpha', \beta'), \\ y &= R_2(\alpha, \beta, \alpha', \beta'), \\ z &= R_3(\alpha, \beta, \alpha', \beta'), \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} \varphi(\alpha, \beta) = 0 \\ \psi(\alpha', \beta') = 0 \end{bmatrix},$$

les R étant rationnelles en α, β, α' et β', et cela de telle manière qu'à un point *arbitraire* (x, y, z) de la surface corresponde un seul couple (α, β) et (α', β'); nous désignerons par $f(x, y, z) = 0$ l'équation de la surface.

Soit

$$(4) \qquad \int R(\alpha, \beta)\, d\alpha$$

une intégrale abélienne de seconde espèce, non rationnelle, de la courbe

$$\varphi(\alpha, \beta) = 0,$$

que nous supposons de genre supérieur à zéro, et soit pareillement

$$(5) \qquad \int S(\alpha', \beta')\, d\alpha'$$

une intégrale de seconde espèce, non rationnelle, relative à la courbe de genre supérieur à zéro,

$$\psi(\alpha', \beta') = 0.$$

J'envisage l'intégrale double

$$\int\int R(\alpha, \beta) S(\alpha', \beta')\, d\alpha\, d\alpha',$$

qui est manifestement de la forme

$$(6) \qquad \int\int T(x, y, z)\, dx\, dy,$$

T étant rationnelle en x, y et z. Nous allons voir que cette intégrale est une intégrale de seconde espèce de la surface f. Les lignes, le long desquelles l'intégrale (6) devient infinie, correspondent aux pôles de l'intégrale (4) et aux pôles de l'intégrale (5). Si A est un pôle de (4) sur la courbe φ (on peut le supposer à distance finie), on a, dans le voisinage de ce point,

$$R(\alpha, \beta) = \frac{dU}{d\alpha} + \rho(\alpha, \beta),$$

ρ et U étant rationnelles en α et β, et ρ restant finie en A. L'intégrale peut donc s'écrire

$$\int\int \left(\frac{dU}{d\alpha} + \rho\right) S(\alpha', \beta')\, d\alpha\, d\alpha',$$

c'est-à-dire

$$\int\int \frac{\partial}{\partial\alpha}[U(\alpha, \beta)\, S(\alpha', \beta')]\, d\alpha\, d\alpha' + \int\int \rho S\, d\alpha\, d\alpha';$$

le premier terme seul devient infini pour un point de la surface f pris arbitrairement sur la ligne Γ qui correspond au point A de la courbe φ. Or, ce premier terme, d'après les généralités du n° **2**, est nécessairement de la forme

$$\int\int \left(\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y}\right) dx\, dy,$$

U_1 et V_1 étant rationnelles en x, y et z. Donc, en un point arbitraire de la ligne Γ, l'intégrale (6) présente le caractère d'une intégrale de seconde espèce. Pour les pôles de ψ on raisonnerait de la même manière, et aussi pour les points correspondant à la fois aux pôles de φ et aux pôles de ψ, et nous arrivons bien à la conclusion que *l'intégrale* (6) *est une intégrale double de seconde espèce.*

Une question intéressante se pose immédiatement. Peut-on affirmer que l'intégrale (6) n'est pas réductible à une intégrale

$$\int\int \left(\frac{dU}{dx} + \frac{\partial V}{\partial y}\right) dx\, dy?$$

Il en est bien ainsi, comme nous allons l'établir. Il faudrait montrer que l'on ne peut pas trouver des fonctions

$$U(\alpha, \beta, \alpha', \beta') \quad \text{et} \quad V(\alpha, \beta, \alpha', \beta')$$

rationnelles en α, β et α', β', telles que l'on ait ([1])

$$R(\alpha, \beta) S(\alpha', \beta') = \frac{\partial U}{\partial \alpha} + \frac{\partial V}{\partial \alpha'}.$$

Nous ne suivrons pas cette voie algébrique qui exigerait des calculs assez longs, et nous emploierons un détour. Dans l'hypothèse de l'identité précédente on aurait

$$(7) \qquad \iint R(\alpha, \beta) S(\alpha', \beta')\, d\alpha\, d\alpha' = \iint \left(\frac{\partial U}{\partial \alpha} + \frac{\partial V}{\partial \alpha'} \right) d\alpha\, d\alpha'.$$

Or, traçons dans le plan de la variable complexe α un cycle C relatif à la fonction algébrique β de α définie par

$$\varphi(\alpha, \beta) = 0$$

et soit de même, dans le plan α', un cycle C′ relatif à ψ. On peut supposer que les intégrales

$$\int_C R(\alpha, \beta)\, d\alpha = \omega, \qquad \int_{C'} S(\alpha', \beta')\, d\alpha' = \omega'$$

ne sont pas nulles et nous aurons, en prenant l'intégrale qui figure au premier membre de (7), le long du continuum à deux dimensions correspondant à l'ensemble de C et C′, la valeur

$$\omega\omega' \qquad (\text{différente de zéro}).$$

Passons au second membre de (7); il est possible que U et V deviennent infinies en certains points de notre continuum (CC′), mais ceci

---

([1]) En prenant $\frac{\partial U}{\partial \alpha}$, on considère, bien entendu, β comme fonction de α, et de même dans le calcul de $\frac{\partial V}{\partial \alpha'}$, on considère β' comme fonction de α'.

n'arrivera qu'en des points *en nombre limité*, couples de points que j'appelle *les points* (AA′) (A étant sur C et A′ sur C′). Prenons

$$\int\int \frac{\partial U}{\partial \alpha} d\alpha\, d\alpha'.$$

En intégrant d'abord par rapport à α, en laissant fixe le point (α', β') supposé distinct d'un point A′, nous avons un résultat nul. Donc tous les éléments de l'intégrale sont nuls, sauf les éléments infiniment petits à une dimension correspondant au contour C et au voisinage d'un point A′. La même remarque s'applique à la seconde intégrale

$$\int\int \frac{\partial V}{\partial \alpha'} d\alpha\, d\alpha',$$

en intervertissant seulement les accents. Nous voyons donc que l'intégrale

$$\int\int R(\alpha, \beta)\, S(\alpha', \beta')\, d\alpha\, d\alpha'$$

serait nulle, en laissant de côté un nombre fini d'éléments infiniment petits dans une dimension. Comme pour ces éléments, la dernière intégrale reste finie, ils n'ont pas d'importance pour la valeur de l'intégrale, et l'on aurait

$$\int_C \int_{C'} R(\alpha, \beta) S(\alpha', \beta')\, d\alpha\, d\alpha' = 0,$$

ce qui est absurde, puisque sa valeur est $\omega\omega'$ qui n'est pas nul. Nous donnons donc ainsi un exemple d'*intégrale double de seconde espèce*

$$\int\int T(x, y, z)\, dx\, dy$$

qui ne se réduit pas à une intégrale

$$\int\int \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right) dx\, dy$$

(U et V étant rationnelles en x, y et z), et qui, en même temps, n'est pas une intégrale double de première espèce de la surface.

IX. — Seconde définition des intégrales de seconde espèce.

27. On peut donner des intégrales de seconde espèce une définition qui fait intervenir la considération des *résidus* de l'intégrale double. Nous nous bornons d'ailleurs à une surface ne présentant que des singularités ordinaires. Soit

$$\iint R(x, y, z)\, dx\, dy \tag{1}$$

une intégrale double attachée à la surface

$$f(x, y, z) = 0.$$

On peut toujours supposer que l'intégrale devienne infinie seulement le long de certaines courbes simples de la surface et pour les points à l'infini. Pour chacune de ces lignes et pour la ligne à l'infini, l'intégrale aura un certain nombre de résidus qui sont des périodes d'intégrales abéliennes. J'en rappelle la définition, telle qu'elle résulte des recherches de M. Poincaré sur les résidus des intégrales doubles. Si C est une ligne le long de laquelle R devienne infinie et représentée par

$$z = S(x, y), \qquad \varphi(x, y) = 0,$$

prenons, y étant regardé comme un paramètre, le résidu de la fonction de x,

$$R(x, y, z).$$

Ce sera une quantité de la forme

$$\chi(x, y), \qquad [\varphi(x, y) = 0],$$

χ étant rationnelle en x et y. Les périodes (polaires ou cycliques) de l'intégrale abélienne

$$2\pi i \int \chi(x, y)\, dy$$

relative à la courbe φ sont les *résidus* de l'intégrale (1) relatifs à la courbe C.

28. Supposons que l'intégrale (1) soit de *seconde* espèce; je dis qu'alors tous les ***résidus*** relatifs à C sont nuls. Réciproquement, si tous les résidus relatifs à C sont nuls, l'intégrale (1) présente, en un point arbitraire de C, le caractère d'une intégrale de seconde espèce.

La démonstration de ces deux propositions va se faire à la fois. Nous ne diminuons pas la généralité en supposant que la courbe C est une section plane ou une portion d'une section plane de la surface. Nous avons alors, en supposant que le plan de la section soit $x = 0$, l'intégrale double

$$\int\int \frac{S(x, y, z)}{x^\alpha} dx\, dy,$$

la fraction rationnelle S ne devenant pas identiquement infinie pour $x = 0$. En employant les réductions dont nous avons fait si souvent usage, on peut supposer que $\alpha = 1$, et l'on a alors l'intégrale

$$\int\int \frac{S(x, y, z)}{x} dx\, dy. \tag{2}$$

Soit C la courbe (ou une des courbes) suivant laquelle le plan $x = 0$ coupe la surface. Les résidus relatifs à la courbe C seront tous nuls, si toutes les périodes de l'intégrale abélienne

$$\int S(0, y, \zeta)\, dy$$

relative à la courbe C sont nulles. Mais on a alors pour l'intégrale précédente une fraction rationnelle

$$K(y, \zeta)$$

et, par suite, en retranchant de (2) l'intégrale

$$\int\int \frac{\partial}{\partial y} \frac{K(y, z)}{x} dx\, dy, \tag{3}$$

la différence des intégrales (2) et (3) reste finie en un point *arbitraire* de la courbe C, et, en *tout* point de la courbe C, elle reste finie sur cette courbe dans le voisinage de ce point (le point pouvant être exclu).

Réciproquement, si l'intégrale est une intégrale de seconde espèce, on pourra retrancher de (2) une intégrale de la forme

$$\iint \frac{\partial}{\partial y} \frac{\mathrm{T}(x, y, z)}{x}\, dx\, dy,$$

telle que la différence reste finie dans le voisinage de C; on a donc

$$\mathrm{S}(0, y, \zeta) = \frac{\partial}{\partial y}[\mathrm{T}(0, y, \zeta)]$$

pour la courbe C, et tous les résidus relatifs à C sont nuls.

De là nous concluons que, si pour toutes les courbes C et pour la courbe à l'infini de la surface, tous les résidus sont nuls, l'intégrale est telle que, dans le voisinage de tout point d'une de ces lignes, on peut retrancher une intégrale de la forme voulue, de telle sorte que la différence des deux intégrales reste finie sur la ligne dans le voisinage du point. D'après les résultats de la Section VII, cela suffit à établir que l'intégrale est de seconde espèce. La réciproque est d'ailleurs évidente d'après ce que nous avons vu plus haut.

Ainsi donc nous sommes conduit à une seconde définition des intégrales de seconde espèce *par la considération des résidus de l'intégrale double*.

29. Terminons par une application des considérations qui précèdent aux intégrales de fonctions rationnelles, en recherchant à quelles conditions l'intégrale

$$(4) \qquad \iint \frac{\mathrm{P}(x, y)}{\mathrm{Q}(x, y)}\, dx\, dy,$$

où P et Q sont des polynomes (dont le second est supposé irréductible), est une intégrale de seconde espèce. D'après ce qui précède, il est nécessaire que l'intégrale abélienne

$$(5) \qquad \int \frac{\mathrm{P}(x, y)}{\mathrm{Q}'_y(x, y)}\, dx$$

relative à la courbe $\mathrm{Q}(x, y) = 0$, se réduise à une fraction rationnelle de x et y; c'est la condition pour que les résidus correspondant à la courbe $Q = 0$ soient tous nuls. La condition est suffisante; on va voir, en effet, que, si elle est remplie, on peut retrancher de (4) une intégrale convenable, et la différence mettra en évidence la nature de l'intégrale.

On peut, par hypothèse, mettre l'intégrale abélienne (5) sous la forme

$$\int \frac{P(\xi, \eta)}{Q'_{\eta}(\xi, \eta)}\, d\xi = \frac{M(\xi, \eta)}{R(\xi)} \qquad [Q(\xi, \eta) = 0],$$

$M(\xi, \eta)$ et $R(\xi)$ étant des polynomes. Formons l'intégrale

$$(6) \quad \iint \left[\frac{\partial Q}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{M(x, y)}{Q(x, y)\,R(x)}\right) - \frac{\partial Q}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{M(x, y)}{Q(x, y)\,R(x)}\right)\right] dx\, dy;$$

elle est, comme nous savons, de la forme

$$\iint \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right) dx\, dy.$$

On voit immédiatement que la différence des intégrales (4) et (6) est de la forme

$$\iint \frac{S(x, y)}{V(x)}\, dx\, dy,$$

S et V étant des polynomes : l'intégrale (4) est donc bien de seconde espèce, puisqu'il en est ainsi de l'intégrale que nous venons de trouver en dernier lieu.