JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LE ROUX

Sur l'intégration des équations linéaires aux dérivés partielles

Journal de mathématiques pures et appliquées 5e série, tome 6 (1900), p. 387-422.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1900_5_6__387_0>

Sur l'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles ;

PAR M. J. LE ROUX.

1. Les équations aux dérivées partielles du premier ordre et les équations linéaires à deux variables indépendantes d'un ordre quelconque peuvent être, en général, intégrées complètement quand on en connaît une ou plusieurs intégrales particulières satisfaisant à des conditions déterminées. Les formules que j'ai données dans mon Mémoire sur les équations linéaires ([1]) comprennent autant d'intégrales particulières qu'il y a de caractéristiques; mais les familles de fonctions caractéristiques ne constituent, en général, que des branches différentes d'une même fonction analytique; il en résultera que les intégrales considérées se déduiront de l'une d'entre elles par la même transformation qui permet de passer de la caractéristique correspondante aux autres branches de la même fonction. Les cas où les intégrales sont réellement différentes peuvent donc être considérés comme exceptionnels.

C'est sous le même point de vue que nous envisageons encore dans ce travail le problème général de l'intégration. Nous chercherons à déterminer un nombre limité d'intégrales particulières dont on puisse déduire toutes les autres par un certain mode de génération. Nous

([1]) *Journal de Mathématiques*, t. IV, 5e série; 1898.

donnons à ces intégrales élémentaires le nom d'*intégrales primitives* ou *principales* de l'équation considérée. Ce nom d'*intégrale primitive* rappelle leur propriété, présentant une certaine analogie avec celle des éléments primitifs d'un domaine algébrique. Pour les équations du premier ordre, les *intégrales complètes* constituent des *intégrales primitives*. Dans les équations linéaires du second ordre à deux variables indépendantes, l'exemple le plus simple d'une *intégrale primitive* est celle que M. Darboux a obtenue par la généralisation d'une idée de Riemann (¹). Nous avons fait voir qu'à côté de celle-là il en existe une infinité d'autres dont la détermination dépend d'une fonction arbitraire d'une variable, et nous avons étendu cette notion au cas des équations linéaires d'un ordre quelconque à deux variables indépendantes (²).

C'est donc la même notion des intégrales principales et le même mode de représentation que nous étendons aux équations linéaires à plusieurs variables indépendantes. Il était à présumer qu'une généralisation de nos méthodes permettrait d'intégrer à l'aide de solutions convenablement choisies les équations linéaires les plus générales; la difficulté consistait à trouver sous quelle forme on devait effectuer cette généralisation. Les équations à deux variables diffèrent, en effet, des autres par une propriété importante : c'est que les tangentes caractéristiques qui passent en un point y sont séparées comme les asymptotes d'une courbe algébrique, tandis que dans l'espace à plus de deux dimensions on a à considérer des systèmes continus. Par conséquent, les propriétés basées sur cette continuité se trouvent en quelque sorte masquées dans les équations à deux variables.

Nous ramenons l'intégration d'une équation linéaire d'ordre quelconque à n variables indépendantes à la détermination d'une intégrale complète de l'équation des caractéristiques et au calcul d'une ou plusieurs intégrales particulières *primitives* correspondantes.

La connaissance de ces deux éléments permet de représenter toutes les solutions de l'équation considérée par des intégrales à $(n-1)$ dimensions et à limites variables.

(¹) Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. II.

(²) *Annales de l'École Normale*; 1895. — *Journal de Mathématiques*; 1898.

Notre méthode peut se trouver en défaut dans les cas de caractéristiques multiples; cependant, la grande généralité des résultats obtenus permet d'espérer qu'il sera possible de l'adapter à tous les cas à l'aide d'une légère modification.

Si, partant de nos formules, on veut déterminer les éléments qui y figurent de manière à satisfaire à certaines conditions initiales, on est conduit à un problème d'inversion d'intégrale multiple. Nous avons traité ce problème complètement dans un cas simple et nous avons été ainsi conduits à une généralisation intéressante de la notion de la dérivée.

2. *Surfaces et courbes caractéristiques.* — Les propriétés sur lesquelles nous aurons à nous appuyer présentent en quelque sorte le même caractère, quel que soit le nombre des variables indépendantes, pourvu qu'il dépasse deux. Nous en profiterons pour simplifier à la fois le langage et le calcul en nous bornant au cas de trois variables.

Considérons une équation d'ordre m à trois variables indépendantes x, y, z.

$$\Delta(u) = \sum A_{\alpha,\beta,\gamma} \frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma} u}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma} = 0 \qquad (0 \leqq \alpha + \beta + \gamma \leqq m). \tag{1}$$

Nous devons commencer par étendre à cette équation la notion des caractéristiques. Comme le fait remarquer M. Goursat (¹), cette extension peut se faire de différentes manières suivant la propriété que l'on envisage.

Cependant, la définition la plus naturelle est celle que l'on déduit du théorème de Cauchy généralisé, comme l'a fait M. Beudon (²). Ces considérations sont d'ailleurs, au fond, équivalentes à celles sur lesquelles s'est appuyé Bäcklund (³) pour la définition des multiplicités

---

(¹) *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre*, t. II, p. 330.

(²) *Sur les singularités des équations aux dérivées partielles* (*Comptes rendus*, t. CXXIV); *Sur les caractéristiques des équations aux dérivées partielles* (*Bulletin de la Société Mathématique*, t. XXV).

(³) *Mathematischen Annalen*, t. XIII, p. 411.

caractéristiques. Nous appellerons donc *surfaces caractéristiques* de l'équation (1) celles pour lesquelles le théorème de Cauchy est en défaut ([1]).

Soit $\varphi(x, y, z) =$ const. l'équation de l'une de ces surfaces; la fonction φ satisfait à l'équation aux dérivées partielles homogène du premier ordre et du $n^{\text{ième}}$ degré.

$$(2) \qquad \sum A_{\alpha,\beta,\gamma}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^{\alpha}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^{\beta}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^{\gamma} = 0 \qquad (\alpha+\beta+\gamma = m).$$

Nous appellerons *fonctions caractéristiques* celles qui satisfont à l'équation aux dérivées partielles (2) et qui, par conséquent, restent constantes sur des surfaces caractéristiques.

Désignons par $F\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$ le premier membre de l'équation (2) et considérons les dérivées partielles

$$\frac{\partial F}{\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)}, \quad \frac{\partial F}{\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)}, \quad \frac{\partial F}{\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)}.$$

Si ces dérivées partielles sont constamment nulles sur la surface $\varphi(x, y, z) = k$, nous dirons que c'est une surface caractéristique singulière; si elles sont constamment nulles, quelle que soit k, et cela sans que les coefficients soient simultanément nuls, nous dirons que la fonction φ est une fonction caractéristique multiple. Ce dernier cas se présente toujours si F se décompose en plusieurs facteurs dont l'un au moins soit affecté d'un exposant supérieur à un. Dans le cas de facteurs multiples, nos méthodes peuvent se trouver en défaut.

Les équations

$$(3) \qquad \frac{\partial F}{\partial\left(\frac{d\varphi}{\partial x}\right)} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)} = 0$$

([1]) Delassus, Thèse, p. 41, ou *Annales de l'École Normale*, 3e série, t. XII; 1895 (*Supplément*).

ne sont compatibles que si le discriminant $D(x, y, z)$ de la forme homogène F est nul. Quand le discriminant $D(x, y, z)$ s'évanouit identiquement, les équations (3) ont des solutions communes.

Soit

$$\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x}}{P} = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial y}}{Q} = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial z}}{R}$$

l'une d'entre elles; si la différentielle totale

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

admet un facteur intégrant, on en déduira une famille de surfaces caractéristiques singulières.

Considérons une surface caractéristique non singulière

$$\varphi(x, y, z) = k.$$

Il existe, sur cette surface, un système de courbes satisfaisant aux équations différentielles

$$(4) \qquad \frac{dx}{\dfrac{\partial F}{\partial\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\right)}} = \frac{dy}{\dfrac{\partial F}{\partial\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\right)}} = \frac{dz}{\dfrac{\partial F}{\partial\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\right)}}.$$

Ce sont les *courbes caractéristiques* de l'équation aux dérivées partielles (2), qui est du premier ordre. Nous les appellerons aussi, par extension, les *courbes caractéristiques* de l'équation aux dérivées partielles proposée (1). On verra, dans la suite de ce Travail, que la considération de ces courbes intervient dans la détermination des intégrales primitives.

Une courbe analytique quelconque C de l'espace étant donnée, on pourra, en général, par cette courbe faire passer m surfaces caractéristiques, ou, si l'on veut, m nappes de surfaces caractéristiques. Les plans tangents à ces m surfaces en un point M de la courbe C passent par la tangente à cette courbe et sont, en outre, tangents au cône (T) de classe m enveloppé par les plans tangents aux surfaces caractéristiques qui passent en ce point (1). Ces m plans sont donc en général distincts, sauf dans les cas suivants : 1° la courbe C est tangente en M à une courbe caractéristique; 2° la tangente de la courbe C appartient à un plan tangent multiple du cône; 3° la fonction $F\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$ admet des facteurs multiples. Le troisième cas rentre d'ailleurs dans le second et tous les deux exigent que le discriminant $D(x, y, z)$ soit nul au point M. Si aucune de ces conditions n'est réalisée en tous les points de C, les m nappes caractéristiques sont distinctes. On pourra les déterminer quand on connaîtra une seule intégrale complète de l'équation (2), pourvu que $F\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$ soit irréductible. Si ce polynome se décompose en plusieurs facteurs, il faudra autant d'intégrales complètes qu'il existe de facteurs différents.

5. *Sur la forme des intégrales complètes.* — La surface caractéristique qui représente une intégrale complète dépend de deux paramètres arbitraires λ et μ. Cherchons s'il est possible de la représenter par une équation de la forme

$$\varphi(x, y, z, \lambda) = \mu,$$

φ étant rationnelle en λ. Posons, suivant l'usage,

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= p = -\frac{\varphi'_x}{\varphi'_z}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= q = -\frac{\varphi'_y}{\varphi'_z}. \end{aligned}\right.$$

On voit que p et q sont aussi des fonctions rationnelles de λ, quand on regarde x, y, z comme des constantes. Donc la relation algébrique entre p et q,

$$(6)\qquad \Sigma(-1)^\gamma A_{\alpha,\beta,\gamma} p^\alpha q^\beta = 0 \qquad (\alpha + \beta + \gamma = m),$$

---

(1) *Voir* Goursat, *Équations aux dérivées partielles du premier ordre.*

doit être de genre zéro en tout point de l'espace. De plus, si l'on suppose qu'à chaque intégrale complète ne correspond qu'une valeur de λ, les fractions rationnelles (5) seront d'ordre m par rapport à ce paramètre.

Supposons maintenant que l'intégrale complète puisse être représentée par une équation de la forme

$$\varphi(x, y, z, \lambda, \mu) = 0, \tag{7}$$

algébrique par rapport à λ et μ.

Les équations (5) expriment p et q en fonctions rationnelles de λ et μ; si inversement à une même intégrale complète ne correspond qu'un système de valeurs pour λ et μ, ces deux paramètres s'exprimeront aussi rationnellement en fonction de p et q, et les deux relations algébriques (6) et (7) seront du même genre. Rien ne permet d'affirmer, d'ailleurs, d'après ces remarques sommaires, qu'il existe, pour toute équation aux dérivées partielles de la forme (6), une intégrale de la forme (7).

4. *Détermination des intégrales par leurs valeurs sur les surfaces caractéristiques.* — La propriété d'indétermination relative aux surfaces caractéristiques peut être facilement mise en évidence en prenant pour l'une des variables indépendantes une fonction caractéristique. La méthode suivante conduit au même résultat par un calcul très symétrique. Considérons une surface S quelconque représentée par l'équation analytique $\varphi(x, y, z) = 0$; d'après le théorème de Cauchy, l'intégrale se trouve déterminée quand on se donne sur cette surface les valeurs de $u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial^{m-1} u}{\partial x^{m-1}}$, pourvu toutefois qu'on exclue les points de la surface qui admettent des tangentes parallèles Ox; le système de ces données est équivalent au suivant, qui est plus symétrique. Formons d'abord l'expression de la différentielle $m^{\text{ième}}$ de u,

$$d^m u = \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y} + dz\frac{\partial}{\partial z}\right)^m u, \tag{8}$$

puis les expressions suivantes qui en dérivent par formation polaire,

$$(9)\quad d_{p,m-p}u = \left(\lambda\frac{\partial}{\partial x} + \mu\frac{\partial}{\partial y} + \nu\frac{\partial}{\partial z}\right)^p \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y} + dz\frac{\partial}{\partial z}\right)^{m-p} u,$$

$$p = (0, 1, 2, \ldots, m-1),$$

λ, μ, ν désignant des constantes, ou même des fonctions de (x, y, z), telles que la direction λ, μ, ν ne soit pas, en général, tangente à la surface.

Supposons que les coordonnées des points de la surface S soient exprimables en fonction de deux paramètres ρ_1 et ρ_2; on aura, pour tout déplacement infiniment petit sur cette surface,

$$(10)\quad \begin{cases} dx = \dfrac{\partial x}{\partial \rho_1} d\rho_1 + \dfrac{\partial x}{\partial \rho_2} d\rho_2, \\ dy = \dfrac{\partial y}{\partial \rho_1} d\rho_1 + \dfrac{\partial y}{\partial \rho_2} d\rho_2, \\ dz = \dfrac{\partial z}{\partial \rho_1} d\rho_1 + \dfrac{\partial z}{\partial \rho_2} d\rho_2. \end{cases}$$

En portant ces valeurs dans les expressions (8) et (9), on obtient, dans les seconds membres, des polynomes homogènes en $d\rho_1$ et $d\rho_2$. Les coefficients des différentes puissances de $d\rho_1$ et $d\rho_2$ dans ces polynomes peuvent être calculés quand on connaît, en tout point de la surface, les valeurs de

$$u, \quad \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{m-1} u}{\partial x^{m-1}}.$$

Comme ces coefficients sont, d'autre part, des fonctions linéaires et homogènes des dérivées d'ordre m de u, il suffira, pour déterminer complètement ces dérivées, de joindre au système d'équations linéaires déduit des expressions (8) et (9) une nouvelle relation, qui sera justement fournie par l'équation proposée (1).

Les expressions (9) sont formées de termes de la forme

$$\lambda^h \mu^k \nu^l \frac{p!}{h!\,k!\,l!} \frac{(m-p)!}{(\alpha-h)!\,(\beta-k)!\,(\gamma-l)!} \frac{\partial^m u}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma} dx^{\alpha-h} dy^{\beta-k} dz^{\gamma-l},$$

$$h + k + l = p, \qquad \alpha + \beta + \gamma = m.$$

Par conséquent, si l'on remplace la dérivée $\dfrac{\partial^m u}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma}$ par $\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^\alpha \left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^\beta \left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^\gamma$, l'expression (9) devient égale à

$$\left(\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mu\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \nu\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^p \left(dx\frac{\partial\varphi}{\partial x} + dy\frac{\partial\varphi}{\partial y} + dz\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^{m-p}.$$

Cette quantité s'annule identiquement quand on y donne à dx, dy, dz les valeurs définies par les équations (10). On tire immédiatement de là cette conséquence : *si l'on considère le déterminant des équations linéaires déduites, comme on l'a indiqué, des équations* (8), (9) *et* (1), *les mineurs de ce déterminant relatifs aux éléments* $A_{\alpha,\beta,\gamma}$ [coefficients de l'équation (1)] *sont proportionnels aux produits correspondants* $\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^\alpha \left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^\beta \left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^\gamma$, chaque mineur étant pris, bien entendu, avec le signe qui lui correspond dans le développement du déterminant.

La condition nécessaire et suffisante pour que le déterminant soit nul est donc que l'on ait

$$\Sigma A_{\alpha,\beta,\gamma}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^\alpha \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^\beta \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^\gamma = 0 \qquad (\alpha+\beta+\gamma=m),$$

c'est-à-dire que la surface considérée soit une caractéristique.

5. Si l'on prend pour l'une des variables indépendantes une fonction caractéristique, le coefficient de la dérivée correspondante d'ordre m s'annule. Soit x cette variable; on a $A_{m,0,0}=0$. Les coefficients $A_{m-1,1,0}$, $A_{m-1,0,1}$ ne sont pas nuls à la fois dans tout l'espace, à moins que x ne soit une fonction caractéristique singulière. En général, si x est une fonction caractéristique multiple d'ordre p, les coefficients de toutes les dérivées d'ordre m, dont l'indice par rapport à x dépasse $m-p$, sont nuls, mais il existe au moins une dérivée d'ordre m dont le premier indice est $m-p$, admettant un coefficient différent de zéro.

Considérons l'ensemble des termes d'ordre m dont le premier indice est $m-p$:

$$A_{m-p,p,0}\frac{\partial^m u}{\partial x^{m-p}\partial y^p}+A_{m-p,p-1,1}\frac{\partial^m u}{\partial x^{m-p}\partial y^{p-1}\partial z}+\ldots;$$

l'équation aux dérivées partielles qu'on en déduit :

$$A_{m-p,p,0}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^p+A_{m-p,p-1,1}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^{p-1}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)+\ldots=0$$

définit une famille de surfaces coupant les plans $x=$ const. suivant des caractéristiques. On voit qu'en général, sur une surface caractéristique simple, il passe par tout point une seule courbe caractéristique. Au contraire, par tout point d'une surface caractéristique multiple d'ordre p il passe p courbes caractéristiques qui ne sont d'ailleurs pas nécessairement toutes distinctes. Supposons que, dans le plan $x=x_0$, la droite $y=y_0$ ne soit pas une caractéristique.

Le coefficient $A_{m-p,p,0}$ est alors, *en général*, différent de zéro sur cette droite, de sorte que l'équation (1) pourra être résolue par rapport à la dérivée $\frac{\partial^m u}{\partial x^{m-p}\partial y^p}$.

Cela étant, nous sommes conduits au théorème suivant :

Si le plan $x=x_0$ est une surface caractéristique multiple d'ordre p et que le plan $y=y_0$ coupe le premier suivant une droite non caractéristique, l'intégrale u de l'équation (1) *se trouvera déterminée par les valeurs de*

$$u,\quad \frac{\partial u}{\partial x},\quad \ldots,\quad \frac{\partial^{m-p-1}u}{\partial x^{m-p-1}},$$

données arbitrairement en fonction de y et z sur le plan $x=x_0$, et celles de

$$\frac{\partial^{m-p}u}{\partial x^{m-p}},\quad \frac{\partial^{m-p+1}u}{\partial x^{m-p}\partial y},\quad \ldots,\quad \frac{\partial^{m-1}u}{\partial x^{m-p}\partial y^{p-1}},$$

données en fonctions de x et z sur le plan $y=y_0$.

Ces fonctions initiales et les coefficients de l'équation proposée, résolue par rapport à la dérivée $\frac{\partial^m u}{\partial x^{m-p}\partial y^p}$, sont supposés holomorphes dans un certain domaine environnant le point x_0, y_0, z_0.

Dans ces conditions, l'intégrale elle-même sera holomorphe dans un domaine assez petit comprenant ce point. Ce sera aussi une fonction holomorphe de x_0, y_0, z_0, et même, si les fonctions initiales dépendent *analytiquement* de certains autres paramètres dont elles soient des fonctions holomorphes, l'intégrale obtenue sera aussi une fonction holomorphe de ces paramètres dans un certain domaine.

L'élégante démonstration donnée par M. Goursat pour le cas de deux variables indépendantes [1] peut se reproduire presque textuellement pour plus de deux variables, pourvu que l'on introduise, au lieu de la seule constante positive α, deux constantes α et β assujetties à des conditions du même genre; on est conduit à chercher une intégrale *majorante* qui dépende de la seule variable

$$\xi = x + \alpha y + \alpha\beta z.$$

Nous renvoyons pour les détails du calcul à l'Ouvrage de M. Goursat.

Des intégrales primitives.

6. *Intégrales doubles à limites variables.* — Dans le cas de deux variables, nous avons vu que l'on peut déduire d'une certaine intégrale particulière $u(x, y, \alpha)$, dépendant d'un paramètre, une intégrale plus générale représentée par la formule

$$\text{(11)} \qquad U = \int_{\alpha_0}^{\xi} f(\alpha)\, u(x, y, \alpha)\, d\alpha,$$

où la limite ξ est une fonction caractéristique et $f(\alpha)$ une fonction arbitraire. Nous avons été conduits à ce mode de représentation par des considérations ayant leur origine dans la méthode d'approximations

(1) GOURSAT, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre,* t. II, p. 304.

successives de M. Picard et que nous jugeons inutile de reproduire ici. Nos calculs s'appliquent aussi dans le cas de plusieurs variables indépendantes, mais la solution donnée par la formule (11) ne présente que la généralité des fonctions d'une seule variable ([1]), c'est-à-dire qu'on peut seulement l'assujettir à prendre des valeurs données à l'avance sur une courbe.

On peut en déduire une solution plus générale de la manière suivante. Dans la formule

$$U = \int_{\alpha_0} f(\alpha)\, u(x, y, z, \alpha)\, d\alpha, \tag{12}$$

nous supposons seulement que l'équation $\xi = \alpha$ définit une famille de surfaces caractéristiques. Par conséquent, la fonction ξ pourra encore dépendre d'un autre paramètre β, et l'intégrale obtenue U sera aussi une fonction de ce paramètre. Multipliant par $d\beta$ et intégrant de nouveau entre deux limites fixes, nous en déduisons une nouvelle solution

$$\int_{\beta_0}^{\beta_1} U(x, y, z, \beta)\, d\beta.$$

Or ces deux intégrations successives sont équivalentes au calcul d'une intégrale double de la forme

$$\int\!\!\int f(\alpha, \beta)\, u(x, y, z, \alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta,$$

évaluée dans un certain champ à limite variable que nous allons définir et dont le degré de généralité, comme nous le verrons plus loin, est celui des fonctions de deux variables.

Pour représenter le champ d'intégration, nous regarderons α et β comme des coordonnées, x, y, z comme des paramètres. Il résulte du calcul précédent que les limites qui dépendent des variables x, y, z

---

([1]) V. Borel, *Leçons sur la théorie des fonctions*. — Note sur la notion de fonction arbitraire.

dans nos intégrations sont déterminées par l'équation

$$\xi(x, y, z, \beta) = \alpha.$$

Le genre d'intégrales doubles que nous sommes amenés à considérer rentre donc dans la catégorie suivante. Considérons dans le plan $(\alpha\beta)$ une famille de courbes variables dépendant des paramètres x, y, z et que nous supposons représentées par une équation analytique

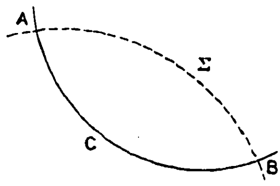
$$(\Sigma) \qquad \beta = \varphi(x, y, z, \alpha);$$

soit de plus C une courbe fixe telle qu'un arc continu de Σ détermine avec C une aire limitée ACBΣ (*fig.* 1). C'est à cette aire que nous étendrons l'intégrale double

$$\int\int f(\alpha, \beta)\, u(x, y, z, \alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta.$$

A une valeur de α correspond sur l'arc (C) une ordonnée β_0 et sur Σ

Fig. 1.



l'ordonnée $\beta = \varphi(x, y, z, \alpha)$; ces valeurs sont entièrement déterminées si une parallèle à l'axe de β ne rencontre qu'en un seul point chacun des arcs (C), (Σ).

Soient, de plus, α_0, α_1 les abscisses des points A, B; pour le calcul de l'intégrale double, nous prendrons d'abord l'intégrale simple

$$\int_{\beta_0}^{\varphi(x, y, z, \alpha)} f(\alpha, \beta)\, u(x, y, z, \alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta,$$

en regardant α comme une constante, puis nous intégrerons par rapport à α l'expression obtenue entre les limites α_0 et α_1.

D'après cela, il n'y aura aucune difficulté pour étendre notre calcul au cas des variables imaginaires [1]. Nous dirons que C est la *limite fixe* et Σ la *limite variable* de l'*intégrale double*. Nous n'excluons d'ailleurs pas le cas où tout le contour serait variable.

7. *Application aux équations du second ordre.* — Cherchons les conditions pour qu'une intégrale de la forme précédente satisfasse à l'équation proposée, quelles que soient la fonction arbitraire $f(\alpha, \beta)$ et la limite fixe de l'intégrale.

Nous ferons le calcul d'abord pour les équations du second ordre. Soit

$$(13) \qquad U = \int\int f(\alpha, \beta)\, u(x, y, z, \alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta.$$

Quand on donne à x, y, z des accroissements infiniment petits δx, δy, δz, la limite variable

$$\beta = \varphi(x, y, z, \alpha)$$

subit elle-même un petit déplacement. Faisons correspondre à tout point (α, β) de la première limite un point infiniment voisin $\alpha + \delta\alpha$, $\beta + \delta\beta$ de la seconde. Dans ces conditions, l'accroissement infiniment petit de l'intégrale double est donné par la formule

$$(14) \quad \delta U = \int f(\alpha, \beta)\, u(d\beta\, \delta\alpha - d\alpha\, \delta\beta) + \int\int f(\alpha, \beta)\, \delta u\, d\alpha\, d\beta,$$

où l'on suppose l'intégrale double évaluée dans le même champ que la précédente, l'intégrale simple étant calculée le long de la limite variable dans le sens BA. Nous aurons par conséquent sur cette limite, en considérant seulement la variation δx,

$$d\beta = \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} d\alpha,$$

$$\delta\beta = \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} \delta\alpha + \frac{\partial\varphi}{\partial x} \delta x.$$

---

[1] Ces remarques ont pour objet de définir avec précision le signe de l'intégrale double. — *Voir* aussi le Mémoire de M. Méray : *Sur les intervalles binaires,* etc. (*Ann. de l'École Normale,* 1899).

L'élimination de $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ entre ces deux équations donne

$$d\beta\,\delta\alpha - d\alpha\,\delta\beta = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,d\alpha\,\delta x.$$

En portant cette valeur dans l'intégrale simple de la formule (14) et divisant par δx, on trouve

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} f(\alpha, \beta)\, u(x, y, z, \alpha, \beta)\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,d\alpha + \iint f(\alpha, \beta)\frac{\partial u}{\partial x}\,d\alpha\,d\beta.$$

On aurait d'ailleurs obtenu directement ce résultat en se basant sur la méthode indiquée au numéro précédent pour le calcul de notre intégrale double.

Passons maintenant au calcul des dérivées secondes; soient $\alpha_0\beta_0$, $\alpha_1\beta_1$ les coordonnées des points A, B.

Posons, pour abréger, f_i, u_i, φ_i au lieu de $f(\alpha_i\beta_i)$, etc. On a

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &= f_1 u_1 \frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\frac{\partial\alpha_1}{\partial x} - f_2 u_2 \frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\frac{\partial\alpha_2}{\partial x}\\ &\quad + \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} f\left(u\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + 2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)d\alpha + \iint f\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,d\alpha\,d\beta.\end{aligned}$$

Calculons $\frac{\partial\alpha_i}{\partial x}$. Supposons que la limite fixe soit définie par une équation analytique ([1])

$$\beta = \psi(\alpha).$$

Dans ce cas, α_i est racine de l'équation

$$\varphi(x, y, z, \alpha) - \psi(\alpha) = 0.$$

On a donc

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} - \frac{\partial\psi}{\partial\alpha}\right)\frac{\partial\alpha}{\partial x} = 0$$

([1]) Nos calculs seraient évidemment encore applicables si les deux points A et B appartenaient à deux courbes analytiques différentes.

et, par suite,

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial x} = \frac{\frac{\partial \varphi_i}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi_i}{\partial \alpha_i} - \frac{\partial \psi_i}{\partial \alpha_i}}.$$

L'expression de $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ devient donc

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \sum \pm \frac{f_i u_i \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x}\right)^2}{\frac{\partial \varphi_i}{\partial \alpha_i} - \frac{\partial \psi_i}{\partial \alpha_i}} + \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} f\left(u \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) d\alpha + \iint f \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\, d\alpha\, d\beta.$$

On trouverait de même

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x\, \partial y} = \sum \pm \frac{f_i u_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}}{\frac{\partial \varphi_i}{\partial \alpha_i} - \frac{\partial \psi_i}{\partial \alpha_i}} + \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} f\left(u \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) d\alpha + \iint f \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}\, d\alpha\, d\beta.$$

Nous avons maintenant une dérivée de chaque type du premier et du second ordre.

Cela posé, considérons l'équation du second ordre

$$\Delta(u) = A_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + A_{33} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2 A_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} + 2 A_{13} \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial z} + 2 A_{23} \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial z} + 2 B_1 \frac{\partial u}{\partial x} + B_2 \frac{\partial u}{\partial y} + 2 B_3 \frac{\partial u}{\partial z} + C u = 0.$$

Pour que cette équation soit vérifiée par la fonction U, quelles que soient la fonction arbitraire $f(\alpha, \beta)$ et la limite inférieure de l'intégrale, on devra avoir

(15) $$\Delta(u) = 0,$$

et

$$
(16)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial\varphi}{\partial x}\left(A_{11}\frac{\partial u}{\partial x}+A_{12}\frac{\partial u}{\partial y}+A_{13}\frac{\partial u}{\partial z}+B_1 u\right)\\
&+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\left(A_{12}\frac{\partial u}{\partial x}+A_{22}\frac{\partial u}{\partial y}+A_{23}\frac{\partial u}{\partial z}+B_2 u\right)\\
&+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\left(A_{13}\frac{\partial u}{\partial x}+A_{23}\frac{\partial u}{\partial y}+A_{33}\frac{\partial u}{\partial z}+B_3 u\right)\\
&\qquad+\frac{u}{2}\left(A_{11}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\ldots+2A_{23}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial z}\right)=0,
\end{aligned}\right.
$$

$$
(17)\qquad A_{11}\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}\right)^2+A_{22}\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial y}\right)^2+\ldots+2A_{23}\frac{\partial\varphi_i}{\partial y}\frac{\partial\varphi_i}{\partial z}=0.
$$

L'équation (15) a lieu dans tout le champ d'intégration; elle exprime que $u(x, y, z, \alpha, \beta)$ est une intégrale particulière de l'équation proposée. L'équation (17) exprime que $\varphi(x, y, z, \alpha_i)$ est une fonction caractéristique, et comme α_i est, en général, variable, la famille de surfaces

$$
(\mathrm{S})\qquad \varphi(x, y, z, \alpha)=\beta
$$

constituera une intégrale complète de l'équation aux dérivées partielles des surfaces caractéristiques. Enfin, l'équation (16) doit être satisfaite sur la limite variable de l'intégrale double, c'est-à-dire pour l'ensemble des valeurs de x, y, z, α, β liées par l'équation (S). Elle définit donc la condition à laquelle doit satisfaire l'intégrale particulière $u(x, y, z, \alpha, \beta)$ sur la surface caractéristique (S).

Quand une intégrale $u(x, y, z, \alpha, \beta)$ vérifiera les conditions précédentes, nous dirons qu'elle est *primitive* ou *principale* relativement aux surfaces caractéristiques du système (S).

8. Si l'on considère $\Delta(u)$ comme un polynome en $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$, et que l'on désigne par $\Delta'_x(u)$, ..., $\Delta''_{x^2}(u)$, ..., les dérivées premières et secondes de ce polynome prises par rapport à $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$, on a

$$
\frac{1}{2}\Delta'_x(u)=A_{11}\frac{\partial u}{\partial x}+A_{12}\frac{\partial u}{\partial y}+A_{13}\frac{\partial u}{\partial z}+B_1 u,\qquad \ldots,
$$

$$
\frac{1}{2}\Delta''_{x^2}(u)=A_{11}u,\qquad \frac{1}{2}\Delta''_{xy}(u)=A_{12}u,\qquad \ldots.
$$

L'équation (16) peut donc s'écrire

$$(16') \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x}\Delta'_x(u) + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\Delta'_y(u) + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\Delta'_z(u) + \frac{1}{1.2}\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\Delta''_{x^2}(u) + \ldots\right] = 0.$$

Cette équation linéaire du premier ordre doit être intégrée non dans tout l'espace, mais sur la surface caractéristique S. Il faut en déterminer les courbes caractéristiques, qui sont données par les équations différentielles

$$\frac{dx}{A_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + A_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + A_{13}\frac{\partial\varphi}{\partial z}} = \frac{dy}{A_{21}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + A_{22}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + A_{23}\frac{\partial\varphi}{\partial z}}$$
$$= \frac{dz}{A_{31}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + A_{32}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + A_{33}\frac{\partial\varphi}{\partial z}}.$$

On voit que ce sont précisément les *courbes caractéristiques* de l'équation considérée situées sur la surface S. Leur détermination ne comporte donc aucune intégration nouvelle. Pour que l'intégrale u soit entièrement déterminée sur S, il suffira donc qu'on en connaisse les valeurs sur une courbe quelconque *non caractéristique* tracée sur cette surface. Soit (T) une surface quelconque qui coupe S suivant une courbe non caractéristique. Si l'on se donne arbitrairement les valeurs de u sur (T), on pourra en déduire par une quadrature la valeur de cette fonction en un point quelconque de (S) d'après l'équation (16) ([1]). L'intégrale $u(x, y, z, \alpha, \beta)$ se trouvera alors complètement déterminée, puisqu'on en connaîtra les valeurs sur une surface caractéristique (S) et sur une autre surface quelconque (T), dont l'intersection avec S n'est pas une courbe caractéristique. On voit donc que *l'intégrale primitive relative à un système de surfaces caractéristiques dépend d'une fonction arbitraire de deux variables*.

Parmi les intégrales primitives, il en existe une infinité qui sont,

---

([1]) *Bulletin de la Société mathématique*, t. XXV (*Note sur l'équation linéaire du premier ordre*).

dans un certain domaine, des fonctions holomorphes de β, développables suivant les puissances de $\beta - \varphi(x, y, z, \alpha)$.

Soit

$$u(x, y, z, \alpha, \beta) = u_0 + \frac{\varphi - \beta}{1} u_1 + \frac{(\varphi - \beta)^2}{1.2} u_2 + \ldots$$

Les coefficients u_0, u_1, ..., sont donnés par les formules de récurrence suivantes, où l'on a représenté, pour abréger, par $\Delta_\varphi(u)$ le premier membre de l'équation (16)

$$(18) \qquad \left\{\begin{array}{r} \Delta_\varphi(u_0) = 0, \\ \Delta_\varphi(u_1) \quad + \Delta(u_0) = 0, \\ \Delta_\varphi(u_2) \quad + \Delta(u_1) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \Delta_\varphi(u_{n+1}) + \Delta(u_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Il serait facile de vérifier, en partant de ces formules, que l'intégrale primitive satisfait bien aux conditions que nous nous sommes imposées.

9. *Extension aux équations d'ordre supérieur.* — Pour étendre ces propriétés aux équations d'ordre supérieur au second, on peut procéder par un calcul direct, comme nous l'avons fait dans le cas de deux variables (¹), et l'on trouve $m - 1$ équations linéaires du premier ordre permettant de calculer successivement les valeurs de u et de ses $m - 2$ premières dérivées *extérieures* sur la *surface caractéristique*

$$(S) \qquad \beta = \varphi(x, y, z, \alpha).$$

Les *courbes caractéristiques* relatives à ces diverses équations sont aussi les courbes caractéristiques de l'équation proposée situées sur (S). Il en résulte, comme dans le cas précédent, que les $m - 1$ fonc-

---

(¹) *Journal de Math.*, 5ᵉ série, t. IV, p. 386.

tions initiales considérées pourront être déterminées par des quadratures en tout point de S quand on en connaîtra les valeurs sur une courbe quelconque non caractéristique située sur cette surface.

Par suite, l'*intégrale primitive* relative à la famille de surfaces caractéristiques (S) sera définie par ses valeurs sur une surface quelconque (P) dont l'intersection avec (S) ne soit pas une courbe caractéristique.

Pour les intégrales primitives développables suivant les puissances de $\varphi - \beta$, ces conditions sont plus faciles à exprimer lorsqu'on substitue aux dérivées les coefficients du développement, qui forment un système équivalent. Soit

$$u(x, y, z, \alpha, \beta) = u_0 + \frac{\varphi - \beta}{1} u_1 + \frac{(\varphi - \beta)^2}{1.2} u_2 + \ldots,$$

$u_0, u_1, u_2, \ldots$ étant des fonctions de x, y, z, α.

En vertu de la condition imposée aux intégrales primitives, l'expression suivante qui dérive par intégration $u(x, y, z, \alpha, \beta)$

$$\frac{(\varphi - \beta)^{m-1}}{(m-1)!} u_0 + \frac{(\varphi - \beta)^m}{m!} u_1 + \frac{(\varphi - \beta)^{m+1}}{(m+1)!} u_2 + \ldots$$

doit être une nouvelle solution de l'équation proposée.

En y remplaçant u par cette valeur et égalant à zéro successivement les coefficients des différentes puissances de $\varphi - \beta$, on obtient des équations linéaires pour déterminer $u_0, u_1, \ldots$.

L'équation à laquelle doit satisfaire u_0 est de la forme suivante :

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum \frac{(m-1)!}{\lambda!\,\mu!\,\nu!} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^\lambda \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^\mu \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^\nu \Delta_{x^\lambda y^\mu z^\nu}^{(m-1)}(u_0) + \ldots = 0 \\ \qquad\qquad [\lambda + \mu + \nu = (m-1)], \end{array} \right.$$

où l'on suppose que $\Delta(u)$ représente le premier membre de l'équation (1), les dérivées symboliques ayant la même signification que dans le cas du second ordre.

Si l'on désigne par $F\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$ le premier membre de l'équation des caractéristiques, l'expression (19) peut se mettre sous la forme

$$(20) \qquad \frac{\partial F}{\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)}\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)}\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)}\frac{\partial u_0}{\partial z} + G u_0 = 0.$$

On voit que cette équation est linéaire du premier ordre, et qu'elle admet comme *courbes* caractéristiques les courbes caractéristiques de l'équation proposée.

Pour calculer les autres coefficients, nous aurions des équations de la forme

$$(21) \qquad \frac{\partial F}{\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)}\frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)}\frac{\partial u_i}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)}\frac{\partial u_i}{\partial z} + G u_i + H = 0,$$

H désignant une expression linéaire et homogène par rapport aux $n-1$ coefficients qui précèdent immédiatement u_i et à leurs dérivées.

Tant que les trois dérivées partielles

$$\frac{\partial F}{\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)}, \quad \frac{\partial F}{\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)}, \quad \frac{\partial F}{\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)}$$

ne sont pas nulles simultanément, nos calculs sont applicables, et l'intégrale primitive existe. Mais, pour les caractéristiques singulières, les expressions précédentes sont en défaut, et il serait nécessaire de faire un examen spécial des différents cas qui peuvent se présenter. Nous ne nous en occuperons pas dans ce travail.

10. *Étude de nos intégrales doubles.* — Il reste à examiner le degré de généralité de la solution obtenue. Cette question nous amène à étudier d'abord les intégrales de la forme

$$\int\int f(\alpha, \beta)\, u(x, y, z, \alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta,$$

pour lesquelles le champ d'intégration est limité par une courbe variable. Le cas le plus simple est celui où la limite variable du champ d'intégration est une droite.

Considérons, dans le plan $(\alpha\beta)$, le triangle OAB déterminé par les axes de coordonnées $O\alpha$, $O\beta$ et la droite variable AB définie par l'équation

$$\frac{\alpha}{u} + \frac{\beta}{v} - 1 = 0.$$

L'intégrale double

$$\int\int f(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta,$$

étendue à l'aire du triangle OAB, est évidemment une fonction des coordonnées de la droite AB. Soit $F(u, v)$ cette fonction qui s'annule évidemment lorsque la droite AB passe à l'origine. Je dis qu'à toute fonction $F(u, v)$ holomorphe dans le voisinage de l'origine et s'annulant pour $u = 0$ et pour $v = 0$, on peut faire correspondre une fonction $f(\alpha, \beta)$, telle que l'on ait

$$F(u, v) = \int\int f(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta, \tag{22}$$

l'intégrale double étant étendue au triangle AOB.

Posons, en effet,

$$F(u, v) = \sum A_{m,n} u^{m+1} v^{n+1}, \tag{23}$$

et cherchons s'il est possible de satisfaire à l'identité (22) par une fonction holomorphe

$$f(\alpha, \beta) = \sum B_{m,n} \alpha^m \beta^n. \tag{24}$$

Nous supposerons l'intégrale double toujours calculée de la manière suivante, quelle que soit la position de la droite double : on intègre d'abord par rapport à β de 0 à $v\left(1 - \frac{\alpha}{u}\right)$, puis par rapport à α de 0 à x. Le signe de l'intégrale est alors entièrement défini, et l'on a

$$\int\int \alpha^m \beta^n\, d\alpha\, d\beta = \frac{m!\, n!}{(m+n+2)!} u^{m+1} v^{n+1}.$$

On déduit de là, en vertu des équations (22), (23), (24),

$$B_{m,n} = \frac{(m+n+2)!}{m!\,n!} A_{m,n}.$$

La fonction $f(\alpha, \beta)$ devra donc être représentée par la série

$$(25) \qquad \sum (m+n+2)(m+n+1)\frac{(m+n)!}{m!\,n!} A_{m,n}\alpha^m\beta^n.$$

Le coefficient $\frac{(m+n+2)!}{m!\,n!}$ peut croître indéfiniment avec m et n. La question qui se pose tout d'abord est donc la suivante : En admettant que la série (23) ait un domaine de convergence, en sera-t-il de même de la série (25)? Il est facile de résoudre cette difficulté en considérant la racine $(m+n)^{\text{ième}}$ du coefficient considéré, suivant la règle donnée par Cauchy en 1844 [1] et retrouvée plus tard par M. Hadamard.

On sait que la plus grande valeur de $\frac{\Gamma(m+n+1)}{\Gamma(m+1)\Gamma(n+1)}$, quand on suppose constante la somme $m+n$, a lieu pour $m = n$. D'autre part, on déduit de la formule de Stirling la relation suivante pour $x > 0$

$$\Gamma(x+1) = \sqrt{2\pi}\, e^{-x} x^{\left(x+\frac{1}{2}\right)}(1+\varepsilon_x),$$

ε_x étant une quantité positive qui s'annule pour $x = \infty$ [2]; d'où, quand m croît indéfiniment,

$$\lim \sqrt[m+n]{\frac{\Gamma(2m+1)}{\Gamma(m+1)\Gamma(m+1)}} = 2.$$

Il résulte de là que, si, pour $x = x_0$, $y = y_0$, tous les termes de la série (23) ont des valeurs inférieures à une limite fixe, la série (25) sera convergente tant que l'on aura

$$|\alpha| < \frac{|x_0|}{2}, \qquad |\beta| < \frac{|y_0|}{2}.$$

---

(1) *Exercices d'Analyse*, t. III, p. 390.

(2) Serret, *Calcul intégral.*

Nous allons trouver, d'ailleurs, l'expression de la fonction $f(\alpha, \beta)$ sous forme de résidu.

Remarquons que le coefficient $\frac{(m+n+2)!}{m!\,n!}$ est celui de $x^m y^n$ dans le développement en série entière de la fonction $\frac{1.2}{(1-x-y)^3}$.

Par conséquent, dans le produit des deux séries

$$F(u, v) = \Sigma A_{m,n} u^{m+1} v^{n+1},$$

$$\frac{1.2}{u^2 v^2 \left(1 - \frac{\alpha}{u} - \frac{\beta}{v}\right)^3} = \frac{1}{u^2 v^2} \sum \frac{(m+n+2)!}{m!\,n!} \frac{\alpha^m}{u^m} \frac{\beta^n}{v^n},$$

le coefficient de $\frac{1}{uv}$ est justement égal à $f(\alpha, \beta)$.

On peut donc écrire

$$(26) \qquad f(\alpha, \beta) = -\frac{1.2}{4\pi^2} \int\int \frac{F(u, v)\, du\, dv}{\left(1 - \frac{\alpha}{u} - \frac{\beta}{v}\right)^3},$$

les intégrations relatives à u et v étant effectuées suivant des contours fermés entourant respectivement les points $u = 0$ et $v = 0$. Nous devrons, en outre, supposer réalisées les conditions suivantes, qui sont nécessaires pour que nos raisonnements soient applicables : 1° la fonction $F(u, v)$ doit être holomorphe, à l'intérieur de la surface déterminée par l'ensemble de ces deux contours dans l'espace à quatre dimensions des variables complexes; 2° sur les contours d'intégration la fonction $\frac{1}{1 - \frac{\alpha}{u} - \frac{\beta}{v}}$ doit être développable en série convergente suivant les puissances de $\frac{\alpha}{u}$ et $\frac{\beta}{v}$, ce qui exige que l'on ait

$$\left|\frac{\alpha}{u} + \frac{\beta}{v}\right| < 1.$$

Il est facile de vérifier que la fonction $f(\alpha, \beta)$ définie par la formule (25) satisfait bien aux conditions que nous nous sommes imposées. Considérons en effet l'intégrale

$$\int\int f(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta = -\frac{1.2}{4\pi^2}\int\int d\alpha\, d\beta \int\int \frac{F(u, v)\, du\, dv}{\left(1-\frac{\alpha}{u}-\frac{\beta}{v}\right)^3 u^2 v^2},$$

pour laquelle la limite variable du champ d'intégration relatif aux variables α, β est la droite

$$\frac{\alpha}{\xi}+\frac{\beta}{\eta}-1=0.$$

En intervertissant les intégrations relatives aux deux couples de variables (u, v), (α, β), on a d'abord à calculer

$$1.2\int\int \frac{d\alpha\, d\beta}{\left(1-\frac{\alpha}{u}-\frac{\beta}{v}\right)^3 u^2 v^2},$$

dont la valeur dans le champ considéré est égale à

$$\frac{\xi\eta}{(u-\xi)(v-\eta)\, uv}.$$

L'intégration par rapport à (u, v) nous donne ensuite

$$-\frac{1}{4\pi^2}\int\int \frac{F(u, v)\, \xi\eta\, du\, dv}{(u-\xi)(v-\eta)\, uv} = F(\xi, \eta) - F(0, \eta) - F(\xi, 0) + F(0, 0).$$

Notre formule est donc vérifiée.

La fonction $f(\alpha, \beta)$ peut être regardée comme une sorte de généralisation de la dérivée de $F(u, v)$. En effet, cette fonction du point (α, β) donne naissance à la fonction de droite $F(u, v)$ par une intégration à limite rectiligne variable, exactement comme la dérivée $f'(x)$ permet d'engendrer par intégration la fonction $f(x)$. En outre, la formule qui donne $f(\alpha, \beta)$ présente une remarquable analogie avec celle qui donne, d'après Cauchy, la dérivée d'une fonction d'une seule variable.

On peut assigner une limite supérieure au module de $f(\alpha, \beta)$. Supposons que l'on prenne comme courbes d'intégration relativement à u

et v des cercles de rayons R, R' ayant pour centres les points $u = 0$ et $v = 0$. Soit M le maximum du module de $F(u, v)$ dans le champ limité par l'ensemble de ces deux courbes, δ le minimum de

$$\left|1 - \frac{\alpha}{u} - \frac{\beta}{v}\right|$$

pour les valeurs de u et de v situées sur les cercles considérés. On a évidemment

$$\operatorname{mod} f(\alpha, \beta) < \frac{2M}{\delta^3 RR'}.$$

11. Nous ne pourrions, sans trop nous écarter de notre sujet, faire dans ce Mémoire une étude complète de ces intégrales doubles. Je me propose de traiter cette question dans un travail à part en me bornant ici à quelques traits essentiels. Sans effectuer l'inversion de notre intégrale double dans le cas général, nous pouvons cependant, d'après ce qui précède et sous certaines réserves, regarder nos intégrales doubles comme jouissant de toute la généralité des fonctions analytiques de deux variables indépendantes, quelle que soit la courbe analytique qui sert de limite fixe, ou les courbes à deux paramètres qui servent de limites variables.

Observons cependant que la généralisation immédiate de la théorie précédente dans le cas des limites curvilignes variables, consiste à prendre comme champ d'intégration le triangle formé par deux courbes fixes de la famille et une courbe variable. Lorsque la limite fixe est une courbe quelconque d'une autre nature, les valeurs de x et de y qui correspondent au cas où la courbe limite variable vient toucher la limite fixe donnent une courbe de points critiques algébriques (courbe de ramification) de la fonction définie par l'intégrale double, si toutefois la fonction *intégrande* $f(\alpha, \beta)$ est holomorphe. Si, dans cette hypothèse, la fonction $f(\alpha, \beta)$ ne s'annule pas identiquement sur la courbe limite fixe, la courbe correspondante décrite par le point (x, y) est, en général, un lieu de zéros d'ordre $\frac{3}{2}$ de l'intégrale. Ce fait ne constitue pas une difficulté réelle au point de vue où nous nous plaçons, car la fonction $f(\alpha, \beta)$ n'est pas *nécessairement* holomorphe dans le voisinage de la courbe limite.

12. Nous allons maintenant montrer que les intégrales de la forme

$$\int\int f(\alpha, \beta)\, u(x, y, \alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta$$

possèdent, sous certaines conditions, le même degré de généralité que les précédentes, où la fonction *intégrande* ne contenait pas les variables x et y. Nous représenterons encore par des droites les limites variables du champ d'intégration.

Considérons d'abord l'intégrale

$$\int\int u(x, y, \alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta$$

dont la valeur est une fonction de droite, $\psi(x, y)$. Nous supposerons que l'on puisse lui faire correspondre une fonction $\nu(\alpha, \beta)$ ne s'annulant pas dans le champ d'intégration et telle que l'on ait

$$\psi(x, y) = \int\int \nu(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta = \int\int u(x, y, \alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta.$$

Nous dirons, pour abréger, que $\nu(\alpha, \beta)$ est l'*intégrande* de $\psi(x, y)$.

Soit, d'autre part, $F(x, y)$ une fonction de droite à laquelle corresponde une *intégrande* $\varphi(\alpha, \beta)$ relative au champ considéré

$$F(x, y) = \int\int \varphi(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta.$$

Il s'agit de démontrer que l'on peut trouver une fonction $f(\alpha, \beta)$ telle que l'on ait

$$\int\int \varphi(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta = \int\int f(\alpha, \beta)\, u(x, y, \alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta.$$

Si $u(x, y, \alpha, \beta)$ se réduisait à $\nu(\alpha, \beta)$, on aurait

$$f(\alpha, \beta) = \frac{\varphi(\alpha, \beta)}{\nu(\alpha, \beta)}.$$

Nous prendrons donc comme première valeur approchée de $f(\alpha, \beta)$

$$f_0(\alpha, \beta) = \frac{\varphi(\alpha, \beta)}{v(\alpha, \beta)}.$$

Considérons la différence

$$\begin{aligned}
\mathrm{F}(x, y) - \int\int \frac{\varphi(\alpha, \beta)}{v(\alpha, \beta)} u(x, y, \alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta
&= \int\int \frac{\varphi(\alpha, \beta)}{v(\alpha, \beta)} [v(\alpha, \beta) - u(x, y, \alpha, \beta)]\, d\alpha\, d\beta \\
&= \int\int f_0(\alpha, \beta)(v - u)\, d\alpha\, d\beta.
\end{aligned}$$

A cette différence correspondra une fonction intégrande $\varphi_1(\alpha, \beta)$, dont nous déduirons une nouvelle fonction $f_1(\alpha, \beta)$ par la formule

$$f_1(\alpha, \beta) = \frac{\varphi_1(\alpha, \beta)}{v(\alpha, \beta)},$$

puis nous passons de la même manière à une fonction $f_2(\alpha, \beta)$ et ainsi de suite. On a successivement, en représentant par $\mathrm{D}(\omega)$ l'intégrande d'une fonction quelconque ω relative à notre champ d'intégration,

$$(27)\quad \left\{\begin{array}{l}
f_0 = \dfrac{\mathrm{DF}}{v(\alpha, \beta)}, \\
f_1 = \dfrac{\mathrm{D}\int\int f_0 (v - u)\, d\alpha\, d\beta}{v(\alpha, \beta)}, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\
f_n = \dfrac{\mathrm{D}\int\int f_{n-1} (v - u)\, d\alpha\, d\beta}{v(\alpha, \beta)}, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,
\end{array}\right.$$

équations qui sont équivalentes aux suivantes :

$$(28)\quad \left\{\begin{array}{ll}
\int\int f_0 v\, d\alpha\, d\beta & = \int\int \varphi(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, & \\
\int\int f_n(\alpha, \eta) v(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta & = \int\int f_{n-1} (v - u)\, d\alpha\, d\beta. \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, &
\end{array}\right.$$

ou bien

$$(29) \quad \int\int f_{n-1}\, u(x, y, \alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta = \int\int v(\alpha, \beta)(f_{n-1} - f_n)\, d\alpha\, d\beta.$$

La série

$$f_0 + f_1 + \ldots + f_n + \ldots$$

est uniformément convergente pourvu que le champ d'intégration soit suffisamment petit. Soient, en effet,

$$M_{n-1}, \quad M_n, \quad \ldots, \quad \mu$$

des limites supérieures des modules de

$$f_{n-1}, \quad f_n, \quad \ldots, \quad 1 - \frac{u(x, y, \alpha, \beta)}{v(\alpha, \beta)},$$

S une limite supérieure de l'aire du champ d'intégration : nous aurons, d'après la formule établie au n° **10**,

$$M_n < M_{n-1} \frac{2\mu S}{\delta^3 RR'},$$

lorsque le champ d'intégration est un triangle. Dans le cas général, nous aurons une relation de même forme pourvu qu'il existe, pour le module de l'intégrande $f(\alpha, \beta)$ de la fonction $F(u, v)$ relative au système de limites considérées, une limite supérieure de la forme

$$KM,$$

k dépendant seulement du champ d'intégration et du domaine où F est holomorphe et M étant le module maximum de F. Nous supposons cette condition réalisée et l'on aura, dans cette hypothèse,

$$M_n < M_{n-1} KS.$$

Il résulte de là que notre série sera uniformément convergente pourvu que l'on ait

$$KS < 1.$$

Soit $f(\alpha, \beta)$ la somme de la série. Il s'agit de démontrer l'égalité

$$\int\int f(\alpha, \beta)\, u(x, y, \alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta = \int\int \varphi(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta.$$

Considérons la suite des équations du type (29)

$$\int\int f_0(\alpha, \beta)\, u(x, y, \alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta = \int\int (f_0 - f_1)\, v(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta,$$

$$\int\int f_1(\alpha, \beta)\, u(x, y, \alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta = \int\int (f_1 - f_2)\, v(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$\int\int f_n(\alpha, \beta)\, u(x, y, \alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta = \int\int (f_n - f_{n+1})\, v(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

On en tire par addition, en vertu de la convergence uniforme,

$$\begin{aligned}\int\int & f(\alpha, \beta)\, u(x, y, \alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta \\ &= \int\int f_0(\alpha, \beta)\, v(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta = \int\int \varphi(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta = F(x, y),\end{aligned}$$

ce qui démontre notre proposition.

13. Il est facile d'appliquer les résultats que nous venons d'obtenir à la théorie des équations linéaires.

Considérons le cas des équations du second ordre. Supposons que, par un changement de variable, on ait pris pour plan des xy une surface caractéristique, et prenons dans ce plan un réseau linéaire de courbes quelconques (non caractéristiques) que nous représenterons par une équation de la forme

$$\alpha\xi + \beta\eta + \zeta = 0, \tag{30}$$

α, β désignant des paramètres arbitraires, ξ, η, ζ des fonctions analytiques quelconques des variables x et y, telles cependant que les courbes $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$ soient simples, c'est-à-dire que les dérivées $\frac{\partial\xi}{\partial x}$, $\frac{\partial\xi}{\partial y}$, ... ne s'annulent pas identiquement sur ces courbes.

Par chaque courbe du réseau passe une surface caractéristique autre que le plan des xy et l'ensemble de ces surfaces constitue une intégrale complète que nous représenterons par l'équation

$$\varphi(x, y, z, \alpha, \beta) = 0. \tag{31}$$

Pour $z = 0$ l'équation (31) admet toutes les solutions de l'équation (30) en α et β. S'il y en a d'autres nous les supposerons en dehors du domaine limite ou nous ferons varier les paramètres, et par suite nous excluons aussi les valeurs des variables x, y pour lesquelles cette séparation ne serait plus possible.

Cela posé considérons le triangle formé dans le plan (α, β) par les axes de coordonnées et la courbe définie par l'équation (31). Pour $z = 0$ cette dernière courbe se réduit à la droite (30), du moins dans le domaine limité où nous nous plaçons. Par suite on pourra représenter, pour $z = 0$, par l'intégrale double

$$U = \int\int f(\alpha, \beta)\, u(x, y, z, \alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta, \tag{32}$$

étendue à ce triangle, toute fonction holomorphe qui peut être développée en une série de la forme

$$\sum A_{m,n} \left(\frac{\zeta}{\xi}\right)^{m+1} \left(\frac{\zeta}{\eta}\right)^{n+1}, \tag{33}$$

$u(x, y, z, \alpha, \beta)$ désignant, dans la formule (32), une intégrale primitive relative au système d'intégrales complètes considérées.

Il est évident que le développement (33) ne peut pas donner, même dans un domaine restreint, toutes les fonctions holomorphes des variables x et y s'annulant sur la courbe $\zeta = 0$. Nous compléterons les résultats obtenus en ajoutant à l'intégrale double U des intégrales simples relatives aux deux faisceaux de caractéristiques qui correspondent aux faisceaux de courbes

$$\alpha\xi + \zeta = 0,$$
$$\beta\eta + \zeta = 0.$$

Nous aurons ainsi l'intégrale

$$U_1(x, y, 0) = \int_0^{-\frac{\zeta}{\xi}} \varphi_1(\alpha)\, u(x, y, 0, \alpha, 0)\, d\alpha + \int_0^{-\frac{\zeta}{\eta}} \varphi_2(\beta)\, u(x, y, 0, 0, \beta)\, d\beta + U(x, y, 0),$$

qui peut représenter dans un certain domaine toute fonction holomorphe de (x, y) qui s'annule sur la courbe $\zeta = 0$. Si l'on suppose $z \neq 0$ il faudra remplacer des limites supérieures des deux intégrales simples par celles des racines des deux équations

$$\varphi(x, y, z, \alpha, 0) = 0, \qquad \varphi(x, y, z, 0, \beta) = 0$$

qui se réduisent respectivement à $\frac{\zeta}{\xi}$ et $\frac{\zeta}{\eta}$ pour $z = 0$. L'intégrale $U_2(x, y, z)$ ainsi obtenue est nulle sur la surface caractéristique S qui coupe le plan des xy suivant la courbe $\zeta = 0$ et se réduit pour $z = 0$ à une fonction arbitraire des variables x et y. En prenant maintenant pour base la surface caractéristique S nous pourrons déterminer de la même façon une intégrale V qui s'annule pour $z = 0$ et qui prenne sur S les valeurs d'une fonction holomorphe quelconque donnée d'avance. L'ensemble de ces deux solutions donnera donc l'intégrale holomorphe la plus générale qui s'annule sur la courbe d'intersection des deux surfaces caractéristiques. Pour compléter la solution du problème il suffira d'ajouter au résultat précédent un terme qui soit susceptible de prendre sur la courbe d'intersection des valeurs choisies d'avance. Nous prendrons pour cela une intégrale relative à un faisceau de surfaces caractéristiques dont aucune ne passe par cette courbe. Tel est, par exemple, le système formé par les surfaces caractéristiques qui coupent le plan des xy suivant les courbes du faisceau

$$\xi + \lambda\eta = 0.$$

L'intégrale primitive correspondante se déduira en général de

$$u(x, y, z, \alpha, \beta),$$

en y remplaçant β par $\lambda\alpha$ et en faisant ensuite croître α indéfiniment.

En résumé, la solution obtenue comprend *deux intégrales doubles relatives à des réseaux de surfaces caractéristiques à deux paramètres, et des intégrales simples relatives à des faisceaux à un paramètre,* auxquelles on peut ajouter des solutions particulières en nombre limité. Au point de vue de la théorie des fonctions de trois variables, la partie essentielle de la solution est fournie par les intégrales doubles. Nous nous sommes servis pour y arriver de deux réseaux de surfaces caractéristiques et de deux intégrales primitives correspondantes; nous avons dû procéder ainsi pour ramener à la forme linéaire les équations qui définissent les limites de nos intégrales doubles, en vue de l'inversion, mais il est évident que c'est là une nécessité en quelque sorte artificielle, dont nous serions affranchis par une étude plus complète du procédé de représentation.

D'ailleurs, quand on connaît une intégrale primitive relative à un système de surfaces caractéristiques, on peut en déduire une autre intégrale primitive relative à un système de surfaces caractéristiques quelconques *enveloppées par les premières*. La démonstration de cette proposition se rattache à la théorie des intégrales doubles envisagée au point de vue que nous avons indiqué et qui fera l'objet d'un prochain Mémoire.

Quand le discriminant de l'équation aux dérivées partielles des caractéristiques est différent de zéro, les surfaces caractéristiques peuvent être toutes considérées comme des enveloppes d'une famille d'intégrales complètes. Dans ce cas, la connaissance d'une seule intégrale primitive suffira pour représenter analytiquement toutes les solutions de l'équation proposée.

L'extension des résultats précédents aux équations d'ordre supérieur au second ne présente pas de difficulté sérieuse; elle peut se faire en suivant la méthode indiquée dans notre Mémoire *Sur les équations linéaires aux dérivées partielles à deux variables indépendantes* [1].

14. *Application à quelques exemples.* — I. Considérons d'abord l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \tag{1}$$

L'équation des surfaces caractéristiques admet l'intégrale complète

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha + z - \beta = 0, \tag{2}$$

α et β désignant des constantes arbitraires, et comme solution primitive correspondante on peut prendre $u = 1$. Au point de vue où nous nous sommes placés l'équation (1) est donc intégrée, puisque nous possédons les éléments nécessaires pour représenter analytiquement toutes les solutions.

II. Prenons ensuite l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - ku = 0,$$

qui peut se ramener à la précédente pour $k = 0$. Nous supposerons k constant. L'équation des surfaces caractéristiques admet l'intégrale complète

$$\alpha x + \frac{y}{\alpha} + z - \beta = 0.$$

Posons

$$Y = \alpha x + \frac{y}{\alpha} + z.$$

Parmi les intégrales primitives relatives à l'intégrale complète con-

[1] *Journal de Mathématiques*, 5e série, t. IV.

sidérée, on a la suivante :

$$u(x, y, z, \alpha, \beta) = 1 + k\alpha \frac{x(Y-\beta)}{1.1} + k^2\alpha^2 \frac{x^2(Y-\beta)^2}{1.2.1.2} + \ldots,$$

qui se rattache aux fonctions de Bessel

$$u(x, y, z, \alpha, \beta) = J_0\left[2\sqrt{k\alpha x(\beta - Y)}\right].$$

Ces éléments suffisent pour représenter toutes les intégrales.

III. Considérons enfin l'équation suivante, qui admet des caractéristiques singulières,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

L'équation aux dérivées partielles des surfaces caractéristiques est

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0.$$

Les surfaces caractéristiques singulières sont des plans parallèles au plan des xy; les autres forment deux séries de cylindres enveloppés respectivement par les deux familles de plans

$$x + \alpha z - \beta = 0,$$
$$y + \alpha z - \beta = 0.$$

Aux plans de la première famille correspond l'intégrale primitive

$$u_1 = e^{\alpha(y+z)+x-\beta}$$

et à ceux de la seconde famille l'intégrale analogue

$$u_2 = e^{\alpha(x+z)+y-\beta}.$$

Remarques. — Dans les pages qui précèdent nous avons seulement esquissé la méthode générale d'intégration des équations linéaires. Les différentes questions qui se sont présentées dans ces recherches : relations entre les intégrales primitives, application de nos résultats à l'étude des singularités, etc., donneraient lieu à des développements intéressants. Nous y reviendrons.