JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ÉMILE PICARD

Sur la détermination des intégrales de certaines équations linéaires du second ordre par leurs valeurs sur un contour fermé

Journal de mathématiques pures et appliquées 5e série, tome 6 (1900), p. 129-140.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1900_5_6__129_0>

Sur la détermination des intégrales de certaines équations linéaires du second ordre par leurs valeurs sur un contour fermé;

PAR M. ÉMILE **PICARD**.

Je me suis occupé dans plusieurs Mémoires de l'extension du problème de Dirichlet aux équations aux dérivées partielles du second ordre. Ayant repris, l'année dernière, cette question dans mon Cours, j'ai complété et précisé ces recherches sur quelques points ([1]); c'est ce que je me propose d'indiquer ici en priant le lecteur de se reporter d'abord à un de mes Mémoires sur ce sujet (*Comptes rendus*, 10 décembre 1888, et *Journ. de Math.*, 1890).

Nous nous bornons ici à l'équation linéaire

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2d\frac{\partial u}{\partial x} + 2e\frac{\partial u}{\partial y} + fu = 0, \tag{1}$$

et nous supposons seulement que d, e, f sont des fonctions continues des variables réelles x et y, ayant des dérivées partielles du premier ordre continues ([2]).

([1]) Un résumé en a été donné dans les *Comptes rendus* (19 juin 1899).

([2]) Si les coefficients sont analytiques, on peut arriver dans le problème qui nous occupe à des résultats plus généraux; c'est ce que j'ai montré (*Comptes rendus*, 19 février et 23 avril 1900).

I.

1. Une étude préliminaire indispensable est relative à l'équation

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = f(x, y). \tag{2}$$

Nous considérons un contour simple C régulièrement analytique, c'est-à-dire formé par une seule ligne analytique, et nous supposons que la fonction $f(x, y)$ soit continue dans l'aire limitée par C, ainsi que ses dérivées partielles, que nous supposons exister, $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$. On suppose que l'on ait

$$|f(x,y)| < F, \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \text{ et } \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| < F_1 \qquad \text{(dans C et sur C)},$$

F et F_1 étant deux constantes. Si l'on désigne par v la solution continue de l'équation (2) s'annulant sur C, il est classique que cette intégrale est donnée par la formule

$$v = -\frac{1}{2\pi}\iint G(\xi, \eta; x, y) f(\xi, \eta) d\xi\, d\eta.$$

L'intégrale double est étendue à l'aire limitée par C, et la fonction G représente la fonction de Green relative au contour C et ayant le point logarithmique (x, y).

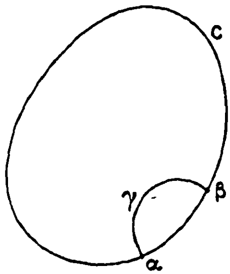
Il est bien connu qu'avec les hypothèses faites sur f, la fonction v a des dérivées premières et secondes *à l'intérieur* de C, qu'elle satisfait à la relation (2), et qu'elle s'annule sur le contour. Nous avons besoin pour la suite de nous assurer que ces dérivées restent finies sur le contour supposé, comme nous l'avons dit, régulièrement analytique, et *de trouver une limite supérieure de leurs valeurs absolues.*

J'utiliserai pour cela une transformation faite par M. Paraf dans sa thèse. Désignons par a et b les deux variables indépendantes, de sorte que nous considérons l'équation

$$\frac{\partial^2 v}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial b^2} = f(a, b).$$

Soit C le contour donné; prenons sur lui un arc suffisamment petit, $\alpha\beta$, et traçons l'arc $\alpha\gamma\beta$. La fonction $v(a, b)$ prend la valeur *zéro* sur $\alpha\beta$

Fig. 1.



et prend certaines valeurs sur $\alpha\gamma\beta$. Soit $u(a, b)$ la fonction harmonique prenant les mêmes valeurs que $v(a, b)$ sur le contour fermé $\alpha\gamma\beta\alpha$. Si l'on pose

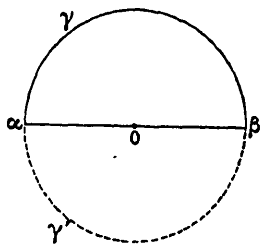
$$v = u + w,$$

w s'annulera sur le contour $\alpha\gamma\beta\alpha$, et l'on aura

$$\frac{\partial^2 w}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial b^2} = f(a, b). \tag{3}$$

Nous ne diminuerons pas la généralité, en supposant que $\alpha\beta$ se réduise à une droite, car on peut toujours transformer $\alpha\beta$ en une droite

Fig. 2.



par une représentation conforme, puisque l'arc $\alpha\beta$ est analytique; la fonction f se trouve seulement multipliée par un facteur restant fini et dépendant seulement du contour. On peut supposer, de plus, que $\alpha\gamma\beta$ soit une demi-circonférence. Nous allons montrer que les dérivées des deux premiers ordres u et w tendent vers des limites, quand (a, b) tend vers un point O (le milieu, si l'on veut) de $\alpha\beta$.

Prenons, à cet effet, le demi-cercle $\alpha\gamma'\beta$, symétrique de $\alpha\gamma\beta$, et formons la fonction harmonique dans le cercle prenant sur $\alpha\gamma\beta$ les valeurs de u et sur $\alpha\gamma'\beta$ des valeurs égales et de signes contraires aux points symétriques par rapport à $\alpha\beta$. La fonction harmonique ainsi formée coïncidera avec u dans le demi-cercle supérieur; nous aurons donc en O des valeurs finies pour toutes les dérivées de u.

Passons à w. *Prolongeons* la fonction $f(a, b)$ dans le cercle $\alpha\gamma'\beta$ par l'hypothèse qu'en deux points symétriques, la fonction ait des valeurs égales et de signes contraires. La fonction f ainsi formée sera discontinue le long de $\alpha\beta$, et ce sera une discontinuité du genre de celles envisagées par Dirichlet, c'est-à-dire avec saut brusque fini. En désignant par

$$G_1(x, y; a, b),$$

la fonction de Green relative au cercle $\gamma\gamma'$, nous formons l'intégrale

$$(4) \qquad -\frac{1}{2\pi}\int\int G_1(x, y; a, b) f(x, y)\, dx\, dy,$$

étendue au cercle $\gamma\gamma'$. Elle satisfera bien à l'équation (3); elle s'annulera d'ailleurs le long du diamètre $\alpha\beta$, car, lorsque (a, b) est sur le diamètre $\alpha\beta$, la fonction $G_1(x, y; a, b)$ a les mêmes valeurs pour deux points (x, y) symétriques, et comme f a des valeurs de signes contraires, on aura zéro comme valeur de l'intégrale. Donc l'intégrale (4) coïncide avec w. Il est alors facile de calculer les dérivées de w. On aura

$$\frac{\partial w}{\partial a} = -\frac{1}{2\pi}\int\int \frac{\partial G_1}{\partial a} f(x, y)\, dx\, dy,$$

et il est clair que sa valeur en O aura un sens parfaitement déterminé. Par suite, en tout point du contour, il y a des dérivées $\frac{\partial w}{\partial a}$ et $\frac{\partial w}{\partial b}$.

Il est facile d'avoir une limite supérieure de la valeur absolue maxima de $\frac{\partial v}{\partial a}$ et $\frac{\partial v}{\partial b}$. En effet, $\frac{\partial u}{\partial a}$ et $\frac{\partial u}{\partial b}$ ont en O des dérivées limitées en fonction de F (valeur absolue maxima de f), puisque la valeur de u sur la circonférence $\gamma\gamma'$ est limitée en fonction de F. On aura de même, d'après l'analyse précédente, $\frac{\partial w}{\partial a}$ et $\frac{\partial w}{\partial b}$ limités en fonction de F; *par suite, on a*

$$\left|\frac{\partial v}{\partial a}\right| < \mu F, \quad \left|\frac{\partial v}{\partial b}\right| < \mu F \qquad \text{(dans C et sur C)},$$

μ étant une constante *ne dépendant que de l'aire,* et *nullement* de la fonction f. Il est clair que l'on a aussi

$$|v| < \lambda F,$$

λ étant une constante de même nature que μ.

2. Occupons-nous maintenant des dérivées secondes de v. Nous posons toujours

$$v = u + w.$$

La fonction harmonique a des dérivées secondes en O et nous avons vu que

$$w = -\frac{1}{2\pi}\int\int G_1(x, y; a, b) f(x, y)\, dx\, dy.$$

D'après ce que nous savons, w a des dérivées secondes en O; mais il faut reprendre ce point avec quelques détails pour avoir une limite de ces dérivées secondes. On peut écrire

$$G_1(x, y; a, b) = \log\frac{1}{r} - \omega_1(x, y; a, b),$$

où r désigne la distance de (x, y) à (a, b), et où ω_1 est une fonction harmonique de (x, y) s'annulant sur la circonférence $\gamma\gamma'$.

On a donc

$$\begin{aligned} w(a, b) = &-\frac{1}{2\pi}\int\int \log\frac{1}{r} f(x, y)\, dx\, dy \\ &+\frac{1}{2\pi}\int\int \omega_1(x, y; a, b) f(x, y)\, dx\, dy. \end{aligned}$$

La seconde intégrale ne présente aucune difficulté; elle a, au point O, des dérivées secondes limitées au moyen de F. Posons

$$w_1(a, b) = -\frac{1}{2\pi}\int\int \log\frac{1}{r} f(x, y)\, dx\, dy.$$

Des intégrations par parties donnent immédiatement

$$\frac{\partial w_1}{\partial a} = \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha\gamma'\beta\gamma} \log\frac{1}{r} f dy - \frac{1}{2\pi}\int\int \log\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial x} dx\, dy,$$

$$\frac{\partial w_1}{\partial b} = \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha\gamma'\beta\gamma} \log\frac{1}{r} f dx + \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha\beta} \log\frac{1}{r}(f_1 - f_2)\, dx$$
$$- \frac{1}{2\pi}\int\int \log\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial y} dx\, dy.$$

Dans cette dernière formule, nous désignons par f_1 la valeur de f sur le bord supérieur de $\alpha\beta$ et par f_2 sa valeur sur le bord inférieur, de sorte que, en réalité, $f_1 = -f_2 =$ la valeur de la fonction donnée f sur $\alpha\beta$.

Le calcul des valeurs de $\frac{\partial^2 w_1}{\partial a^2}$ et de $\frac{\partial^2 w_1}{\partial a\, \partial b}$ en O ne présente aucune difficulté avec la première de ces formules; ces dérivées sont limitées en fonction linéaire de F et de F_1. Il ne peut y avoir de difficultés que pour $\frac{\partial^2 w_1}{\partial b^2}$, à cause du terme où l'intégration se fait sur $\alpha\beta$. On doit former l'intégrale

$$\int_\alpha^\beta \frac{\partial}{\partial b}\log\frac{1}{r}\cdot(f_1 - f_2)\, dx.$$

Si le point O est pris comme origine et si $O\beta$ est l'axe des x, l'axe Oy étant perpendiculaire et du côté de γ, cette intégrale peut s'écrire

$$\int_{-R}^{+R} \frac{b\, dx}{(x-a)^2 + b^2}(f_1 - f_2) \qquad (O\alpha = O\beta = R).$$

Il faut étudier la valeur de cette intégrale, quand a et b tendent vers zéro (b étant positif). Or l'intégrale précédente est moindre en valeur absolue que

$$2F\int_{-R}^{+R}\frac{b\,dx}{(x-a)^2+b^2} = 2F \times (\text{angle } \alpha A \beta),$$

en appelant A le point (a, b).

Il suit de là que l'on a pour les trois dérivées secondes des limites supérieures qui sont fonctions linéaires de F et F_1.

De l'analyse précédente, nous concluons donc le théorème suivant :

Le contour C étant régulièrement analytique, et la fonction $f(x, y)$ étant continue ainsi que ses dérivées $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$, l'intégrale v de l'équation

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = f(x, y)$$

s'annulant sur C, a des dérivées premières et secondes continues dans C et sur C, et l'on a

$$|v| < \lambda F,$$

$$\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right| \quad \text{et} \quad \left|\frac{\partial v}{\partial y}\right| < \mu F,$$

et enfin

$$\left|\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right| \quad \text{et} \quad \left|\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right| < \lambda_1 F + \mu_1 F_1.$$

λ, μ, λ_1 et μ_1 sont des constantes positives dépendant uniquement du contour C et nullement de la fonction $f(x, y)$.

3. Il est important pour nous d'établir que *les trois constantes λ, μ et μ_1 sont très petites si le contour est très petit;* la quatrième constante λ_1 garde une valeur finie, mais non très petite.

La démonstration va bien préciser ce qui peut rester de vague dans cet énoncé. Soit dans le plan (x, y) une courbe fermée régulièrement analytique γ, contenant l'origine à son intérieur. Nous posons

$$x = \alpha X, \qquad y = \alpha Y.$$

Si α est grand, on a dans le plan (X, Y) une petite aire limitée par une courbe Γ.

Envisageons l'équation

$$\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} = f(X, Y),$$

f étant une fonction donnée dont le maximum est F et dont les dérivées du premier ordre ont pour maximum F_1 dans une certaine région autour de l'origine, et désignons par U l'intégrale de cette équation s'annulant sur Γ. Si l'on transforme l'équation et qu'on pose

$$U(X, Y) = u(x, y),$$

on aura

$$\frac{\partial U}{\partial X} = \alpha \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

et, par suite,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha^2} f\left(\frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\beta}\right).$$

Pour le contour γ, il existe des constantes λ et μ, et l'on aura alors

$$|u(x, y)| < \frac{\lambda}{\alpha^2} F,$$

et pareillement

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \quad \text{et} \quad \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| < \frac{\mu}{\alpha^2} F.$$

On en conclut donc

$$|U(X, Y)| < \frac{\lambda}{\alpha^2} F, \qquad \left|\frac{\partial U}{\partial X}\right| \quad \text{et} \quad \left|\frac{\partial U}{\partial Y}\right| < \frac{\mu}{\alpha} F.$$

Pour le contour Γ, les constantes λ et μ sont donc devenues $\frac{\lambda}{\alpha^2}$ et $\frac{\mu}{\alpha}$; elles sont très petites si le contour Γ est très petit, c'est-à-dire si α est très grand.

Des considérations analogues s'appliquent aux dérivées secondes; nous avions plus haut l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \varphi(x, y),$$

en posant

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{\alpha^2} f\left(\frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\beta}\right).$$

Donc

$$|\varphi| < \frac{F}{\alpha^2}, \qquad \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right| \quad \text{et} \quad \left|\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right| < \frac{F_1}{\alpha^3}.$$

En remarquant que

$$\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

on tire de l'inégalité

$$\left|\frac{\partial^2 u}{dx^2}\right| < \lambda_1 \frac{F}{\alpha^2} + \mu_1 \frac{F_1}{\alpha^3},$$

l'inégalité suivante

$$\left|\frac{\partial^2 U}{\partial X^2}\right| < \lambda_1 F + \frac{\mu_1}{\alpha} F_1.$$

Donc, pour le contour Γ, la constante μ_1 se trouve remplacée par $\frac{\mu_1}{\alpha}$ et est donc très petite si le contour est très petit, c'est-à-dire si α est très grand.

Le théorème énoncé est donc établi (¹).

4. Passons maintenant à l'intégration de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + c u.$$

On se propose de trouver l'intégrale continue de cette équation prenant des valeurs données *sur un contour γ régulièrement analytique suffisamment petit.* Mon objet ici est seulement de bien préciser les hypothèses, ce que j'avais négligé de faire dans mon précédent Mémoire. Nous supposons d'abord que a, b, c sont continues et ont des dérivées partielles continues du premier ordre. Nous supposons de plus que *la succession des valeurs données sur le contour forme une fonction continue ayant des dérivées des trois premiers ordres.*

(¹) Dans mon Mémoire de 1890, je m'étais borné à énoncer ce résultat.

On peut évidemment alors trouver une fonction continue $\lambda(x, y)$ ayant des dérivées jusqu'au troisième ordre et prenant les valeurs données sur γ. En remplaçant alors u par $u + \lambda$, notre équation devient

$$(5) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \mathrm{A}\frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{B}\frac{\partial u}{\partial y} + \mathrm{C}u + \mathrm{D},$$

les fonctions A, B, C, D ayant des dérivées partielles du premier ordre. Il s'agit maintenant de *trouver l'intégrale de cette équation s'annulant sur un contour* γ, *quand ce contour est suffisamment petit*. Conformément à la méthode que nous suivons dans ce genre de recherches, nous faisons une succession d'approximations

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} = \mathrm{D},$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = \mathrm{A}\frac{\partial u_0}{\partial x} + \mathrm{B}\frac{\partial u_0}{\partial y} + \mathrm{C}u_0,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2} = \mathrm{A}\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} + \mathrm{B}\frac{\partial u_{n-1}}{\partial y} + \mathrm{C}u_{n-1},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

On intègre ces équations en supposant que tous les u s'annulent sur le contour γ. Toutes les conditions voulues par la théorie, relative à l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y),$$

exposée dans les paragraphes précédents sont bien réalisées. La première équation donne u_0 qui a des dérivées premières et secondes dans et sur γ; dans la seconde équation, le second membre a des dérivées partielles du premier ordre, et l'on peut par suite déterminer u_1, qui a des dérivées partielles du premier et du second ordre dans et sur γ, et ainsi de suite. En s'appuyant alors sur les résultats des nos **2** et **3**, et sans rien changer aux calculs faits dans le Mémoire cité, on voit que les séries formées avec les u et leurs dérivées premières et secondes sont absolument et uniformément convergentes dans l'aire limitée par

γ, *si cette aire est suffisamment petite*. Il en résulte immédiatement que la fonction u, représentée par la série

$$u = u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots,$$

a des dérivées premières et secondes dans γ, et qu'elle satisfait à l'équation différentielle (5).

Ainsi, pour un contour γ régulièrement analytique et suffisamment petit, nous avons obtenu l'intégrale de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu,$$

prenant sur γ une succession donnée de valeurs. Nous avons mis en évidence les hypothèses qui n'avaient pas été explicitement formulées, à savoir que la succession donnée des valeurs sur le contour *avait des dérivées des trois premiers ordres*. Relativement à a, b, c, ce sont des fonctions continues de x et y, ayant des dérivées partielles du premier ordre.

Il est bien probable que la méthode suivie d'approximations successives conduit à la solution du problème posé dans des hypothèses plus générales, notamment en supposant que le contour est formé de plusieurs morceaux de lignes analytiques, mais les *pointes* demanderont alors une discussion spéciale.

Si les coefficients a, b, c étaient des fonctions analytiques de x et y, on pourrait avoir un énoncé plus étendu. J'ai montré dans les Notes citées au début que l'on peut alors traiter le problème en supposant seulement que la succession des valeurs sur γ soit continue et sans faire aucune hypothèse relative aux dérivées; je développerai d'une manière complète les calculs relatifs à ce cas dans un autre travail.

5. Je termine par une dernière remarque. Dans le cas particulier où a et b sont identiquement nuls, et où l'on a, par suite, l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = cu,$$

la question est beaucoup plus facile. Il n'y a alors aucune hypothèse à faire sur l'existence de dérivées pour la succession des valeurs données sur le contour et le contour suffisamment petit n'est assujetti à d'autres conditions que celles qu'il est nécessaire de faire pour être assuré de l'existence de la fonction de Green; mais il est inutile d'insister sur ce cas bien élaboré par M. Schwarz dans son célèbre Mémoire du jubilé de Weierstrass.