JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

LÉON AUTONNE

Sur les groupes quaternaires réguliers d'ordre fini. Premier mémoire: Généralités et groupes décomposables

Journal de mathématiques pures et appliquées 5e série, tome 7 (1901), p. 351-394.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1901_5_7__351_0>

Sur les groupes quaternaires réguliers d'ordre fini.
Premier Mémoire : *Généralités et groupes décomposables;*

PAR M. LÉON AUTONNE.

Introduction.

Nommons :

1° *Substitution n — aire* (*binaire, ternaire, quaternaire*, etc.) la substitution linéaire, homogène, entre les n variables z_j,

$$s_n = \left| z_j \sum_k a_{jk} z_k \right|, \qquad \text{avec} \qquad j, k = 1, 2, \ldots, n$$

ou

$$s_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0;$$

2° $\mathfrak{G}_n$, le groupe des s_n;

3° G_n, tout groupe d'ordre fini contenu dans $\mathfrak{G}_n$;

4° Π_n, le problème qui consiste à construire les différents G_n.

Le problème Π_2 est résolu depuis longtemps par MM. Klein, Gordan et Jordan.

Π_3 a été résolu par M. Jordan au Tome 84 du *Journal de Crelle*.

M. Jordan a montré aussi (Mémoire précité et Mémoire couronné par l'Académie de Naples) que tous les G_n appartiennent à un nombre de types limité, pour n donné. Abordant ensuite la solution de Π_4, M. Jordan l'a poussée assez loin et ne s'est arrêté qu'au seuil d'une discussion arithmétique, où il y avait des cas particuliers à examiner par milliers.

Le problème II_4 *général* défiera, à mon avis, encore longtemps les efforts des géomètres. Aussi le présent travail apporte-t-il simplement une contribution à l'étude de *certains* G_4, que j'ai nommés *réguliers*. Ils ont, pour propriété caractéristique, l'existence d'un *invariant absolu* commun.

Si les z sont envisagées comme des coordonnées homogènes d'un point dans l'espace, les quaternaires régulières ont pour invariant commun un certain complexe linéaire de droites, le complexe *capital*.

On trouvera dans mes Mémoires *Sur l'équation différentielle du premier ordre* insérés au *Journal de l'École Polytechnique* (1re série : 61e, 62e, 63e, 64e Cahiers; 2e série : 2e et 3e Cahiers) et aux *Annales de l'Université de Lyon* (1892), une étude géométrique détaillée des régulières, d'ordre fini ou infini.

Je fais aussi usage, dans les présentes recherches, des mêmes considérations géométriques, qui abrègent beaucoup les discussions de pure algèbre.

M. Jordan dit qu'un groupe G_n est *décomposable* dans l'éventualité suivante : les n variables z, *convenablement choisies*, peuvent se répartir en systèmes s, contenant chacun un nombre de z marqué par le *degré* du système; alors toute s_n de G_n remplace les variables d'un quelconque parmi les systèmes s par des fonctions linéaires et homogènes des variables d'un autre système s'. Suivant la terminologie adoptée, s_n *fait succéder* s' à s. Il est évident que s et s' sont du même degré.

Dans le présent Travail, après quelques explications générales sur les groupes quaternaires G_4 réguliers et d'ordre fini, je construis *tous les* G_4 *décomposables*.

Cette recherche, comme on le voit au cours du présent Travail, se ramène aux principes de M. Jordan par une discussion géométrique relativement facile. Par contre, comme le montrera un Mémoire ultérieur, la construction des groupes indécomposables exige, en outre, des méthodes spéciales.

Voilà pourquoi la matière du présent Travail est nettement circonscrite.

En ce qui concerne les groupes décomposables, voici l'énumération, pour un choix approprié de variables :

On trouve d'abord deux types à existence évidente *a priori*.

I.

G_4 provient de régulières

$$\mathfrak{A} = \begin{vmatrix} x_1 & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ x_2 & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \\ x_3 & a_{33}x_3 + a_{34}x_4 \\ x_4 & a_{43}x_3 + a_{44}x_4 \end{vmatrix},$$

avec

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = 1,$$

où les groupes P et Q dérivés respectivement des binaires

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

sont d'ordre fini.

II.

On combine un groupe $\mathfrak{A}$ du type I avec une régulière unique

$$\mathfrak{B} = \begin{vmatrix} x_1 & b_{13}x_3 + b_{14}x_4 \\ x_2 & b_{23}x_3 + b_{24}x_4 \\ x_3 & b_{31}x_1 + b_{32}x_2 \\ x_4 & b_{41}x_1 + b_{42}x_2 \end{vmatrix}$$

où

$$\begin{vmatrix} b_{13} & b_{14} \\ b_{23} & b_{24} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{vmatrix} = -1.$$

$\mathfrak{A}$ est permutable à $\mathfrak{B}$ et contient $\mathfrak{B}^2$. Les groupes P et Q ci-dessus sont transformés l'un dans l'autre par les binaires

$$\begin{pmatrix} b_{13} & b_{14} \\ b_{23} & b_{24} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{pmatrix}.$$

Viennent ensuite deux types qui admettent une quadrique invariante, $x_1 x_2 - x_3 x_4 = 0$.

III.

Le groupe provient de régulières

$$\mathcal{A} = \begin{vmatrix} x_1 & a_{11}x_1 + a_{13}x_3 \\ x_2 & \rho a_{33}x_2 + \rho a_{31}x_4 \\ x_3 & a_{31}x_1 + a_{33}x_3 \\ x_4 & \rho a_{13}x_2 + \rho a_{11}x_4 \end{vmatrix}$$

où

$$\rho^{-1} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = \text{racine de l'unité},$$

le groupe binaire des substitutions

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$$

étant d'ordre fini.

IV.

Le groupe s'obtient en combinant un groupe $\mathfrak{A}$ du type III avec une régulière unique

$$\mathcal{B} = \begin{vmatrix} x_1 & b_{12}x_2 + b_{14}x_4 \\ x_2 & \sigma b_{34}x_1 + \sigma b_{32}x_3 \\ x_3 & b_{32}x_2 + b_{34}x_4 \\ x_4 & \sigma b_{14}x_1 + \sigma b_{12}x_3 \end{vmatrix}$$

où

$$\begin{vmatrix} b_{12} & b_{14} \\ b_{32} & b_{34} \end{vmatrix} = -\sigma^{-1}.$$

$\mathfrak{A}$ contient $\mathfrak{B}^2$ et est permutable à $\mathfrak{B}$.

Le dernier type de l'énumération est d'ordre quarante-huit et isomorphe au groupe général des déplacements entre quatre lettres.

V.

Le groupe s'obtient en transformant le groupe *irrégulier* dérivé des trois substitutions

$$\begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ z_2 & z_3 \\ z_3 & z_1 \\ z_4 & z_4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ z_2 & -z_1 \\ z_3 & -z_4 \\ z_4 & z_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} z_1 & iz_1 \\ z_2 & iz_3 \\ z_3 & iz_2 \\ z_4 & -iz_4 \end{vmatrix} \qquad (i^2 + 1 = 0),$$

par la substitution

$$\begin{vmatrix} z_1 & x_1 + \tau x_2 + \tau x_4 \\ z_2 & x_1 + \tau\theta^2 x_3 + \tau\theta x_4 \\ z_3 & x_1 + \tau\theta x_3 + \tau\theta^2 x_4 \\ z_4 & x_2 \end{vmatrix} \qquad \left(3\tau^2 = \theta - \theta^2,\ \theta = e^{\frac{2\pi i}{3}}\right),$$

qui réintroduit les variables x, analogues à celles des quatre premiers types.

On voit que (sauf pour le type V, dont la structure est parfaitement déterminée) dans l'expression des groupes décomposables ne figurent jamais que des groupes binaires et jamais ternaires. Ce résultat est précieux et voici pourquoi : en vertu des méthodes de M. Jordan, la discussion des groupes indécomposables est fondée sur celle des groupes décomposables. On se trouve donc affranchi, pour le problème général des G_4 réguliers, de l'incertitude qui subsiste encore sur la liste complète des groupes ternaires d'ordre fini.

Un travail ultérieur sera consacré aux groupes réguliers d'ordre fini indécomposables ou généraux.

CHAPITRE I.

RÉGULARITÉ ALGÉBRIQUE.

1. Considérons une substitution s_n linéaire n — aire (binaire, ternaire, quaternaire, ...), c'est-à-dire à n variables homogènes, savoir :

$$s_n = \left| x_i \quad \sum_j a_{ij} x_j \right| \qquad (i, j, = 1, 2, \ldots, n),$$

le déterminant des n^2 constantes a_{ij} étant $\neq 0$.

Je nommerai $A \neq 0$ ce déterminant et poserai

$$A_{ij} = \frac{\partial A}{\partial a_{ij}}.$$

Pour plus de commodité, dans divers cas, on désignera s_n par plusieurs notations différentes :

$$s_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} = (a_{ij}).$$

Si l'on nomme $s_n[P]$ ce que devient par l'effet de s_n une fonction homogène P des x_i, on aura

$$s_n[x_i] = \sum_j a_{ij} x_j$$

et l'on pourra écrire

$$s_n = | x_i \quad s_n[x_i] |.$$

2. Nommons *transposée* s'_n de s_n la substitution

$$s'_n = (a_{ji}) = (a'_{ij}).$$

Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux s_n quelconques, on vérifiera sans peine que

$$(\mathcal{A}\mathcal{B})' = \mathcal{B}'\mathcal{A}'$$

la transposée d'un produit est identique avec le produit des transposées des facteurs pris en ordre inverse.

Par suite $(\mathcal{A}')^{-1} = (\mathcal{A}^{-1})'$: *la transposée de l'inverse est l'inverse de la transposée.*

C'est d'ailleurs évident, car si $\mathcal{A} = (a_{ij})$, on a

$$\mathcal{A}' = (a_{ji}), \qquad \mathcal{A}'^{-1} = (\mathrm{A}^{-1}\mathrm{A}_{ij}),$$
$$\mathcal{A}^{-1} = (\mathrm{A}^{-1}\mathrm{A}_{ji}), \qquad (\mathcal{A}^{-1})' = (\mathrm{A}^{-1}\mathrm{A}_{ij}).$$

3. Prenons maintenant une quaternaire

$$\mathcal{A} = (a_{ij}) \qquad (i, j = 1, 2, 3, 4),$$

le déterminant A des a_{ij} étant $\neq 0$.

Je dis que $\mathcal{A}$ est *régulière* si $\mathcal{A}$ admet pour invariant la forme bilinéaire

$$(xy) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_3 & x_4 \\ y_3 & y_4 \end{vmatrix}$$

des huit quantités quelconques x_i et y_i. Autrement dit, une régulière doit reproduire (xy) à un facteur constant près.

Cherchons les conditions de régularité.

4. Avec les notations du n° **1**, on a

$$\mathcal{A}[(xy)] = \sum_i \sum_j x_i y_j \{a_{1i}a_{2j} - a_{2i}a_{1j} - a_{3i}a_{4j} + a_{4i}a_{3j}\}.$$

Posons

$$(ij) = \begin{vmatrix} a_{1i} & a_{1j} \\ a_{2i} & a_{2j} \end{vmatrix}, \qquad (ij)' = \begin{vmatrix} a_{3i} & a_{3j} \\ a_{4i} & a_{4j} \end{vmatrix},$$
$$p_{ij} = -p_{ji} = (ij) - (ij)',$$

avec les relations connues

$$0 = (12)(34) + (23)(14) + (31)(24) = (12)'(34)' + \ldots$$
$$(12)(34)' + (23)(14)' + (31)(24)' + (12)'(34) + (23)'(14) + (31)'(24) = \mathrm{A}.$$

Il viendra

$$\mathcal{A}[(xy)] = \sum_i \sum_j x_i y_j p_{ij}.$$

Mais

$$(xy) = \sum_j u_j y_j$$

avec

$$u_1 = -x_2, \qquad u_2 = x_1, \qquad u_3 = x_4, \qquad u_4 = -x_3.$$

On doit donc avoir

$$\sum_i x_i p_{ij} = \mathrm{M} u_j,$$

c'est-à-dire le système

$$(1)\quad \begin{cases} (p_{21}+\mathrm{M})x_2 + p_{31}x_3 + p_{41}x_4 = 0, \\ (p_{12}-\mathrm{M})x_1 + p_{32}x_3 + p_{42}x_4 = 0, \\ p_{13}x_1 + p_{23}x_2 + (p_{43}-\mathrm{M})x_4 = 0, \\ p_{14}x_1 + p_{24}x_2 + (p_{34}+\mathrm{M})x_3 = 0. \end{cases}$$

Le déterminant des coefficients des x dans le système (1) est gauche et l'on a

$$\begin{aligned} 0 &= (p_{21}+\mathrm{M})(p_{43}-\mathrm{M}) + p_{13}p_{42} + p_{32}p_{41} \\ &= -\mathrm{M}^2 + \mathrm{M}(p_{43}-p_{21}) + p_{21}p_{43} + \ldots, \\ &\quad p_{21}p_{43} + \ldots = \{(12)-(12)'\}\{(34)-(34)'\} + \ldots \\ &= (12)(34) + \ldots + (12)'(34)' + \ldots - (12)(34)' - (12)'(34)\ldots \\ &= -\mathrm{A}. \end{aligned}$$

Finalement

$$\mathrm{M}^2 - \mathrm{MK}^0 + \mathrm{A} = 0$$

avec

$$\mathrm{K}^0 = (12) - (34) - (12)' + (34)' = p_{12} - p_{34}.$$

Les quatre égalités du système (1) sont des identités en x_i; il vient

$$0 = p_{23} = p_{14} = p_{31} = p_{24} = p_{21} + \mathrm{M} = p_{43} - \mathrm{M}.$$

On tire de là

$$(2)\qquad \begin{cases} p_{12} = (12) - (12)' = M \\ p_{34} = (34) - (34)' = -M \end{cases},$$

$$(3)\qquad \begin{cases} (12)' = (12) - M \\ (34)' = (34) + M \end{cases},$$

$$(23)' = (23), \qquad (14)' = (14),$$

$$(31)' = (31), \qquad (24)' = (24).$$

L'égalité

$$(12)'(34)' + (23)'(14)' + (31)'(24)' = 0$$

devient

$$0 = [(12) - M][(34) + M] + (23)(14) + (31)(24) = M(M - K),$$
$$K = (12) - (34).$$

On ne peut avoir $M = 0$ puisque

$$0 = M^2 - M(p_{12} - p_{34}) + A \qquad \text{avec} \qquad A \neq 0.$$

Donc, sous le bénéfice de (2),

$$M = K, \qquad p_{12} - p_{34} = 2M, \qquad M^2 = A,$$

et, sous le bénéfice de (3),

$$(12)' = (34), \qquad (34)' = (12).$$

5. En résumé, les conditions de régularité sont

$$(12)' = (34), \qquad (23)' = (23), \qquad (31)' = (31),$$
$$(34)' = (12), \qquad (14)' = (14), \qquad (24)' = (24).$$

$\mathcal{A}$ multiplie l'invariant (xy) par le facteur

$$K = (12) - (34) = A^{\frac{1}{2}},$$

racine carrée du déterminant de $\mathcal{A}$.

6. Nommons, avec M. Jordan, *singulière* ρ, toute quaternaire (ou même toute n — aire) qui multiplie toutes les variables par un même facteur ρ. Toute singulière est à la fois régulière et échangeable à une quaternaire quelconque.

Si la régulière $\mathcal{A} = (a_{ij})$ multiplie l'invariant (xy) par le facteur K $[K^2 = A$, $\mathcal{A} =$ déterminant de $\mathcal{A}]$, la régulière $\rho\mathcal{A} = (\rho a_{ij})$ multiplie (xy) par $\rho^2 K$. Le déterminant de $\rho\mathcal{A}$ est

$$\rho^4 A = (\rho^2 K)^2.$$

Si donc je choisis pour ρ la valeur $K^{-\frac{1}{2}}$ ou $A^{-\frac{1}{4}}$, la régulière $\rho\mathcal{A}$ aura la double propriété :

1° D'avoir l'unité pour valeur du déterminant;

2° D'admettre (xy) pour invariant *absolu*.

Toutes les régulières que je considérerai dorénavant posséderont, par hypothèse, les propriétés qui viennent d'être dites. On supposera toujours

$$K = (12) - (34) = A = 1.$$

7. En définitive, nous écrirons pour conditions de régularité

$$(o) \qquad \left\{ \begin{array}{ccc} & (12) - (34) = 1 & \\ (12)' = (34), & (23)' = (23), & (31)' = (31) \\ (34)' = (12), & (14)' = (14), & (24)' = (24) \end{array} \right\}.$$

Si l'on a satisfait aux deux dernières équations des deux dernières lignes du système (o), l'égalité identique

$$(12)'(34)' + (23)'(14)' + (31)'(24)' = 0$$

se réduit, sous le bénéfice de $(12)(34) + \ldots = 0$, à l'identité

$$(12)'(34)' = (12)(34),$$

et il suffit de satisfaire à l'une des deux premières équations des deux dernières lignes du système (o) pour satisfaire à l'autre équation.

Les sept conditions du système (o) *se réduisent à six distinctes.*

La régulière générale comporte dix paramètres; il y a dans l'espace ∞^{10} régulières.

Il y en aurait ∞^{11}, si l'on n'astreignait plus xy à être un invariant absolu.

8. Nommons ε la régulière

$$\varepsilon = \left|\, x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \qquad x_2 \quad -x_1 \quad -x_4 \quad x_3 \,\right|,$$
$$\varepsilon^2 = \left|\, x_i \qquad -x_i \,\right| = \text{singulière},$$

et $\mathcal{A}'$ la *transposée* de $\mathcal{A}$ (n° **2**).

Les conditions de régularité expriment que

$$\mathcal{A}'^{-1} = \varepsilon^{-1}\mathcal{A}\varepsilon = \begin{vmatrix} a_{22} & -a_{21} & -a_{24} & a_{23} \\ -a_{12} & a_{11} & a_{14} & -a_{13} \\ -a_{42} & a_{41} & a_{44} & -a_{43} \\ a_{32} & -a_{31} & -a_{34} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

De là

$$a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44} = A_{11} + \ldots + A_{44},$$

et l'équation caractéristique

$$\Delta(\rho) = \begin{vmatrix} a_{11}-\rho & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22}-\rho & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\rho & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}-\rho \end{vmatrix}$$
$$= \rho^4 - S_1\rho^3 + S_2\rho^2 - S_3\rho + 1 = 0,$$

avec

$$S_1 = a_{11} + \ldots + a_{44}, \qquad S_3 = A_{11} + \ldots + A_{44},$$

est *réciproque*.

9. Si deux régulières $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ admettent (xy) pour invariant, il en est de même pour le produit $\mathcal{A}\mathcal{B}$. Donc *les régulières forment un groupe*, le groupe *régulier*.

Le but principal de ces recherches est de construire les groupes réguliers d'ordre fini.

Soit G un pareil groupe, construit, comme il est stipulé au n° **6**, pour (xy) invariant absolu. G contiendra un faisceau Φ de substitutions singulières.

Si l'on n'astreint plus (xy) à être un invariant absolu, cela revient (n° **6**) à multiplier chaque régulière de G par une certaine singulière. La constitution du faisceau Φ subit seule une modification.

Soit, pour (xy) invariant absolu, une singulière

$$|x_i \quad \rho x_i|,$$

il faudra avoir $\rho^2 = 1$; Φ contiendra une ou deux régulières, savoir l'unité et

$$\mathcal{K} = |x_i \quad -x_i|.$$

CHAPITRE II.

RÉGULARITÉ GÉOMÉTRIQUE.

10. Dans un espace ordinaire $\mathcal{E}$ à trois dimensions, prenons des coordonnées homogènes, $i = 1, 2, 3, 4$,

$$\left\{\begin{array}{l}\text{coordonnées-points } x_i \text{ d'un point } x \\ \text{coordonnées-plans } u_i \text{ d'un plan } u\end{array}\right\}.$$

La valeur absolue des coordonnées sera donnée par les relations

$$x_0 = \sum_i e_i x_i = \sum e x = 1,$$

$$u_0 = \sum h u = 1,$$

les coefficients numériques e_i et h_i étant arbitrairement fixés une fois pour toutes.

Si une droite g de $\mathcal{E}$ est l'intersection de deux *plans* a et b, g aura pour ses six coordonnées-plans homogènes les six déterminants

$$|ij| = \begin{vmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{vmatrix}$$

$$(12)(34) + (23)(14) + (31)(24) = 0.$$

Si g passe par les deux *points* a et b, elle aura pour coordonnées-points homogènes les six déterminants

$$|ij|^0 = \begin{vmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{vmatrix}.$$

Pour une même droite, les coordonnées-plans $|ij|$ et les coordonnées-points $|ij|^0$ satisfont aux relations

$$\frac{|12|^0}{|34|} = \frac{|34|^0}{|12|} = \frac{|23|^0}{|14|} = \frac{|14|^0}{|23|} = \frac{|31|^0}{|24|} = \frac{|24|^0}{|31|}.$$

11. Tout cela rappelé, nommons *capitale* toute droite pour laquelle on a

$$|12| - |34| = 0 \qquad \text{ou} \qquad |12|^0 - |34|^0 = 0.$$

Le lieu des capitales est un complexe linéaire *capital* dont l'équation s'écrit

$$|12| - |34| = 0 \qquad \text{ou} \qquad |12|^0 - |34|^0 = 0.$$

La théorie générale des complexes linéaires nous apprend que les droites capitales

situées dans un plan M, passent toutes par un même point m, *centre* de M.

passant par un point m sont toutes situées dans un plan M, *plan central* de m.

Le centre du plan u est le point ξ

$$u_2, \quad -u_1, \quad -u_4, \quad u_3.$$

En effet, si y est un point de u, on a pour la droite $y\xi$

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ u_2 & -u_1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} y_3 & y_4 \\ -u_4 & u_3 \end{vmatrix} = |12|^0 - |34|^0$$
$$= -\Sigma uy = 0.$$

Pareillement le plan central du point x a pour coordonnées

$$x_2, \quad -x_1, \quad -x_4, \quad x_3.$$

Si m est le centre du plan M, on a

$$M_i = \varepsilon[m_i],$$

ε étant la substitution ainsi désignée au n° **8** et les crochets [ ] ayant la signification marquée au n° **1**.

12. On sait aussi que les droites de l'espace $\mathcal{E}$ sont deux à deux (g et g') *conjuguées* par rapport au complexe capital.

g' est le lieu des centres pour les plans passant par g (et réciproquement).

Une capitale coïncide avec sa conjuguée.

Si g est l'intersection des deux plans a et b, le plan M de coordonnées $a_i + \mu b_i$ tourne autour de g quand μ varie. Le centre m de M a pour coordonnées

$$m_1 = a_2 + \mu b_2, \qquad -m_2 = a_1 + \mu b_1,$$
$$-m_3 = a_4 + \mu b_4, \qquad m_4 = a_3 + \mu b_3.$$

Le lieu du point m est une droite dont les $|ij|^0$ sont les déterminants de la matrice

$$\begin{Vmatrix} a_2 & -a_1 & -a_4 & a_3 \\ b_2 & -b_1 & -b_4 & b_3 \end{Vmatrix},$$

On a donc pour les coordonnées-plans $|ij|$ correspondantes

$$\begin{array}{lcccccc} \text{de } g' & |34| & |12| & |23| & |14| & |31| & |24|, \\ \text{de } g & |12| & |34| & |23| & |14| & |31| & |24|. \end{array}$$

13. Nommons :

ϖ le tétraèdre de référence;
T_i la face $x_i = 0$ de ϖ;
τ_i le sommet de ϖ opposé à la face T_i;
g_{ij} l'arête $x_i = x_j = 0$ de ϖ.

On voit immédiatement que :

g_{12} et g_{34} sont conjuguées et non capitales;
$g_{23}, g_{14}, g_{31}, g_{24}$ sont capitales;
$\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$ sont respectivement les centres des faces T_2, T_1, T_4, T_3.

Pour éviter des redites, nous conserverons constamment les notations du présent numéro.

Je nommerai *tétraèdre normal* $\mathfrak{N}$ tout tétraèdre où deux arêtes opposées sont conjuguées. Les quatre autres sont alors capitales. Le tétraèdre de référence ϖ est normal.

14. Si je fais (ce qui m'arrivera quelquefois) usage d'un tétraèdre de référence qui ne sera pas forcément normal, les coordonnées-points seront désignées non plus par x_i mais (afin d'avertir le lecteur) par z_i.

15. Nommons *courbe intégrante* toute courbe ayant ses tangentes capitales. Les intégrantes sont évidemment caractérisées par la relation infinitésimale

$$(x\,dx) = \begin{vmatrix} dx_1 & dx_2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} dx_3 & dx_4 \\ x_3 & x_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Soient $\varphi_i(x_1, x_2, x_3, x_4)$ quatre fonctions homogènes de degré quelconque λ. Nommons A la substitution *géométrique* qui remplace le point x par le point y, des coordonnées $y_i = \varphi_i \varphi_0^{-1}$, $\varphi_0 = \Sigma c \varphi$ (**10**), de façon que $\Sigma c y = y_0 = 1$. A s'écrira par le symbole

$$A = | x_i \qquad \varphi_0^{-1} \varphi_i |.$$

A sera *régulière* si elle change une intégrante quelconque en une autre intégrante.

Je vais montrer que cette définition géométrique de la régularité conduit, pour $\lambda = 1$, précisément à la régularité algébrique, telle qu'elle est définie au Chapitre I.

16. Pour la régularité géométrique, il est nécessaire et suffisant que la relation $(y\,dy) = 0$ soit la conséquence de $(x\,dx) = 0$. Les différentielles dx_i sont quelconques, sous la condition *unique*

$$dx_0 = \Sigma e\,dx = 0.$$

Posons

$$\varphi_{ij} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j},$$

d'où (th. d'Euler)

$$\lambda \varphi_i = \sum_j \varphi_{ij} x_j \qquad \text{et} \qquad d\varphi_i = \sum_j \varphi_{ij}\,dx_j.$$

Ensuite $dy_i = \varphi_0^{-2}\{\varphi_0\,d\varphi_i - \varphi_i\,d\varphi_0\}$, puisque $y_i = \varphi_i \varphi_0^{-1}$, et

$$(y\,dy) = \varphi_0^{-2}(\varphi\,d\varphi).$$

Posons

$$(ij) = \begin{vmatrix} \varphi_{1i} & \varphi_{1j} \\ \varphi_{2i} & \varphi_{2j} \end{vmatrix}, \qquad (ij)' = \begin{vmatrix} \varphi_{3i} & \varphi_{3j} \\ \varphi_{4i} & \varphi_{4j} \end{vmatrix}, \qquad p_{ij} = (ij) - (ij)',$$

il viendra

$$(y\,dy) = \frac{1}{\lambda\varphi_0^2} \sum_{ij} x_i\,dx_j\{\varphi_{2i}\varphi_{1j} - \varphi_{1i}\varphi_{2j} - \varphi_{4i}\varphi_{3j} + \varphi_{3i}\varphi_{4j}\}$$

$$= \frac{\sum_{ij} x_i\,dx_j\,p_{ji}}{\lambda\varphi_0^2} = \frac{\sum_j \mathrm{U}_j\,dx_j}{\lambda\varphi_0^2}.$$

Cette expression linéaire et homogène en dx_j doit être une combinaison linéaire et homogène de $(x\,dx)$ et de $dx_0 = \Sigma e\,dx$. Il doit exister deux fonctions M et ρ des x_i telles que l'on ait identiquement entre les dx_j

$$\Sigma U\,dx = M(x\,dx) + \rho\Sigma e\,dx,$$

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} U_1 = Mx_2 + \rho e_1 \\ U_2 = -Mx_1 + \rho e_2 \\ U_3 = -Mx_4 + \rho e_3 \\ U_4 = Mx_3 + \rho e_4 \end{array}\right\}, \qquad U_j = \sum_i x_i p_{ji}.$$

L'expression $\Sigma U x \equiv 0$ comme proportionnelle à $(\varphi\varphi)$;

$$\Sigma ex = x_0 = 1.$$

Le système (1) fournit donc

$$0 = \Sigma U x = \rho x_0, \qquad \text{d'où} \qquad \rho = 0.$$

On retombe sur un système analogue au système (1) du nº **4** et l'on a encore

$$M^2 - MK^0 + \Phi = 0,$$

Φ étant le déterminant des φ_{ij}, c'est-à-dire le jacobien des φ_i, et

$$K^0 = (12) - (34) - (12)' + (34)'.$$

17. Lorsque $\lambda = 1$, les φ_{ij} sont des constantes ainsi que Φ et K^0; M est aussi une constante. Chacune des quatre relations du système (1) du nº **16** représente un plan. Or x est quelconque dans l'espace et chacune des quatre égalités devient une identité entre les x_i. Le calcul s'achève comme au Chapitre I et l'on trouve les mêmes conditions de régularité. C. Q. F. D.

18. Il est évident qu'une régulière $\mathcal{A}$ change :

Une capitale en une autre capitale;

Deux droites conjuguées en deux autres conjuguées aussi;

Un tétraèdre normal (nº **13**) en un tétraèdre normal;

Un système formé par un plan et son centre en un système analogue, etc.

19. La régulière $\mathcal{A}$ effectuée sur les coordonnées-points x_i dans l'espace $\mathcal{E}$ se traduit sur les coordonnées-plans u_i par l'inverse $\mathcal{A}'^{-1}$ de la transposée (n° **2**). Mais, le point x étant le centre du plan u (n° **11**), on a

$$u_2 = x_2, \qquad u_2 = -x_1, \qquad u_3 = -x_4, \qquad u_1 = x_3,$$

c'est-à-dire $u_i = \varepsilon[x_i]$ (n°s **1** et **2**). Il faut donc avoir forcément

$$\Lambda'^{-1} = \varepsilon^{-1}\mathcal{A}\varepsilon,$$

comme nous le savions déjà (n° **8**).

20. Au point de vue géométrique, la multiplication de la régulière $\mathcal{A}$ par une singulière (n° **6**) quelconque est une opération indifférente. Je supposerai dorénavant toujours (comme aux n°s **6** et **7**) que les *sept* conditions de régularité sont

$$\left\{\begin{array}{lll} (12)' = (34), & (23)' = (23), & (31)' = (31) \\ (34)' = (12), & (14)' = (14), & (24)' = (24) \\ & (12) - (34) = 1 & \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{(dont six} \\ \text{distinctes} \\ \text{seulement),}\end{array}$$

et que l'invariant (xy) du Chapitre I est absolu.

Une singulière

$$|x_i \quad kx_i|$$

donne simplement $k^2 = 1$. Nous envisagerons donc une seule régulière singulière autre que l'unité, c'est

$$\mathcal{K} = |x_i \quad -x_i|.$$

Au point de vue géométrique, $\mathcal{K}$ se confond avec la substitution unité.

21. La construction des groupes réguliers d'ordre fini sera précédée par l'établissement de diverses propositions géométriques qui ont l'avantage d'abréger les discussions purement algébriques. Ces propositions sont, d'ailleurs, le développement des théories du présent Chapitre.

CHAPITRE III.

CHOIX DU TÉTRAÈDRE DE RÉFÉRENCE.

22. Soient P et P′ deux figures analogues de l'espace (deux plans, deux points, deux tétraèdres, etc.). S'il existe au moins une régulière $\mathcal{A}$ qui transforme P en P′, $\mathcal{A}^{-1}$, aussi régulière, transformera P′ en P. Nous dirons alors que les deux figures peuvent être *régulièrement amenées l'une sur l'autre.*

23. *Tout tétraèdre normal* (n° **13**) $\mathfrak{U}$ *peut être régulièrement amené sur le tétraèdre de référence* $\mathfrak{T}$.

Soient

$$P_i = \sum_j p_{ij} x_j = 0 \qquad (i, j = 1, 2, 3, 4)$$

les équations des quatre faces de $\mathfrak{U}$.

Nommons $P_1 = P_2 = 0$ et $P_3 = P_4 = 0$ les deux arêtes conjuguées; on aura, en posant

$$q_{ij} = \begin{vmatrix} p_{1i} & p_{1j} \\ p_{2i} & p_{2j} \end{vmatrix}, \qquad q'_{ij} = \begin{vmatrix} p_{3i} & p_{3j} \\ p_{4i} & p_{4j} \end{vmatrix},$$

les relations suivantes (n° **12**) :

$$\text{(o)} \qquad \frac{q'_{12}}{q_{34}} = \frac{q'_{34}}{q_{12}} = \frac{q'_{31}}{q_{31}} = \frac{q'_{24}}{q_{24}} = \frac{q'_{23}}{q_{23}} = \frac{q'_{14}}{q_{14}} = \rho.$$

La substitution quaternaire $\mathcal{A} = (a_{ij}) = (r_i p_{ij})$, où les r_i sont des constantes, change $\mathfrak{T}$ en $\mathfrak{U}$; $\mathcal{A}^{-1}$ change $\mathfrak{U}$ en $\mathfrak{T}$, et tout cela quels que soient les paramètres r. Exprimons que la quaternaire $\mathcal{A}$ est régulière. Il viendra

$$(ij) = r_1 r_2 q_{ij}, \qquad (ij)' = r_3 r_4 q'_{ij}.$$

Les conditions de régularité sont ainsi, sous le bénéfice des relations (o),

$$\begin{aligned}
(12)' &= r_3 r_4 q'_{12} = (34) = r_1 r_2 q_{34} = r_3 r_4 \rho\, q_{34},\\
(34)' &= r_3 r_4 q'_{34} = (12) = r_1 r_2 q_{12} = r_3 r_4 \rho\, q_{12},\\
(23)' &= r_3 r_4 q'_{23} = (23) = r_1 r_2 q_{23} = r_3 r_4 \rho\, q_{23},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$0 = q_{12}\delta = q_{34}\delta = q_{23}\delta = q_{14}\delta = q_{31}\delta = q_{24}\delta,$$
$$\delta = r_1 r_2 - \rho\, q_3 q_4.$$

La condition $\delta = 0$ est suffisante; elle est aussi nécessaire, car un au moins des q n'est pas zéro. C. Q. F. D.

24. Un corollaire évident est celui-ci : *Les divers tétraèdres normaux de l'espace se permutent transitivement.* Un quelconque peut être régulièrement amené sur un quelconque. Si une régulière superpose à lui-même un tétraèdre normal et en permute les quatre sommets 1, 2, 3 et 4, les déplacements des quatre sommets ne sont pas quelconques. Si $\overline{12}$ et $\overline{34}$ sont les deux arêtes conjuguées, le groupe des déplacements ne contiendra aucune substitution ternaire et se réduira aux huit substitutions dérivées de

$$(12)\,(34),\quad (13)\,(24)\quad \text{et}\quad (12)\,(3)\,(4).$$

25. Théorème. — *Deux droites conjuguées quelconques d_{12} et d_{34} peuvent toujours être régulièrement amenées sur les arêtes g_{12} et g_{34} du tétraèdre de référence $\mathfrak{T}$.*

Soient

N_1 et N_2 deux plans quelconques passant par d_{12},
N_3 et N_4 » » d_{34}.

$$\left|\begin{array}{lllll}
n_1 & \text{le point où} & N_2 & \text{coupe} & d_{34}\\
n_2 & \text{»} & N_1 & \text{»} & d_{34}\\
n_3 & \text{»} & N_4 & \text{»} & d_{12}\\
n_4 & \text{»} & N_3 & \text{»} & d_{12}
\end{array}\right|.$$

N_1, N_2, N_3, N_4 auront respectivement n_2, n_1, n_4, n_3 pour centres (n° **13**) et le tétraèdre $\mathfrak{N}$ des quatre points n sera normal. $\mathfrak{N}$ pourra régulièrement être amené sur $\mathfrak{T}$. Alors d_{12} et d_{34} viennent régulièrement sur g_{12} et g_{34} ou sur g_{34} et g_{12}. Dans le dernier cas, on permutera régulièrement (n° **24**) g_{12} et g_{34}.

26. *Deux capitales quelconques d_{14} et d_{24} qui se coupent en un point n_3 peuvent toujours être amenées régulièrement sur les arêtes capitales g_{14} et g_{24}* (n° **13**) *du tétraèdre de référence qui se coupent au sommet τ_3.*

Soit N_4 le plan de d_{14} et d_{24}. N_4 aura n_3 pour centre. Menons par n_3 une droite quelconque d_{12} non capitale; la conjuguée d_{34} de d_{12} sera située dans le plan N_4. Le point n_4, quelconque sur d_{12}, aura son plan central N_3 passant par d_{34}. d_{34} rencontre d_{14} et d_{24} aux points n_2 et n_1 ayant respectivement N_1 et N_2 pour plans centraux. Le tétraèdre $\mathfrak{N}$ des quatre points n est normal et vient régulièrement sur $\mathfrak{T}$. Le raisonnement s'achève, à l'aide des n^{os} **25** et **24**, sans peine.

On peut dire aussi que *deux capitales données qui se coupent viennent régulièrement sur deux capitales données qui se coupent aussi.*

27. *Deux capitales quelconques d_{14} et d_{23} qui ne se rencontrent pas viennent régulièrement sur les arêtes g_{14} et g_{23} de $\mathfrak{T}$.*

Soit d_{12} une droite non capitale qui rencontre d_{14} en n_3 et d_{23} en n_4. La conjuguée d_{34} de d_{12} rencontre d_{14} en n_2 et d_{23} en n_1. Le tétraèdre des quatre points n sera normal. Le raisonnement s'achève comme au n° **26**.

28. La construction des groupes réguliers généraux fera l'objet d'un Travail ultérieur. Dans le présent Mémoire, on se bornera à traiter une classe, assez étendue d'ailleurs, de groupes réguliers : les groupes *décomposables*.

CHAPITRE IV.

GÉNÉRALITÉS SUR LES GROUPES DÉCOMPOSABLES.

29. Soit S_n un groupe d'ordre fini, constitué par des n-aires (c'est-à-dire par des substitutions linéaires, à n variables homogènes).

Admettons que les variables, *convenablement choisies*, puissent être réparties en systèmes $s_1, s_2, \ldots, s_k, \ldots, s_l, \ldots$, ayant la propriété suivante : Chaque n-aire de S_n remplace les variables de s_k par des fonctions linéaires homogènes des variables de s_l. s_k et s_l doivent évidemment contenir le même nombre de variables. M. Jordan dit alors que le groupe S_n est *décomposable*, que chaque n-aire *fait succéder* un système s_l au système s_k.

Les déplacements des systèmes s forment un groupe, lequel ne peut être transitif qu'entre systèmes ayant un même nombre de termes.

30. Pour $n = 4$, on écrira S simplement pour S_4 et l'on ne pourra faire que les diverses hypothèses suivantes :

Deux systèmes :

Hypothèse $\{2, 2\}$: deux systèmes de deux lettres;
Hypothèse $\{3, 1\}$: trois lettres et une lettre.

Trois systèmes :

Hypothèse $\{1, 1, 2\}$: une lettre, une lettre, deux lettres.

Quatre systèmes :

Hypothèse $\{1, 1, 1, 1\}$: une lettre par système.

Je vais montrer que les cas $\{3, 1\}$ et $\{1, 1, 2\}$ rentrent dans le cas $\{2, 2\}$.

Je désignerai par la caractéristique z, conformément au n° **14**, les variables convenablement choisies sur lesquelles peuvent s'effectuer les diverses répartitions ci-dessus indiquées. On a

$$z_i = \Sigma c_{ij} x_j, \qquad c_{ij} = \text{const.};$$

or il n'est nullement évident que le tétraèdre des quatre plans $z_i = 0$ soit normal, comme est normal le tétraèdre des quatre plans $x_i = 0$.

31. Prenons le cas $\{3, 1\}$ et écrivons, par exemple, pour la régulière $\mathcal{A}$

$$\mathcal{A} = \begin{vmatrix} z_1 & a'_{11} z_1 + a'_{12} z_2 + a'_{13} z_3 \\ z_2 & a'_{21} z_1 + a'_{22} z_2 + a'_{23} z_3 \\ z_3 & a'_{31} z_1 + a'_{32} z_2 + a'_{33} z_3 \\ z_4 & a'_{44} z_4 \end{vmatrix}.$$

$\mathcal{A}$ laisse fixes :

le plan P, $z_4 = 0$, et aussi (par régularité) le centre p de P;

le point q, $z_1 = z_2 = z_3 = 0$ (non situé sur P), et aussi (par régularité) le plan central Q de q.

Les droites d_{12}, qui joint p à q, et d_{34}, qui est l'intersection de P avec Q, sont conjuguées sans être capitales.

$\mathcal{A}$ laisse fixes les deux conjuguées d_{12} et d_{34}, que l'on peut amener régulièrement sur g_{12} et g_{34} (nº **25**). Alors $\mathcal{A}$, laissant fixes g_{12} et g_{34}, devient, rétablissant la caractéristique x,

$$\begin{vmatrix} x_1 & a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \\ x_2 & a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \\ x_3 & a_{33} x_3 + a_{34} x_4 \\ x_4 & a_{43} x_3 + a_{44} x_4 \end{vmatrix}.$$

On retombe sur le cas $\{2, 2\}$.

32. Prenons le cas $\{1, 1, 2\}$. Supposons les trois systèmes comprenant respectivement z_3, z_4 et, enfin, z_1 et z_2.

Il viendra pour une régulière

$$\begin{vmatrix} z_1 & a_{11} z_1 + a_{12} z_2 \\ z_2 & a_{21} z_1 + a_{22} z_2 \\ z_3 & a_{33} z_3 \\ z_4 & a_{44} z_4 \end{vmatrix},$$

ou bien

$$\begin{vmatrix} z_1 & a_{11}z_1 + a_{12}z_2 \\ z_2 & a_{21}z_1 + a_{22}z_2 \\ z_3 & a_{34}z_4 \\ z_4 & a_{43}z_3 \end{vmatrix},$$

et l'on retombe encore sur le cas $\{2, 2\}$.

33. Les seules hypothèses à examiner pour les groupes décomposables sont donc

$$\{2, 2\} \quad \text{et} \quad \{1, 1, 1, 1\}.$$

Pour le cas $\{2, 2\}$, nous aurons les deux systèmes :

s_1 formé par les deux lettres z_1 et z_2,
s_2 » » z_3 et z_4.

Le groupe régulier G contiendra un sous-groupe $\mathfrak{A}$ formé par les ω régulières

$$\mathfrak{A} = \begin{vmatrix} z_1 & a_{11}z_1 + a_{12}z_2 \\ z_2 & a_{21}z_1 + a_{22}z_2 \\ z_3 & a_{33}z_3 + a_{34}z_4 \\ z_4 & a_{43}z_3 + a_{44}z_4 \end{vmatrix},$$

qui laissent s_1 et s_2 immobiles. G s'obtiendra en combinant $\mathfrak{A}$ avec une régulière unique

$$\mathfrak{B} = \begin{vmatrix} z_1 & b_{13}z_3 + b_{14}z_4 \\ z_2 & b_{23}z_3 + b_{24}z_4 \\ z_3 & b_{31}z_1 + b_{32}z_2 \\ z_4 & b_{41}z_1 + b_{42}z_2 \end{vmatrix},$$

qui échange s_1 et s_2. $\mathfrak{A}$ est permutable à $\mathfrak{B}$.

34. Pareillement, dans le cas $\{1, 1, 1, 1\}$, il y aura quatre systèmes formés chacun d'une lettre z_1, z_2, z_3 ou z_4. Toutes les régulières de G ramènent sur lui-même le tétraèdre Z des quatre plans $z_i = 0$, $i = 1, 2, 3, 4$.

G contiendra un sous-groupe $\mathfrak{A}$ formé par ω régulières canoniques

$$\mathcal{A} = | z_i \quad a_i z_i |.$$

$\mathcal{A}$ sera permutable à des régulières

$$\mathcal{B} = | z_i \quad b_i z_j |.$$

G contiendra $m\omega$ régulières, m étant un diviseur de 24 et l'ordre du groupe

$$| i \quad j |$$

de déplacements entre les quatre lettres z_i.

CHAPITRE V.

GROUPES DÉCOMPOSABLES $\{2, 2\}$.

35. Construisons le groupe G des régulières $\mathcal{L}$, obtenu (n° **33**) en combinant le sous-groupe $\mathfrak{A}$ des ω régulières $\mathcal{A}$,

$$\mathcal{A} = \left| \begin{array}{ll} z_1 & a'_{11} z_1 + a'_{12} z_2 \\ z_2 & a'_{21} z_1 + a'_{22} z_2 \\ z_3 & a'_{33} z_3 + a'_{34} z_4 \\ z_4 & a'_{43} z_3 + a'_{44} z_4 \end{array} \right|$$

avec la régulière

$$\mathcal{B} = \left| \begin{array}{ll} z_1 & b'_{13} z_3 + b'_{14} z_4 \\ z_2 & b'_{23} z_3 + b'_{24} z_4 \\ z_3 & b'_{31} z_1 + b'_{32} z_2 \\ z_4 & b'_{41} z_1 + b'_{42} z_2 \end{array} \right|,$$

à laquelle $\mathfrak{A}$ est permutable de façon que l'ordre de G soit 2ω.

Nommons d_{12} et d_{34} les droites $z_1 = z_2 = 0$ et $z_3 = z_4 = 0$ respectivement. $\mathcal{A}$ laisse d_{12} et d_{34} fixes; $\mathcal{B}$ les permute.

Les diverses formes de G en variables ordinaires x_i, rapportées à un tétraèdre normal ϖ, dépendent de la situation que prennent d_{12} et d_{34} par rapport au complexe capital. Plusieurs suppositions sont à faire.

36. Admettons d'abord que d_{12} et d_{34} soient conjuguées par rapport au complexe capital; d_{12} et d_{34} s'amènent alors régulièrement sur g_{12} et g_{34} et il vient immédiatement

$$\mathcal{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \qquad \mathcal{B} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & b_{13} & b_{14} \\ 0 & 0 & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & 0 & 0 \\ b_{41} & b_{42} & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

avec, par régularité,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b_{13} & b_{14} \\ b_{23} & b_{24} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{vmatrix} = 1.$$

Désignons par p, q, r, s les binaires

$$p = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad q = \begin{pmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}, \qquad \text{de déterminant} \quad 1,$$

$$r = \begin{pmatrix} b_{13} & b_{14} \\ b_{23} & b_{24} \end{pmatrix}, \qquad s = \begin{pmatrix} b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{pmatrix}, \qquad \text{de déterminant} \; -1.$$

On pourra, sans ambiguïté, désigner $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ par les notations

$$\mathcal{A} = [p, q], \qquad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix}, \qquad \mathcal{A}' = [p', q'], \qquad \ldots.$$

Un calcul simple montre que

$$\mathcal{A}'\mathcal{A} = [p'p, q'q], \qquad \mathcal{B}^2 = [rs, sr], \qquad \mathcal{B}^{-1} = \begin{bmatrix} s^{-1} \\ r^{-1} \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{B}^{-1}\mathcal{A} = \begin{bmatrix} s^{-1}q \\ r^{-1}p \end{bmatrix}, \qquad \mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{B} \quad [s^{-1}qs, r^{-1}pr],$$

Désignons par P et Q les groupes des p et q. On voit que P *et* Q *sont d'ordre fini;* P *contient* rs *et* Q *contient* sr; s *transforme* Q *en* P, $s^{-1}Qs = P$, *et* r *transforme* P *en* Q, $r^{-1}Pr = Q$.

G est ainsi construit, puisque les groupes binaires d'ordre fini sont connus.

37. Admettons maintenant que d_{12} et d_{34} soient capitales toutes deux. Comme elles ne se rencontrent pas, elles peuvent s'amener régulièrement sur g_{13} et g_{24} (n° **27**; le raisonnement du n° **27** s'applique à g_{13} et g_{24} aussi bien qu'à g_{23} et g_{14}), et l'on a immédiatement (eu égard au n° **35**)

$$\mathcal{A} = \begin{vmatrix} x_1 & a_{11}x_1 + a_{13}x_3 \\ x_2 & a_{22}x_2 + a_{24}x_4 \\ x_3 & a_{31}x_1 + a_{33}x_3 \\ x_4 & a_{42}x_2 + a_{44}x_4 \end{vmatrix}, \qquad \mathcal{B} = \begin{vmatrix} x_1 & b_{12}x_2 + b_{14}x_4 \\ x_2 & b_{21}x_1 + b_{23}x_3 \\ x_3 & b_{32}x_2 + b_{34}x_4 \\ x_4 & b_{41}x_1 + b_{43}x_3 \end{vmatrix}.$$

Nommons p, q, r, s les binaires, à déterminant non nul,

$$p = \begin{pmatrix} a_{33} & a_{31} \\ a_{13} & a_{31} \end{pmatrix}, \qquad q = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{42} & a_{44} \end{pmatrix},$$

$$r = \begin{pmatrix} b_{32} & b_{34} \\ b_{12} & b_{14} \end{pmatrix}, \qquad s = \begin{pmatrix} b_{23} & b_{21} \\ b_{43} & b_{41} \end{pmatrix}.$$

On désignera sans ambiguïté $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ par les notations

$$\mathcal{A} = [p, q], \qquad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix}.$$

Nommons P et Q les groupes des p et des q. Par des formules identiques à celles du n° **36**, on verra que P *et* Q *sont d'ordre fini;* rs *est contenue dans* P *et* sr *dans* Q; s *transforme* Q *en* P *et* P *est transformé par* r *en* Q.

Seulement la régularité entraîne entre p et q, r et s des sujétions beaucoup plus étroites qu'il importe maintenant d'introduire.

38. Au Chapitre IX de mon Mémoire : *Sur la limitation du degré pour les intégrales algébriques de l'équation différentielle du premier ordre*, inséré aux 63e et 64e Cahiers (première série) du *Journal de l'École Polytechnique*, j'ai fait une étude complète des relations mutuelles que la quadrique (vraie quadrique ou cône du second degré) possède avec le complexe capital. J'ai examiné notamment (*loc. cit.*, nº **101**) la quadrique qui admet ∞ génératrices rectilignes capitales. Une pareille quadrique contient alors deux capitales (*nodales* du nº **101** précité) qui ne se rencontrent pas, mais qui sont rencontrées par toutes les génératrices capitales.

Ces nodales, qu'on peut toujours amener régulièrement sur g_{13} et g_{24}, suffisent pour déterminer complètement la quadrique correspondante T.

Prenons, en effet, un point courant x sur T. Si t est le point courant sur la génératrice capitale D issue de x, on aura

$$o = x_3 t_1 - x_1 t_3 = x_4 t_2 - x_2 t_4.$$

Les coordonnées homogènes de D sont les mineurs de la matrice

$$\begin{Vmatrix} x_3 & o & -x_1 & o \\ o & x_4 & o & -x_2 \end{Vmatrix}.$$

Exprimant que D est capitale, on a l'équation

$$x_1 x_2 - x_3 x_4 = o$$

de T.

39. Reprenons le groupe G du nº **37** et introduisons la quadrique T qui admet pour *nodales* les droites g_{13} (ou d_{12}) et g_{24} (ou d_{34}). L'équation de T sera

$$o = x_1 x_2 - x_3 x_4$$

où

$$(1) \qquad \lambda = \frac{x_3}{x_1} = \frac{x_2}{x_4} = \mu.$$

Il est évident, en vertu de ce qui précède (n° **38**), que *la quadrique* T *est invariante vis-à-vis de toutes les régulières* $\mathcal{L}$ *de* G, puisque $\mathcal{A}$ laisse fixes les deux nodales, que $\mathcal{B}$ permute simplement.

Les binaires p, q, r, s ayant la même signification qu'au n° **37**, désignons par $\bar{p}$, $\bar{q}$, $\bar{r}$, $\bar{s}$ les substitutions linéaires fractionnaires à une seule variable t,

$$\bar{p} = \left| t \quad \frac{a_{33}t + a_{31}}{a_{13}t + a_{11}} \right|, \qquad \bar{q} = \left| t \quad \frac{a_{22}t + a_{24}}{a_{42}t + a_{44}} \right|,$$

$$\bar{r} = \left| t \quad \frac{b_{32}t + b_{34}}{b_{12}t + b_{14}} \right|, \qquad \bar{s} = \left| t \quad \frac{b_{23}t + b_{21}}{b_{43}t + b_{41}} \right|.$$

Opérons sur la quadrique T par les régulières $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$. La relation ci-dessus

$$(1) \qquad \lambda = \mu$$

devient

$$(2) \qquad \bar{p}[\lambda] = \bar{q}[\mu] \qquad \text{ou} \qquad \mu = (\bar{q})^{-1}\bar{p}[\lambda],$$

$$(3) \qquad \bar{r}[\mu] = \bar{s}[\lambda] \qquad \text{ou} \qquad \mu = (\bar{r})^{-1}\bar{s}[\lambda].$$

Comme T est invariante par $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, (2) et (3) sont des conséquences de (1), quel que soit λ. On conclut immédiatement de là que

$$\bar{p} = \bar{q} \qquad \text{et} \qquad \bar{r} = \bar{s},$$

c'est-à-dire

$$\frac{a_{22}}{a_{33}} = \frac{a_{24}}{a_{31}} = \frac{a_{42}}{a_{13}} = \frac{a_{44}}{a_{11}} = \rho,$$

$$\frac{b_{23}}{b_{32}} = \frac{b_{21}}{b_{34}} = \frac{b_{43}}{b_{12}} = \frac{b_{41}}{b_{14}} = \sigma.$$

40. On voit immédiatement que

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} & 0 \\ 0 & \rho a_{33} & 0 & \rho a_{31} \\ a_{31} & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & \rho a_{13} & 0 & \rho a_{11} \end{vmatrix} = \mathcal{A},$$

$$\begin{vmatrix} 0 & b_{12} & 0 & b_{14} \\ \sigma b_{34} & 0 & \sigma b_{32} & 0 \\ 0 & b_{32} & 0 & b_{34} \\ \sigma b_{14} & 0 & \sigma b_{12} & 0 \end{vmatrix} = \mathcal{B}.$$

On vérifie de suite que les conditions de régularité sont satisfaites dès qu'on a posé

$$1 = (12) - (34) = \rho\varpi = \sigma\chi,$$

$$\varpi = a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} = \text{le déterminant de la binaire } p,$$

$$\chi = b_{32}b_{14} - b_{12}b_{34} = \text{le déterminant de la binaire } r.$$

41. Combinant l'analyse précédente avec le n° **37**, on peut énoncer les résultats suivants :

La binaire p est d'ordre fini; son déterminant ϖ est racine de l'unité; il en est de même pour $\rho = \varpi^{-1}$. Comme

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix}, \qquad \mathcal{B}^2 = [rs, sr],$$

le déterminant $\sigma^2\chi^2$ de sr, ou de rs, doit être racine de l'unité; cela est, car $\sigma\chi = 1$ (n° **40**).

Ainsi, ces conditions suffisent pour que l'ordre de G soit fini.

42. Admettons qu'une au moins des deux droites non concourantes d_{12} et d_{34}, par exemple d_{12}, *ne soit pas* capitale. On amènera alors régulièrement d_{12} sur g_{12}. La régulière $\mathfrak{g}$ de G, qui laisse d_{12} fixe, laissera fixe aussi la conjuguée g_{34} de g_{12} (ou de d_{12}) et il viendra, comme au n° **36**,

$$\mathcal{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Si d_{34} est capitale, aucune régulière $\mathfrak{g}$ de G ne peut amener d_{34} sur $d_{12} (= g_{12})$. La régulière $\mathfrak{M}$ manque et G se réduit au groupe $\mathfrak{A}$ des $\mathcal{A}$. On est ramené au cas du n° **36**, sauf l'absence de $\mathfrak{M}$.

Je supposerai donc d_{34} *non capitale* et, pour n'être pas ramené au cas du n° **36**, distincte de la conjuguée g_{34} de $d_{12} (= g_{12})$.

43. Considérons les capitales qui rencontrent à la fois d_{12} et d_{34}; elles rencontrent aussi la conjuguée d'_{12} de d_{12}. Les trois directrices d_{12}, d_{34}, d'_{12} définissent une quadrique T à ∞ génératrices capitales. T est invariante par toute régulière de G. Si T n'est pas un couple de plans, tous les raisonnements du n° **38** (empruntés à mon Mémoire du *Journal de l'École Polytechnique*) subsistent. T comporte deux *nodales* rectilignes, *capitales* et *non concourantes*.

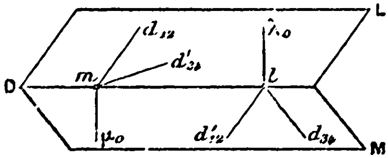
Toute régulière de G laisse fixe le couple formé par les deux nodales. On est ramené au cas du n° **37** et l'on ne trouve aucun groupe nouveau.

44. Examinons maintenant le cas réservé où T est un couple de deux plans L et M, de centres l et m. Sur les deux plans doivent être situées les quatre droites d_{12}, d_{34} et leurs conjuguées d'_{12} et d'_{34}. d_{12} et d_{34} ne se rencontrent pas; il en est de même pour d_{12} et d'_{12}, d_{34} et d'_{34}. En effet, la régulière $\mathfrak{M}$ ne manque pas dans G (n° **42**), d_{12} et d_{34} ne sont capitales ni l'une ni l'autre.

Donc le plan L contient d_{12} et d'_{34}; le plan M contient d_{34} et d'_{12}. Les ∞ génératrices capitales de T sont les ∞ capitales λ de L qui rayonnent autour du centre l de L, et aussi (la régulière $\mathfrak{M}$ permutant L et M qui doivent jouer un rôle analogue) les ∞ capitales μ de M, qui rayonnent autour de m.

L'arête D *du dièdre* LM *est capitale*, car elle reste fixe pour toute régulière de G. Or, si D n'était pas capitale, le groupe G aurait deux droites conjuguées invariantes, savoir D et sa conjuguée D'. On serait ramené au groupe du n° **36**.

La génératrice λ de T doit rencontrer d_{34} et d'_{12}; D joint les deux centres l et m; donc d_{34} et d'_{12} concourent avec λ au point l de D. Pareillement, d_{12} et d'_{34} passent par le centre m de M. On a la figure suivante :



45. Prenons les coordonnées régulières x_i comme suit :

$$\begin{array}{llll} \text{L}, & x_1 = 0; & \text{M}, & x_3 = 0, \\ l, & x_1 = x_3 = x_4 = 0; & m, & x_1 = x_2 = x_3 = 0, \\ d_{12}, & x_1 = x_2 = 0; & d'_{12}, & x_3 = x_4 = 0. \end{array}$$

La régulière $\mathcal{A}$ de G laisse fixes L, M, l, m, d_{12} et d'_{12}; il vient

$$\mathcal{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},$$

avec

$$1 = a_{11} a_{22} = a_{33} a_{44},$$

par régularité.

Dans le plan L, les droites issues du point m sont transformées par $\mathcal{A}$ suivant la binaire canonique

$$| \; x_2 \quad x_3 \quad a_{22} x_2 \quad a_{33} x_3 \; |.$$

Cette binaire laisse fixes les *trois* droites distinctes d_{12}, d'_{34} et D issues de m; la binaire est donc singulière et $a_{22} = a_{33}$; d'où aussi $a_{11} = a_{44}$.

Enfin, $\mathcal{A}$ transforme les capitales λ de L suivant la binaire

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} x_3 & a_{33}x_3 \\ x_4 & a_{43}x_3 + a_{44}x_4 \end{vmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} a_{33} & 0 \\ a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

et les capitales μ de M suivant la binaire

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} x_1 & a_{11}x_1 \\ x_2 & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Je dis que le groupe $\mathcal{L}$ des binaires (1), qui est évidemment d'ordre fini, laisse fixe une capitale λ_0. De même, le groupe M des binaires (2) laisse fixe une capitale μ_0.

Nous allons donc étudier les groupes binaires d'ordre fini

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} a_{33} & 0 \\ a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{pmatrix},$$

ou encore les groupes linéaires fractionnaires à une variable t des substitutions

$$s = |t \quad at + b|.$$

Tout sera démontré si j'établis que la racine t_0 de l'équation

$$at + b = t, \qquad b(1 - a)^{-1} = t_0$$

est la même pour toutes les s du groupe.

46. s sera désignée sans ambiguïté par la notation

$$s = (a, b) \quad \text{ou} \quad [a, b].$$

Un calcul simple montre que, pour un entier l quelconque,

$$s^l = (a, b)^l = \left[a^l, \frac{b(a^l - 1)}{a - 1}\right] \qquad \text{pour} \qquad a \neq 1,$$

$$s^l = (1, b)^l = (1, lb).$$

Mais s est d'ordre fini; $b = 0$ dès que $a = 1$ et alors $s = 1$; bref

$$(1, \ldots) = 1.$$

Soient maintenant deux substitutions quelconques du groupe

$$s = (a, b), \qquad s' = (a', b').$$

Il viendra

$$s's = (aa', a'b + b') \qquad ss' = (aa', ab' + b),$$

$$(s's)^{-1} ss' = (1, \ldots) = 1, \qquad ss' = s's,$$

$$ab' + b = a'b + b',$$

$$\frac{b'}{a' - 1} = \frac{b}{a - 1}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

47. Toute régulière $\mathcal{A}$ laisse fixe chacune des deux *capitales non concourantes* λ_0 et μ_0 dont on vient de prouver l'existence.

La régulière $\mathcal{B}$ est permutable au groupe $\mathfrak{A}$ des $\mathcal{A}$. $\mathcal{B}$ permute, par conséquent, λ_0 et μ_0.

G admet pour invariant le couple λ_0 et μ_0. λ_0 et μ_0 se comportent comme les deux nodales au n° **43**. Les conclusions du n° **43** subsistent même quand la quadrique T dégénère en un couple de plans. Nous n'obtenons aucun groupe nouveau.

J'ai ainsi fini avec l'hypothèse $\{2, 2\}$, car j'ai examiné toutes les situations possibles, par rapport au complexe capital, des droites d_{12} et d_{34}, savoir :

d_{12} et d_{34} conjuguées (n° **36**);

d_{12} et d_{34} toutes deux capitales (n^{os} **37** à **41**);

Une droite capitale, l'autre non (n° **42**);

Aucune ni capitale, ni conjuguée de l'autre (n^{os} **42** à **47**).

On remarquera que G possède toujours une quadrique invariante. sauf dans le cas où d_{12} et d_{34} sont conjuguées.

CHAPITRE VI.

GROUPES DÉCOMPOSABLES $\{1, 1, 1, 1\}$.

48. Avant de construire les groupes réguliers d'ordre fini G qui sont fournis par l'hypothèse $\{1, 1, 1, 1\}$ du Chapitre IV (nos **33** et **34**), il importe de donner quelques explications sur les régulières canoniques.

Soit s une n — aire d'ordre fini ; elle aura pour forme canonique

$$s_0 = |z_j \quad k_j z_j| \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

les k étant des racines de l'unité. Si une seconde n — aire t est telle que

$$t^{-1} s t = s_0,$$

je dirai que t *est une* canonisante *de* s.

49. Théorème. — *Toute régulière d'ordre fini s peut être* régulièrement *mise sous forme canonique*, c'est-à-dire admet au moins une canonisante régulière.

s, mise régulièrement ou non sous forme canonique, est

$$s = |z_j \quad k_j z_j| \qquad (j = 1, 2, 3, 4).$$

s laisse fixes les quatre faces $z_j = 0$ du tétraèdre Z, normal (n° **13**) ou non, et aussi les six arêtes de Z. Parmi les trois arêtes issues d'un sommet de Z, une au moins n'est pas capitale, puisque ces trois arêtes ne sont point dans un même plan. Z a une arête au moins (par exemple $z_1 = z_2 = 0$, qu'on peut régulièrement amener sur l'arête $x_1 = x_2 = 0$ ou g_{12} du tétraèdre normal de référence) non capitale. Ainsi s laisse fixes g_{12} et sa conjuguée g_{34} et l'on a, en variables régulières x_j,

$$s = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} & b_{34} \\ 0 & 0 & b_{43} & b_{44} \end{Bmatrix} \qquad (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = b_{33}b_{44} - b_{34}b_{43} = 1).$$

Soient

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}, \qquad \beta = \begin{pmatrix} \beta_{33} & \beta_{34} \\ \beta_{43} & \beta_{44} \end{pmatrix}$$

les canonisantes, de déterminant un, pour les binaires

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} b_{33} & b_{34} \\ b_{43} & b_{44} \end{pmatrix}$$

respectivement. Ces binaires sont d'ordre fini et admettent sûrement des canonisantes.

La quaternaire

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{33} & \beta_{34} \\ 0 & 0 & \beta_{43} & \beta_{44} \end{vmatrix}$$

sera tout à la fois régulière et canonisante pour s. C. Q. F. D.

50. Soit donc la régulière canonique

$$\mathfrak{L} = |x_j \quad a_j x_j| \qquad (j = 1, 2, 3, 4);$$

la régularité exige encore

$$1 = a_1 a_2 = a_3 a_4,$$

et cela suffit. On écrira donc sans ambiguïté

$$\mathfrak{L} = [a_1, a_1^{-1}, a_3, a_3^{-1}];$$

a_1 et a_3 sont des racines de l'unité.

Si le déterminant d'une quaternaire est égal à un, les quatre *coefficients a* sont évidemment les racines de l'équation caractéristique ω.

51. Examinons un cas très particulier, utile pour la suite (n° 57). C'est celui où les quatre racines de ω sont 1, 1, θ, θ^2, avec $\theta =$ racine cubique de l'unité.

Soient u_1 et u_2 les deux expressions u_j $\left(u_j = \sum_k b_{jk} x_k\right.$, déterminant des constantes b_{jk} non nul) que la régulière $\mathfrak{L}$ multiplie par un et soient u_3 et u_4 les deux u que $\mathfrak{L}$ multiplie par θ^2 et θ. On vérifie de suite que tout tétraèdre U dont $\mathfrak{L}$ laisse fixes les quatre faces est construit comme suit : les quatre faces de U sont $u_3 = 0$, $u_4 = 0$ et deux plans quelconques passant par la droite $u_1 = u_2 = 0$.

Prenons maintenant $\mathfrak{L}$ sous sa forme régulière canonique, en variables x_j,

$$\mathfrak{L} = [\theta^\rho, \theta^{-\rho}, \theta^\sigma, \theta^{-\sigma}].$$

Parmi les quatre coefficients deux sont égaux à l'unité ; on ne peut avoir $\sigma \equiv \rho \pmod 3$, car alors

$$\mathfrak{L} = [\theta^\rho, \theta^{-\rho}, \theta^\rho, \theta^{-\rho}]$$

il n'y aurait plus que deux coefficients distincts. De même on ne peut faire $\sigma + \rho \equiv 0 \pmod 3$. Donc $\theta^\rho = \theta^{-\rho}$, $2\rho \equiv 0$, $\rho \equiv 0$ et

$$\mathfrak{L} = [1, 1, \theta, \theta^2] = |x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_1 \quad x_2 \quad \theta x_3 \quad \theta^2 x_4|.$$

Les seuls plans que $\mathfrak{L}$ laisse fixes sont $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ et un plan *quelconque* passant par $x_1 = x_2 = 0$.

Il est donc légitime de poser

$$u_1 = 3x_1, \qquad u_2 = x_2, \qquad u_3 = 3\tau x_3, \qquad u_4 = 3\tau x_4,$$

puisque les u ne sont déterminés qu'à un facteur numérique près chacun.

Ce résultat est essentiel pour la suite (nº **57**).

52. On est maintenant à même d'aborder la construction du groupe G défini au nº **34**. G contiendra les ω régulières

$$\mathcal{A} = |z_j \quad a_j z_j|$$

d'un sous-groupe $\mathfrak{A}$ et ensuite diverses régulières

$$\mathcal{B} = |z_j \quad b_j z_k|.$$

Il y aura, dans G, $m\omega$ régulières, m étant un diviseur de **24**.

G est isomorphe au groupe G′ des déplacements entre les quatre sommets, numérotés 1, 2, 3 et 4, du tétraèdre Z, des quatre plans $z_j=0$. A la substitution unité de G′ correspond dans G le sous-groupe $\mathfrak{A}$.

53. J'écarterai, bien entendu, tous les groupes fournis par l'hypothèse $\{2, 2\}$ et déjà construits, notamment les groupes *qui laissent fixe un couple de deux droites non concourantes* $u_1=u_2=0$ et $u_3=u_4=0$, $u_j=\sum_k c_{jk}z_k$. Raisonnant sur les u comme aux n^{os} **52** et **53** sur les z, on voit de suite qu'on retombe sur l'hypothèse $\{2, 2\}$.

54. Reprenons le tétraèdre Z des quatre sommets 1, 2, 3, 4 et des six arêtes 12, 34, ... Répartissons les arêtes opposées deux à deux en trois couples

$$A=\{23, 14\}, \qquad B=\{31, 24\}, \qquad C=\{12, 34\}.$$

Les groupes G et G′ sont isomorphes aux groupes G″ des déplacements entre A, B, C; G″ *est transitif;* sinon le couple C, par exemple, resterait fixe pour toutes les substitutions de G. Cela est absurde (n° **53**).

G″ contient la substitution (ABC) et il y a dans G au moins une régulière $\mathfrak{L}$ qui permute circulairement les trois couples. Les trois couples ont donc vis-à-vis du complexe capital une structure analogue. Nommons $\mathfrak{L}'=(4)(123)$ une des substitutions du groupe G′, entre les quatre sommets 1, 2, 3 et 4, qui correspondent à la régulière $\mathfrak{L}$ de G.

Les deux arêtes d'un même couple ne sont pas conjuguées par rapport au complexe capital. Si, en effet, 12 et 34 sont conjuguées, Z devient un tétraèdre normal, les quatre arêtes 13, 24, 23, 14 deviennent capitales et ne sont plus conjuguées ensemble. Cela est absurde, car la régulière $\mathfrak{L}$ permute les trois couples.

Aucune arête de Z n'est capitale. Si 12, par exemple, était capitale, il en serait de même pour 23 et 31 que $\mathfrak{L}$ amène successivement sur 12. Les trois arêtes 12, 23, 31 capitales et situées dans un même plan, celui des trois sommets 1, 2, 3, seraient concourantes, ce qui est absurde.

55. Théorème. — *Le sous-groupe $\mathfrak{A}$ du n° **52** se réduit aux deux régulières singulières.*

Prenons, dans G, la régulière $\mathcal{A}$ de $\mathfrak{A}$. $\mathcal{A}$ laisse les quatre sommets fixes et a pour correspondante, dans G′, la substitution unité.

Amenons régulièrement, sur $x_4 = 0$, le plan des trois sommets $\overline{123}$; en $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, le quatrième sommet 4 de Z. On verra facilement, par les théories géométriques du Chapitre III, que cela est toujours possible.

$\mathcal{A}$ laissant fixes $\overline{123}$ et 4 s'écrira

$$\mathcal{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} \quad [\text{en variables } x].$$

Le centre 4′ du plan $\overline{123}$ n'est sur aucune des arêtes 12, 23, 31, sans quoi l'arête serait capitale. La substitution *ternaire*

$$a = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

laisserait donc fixes, sur le plan $\overline{123}$, les quatre sommets d'un quadrilatère 1234′; a serait une ternaire *singulière* et il viendrait

$$\mathcal{A} = | \; x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \qquad ax_1 \quad ax_2 \quad ax_3 \quad a'x_4 \; |;$$

par régularité,

$$a^2 = aa' = 1, \qquad a = a';$$

$\mathcal{A}$ est singulière. C. Q. F. D.

56. Le groupe général Γ entre quatre lettres peut être considéré comme provenant des substitutions

$$\delta' = (4)(123), \qquad \alpha' = (12)(34), \qquad \varepsilon' = (1)(4)(23).$$

Si ε' manque, on retombe sur le groupe alterné.

On a vu (n° 54) que δ' ne peut manquer dans le groupe G'. Soit

$$\delta = | z_1 \quad z_2 \quad z_3 \quad z_4 \qquad az_2 \quad bz_3 \quad cz_1 \quad dz_4 |$$

une correspondante à δ' dans G.

Le déterminant de δ est *un* et il vient

$$abcd = 1.$$

δ^3 est singulière (n° 55) et

$$abc = d^3 \qquad \text{d'où} \qquad d^4 = 1.$$

Transformons δ par la substitution

$$\Lambda = | z_j \quad \lambda_j z_j |,$$

il viendra

$$\begin{vmatrix} z_1 & \lambda_1^{-1} a \lambda_2 z_2 \\ z_2 & \lambda_2^{-1} b \lambda_3 z_3 \\ z_3 & \lambda_3^{-1} c \lambda_1 z_1 \\ z_4 & \lambda_4^{-1} d \lambda_4 z_4 \end{vmatrix}$$

et l'on peut déterminer les λ de façon à avoir

$$d = a\lambda_2\lambda_1^{-1} = b\lambda_3\lambda_2^{-1} = c\lambda_1\lambda_3^{-1}.$$

Bref, je prendrai

$$\delta = \begin{vmatrix} z_1 & dz_2 \\ z_2 & dz_3 \\ z_3 & dz_1 \\ z_4 & dz_4 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} (d^4 = 1 \text{ ou } d = 1, \text{ à une} \\ \quad \text{substitution singulière près}). \end{array}$$

57. L'équation caractéristique a pour racines $1, 1, \theta, \theta^2, \theta =$ racine cubique de l'unité.

z multiplié

par 1 : $\quad u_1 = z_1 + z_2 + z_3 \quad$ et $\quad u_2 = z_4$;

par θ : $\quad u_3 = z_1 + \theta^2 z_2 + \theta\, z_3$;

par θ^2 : $\quad u_4 = z_1 + \theta\, z_2 + \theta^2 z_3$.

Raisonnant comme au n° **31**, on posera

$$(\omega)\qquad \left\{\begin{array}{l} z_1 + \ z_2 + \ z_3 = 3x_1 \\ z_1 + \theta\ z_2 + \theta^2 z_3 = 3\tau x_3 \\ z_1 + \theta^2 z_2 + \theta\ z_3 = 3\tau x_4 \\ \qquad\quad z_4 \qquad\quad = x_2 \end{array}\right\},$$

d'où

$$\left\{\begin{array}{l} z_1 = x_1 + \tau\ x_3 + \tau\ x_4 \\ z_2 = x_1 + \tau\theta^2 x_3 + \tau\theta\ x_4 \\ z_3 = x_1 + \tau\theta\ x_3 + \tau\theta^2 x_4 \\ z_4 = x_2 \end{array}\right\}, \qquad \text{d'où} \qquad z = \mathfrak{M}[x],$$

$\mathfrak{M}$ étant la quaternaire *irrégulière*

$$\mathfrak{M} = \left\{\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \tau & \tau \\ 1 & 0 & \tau\theta^2 & \tau\theta \\ 1 & 0 & \tau\theta & \tau\theta^2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right\}, \qquad \text{de déterminant} = 3\tau^2(\theta - \theta^2).$$

Nommons G_x et G_z les deux expressions du groupe G en variables x et en variables z. On a évidemment

$$G_x = \mathfrak{M}^{-1} G_z \mathfrak{M}.$$

En variables z, l'équation du complexe capital est $\mathfrak{P} = 0$. Si je construis G_z de façon à avoir $\mathfrak{P}$ pour invariant absolu, G_x sera régulier et sera le groupe G cherché.

58. Nommons respectivement (jk) et $(jk)'$ la coordonnée-points courante d'une droite, respectivement en coordonnées x et en coordonnées z. Posons, pour abréger,

$$(23)' = g_1, \qquad (31)' = g_2, \qquad (12)' = g_3,$$
$$(14)' = h_1, \qquad (24)' = h_2, \qquad (34)' = h_3.$$

Les déplacements d'indices marqués par les substitutions de G'

$$\alpha' = (12)(34), \qquad \delta' = (4)(123), \qquad \varepsilon' = (1)(4)(23)$$

transforment les g et les h de la façon marquée par les symboles de substitutions

$$(o) \qquad \left\{ \begin{aligned} \alpha'' &= (g_1 h_1)(g_2, -h_2)(g_3, -g_3)(h_3, -h_3), \\ \delta'' &= (g_1 g_2 g_3)(h_1 h_2 h_3) \\ \varepsilon'' &= (g_1, -g_1)(g_2, -g_3)(h_1)(h_2 h_3). \end{aligned} \right.$$

Enfin, on vérifie sans peine que [sous le bénéfice des formules (o) du n° **57**]

$$3.(12) = h_1 + h_2 + h_3,$$
$$9\tau^2.(34) = (\theta^2 - \theta)(g_1 + g_2 + g_3),$$
$$9\tau^2[(12) - (34)] = 3\tau^2(h_1 + h_2 + h_3) + (\theta - \theta^2)(g_1 + g_2 + g_3).$$

Déterminons le paramètre τ par la condition $3\tau^2 + \theta^2 - \theta = 0$; on pourra prendre pour équation du complexe capital en variables z, simplement

$$\Phi = g_1 + g_2 + g_3 + h_1 + h_2 + h_3 = 0.$$

Φ est, bien entendu, pour la substitution δ construite au n° **56**, un invariant absolu, sous le bénéfice des formules (o) ci-dessus. Cela donnerait encore (n° **56**, *in fine*), $d^2 = 1$ et $d = 1$.

59. Prenons maintenant, dans le groupe G', la substitution (n° **56**)

$$\alpha' = (12)(34)$$

et, dans G, une correspondante

$$\alpha = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ az_2 & bz_1 & cz_4 & dz_3 \end{vmatrix}.$$

α change Φ, sous le bénéfice des formules (o) du n° 58, en

$$bch_1 - cah_2 - abg_3 + adg_1 - bdg_2 - cdh_3.$$

Φ est invariant absolu et

$$1 = bc = - ac = - ab = ad = - bd = - cd,$$

c'est-à-dire $a = d$, $b = c = - d$, $d^2 = 1$, ou simplement

$$\alpha = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ z_2 & -z_1 \\ z_3 & -z_4 \\ z_4 & z_3 \end{vmatrix}.$$

On voit que le déterminant de α est un et que α^2 est singulière, comme cela devait être.

60. Passons enfin aux substitutions $\varepsilon' = (1)(4)(23)$ de G' et

$$\varepsilon = \begin{vmatrix} z_1 & az_1 \\ z_2 & bz_3 \\ z_3 & cz_2 \\ z_4 & dz_4 \end{vmatrix} \text{ du groupe G.}$$

ε transforme, en vertu des formules (o) du n° 58, Φ en

$$- bcg_1 - cag_3 - abg_2 + h_1 ad + h_2 cd + h_3 bd.$$

Φ est invariant absolu et

$$1 = - bc = - ca = - ab = ad = cd = bd.$$

De là, tout calcul fait,

$$a = b = c = i, \qquad d = -i,$$

$$\varepsilon = \begin{vmatrix} z_1 & iz_1 \\ z_2 & iz_3 \\ z_3 & iz_2 \\ z_4 & -iz_4 \end{vmatrix}, \qquad i^2 + 1 = 0.$$

ε a son déterminant égal à un; ε^2 est singulière. C'était prévu.

61. En résumé, le seul groupe nouveau que nous ayons à ajouter à ceux du Chapitre précédent est celui qu'on obtient en transformant par l'*irrégulière*

$$\mathfrak{M} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & \tau & \tau \\ 1 & 0 & \tau\theta^2 & \tau\theta \\ 1 & 0 & \tau\theta & \tau\theta^2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \quad \text{[de déterminant } 3\tau^2(\theta-\theta^2) = (\theta-\theta^2)^2 = -3\text{]},$$

le groupe *irrégulier* dérivé des trois quaternaires

$$\alpha = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ z_2 & -z_1 \\ z_3 & -z_4 \\ z_4 & z_3 \end{vmatrix}, \qquad \delta = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ z_2 & z_3 \\ z_3 & z_1 \\ z_4 & z_4 \end{vmatrix}, \qquad \varepsilon = \begin{vmatrix} z_1 & iz_1 \\ z_2 & iz_3 \\ z_3 & iz_2 \\ z_4 & -iz_4 \end{vmatrix}.$$

L'ordre est 48, puisqu'il y a deux régulières singulières.