JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

EDMOND MAILLET

Sur les équations indéterminées à deux et trois variables qui n'ont qu'un nombre fini de solutions en nombres entiers

Journal de mathématiques pures et appliquées 5e série, tome 6 (1900), p. 261-277.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1900_5_6__261_0>

Sur les équations indéterminées à deux et trois variables qui n'ont qu'un nombre fini de solutions en nombres entiers;

PAR M. EDMOND MAILLET.

I.

Soit

$$(1) \qquad F(x, y) = \varphi_n(x, y) + \varphi_{n-1}(x, y) + \ldots + \varphi_0 = 0,$$

une équation algébrique à deux variables et à coefficients entiers, où $\varphi_i(x, y)$ est l'ensemble des termes de degré i de $F(x, y)$.

Quand on cherche à résoudre en nombres entiers réels les équations de la forme (1), on peut les diviser en deux grandes classes : 1° celles qui ont un nombre limité de solutions; 2° celles qui en ont une infinité. On connaît des exemples d'équations des deux classes, par exemple (¹), dans le cas où $n = 2$. Quand $n > 2$, l'équation (1) n'a qu'un nombre limité de solutions en nombres entiers, si elle représente en coordonnées cartésiennes une courbe dont toutes les asymptotes sont imaginaires, ou pour laquelle l'équation $\varphi_n(1, c) = 0$ est de degré n en c, et n'a que des racines imaginaires; dans d'autres cas, au contraire, elle aura une infinité de solutions : ceci a lieu, par

(¹) *Voir*, par exemple, les *Vorlesungen über Zahlentheorie* de Dirichlet et Dedekind, 3ᵉ édition, p. 128-283; 1879.

exemple, si

$$F(x, y) = (\alpha\beta' y - \beta\alpha' x)^p - (\beta\gamma' x - \gamma\beta' y)^q (\alpha\gamma' - \gamma\alpha')^{p-q} = 0,$$

$\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma'$ étant des entiers satisfaisant à certaines conditions [1].

Lagrange [2] a appliqué les propriétés du développement des racines des équations en fractions continues à l'étude du cas où

$$F = \varphi_n(x, y) + \varphi_0.$$

Supposons ici que, dans (1), $F(x, y)$ soit arithmétiquement irréductible, c'est-à-dire ne soit divisible par aucun polynome de degré plus petit. Nous allons démontrer l'existence de nouvelles catégories d'équations (1) n'admettant qu'un nombre limité de solutions quand $n > 1$. Nous indiquerons également une extension aux équations indéterminées à trois variables.

II.

Admettons que (1) ait une infinité de solutions : on pourra toujours trouver une solution

$$(2) \qquad x = p, \qquad y = q,$$

telle que l'un au moins de ces deux nombres p, par exemple, soit aussi grand qu'on veut, avec $p \geqq q$.

Le point (2), en coordonnées cartésiennes, est sur la courbe $F = 0$, et, par suite, sur une des branches infinies réelles, c'est-à-dire au voisinage d'une asymptote réelle de $F = 0$. Il y aura une infinité de solutions (2) situées sur une de ces branches au moins. Considérons le cas où l'asymptote de cette branche a son coefficient angulaire c_1 fini,

---

(1) *Voir* notre Note des *Mémoires de l'Académie des Sciences, Inscriptions et Belles-Lettres de Toulouse*, p. 182-213; 1895. Nous y déterminons, en particulier, les équations indéterminées à deux variables qui ont une infinité de solutions entières x, y données par *tous* les termes de deux suites récurrentes du second ordre et de même loi, l'une pour les x, l'autre pour les y.

(2) *Œuvres complètes*, t. II, p. 662 et suiv.; 1868. Gauthier-Villars.

c_1 étant racine simple de

$$\varphi_n(1, c) = 0, \tag{3}$$

et n'est pas parallèle aux axes, et prenons des solutions situées exclusivement sur cette branche.

Posant alors

$$q = (c_1 + \varepsilon)p = c_1 p + \delta, \tag{4}$$

δ tendant vers une limite finie quand le point (2) s'éloigne à l'infini sur la branche infinie considérée (¹), nous aurons

$$\left\{ \begin{aligned} \varphi_i(p, q) &= \varphi_i(p, c_1 p + \delta) = \varphi_i(p, c_1 p) + \frac{\delta}{1}\varphi_i'(p, c_1 p) + A\delta^2 \\ &= p^i \varphi_i(1, c_1) + \frac{\delta}{1} p^{i-1} \varphi_i'(1, c_1) + A\delta^2, \end{aligned} \right. \tag{5}$$

$\varphi_i', \varphi_i'', \ldots$ étant les dérivées de φ_i par rapport à y. (1) devient, puisque $\varphi_n(1, c_1) = 0$,

$$p^{n-1}[\delta\varphi_n'(1, c_1) + \varphi_{n-1}(1, c_1)] + Bp^{n-2}, \tag{6}$$

B restant limité quand le point (2) s'éloigne à l'infini sur la branche infinie considérée, et δ tendant vers la valeur d racine de

$$d\varphi_n'(1, c_1) + \varphi_{n-1}(1, c_1) = 0; \tag{7}$$

d est bien fini, puisque $\varphi_n'(1, c_1) \neq 0$, (3) n'ayant pas c_1 pour racine double. Alors ε et $\delta - d$ sont aussi petits qu'on veut quand p est assez grand.

Ceci posé, soient

$$c_1, \quad c_2, \quad \ldots, \quad c_\lambda \tag{8}$$

les racines finies de (3); on aura

$$\left\{ \begin{aligned} \varphi_n(x, y) &= a_k(y - c_1 x)\ldots(y - c_\lambda x)x^{n-\lambda}, \\ \varphi_n(1, c) &= a_k(c - c_1)\ \ldots(c - c_\lambda); \end{aligned} \right. \tag{9}$$

(¹) Comparez, par exemple, PRUVOST, *Géométrie analytique*, t. I, p. 307; 1888.

admettons que $\varphi_n(1, c)$, *considéré comme polynome de degré n en c*, ne soit pas irréductible, c'est-à-dire possède un diviseur rationnel à coefficients entiers de degré $< n$, ce qui a toujours lieu quand $\lambda < n$; on aura

$$(10) \qquad \begin{cases} \varphi_n(x, y) = \psi_k(x, y)\,\psi_{n-k}(x, y), \\ \varphi_n(1, c) \;= \psi_k(1, c)\;\psi_{n-k}(1, c), \end{cases}$$

$\psi_k(1, c)$ et $\psi_{n-k}(1, c)$ étant deux polynomes à coefficients entiers, dont le premier, de degré k, est irréductible et a c_1 pour racine, et dont le deuxième est de degré $n-k$.

La droite $y = c_1 x$ coupe la courbe $F = 0$ en un nombre fini de points; si x_1 est la plus grande des abscisses finies de ces points d'intersection, et si l'on prend dans (2)

$$(11) \qquad p > x_1,$$

on aura

$$(12) \qquad \begin{cases} \psi_k\;\;(p, q) = \theta p^{\mu} \geqq 1, \\ \psi_{n-k}(p, q) = a'_k(q - c_{k+1}p)\ldots(q - c_\lambda p)\,p^{n-\lambda} = \eta p^{\lambda-k}, \end{cases}$$

puisque $\psi_k(p, q)$ est entier; θ et η restent finis quand p croît indéfiniment, car, par exemple,

$$q - c_{k+1}p = q - c_1 p + (c_1 - c_{k+1})p,$$

$c_1 - c_{k+1}$ étant fini, et $q - c_1 p$ différant de d d'une quantité qui tend vers o quand p croît indéfiniment. On en conclut

$$(13) \qquad \varphi_n(p, q) \geqq \theta\eta p^{n-k+\mu}.$$

Alors

$$F(p, q) - \varphi_n(p, q) = -\varphi_n = \varphi_{n-1} + \varphi_{n-2} + \ldots + \varphi_0,$$

et le dernier membre doit être, quand p est très grand, sur la branche infinie considérée, au moins de l'ordre p^{n-k}. Ceci apparaît maintenant impossible quand on a [1]

$$(14) \qquad \varphi_{n-1}(1, c_1) = \varphi_{n-2}(1, c_1) = \ldots = \varphi_{n-k}(1, c_1) = 0.$$

Nous en concluons ce théorème :

Théorème I. — *Soit*

$$(1) \qquad F(x, y) = \varphi_n(x, y) + \varphi_{n-1} + \ldots + \varphi_0 = 0$$

l'équation d'une courbe algébrique de degré n à coefficients entiers, F *étant arithmétiquement irréductible, sans que $\varphi_n(x, y)$ le soit, et φ_i étant l'ensemble des termes de degré i de* F.

Si c_1 est une racine simple réelle de l'équation $\varphi_n(1, c) = 0$ de degré λ, $\psi_k(1, c)$ un facteur irréductible de degré $k < n$ de $\varphi_n(1, c)$, qu'on suppose exister et qui admette la racine c_1, l'équation indéterminée (1) *ne peut avoir sur la branche infinie dont l'asymptote a pour coefficient angulaire c_1 un nombre infini de solutions en nombres entiers que si l'une des quantités*

$$\varphi_{n-1}(1, c_1), \quad \varphi_{n-2}(1, c_1), \quad \ldots, \quad \varphi_{n-k}(1, c_1)$$

est différente de 0.

Nous nous contenterons de signaler qu'on pourrait établir un théorème semblable dans le cas où $\varphi_n(1, c) = 0$ admet c_1 pour racine multiple.

Examinons maintenant le cas où une branche infinie de la courbe (1) a une asymptote parallèle à l'un des axes de coordonnées et à distance finie, par exemple à l'axe Oy.

Soit $x = d$ cette asymptote; elle coupe la courbe en un nombre fini de points; l'abcisse x d'un point situé sur la branche finie, quand y

---

(1) Dans ce cas, en effet, $\varphi_{n-i}(1, c)$, par exemple, $(1 \leqq i \leqq k)$ est de la forme $\psi_k(1, c)\,\psi_{n-k-i}(1, c)$, et $\varphi_{n-i}(p, q)$ est d'ordre $\leqq p^{n-k-i+\mu} <$ celui de $\varphi_n(p, q)$.

est assez grand, diffère de d d'aussi peu qu'on veut, et, par suite, ne peut être entière, que d soit entier ou non. Donc :

Le long d'une branche infinie dont l'asymptote est parallèle à l'un des axes de coordonnées et à distance finie, l'équation (1) n'a qu'un nombre fini de solutions en nombres entiers.

On en conclut :

Corollaire. — Tout étant posé comme au théorème I, si les racines réelles $\neq 0$ de $\varphi_n(1, c) = 0$ sont toutes simples, si, de plus, les asymptotes parallèles aux axes sont toutes à distance finie, soit k le degré maximum d'un facteur irréductible de $\varphi_n(1, c)$, avec $k < n$, si les polynomes

$$\varphi_{n-1}(1, c), \quad \varphi_{n-2}(1, c), \quad \ldots, \quad \varphi_{n-k}(1, c)$$

sont divisibles par $\varphi_n(1, c)$ ou identiquement nuls, l'équation (1) n'a qu'un nombre fini de solutions en nombres entiers.

Nous croyons devoir signaler comme particulièrement intéressants les cas où $k = 1$ ou 2. Si $k = 1$, il suffit que $\varphi_{n-1}(x, y) = 0$ identiquement pour que ce corollaire soit applicable, si $k = 2$, il suffit que $\varphi_{n-1}(x, y) = \varphi_{n-2}(x, y) = 0$ identiquement. Mais nous allons voir qu'on peut alors aller plus loin.

1° $k = 1$. Nous allons établir le théorème suivant :

Théorème II. — *Il n'existe aucune équation indéterminée irréductible* $F(x, y) = 0$ *à coefficients entiers ayant une infinité de solutions en nombres entiers sur une branche infinie de la courbe* $F = 0$ *telle que le coefficient angulaire de l'asymptote soit rationnel et* $\neq 0$, *si ce coefficient est racine simple de* $\varphi_n(1, c) = 0$.

Si les coefficients angulaires réels des asymptotes de $F = 0$ *sont tous rationnels,* $\neq 0$, *et différents,* $F = 0$ *n'a qu'un nombre fini de solutions en nombres entiers.*

En effet, on a

$$\varphi_n(x, y) = (y - c_1 x)\psi_{n-1}(x, y),$$

c_1 étant le coefficient angulaire rationnel d'une asymptote, et $\psi_{n-1}(x, y)$ un polynome homogène en x, y de degré $n - 1$ tel que $\psi_{n-1}(1, c_1) \neq 0$.

D'après (4), δ est rationnel, ainsi que d d'après (7).

Soit $c_1 = \frac{a_1}{b_1}$, a_1 et b_1 étant deux entiers premiers entre eux; d'après (3),

$$b_1 q = a_1 p + \delta b_1,$$

où δb_1 est entier; b_1 étant fini, δb_1 diffère d'aussi peu qu'on veut de la valeur db_1 donnée par (7), ce qui exige, quand p est assez grand, puisque db_1 est un nombre déterminé indépendant de p,

$$\delta b_1 = db_1 = \text{un entier déterminé } \varpi,$$

et les points p, q sont sur la droite $b_1 y = a_1 x + \varpi$ et sur la courbe $F = 0$; ils ne peuvent donc être en nombre infini, puisque F est arithmétiquement irréductible (¹).

2° $k = 2$. Nous allons établir le théorème plus général suivant :

Théorème III. — *Tout étant posé comme au premier alinéa du théorème I, supposons que $\varphi_n(x, y)$ admette le facteur simple irréductible du $r^{ième}$ degré* (²) ($r \geqq 2$)

$$f(x, y) = \alpha_0 x^r + \alpha_1 x^{r-1} y + \ldots + \alpha_r y^r$$

à coefficients entiers. Soit c_1 une racine réelle de

$$\alpha_0 + \alpha_1 c + \ldots + \alpha_r c^r = 0,$$

$\frac{q_h}{p_h}$ la $h^{ième}$ réduite du développement en fraction continue de c_1, et

$$\varphi_{n-1}(1, c_1) = \varphi_{n-2}(1, c_1) = \ldots = \varphi_{n-\mu+1}(1, c_1) = 0,$$
$$\varphi_{n-\mu}(1, c_1) \neq 0 \qquad (\mu > 1);$$

on aura (Lagrange)

$$p_{h+1} \leqq C p_h^{r-1-\omega} \qquad (0 \leqq \omega \leqq r-2),$$

(¹) *Voir*, par exemple, notre Note déjà citée des *Mémoires de l'Académie de Toulouse*, p. 190 et suiv.

(²) On peut parfaitement supposer $r = n$.

C étant une quantité finie positive; sur la branche infinie de $F=0$, *qui a pour asymptote* $y=c_1x$, *l'équation* $F=0$ *n'a qu'un nombre fini de solutions en nombres entiers, si l'on n'a pas*

$$\mu<(r-1-\omega)(r-\omega),$$

ou

$$\mu=(r-1-\omega)(r-\omega), \qquad 1\leqq 2lC^{r-\omega+1},$$

l étant une quantité finie.

En effet, supposons que, le long de cette branche, $F=0$ ait une infinité de solutions (2) en nombres entiers; on aura

$$q=c_1p+\delta,$$

δ étant aussi petit qu'on veut quand p est assez grand; d'après (6)

$$\delta[\varphi'_n(1,c_1)+\eta]+\frac{1}{p^{\mu-1}}[\varphi_{n-\mu}(1,c_1)+\eta_1]=0,$$

η et η_1 étant aussi petits qu'on veut quand p est assez grand.

Nous pourrons d'ailleurs supposer c_1 positif : s'il était négatif, il suffirait de considérer l'équation déduite de $F=0$ en changeant x en $-x$.

Alors on peut prendre p assez grand pour que

$$|\delta|<\frac{l}{p^{\mu-1}},$$

l étant fini et différant d'aussi peut qu'on veut de

$$\frac{|\varphi_{n-\mu}(1,c_1)|}{|\varphi'_n(1,c_1)|}.$$

La fraction $\frac{q}{p}$, quand p est assez grand, sera comprise entre deux réduites consécutives du développement en fraction continue de c_1 convenablement choisies, ou coïncidera avec l'une d'elles, et l'on pourra trouver une réduite de dénominateur assez grand pour que

$\frac{q}{p}$ ne soit pas compris entre deux réduites de dénominateur au moins égal. On peut donc trouver trois réduites consécutives $\frac{q_h}{p_h}, \frac{q_{h+1}}{p_{h+1}}, \frac{q_{h+2}}{p_{h+2}}$, telles que $\frac{q}{p}$ soit comprise entre les deux premières sans l'être entre les deux secondes, ou soit égale à la deuxième. On en conclura d'abord [1]

$$p \geqq p_{h+1}.$$

En même temps on a l'une des deux inégalités

$$\left|\frac{q_{h+1}}{p_{h+1}} - c_1\right| \leqq \left|\frac{q}{p} - c_1\right| \quad \text{ou} \quad \left|\frac{q_{h+2}}{p_{h+2}} - c_1\right| \leqq \left|\frac{q}{p} - c_1\right|,$$

et, de plus,

$$\left|\frac{q}{p} - c_1\right| = \frac{|\delta|}{p} < \frac{l}{p^\mu} \leqq \frac{l}{p_{h+1}^\mu}.$$

D'autre part,

$$\left|\frac{q_{h+1}}{p_{h+1}} - c_1\right| > \left|\frac{q_{h+2}}{p_{h+2}} - c_1\right| > \left|\frac{q_{h+3}}{p_{h+3}} - c_1\right|,$$

et [2]

$$\left|\frac{q_{h+2}}{p_{h+2}} - c_1\right| > \frac{1}{2}\left|\frac{q_{h+2}}{p_{h+2}} - \frac{q_{h+3}}{p_{h+3}}\right| = \frac{1}{2}\,\frac{1}{p_{h+2}p_{h+3}}.$$

On en conclut

$$(15) \qquad 2lp_{h+2}\,p_{h+3} > p_{h+1}^\mu.$$

Or, on a, d'après Lagrange [3],

$$\frac{1}{p_h p_{h+1}} = \frac{f(p_h, q_h)}{p_h^r\,\mathrm{B}},$$

où B reste fini, si grand que soit h. Si

$$f(p_h, q_h) \geqq \theta p_h^\omega \geqq 1 \qquad (\omega \geqq 0),$$

---

(1) SERRET, *Algèbre supérieure*, t. I, 5e édition, p. 17; 1885.

(2) *Ibid.*, p. 13.

(3) LIOUVILLE, *Journal de Mathématiques*, p. 135; 1851.

θ étant une quantité positive et finie, on a

$$p_h^{r-1-\omega} \geqq \frac{\theta}{B} p_{h+1},$$

c'est-à-dire, C étant une quantité finie positive,

$$p_{h+1} \leqq C p_h^{r-1-\omega},$$

d'où

$$p_{h+2} \leqq C p_{h+1}^{r-1-\omega}, \qquad p_{h+3} \leqq C p_{h+2}^{r-1-\omega} \leqq C^{r-\omega} p_{h+1}^{(r-1-\omega)^2}.$$

D'après (15)

$$p_{h+1}^{\mu} < 2 l C^{r-\omega+1} p_{h+1}^{(r-1-\omega)(r-\omega)},$$

ce qui donne, ou bien

$$(16) \qquad \mu < (r-1-\omega)(r-\omega) \leqq r(r-1),$$

ou bien

$$(17) \qquad \mu = (r-1-\omega)(r-\omega), \qquad 1 \leqq 2 l C^{r-\omega+1}.$$

Pour les petites valeurs de ω, ces formules ne donnent pas un résultat plus avantageux que le théorème I ; ainsi, si $\omega = 0$, elles donnent $\mu \leqq r(r-1)$, alors que le théorème I donne la limite supérieure $\mu \leqq r$, plus avantageuse si $r \geqq 3$. Mais il n'en sera pas de même pour les valeurs de ω telles que

$$(r-1-\omega)(r-\omega) < r.$$

Si, par exemple, c_1 avait tous les quotients incomplets de son développement en fraction continue limités supérieurement, on aurait évidemment $\omega = r - 2$, et les formules (16) et (17) donneraient

$$\mu < 2 \qquad \text{ou} \qquad \mu = 2 \qquad \text{avec} \qquad 1 < 2 l C^3,$$

résultat plus avantageux que celui donné par le théorème I. C'est le cas quand $r = 2$.

Remarque. — On ne connaît malheureusement, croyons-nous, aucun moyen de déterminer ω, quand $r > 2$.

Ce théorème comporte un corollaire analogue à celui du théorème I : nous nous dispenserons de l'énoncer, sauf pour le cas où $r = 2$.

Alors, soit A une limite supérieure des quotients incomplets de la période dans le développement de c_1.

On aura ici $\mu = 2$, $\varphi_{n-1}(1, c_1) = 0$, et [1]

$$\begin{cases} p_{h+2} = p_{h+1}a_{h+1} + p_h < (a_{h+1} + 1)p_{h+1} \leqq (A+1)p_{h+1}, \\ p_{h+3} = p_{h+2}a_{h+2} + p_{h+1} \leqq p_{h+1}(1 + A + A^2); \end{cases}$$

donc, d'après (15),

$$1 < 2l(A+1)(A^2 + A + 1).$$

On en conclut

$$2(A+1)(A^2+A+1) > \left|\frac{\varphi'_n(1, c_1)}{\varphi_{n-2}(1, c_1)}\right| + \zeta \geqq \frac{|\varphi'_n(1, c_1)|}{1 + |\varphi_{n-2}(1, c_1)|},$$

ζ étant aussi petit qu'on veut quand p est assez grand.

En remarquant que, quand $\varphi_{n-2}(1, c_1) = 0$, le théorème I est applicable, on conclut :

Corollaire I. — Tout étant posé comme au premier alinéa du théorème I, soit $\varphi_{n-1} = 0$, et supposons que $\varphi_n(x, y)$ n'admette aucun facteur irréductible $f(x, y)$ qui ne soit du premier ou du deuxième degré, à coefficients entiers, ces facteurs étant simples et différents, ou pour lequel $f(1, c) = 0$ ait une racine réelle; supposons de plus que la courbe $F = 0$ n'ait aucune asymptote parallèle aux axes de coordonnées.

Soit A une limite supérieure des quotients incomplets des périodes dans le développement en fraction continue des racines réelles irrationnelles c' de $\varphi_n(1, c) = 0$; l'équation $F = 0$ n'a qu'un nombre fini de solutions en nombres entiers si l'on n'a pas, quelle que soit la racine c',

$$2(A+1)(A^2+A+1) \geqq \frac{|\varphi'_n(1, c')|}{1 + |\varphi_{n-2}(1, c')|},$$

et $\varphi_{n-2} \neq 0$.

Il n'est pas difficile de trouver des exemples de pareilles équations.

---

[1] SERRET, *loc. cit.*, p. 12.

Posons

$$\varphi_n(x, y) = \mu\chi_n(x, y),$$

$\chi_n(x, y)$ étant un polynome de degré n, homogène en x, y et à coefficients entiers donnés, polynome jouissant des mêmes propriétés que φ_n; φ_{n-2}, φ_{n-3}, $\ldots$, φ_0 étant donnés ainsi que χ_n, on peut toujours prendre μ assez grand pour que

$$\frac{|\varphi'_n(1, c')|}{1 + |\varphi_{n-2}(1, c')|} = \frac{\mu|\chi'_n(1, c')|}{1 + |\varphi_{n-2}(1, c')|} \geqq 2(A+1)(A^2+A+1).$$

Corollaire II. — Supposons que l'équation indéterminée

$$\varphi_n(x, y) + \varphi_0 = 0$$

ait une infinité de solutions, $\varphi_n(1, c) = 0$ ayant ses racines réelles distinctes : 1° quand h croît indéfiniment sur trois quotients incomplets consécutifs a_h, a_{h+1}, a_{h+2} il ne peut y en avoir deux de finis; 2° si, à partir d'un certain rang, tout quotient incomplet a_h de rang pair (impair) est fini, tout quotient incomplet de rang impair (pair) est de l'ordre de p_h^{n-2}; 3° si les racines de $\varphi_n(1, c) = 0$ sont toutes réelles, et si $\varphi_0 = 1$, a_h est de l'ordre de p_h^{n-2}.

Dans ces deux cas, $\varphi_n(x, y)$ doit donc être irréductible.

La démonstration résulte de ce qui précède, et de cette remarque de Lagrange ([1]) que, si $\varphi_n(1, c) = 0$ a ses racines réelles et si $\varphi_0 = 1$, $\frac{y}{x}$ est une réduite d'une de ces racines.

III.

Les théorèmes qui précèdent comportent des extensions aux équations indéterminées à plusieurs variables. Nous nous contenterons d'en établir une pour le cas de trois variables.

Soit

$$(18) \qquad F(x, y, z) = \varphi_n(x, y, z) + \varphi_{n-1} + \ldots + \varphi_0 = 0$$

([1]) *Loc. cit.*, p. 683.

une équation algébrique à trois variables, de degré n, $\varphi_i(x, y, z)$ étant l'ensemble des termes de degré i en x, y, z. On sait déjà, par exemple, que l'équation indéterminée (18) n'aura en nombres entiers qu'un nombre limité de solutions si la surface (18), en coordonnées cartésiennes, n'a pas de points à l'infini; nous allons considérer d'autres cas.

Supposons que $\varphi_n(x, y, z)$ soit un produit de facteurs linéaires à coefficients entiers $ax + by + cz$, avec a, b, $c \neq 0$. On aura

$$\varphi_n = (ax + by + cz)\,\psi_{n-1}(x, y, z), \tag{19}$$

ψ_{n-1} étant un produit de $n - 1$ facteurs linéaires. Si $F = 0$ a une infinité de solutions p, q, r en nombre entiers, il y en aura une infinité pour lesquelles une de ces quantités au moins, r par exemple, sera aussi grande qu'on veut. Pour qu'on ait $F(p, q, r) = 0$, il faudra que $\varphi_n(p, q, r)$ soit, pour une de ces solutions, de l'ordre de r^{n-1} au plus, si r est le plus grand des trois nombres p, q, r. Un des facteurs linéaires au moins de $\varphi_n(p, q, r)$ sera d'ordre $< r$ pour une infinité de systèmes p, q, r, et l'on pourra poser

$$ap + bq + cr = r\varepsilon = \delta, \tag{20}$$

ε étant aussi petit qu'on veut, si r est assez grand. Alors

$$\tag{21} \left\{ \begin{aligned} r &= \frac{\delta - ap - bq}{c}, \\ F(p, q, r) &= \varphi_n\left(p, q, \frac{\delta - ap - bq}{c}\right) + \varphi_{n-1} + \ldots + \varphi_0 = 0 \\ &= \frac{\delta}{1}\varphi'_n\left(p, q, \frac{-ap - bq}{c}\right) + \varphi_{n-1}\left(p, q, \frac{-ap - bq}{c}\right) + A, \end{aligned} \right.$$

φ'_n désignant une dérivée par rapport à z. Deux cas pourront alors se présenter : ou bien aucun des facteurs linéaires de ψ_{n-1} n'est d'ordre $< r$, ou bien il y a $k - 1$ facteurs de ψ_{n-1} d'ordre $< r$.

Dans le premier cas, δ doit rester fini quand r croît indéfiniment, et comme c'est un nombre entier, d'après (20), il n'aura qu'un nombre fini de valeurs. Les solutions p, q, r, qui, pour r assez grand, rendent dans (20) ε aussi petit qu'on veut, sont groupées sur les courbes d'intersection de la surface (18) avec un nombre fini de plans parallèles au plan $ax + by + cz = 0$ et situés à distance finie.

Dans le deuxième cas, on aura k égalités

$$
(22) \qquad \left\{ \begin{array}{l} ap \ + bq \ + cr = \varepsilon r \ = \delta, \\ a'p + b'q + c'r = \varepsilon' r = \delta', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array} \right.
$$

$ax + by + cz$, $a'x + b'y + c'z$, $\ldots$, étant des facteurs linéaires à coefficients entiers de $\varphi_n(x, y, z)$. Si $k > 2$, on aura

$$
\left\{ \begin{array}{l} a \dfrac{p}{r} + b \dfrac{q}{r} + c \ = \varepsilon, \\[2ex] a' \dfrac{p}{r} + b'' \dfrac{q}{r} + c' = \varepsilon', \\[2ex] a'' \dfrac{p}{r} + b'' \dfrac{q}{r} + c'' = \varepsilon'', \end{array} \right.
$$

d'où

$$
\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \zeta,
$$

ζ étant aussi petit qu'on veut pour r assez grand, ce qui exige $\zeta = 0$, puisque le premier membre est un nombre entier déterminé. Les trois facteurs $ax + by + cz$, $a'x + b'y + c'z$, $a''x + b''y + c''z$ seraient liés par une relation linéaire.

Excluons cette hypothèse, on a $k = 2$; sans entrer dans plus de détails, on voit de suite que, si δ et δ' ne sont pas finis, $\varphi_n(p, q, r)$ est de l'ordre de $\delta\delta' r^{n-2} \geqq r^{n-2+\theta}$, θ étant > 0, ce qui est impossible quand $\varphi_{n-1}(x, y, z) = 0$ identiquement, ou quand $\varphi_{n-1}(x, y, z)$ est divisible par les deux facteurs rationnels $ax + by + cz$, $a'x + b'y + c'z$ ([1]).

([1]) Il y a encore impossibilité quand $\varphi_{n-1}(x, y, z)$ est divisible par un de ces deux facteurs ou quand $\varphi_{n-1}(x, y, z) = \lambda \dfrac{\partial}{\partial z} \varphi_n(x, y, z)$, λ étant un nombre rationnel fini, et qu'aucun des entiers δ, δ' ne reste fini.

Dans ces hypothèses il faut que δ et δ' restent finis; les solutions considérées se trouvent sur un nombre fini de droites parallèles aux droites

$$ax + by + cz = 0, \qquad a'x + b'y + c'z = 0,$$

et ne peuvent être en nombre infini que sur celles de ces droites appartenant à la surface.

Alors, dans les deux cas, de l'équation $ax + by + cz - \delta = 0$ on peut tirer z et substituer dans $F = 0$. Sans chercher à faire une discussion plus complète, supposons $\varphi_{n-1}(x, y, z) = 0$.

Dans le premier cas, d'après (21), δ est nul, et

$$\varphi_n\left(x, y, \frac{-ax - by}{c}\right) = 0;$$

l'ensemble des termes du plus haut degré dans F devient

$$\varphi_{n-\nu}\left(x, y, \frac{-ax - by}{c}\right) \neq 0 \qquad (\nu \geqq 2), \tag{23}$$

$\varphi_{n-\nu}(x, y, z)$ étant le premier des polynomes φ_{n-2}, φ_{n-3}, ..., qui n'admette pas le facteur rationnel $ax + by + cz$. L'équation

$$F\left(x, y, \frac{-ax - by}{c}\right) = 0 \tag{24}$$

doit avoir une infinité de solutions en nombres entiers, car, d'après $ax + by + cz = 0$, à une infinité de valeurs de z doit correspondre une infinité de systèmes de valeurs x, y. Ceci ne pourra avoir lieu dans une foule d'hypothèses, d'après les paragraphes précédents, par exemple si (24) n'a aucun point à l'infini, ou encore ([1]) si la surface $\varphi_{n-\nu}(x, y, z) + \ldots + \varphi_0 = 0$ n'a aucun point à l'infini, ou si $\varphi_{n-\nu}(x, y, z)$ est un produit de facteurs linéaires rationnels, irréductibles, distincts et différents de $ax + by + cz$.

Dans le deuxième cas, les équations de la droite $ax + by + cz = \delta$,

---

([1]) On pourrait aussi appliquer le théorème III et son corollaire, ou le théorème II.

$a'x + b'y + c'z = \delta'$, jointes à (18), ne peuvent déterminer qu'un nombre fini de valeurs de x, y, z, à moins que la droite n'appartienne à la surface. Si $\varphi_{n-2} = 0$, il faut que $\delta\delta' = 0$: on peut appliquer le raisonnement ci-dessus.

Théorème IV. — *Soit*

$$(18) \qquad F(x, y, z) = \varphi_n(x, y, z) + \varphi_{n-1} + \ldots + \varphi_0 = 0$$

une équation algébrique, à coefficients entiers, entre trois variables x, y, z, arithmétiquement irréductible, $\varphi_i(x, y, z)$ étant l'ensemble des termes de degré i en x, y, z, et $\varphi_n(x, y, z)$ étant un produit de facteurs linéaires à coefficients entiers, distincts,

$$a_k x + b_k y + c_k z \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

avec a_k, b_k, $c_k \neq 0$, et tels qu'il n'existe aucune relation entre deux ou trois quelconques d'entre eux.

1° *Si*

$$\varphi_{n-1}(x, y, z) = 0$$

ou

$$\varphi_{n-1} = \lambda \frac{\partial}{\partial z} \varphi_n(x, y, z),$$

λ étant une constante rationnelle, les solutions en nombres entiers de (18), *à part un nombre limité, se trouvent sur un nombre fini de plans situés à distance finie et parallèles aux n plans du système*

$$(25) \qquad \varphi_n(x, y, z) = 0.$$

2° *Si*

$$\varphi_{n-1}(x, y, z) = 0,$$

et si

$$\varphi_{n-2}(x, y, z)$$

est un produit de facteurs linéaires, rationnels, irréductibles, distincts, $\alpha x + \beta y + \gamma z$ avec $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$, et distincts des facteurs linéaires de $\varphi_n = 0$, les solutions en nombres entiers de (18), *à part un nombre* *limité, se trouvent sur un nombre fini de droites parallèles aux droites doubles de* (25) *et situées sur la surface, s'il y en a.*

3° *Si*

$$\varphi_{n-1} = \varphi_{n-2} = 0,$$

et si

$$F - \varphi_n = \varphi_{n-\nu} + \varphi_{n-\nu-1} + \ldots + \varphi_0 = \psi, \tag{26}$$

$\varphi_{n-\nu}(\nu > 2)$ *étant le premier des polynomes* $\varphi_{n-3}, \varphi_{n-4}, \ldots, \varphi_0$ *qui n'est pas nul identiquement, l'équation* (18) *n'a qu'un nombre fini de solutions en nombres entiers quand la surface* $\psi = 0$ *n'a pas de points à l'infini, ou quand* $\varphi_{n-\nu}$ *est un produit de facteurs linéaires, rationnels, irréductibles, différents, et distincts de ceux de* φ_n.