JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

EDMOND MAILLET

# Sur les racines des équations transcendantes à coefficients rationnels

*Journal de mathématiques pures et appliquées 5e série*, tome 7 (1901), p. 419-440.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1901_5_7__419_0>

# *Sur les racines des équations transcendantes* [1] *à coefficients rationnels;*

**Par M. Edmond MAILLET.**

---

## I.

Nous avons vu [2] que les équations différentielles rationnelles en $y$ et ses dérivées, en particulier les équations dont le premier membre est un polynome entier en $y$, et dont les coefficients sont, soit des polynomes entiers en $x$, soit des séries en $\frac{1}{x}$ dont les exposants ou les coefficients satisfont à certaines conditions de croissance ou de décroissance, ne peuvent admettre comme solutions des séries en $\frac{1}{x}$ remplissant certaines conditions analogues.

Si l'on considère les équations algébriques ou transcendantes dont le premier membre est ce que nous appelons une *série rationnelle*, c'est-à-dire une série convergente ordonnée suivant les puissances croissantes ou décroissantes de $x$, qui peut être une fonction entière, admettre des pôles ou même un point singulier essentiel, et dont les

(1) *Comptes rendus*, 15 avril 1901.

(2) *Ibid.*, 25 février et 11 mars 1901.

coefficients sont rationnels, on peut établir un théorème correspondant : les solutions réelles de ces équations, exprimées dans un système de numération de base quelconque, ne peuvent présenter, dans la partie fractionnaire, des suites de zéros dont l'étendue croît trop vite. Une propriété semblable a lieu pour les solutions imaginaires.

Ce théorème est déjà connu pour les solutions des équations algébriques (¹); nous allons, en précisant certains points dans ce cas particulier, établir la propriété plus générale que nous venons d'énoncer.

## II.

Soit

$$X = X_1 + \frac{\alpha_1}{q^{\psi_1}} + \ldots + \frac{\alpha_l}{q^{\psi_l}} + \ldots, \tag{1}$$

$\psi_l$ étant un entier croissant, un nombre exprimé dans le système de numération de base $q$, $X_1$ étant un entier qui peut être nul et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ des entiers différents de zéro et $\overline{\underset{<}{=}}\, q - 1$ en valeur absolue.

Considérons une série à coefficients rationnels

$$fx = \theta_0 + \theta_1 x^{\varpi_1} + \ldots + \theta_n x^{\varpi_n} + \ldots, \tag{2}$$

où $\varpi_n$ est un nombre croissant fonction de $n$, $\theta_1, \theta_2, \ldots, \neq 0$ étant rationnels, $\theta_0$ entier. $fx$ est un polynome ou une série convergente dans un certain domaine où X est compris.

Soit $\frac{p_l}{q_l}$ la fraction obtenue en s'arrêtant dans X au terme d'indice $l$, et

$$f(x) = \varphi_n(x) + R_n(x), \tag{3}$$

$\varphi_n$ étant l'ensemble des termes d'exposant $\leqq \varpi_n$ dans (2).

Si l'on a $\varphi_n\left(\frac{p_l}{q_l}\right) = 0$, on n'aura évidemment pas $\varphi_{n+1}\left(\frac{p_l}{q_l}\right) = 0$. Nous

(¹) Liouville, *Journ. de Math.*, 1851, et Borel, *Leçons sur la théorie des fonctions*, p. 26; 1898.

ne considérerons que les valeurs de $n$ telles que

$$(4)\qquad \varphi_n\left(\frac{p_l}{q_l}\right) \neq 0.$$

On aura

$$(5)\qquad \varphi_n\left(\frac{p_l}{q_l}\right) = \frac{A}{T q_l^{\varpi_n}} \geqq \frac{1}{T q_l^{\varpi_n}},$$

T étant le dénominateur commun à $\theta_1, \ldots, \theta_n$ et A un entier $\neq 0$.

D'autre part,

$$(6)\qquad R_n\left(\frac{p_l}{q_l}\right) = \theta_{n+1}\left(\frac{p_l}{q_l}\right)^{\varpi_{n+1}} + \ldots.$$

Considérons des valeurs de $l$, par suite de $q_l$, ne dépassant pas certaines limites, d'ailleurs aussi grandes qu'on veut, et prenons $\theta_{n+1}$, $\theta_{n+2}$, ... assez petits, ou quand $X < 1$, $\varpi_{n+1}, \varpi_{n+2}, \ldots$ assez grands (1) pour que

$$(7)\qquad R_n\left(\frac{p_l}{q_l}\right) = \theta_{n+1}\left(\frac{p_l}{q_l}\right)^{\varpi_{n+1}} + \ldots < \frac{1}{2 T q_l^{\varpi_n}},$$

ce qui est toujours possible. On aura

$$(8)\qquad \left|f\left(\frac{p_l}{q_l}\right)\right| = \left|\varphi_n\left(\frac{p_l}{q_l}\right) + R_n\left(\frac{p_l}{q_l}\right)\right| > \left|\frac{1}{2 T q_l^{\varpi_n}}\right|.$$

D'autre part, supposons que X soit une racine de $fx = 0$, d'ordre $\alpha$ de multiplicité. On aura, en posant

$$h = \frac{p_l}{q_l} - X,$$

$$f\left(\frac{p_l}{q_l}\right) = f(X + h) = \frac{h^\alpha}{\alpha!}\left[f^{(\alpha)}(X) + \varepsilon\right].$$

---

(1) Nous donnons plus loin un exemple de chacun de ces cas. On pourrait combiner sans difficulté les deux hypothèses dans l'application des formules (8) et (9). Nous croyons inutile d'insister pour le moment.

D'une part, on peut toujours prendre $l$ assez grand pour que

$$f^{(\alpha)}(X) + \varepsilon < 2|f^{(\alpha)}(X)|,$$

et, d'autre part, on a plus généralement

$$|f^{(\alpha)}(X) + \varepsilon| < \lambda |f^{(\alpha)} X| \qquad (\lambda \text{ fini}).$$

Donc

$$(9) \qquad |h|^{\alpha} = \alpha! \left| f\left(\frac{p_l}{q_l}\right) \frac{1}{f^{(\alpha)}(X) + \varepsilon} \right| > \frac{\alpha!}{2\lambda T q_l^{\varpi_n} |f^{(\alpha)} X|}.$$

Or, quels que soient $\varpi_1, \ldots, \varpi_n$ et $q_l$, on pourra toujours prendre $\psi_{l+1}$ assez grand pour que $|h|^{\alpha}$ soit plus petit que le second membre. On en conclut ainsi :

Théorème I. — *Soient*

$$fx = \theta_0 + \theta_1 x^{\varpi_1} + \ldots + \theta_n x^{\varpi_n} + \ldots \text{ [1]}$$

*une série rationnelle (ou un polynome) ($\varpi_1, \ldots, \varpi_n$ entiers croissants, $\theta_0$ entier, $\theta_1, \ldots, \theta_n$ rationnels) convergente dans le domaine où se trouve compris*

$$X = X_1 + \sum \frac{\alpha_l}{q^{\psi_l}}$$

*($\psi_l$ entier positif croissant, $\alpha_l$ entier $\leqq q - 1$ en valeur absolue), X étant un nombre rationnel ou non exprimé dans le système de numération de base $q$; soit $\frac{p_l}{q_l}$ la fraction obtenue en s'arrêtant dans X au terme d'indice $l$ ($q_l = q^{\psi_l}$).*

*$\theta_1, \ldots, \theta_n, \varpi_1, \ldots, \varpi_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_l, \psi_1, \ldots, \psi_l$ étant quelconques, si l'on prend $\theta_{n+1}, \theta_{n+2}, \ldots$ assez petits, ou, quand $X < 1$, $\varpi_{n+1}, \varpi_{n+2}, \ldots$ assez grands pour que*

$$(7) \qquad R_n\left(\frac{p_l}{q_l}\right) = \left| \theta_{n+1} \left(\frac{p_l}{q_l}\right)^{\varpi_{n+1}} + \ldots \right| < \frac{1}{2 T q_l^{\varpi_n}}$$

---

[1] Il est bien évident que l'équation n'a pas la racine $\frac{p_l}{q_l}$ si $l$ est assez grand.

(T *dénominateur commun à* $\theta_1, \ldots, \theta_n$), *ce qui est toujours possible*, X *ne pourra être racine de* $fx = 0$ *que si*

$$(9) \qquad \left|X - \frac{p_l}{q_l}\right|^{\alpha} > \frac{\alpha!}{4Tq_l^{\varpi_n}M}$$

($\alpha$ *ordre de multiplicité de la racine* X, M *nombre fini convenablement choisi*). *Par suite, on peut toujours prendre* $\psi_{l+1}$ *assez grand pour que* X *ne soit pas racine de* $fx = 0$.

En résumé, quand, dans $fx$ les $\theta_n$ allant en décroissant, un certain coefficient $\theta_{n+1}$ est suffisamment plus petit que les précédents, il suffit que X présente un nombre suffisant de zéros consécutifs dans la partie décimale pour que cette quantité ne puisse être racine de $f = 0$ : ceci même si X est une fraction limitée ou $fx$ un polynome. On a une propriété analogue relative aux exposants $\varpi_n$ quand $X < 1$.

Nous croyons utile de donner deux exemples précis d'application de ce théorème.

*Premier exemple.* — Supposons

$$\theta_n = \frac{a_n}{t_n},$$

$a_n$ entier fini et $\neq 0$, $\theta_0$ entier quelconque, $t_n$ étant un entier positif fonction de $n$ contenant en facteur $t_{n-1}, t_{n-2}, \ldots$, et $\varpi_n = n$. On a

$$R_n\left(\frac{p_l}{q_l}\right) = \left(\frac{p_l}{q_l}\right)^{n+1}\left(\frac{a_{n+1}}{t_{n+1}} + \frac{a_{n+2}}{t_{n+2}}\frac{p_l}{q_l} + \ldots\right),$$

$$T = t_n.$$

Supposons, d'après (7),

$$(10) \qquad R_n\left(\frac{p_l}{q_l}\right) < \frac{1}{2t_nq_l^n}.$$

Soit

$$R_n\left(\frac{p_l}{q_l}\right) = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots;$$

on aura

$$\left|\frac{u_{n+i+1}}{u_{n+i}}\right| < k \leq \tfrac{1}{2},$$

dès que

(11) $$D\left|\frac{t_{n+i}}{t_{n+i+1}}\right|\left(\frac{p_l}{q_l}\right) \leq k \leq \tfrac{1}{2}$$

$\left(\text{D étant le maximum du rapport } \left|\frac{a_{n+i+1}}{a_{n+i}}\right|\right)$. On en conclut

$$\left|R_n\left(\frac{p_l}{q_l}\right)\right| < |u_{n+1}|(1+k+k^2+\ldots) = \frac{|u_{n+1}|}{1-k} < 2|u_{n+1}|.$$

Il suffira, pour que (10) ait lieu, que

$$2|u_{n+1}| < \frac{1}{2t_n q_l^n}, \qquad \frac{|a_{n+1}|}{t_{n+1}}\left(\frac{p_l}{q_l}\right)^{n+1} < \frac{1}{4t_n q_l^n}.$$

ou

$$t_{n+1} > 4t_n q_l^n\left(\frac{p_l}{q_l}\right)^{n+1}|a_{n+1}|.$$

Si l'on observe que

$$\frac{p_l}{q_l} < 2X,$$

il suffira, *a fortiori*, que

(12) $$t_{n+1} > 4t_n q_l^n (2X)^{n+1}|a_{n+1}| = 4t_n|a_{n+1}|(2X)^{n+1}q^{n\psi_l}.$$

(11) a alors lieu.

D'autre part

$$|h| < \frac{1}{q^{\psi_{l+1}-1}},$$

et il suffit, pour que (9) soit impossible, que

$$\frac{\alpha!}{4t_n q^{n\psi_l}M} > \frac{1}{q^{\alpha\psi_{l+1}-\alpha}},$$

ou

(13) $$q^{\alpha\psi_{l+1}-\alpha} > \frac{4t_n}{\alpha!}Mq^{n\psi_l},$$

M étant fini.

Les formules (7) et (9) sont ainsi remplacées par (12) et (13).
Soit

$$t_n = r^{\chi_n};$$

(12) donne

$$r^{\chi_{n+1}} > 4 r^{\chi_n} |a_{n+1}| q^{n\psi_l} (2X)^{n+1},$$

ou

$$q^{-n\psi_l} r^{\chi_{n+1}-\chi_n} > 4 |a_{n+1}| (2X)^{n+1}$$

d'une part, et (13) donne

$$q^{\alpha\psi_{l+1}-\alpha-n\psi_l} > \frac{4M}{\alpha!} r^{\chi_n},$$

ou

$$q^{\alpha\psi_{l+1}-\alpha-n\psi_l} r^{-\chi_n} > \frac{4M}{\alpha!}.$$

Il suffira de poser, si $q^\lambda = r$, par exemple :

$$q^{\lambda(\chi_{n+1}-\chi_n)-n\psi_l} \geqq q^{nv},$$
$$q^{\psi_{l+1}-n\psi_l-\lambda\chi_n} \geqq q^{v}$$

($v$ fonction croissante de $n$), c'est-à-dire

$$(14) \qquad \begin{cases} \lambda(\chi_{n+1}-\chi_n) - n\psi_l \geqq nv, \\ \psi_{l+1} - n\psi_l - \lambda\chi_n \quad \geqq v, \end{cases}$$

où $\lambda$ est fini.

$\alpha$. Si $1 \leqq \lambda < 2$, il suffira de prendre

$$(15) \qquad l = n, \qquad \chi_n = n!\,n + k'_n, \qquad \psi_n = n!\,n + k''_n,$$

$k'_n$ et $k''_n$ étant $\leqq (n-1)!$ en valeur absolue, car (14) devient

$$\begin{cases} \lambda[n!(n+1)^2 + k'_{n+1} - n!\,n - k'_n] - n!\,n^2 - nk''_n \geqq n^2, \\ n!\,(n+1)^2 - n!\,n^2 - \lambda(n!\,n + k'_n) + k''_{n+1} - nk''_n \geqq n, \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} (\lambda-1)\,n!\,n^2+n!\,n(2\lambda-1)+\lambda(n!+k'_{n+1}-k'_n)-nk''\geqq n^2, \\ n!\,n(2-\lambda)+n!-\lambda k'_n+k''_{n+1}-nk''_n\geqq n, \end{cases}$$

ce qui a lieu quand $1\leqq\lambda<2$, pour $n$ assez grand.

$\beta$. Quel que soit $\lambda$, il suffira de prendre

$$l=n, \qquad \lim\frac{\psi_n}{\chi_n}=1 \text{ pour } n=\infty$$

et $\frac{\chi_{n+1}}{n\chi_n}$, $\frac{\psi_{n+1}}{n\psi_n}$ croissant indéfiniment avec $n$.

Nous obtenons ainsi le corollaire suivant :

*Corollaire I.* — La fraction

$$X=X_1+\frac{\alpha_1}{q^{k''_1+1}}+\ldots+\frac{\alpha_n}{q^{k''_n+n!n}}+\ldots$$

où $X_1$ et $q$ sont des entiers quelconques et où $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$ sont des entiers positifs ou négatifs dont la valeur absolue est $\leqq q-1$ et $\neq 0$. n'est solution d'aucune des équations

$$0=fx=a_0+\frac{a_1x}{r^{k'_1+1}}+\frac{a_2x^2}{r^{k'_2+2!2}}+\ldots+\frac{a_nx^n}{r^{k'_n+n!n}}+\ldots,$$

où $r$ est entier, et où $a_1, \ldots, a_n$ sont des entiers limités positifs ou négatifs quand $q\leqq r<q^2\,[k'_n$ et $k''_n\leqq(n-1)!]$. Le premier membre de cette équation est évidemment une fonction entière.

De même la fraction

$$X=X_1+\frac{\alpha_1}{q^{\psi_1}}+\ldots+\frac{\alpha_n}{q^{\psi_n}}+\ldots,$$

n'est solution d'aucune des équations

$$0=fx=a_0+\frac{a_1x}{r^{\chi_1}}+\ldots+\frac{a_nx^n}{r^{\chi_n}}+\ldots,$$

quand $\frac{\chi_{n+1}}{n\chi_n}$, $\frac{\psi_{n-1}}{n\psi_n}$ croissent indéfiniment avec $n$, et que $\lim \frac{\psi_n}{\chi_n} = 1$ pour $n = \infty$.

*Deuxième exemple.* — Au lieu de faire intervenir le mode de décroissance des coefficients de $fx$, on peut faire intervenir le mode de croissance des exposants.

Considérons

$$(16) \qquad f = a_0 + a_1 x^{\varpi_1} + \ldots + a_n x^{\varpi_n} + \ldots,$$

où $a_0, \ldots, a_n, \ldots$ sont des entiers croissants ou non, positifs ou négatifs.

Supposons $X < 1$, ou, plus exactement, $X = \frac{1}{1+\varepsilon'}$, $\varepsilon'$ fini. On a $T = 1$,

$$R_n\left(\frac{p_l}{q_l}\right) = \left(\frac{p_l}{q_l}\right)^{\varpi_{n+1}}\left[a_{n+1} + a_{n+2}\left(\frac{p_l}{q_l}\right)^{\varpi_{n+2}-\varpi_{n+1}} + \ldots\right].$$

Il suffira d'abord, d'après (7), qu'on ait

$$R_n\left(\frac{p_l}{q_l}\right) < \frac{1}{2q_l^{\varpi_n}},$$

ce qui a lieu si

$$(17) \qquad 2|a_{n+1}| < \frac{1}{2q_l^{\varpi_n}}$$

avec

$$(18) \qquad \left|\frac{a_{n+l+1}}{a_{n+l}}\right| \left(\frac{p_l}{q_l}\right)^{\varpi_{n+i+1}-\varpi_{n+i}} \leqq k \leqq \tfrac{1}{2}.$$

Cette dernière condition (18) est vérifiée quel que soit $X < 1$, pour $n$ et $l$ assez grands, dès que

$$(18\ bis) \qquad \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \frac{\varpi_n}{\varpi_{n+1}} \leqq \mu \qquad \left(\begin{matrix}\mu \text{ fini quel que} \\ \text{soit } n\end{matrix}\right),$$

$\frac{\varpi_{n+1}}{\varpi_n}$ croissant indéfiniment avec $n$. Nous supposerons qu'il en soit ainsi : la série (16) est alors convergente pour $x < 1$.

Quant à la première (17) elle devient

$$2\left(\frac{p_l}{q_l}\right)^{\varpi_{n+1}}|a_{n+1}| < \frac{1}{2q_l^{\varpi_n}},$$

ou

$$4q_l^{\varpi_n}|a_{n+1}| < \left(\frac{q_l}{p_l}\right)^{\varpi_{n+1}}.$$

Or

$$\frac{q_l}{p_l} \geq 1 + \varepsilon,$$

$\varepsilon$ étant fini, il suffit donc qu'on ait

$$4q_l^{\varpi_n}|a_{n+1}| < (1+\varepsilon)^{\varpi_{n+1}},$$

ou

$$4q^{\psi_l\varpi_n}|a_{n+1}| < (1+\varepsilon)^{\varpi_{n+1}}.$$

Si

$$(1+\varepsilon)^{\beta} = q \qquad (\beta \text{ fini}),$$

il suffira qu'on ait

(19) $$4|a_{n+1}| < (1+\varepsilon)^{\varpi_{n+1}-\beta\varpi_n\psi_l},$$

pour que (18) ait lieu.

D'autre part

$$|h| < \frac{1}{q^{\psi_{l+1}-1}};$$

et, pour que (9) soit impossible, il suffira qu'on ait

$$\left|\frac{1}{q^{\psi_{l+1}-1}}\right|^{\alpha} < \frac{\alpha!}{4\mathrm{M}\,q^{\psi_l\varpi_n}},$$

ou

$$\alpha!\, q^{\alpha\psi_{l+1}-\alpha} > 4q^{\psi_l\varpi_n}\mathrm{M},$$

(20) $$\alpha!\, q^{\alpha\psi_{l+1}-\alpha-\psi_l\varpi_n} > 4\mathrm{M}, \qquad \alpha \geq 1,$$

ce qui a toujours lieu dès que $\psi_{l+1} - \psi_l\varpi_n$ croît indéfiniment avec $n$.

Il suffira de prendre $n = l$, $\frac{\varpi_{n+1}}{\varpi_n^2}$ croissant indéfiniment avec $n$.

$\lim \frac{\psi_n}{\varpi_n} = 1$ pour $n = \infty$ et $|a_n| \leqq \frac{\varpi_n}{\varpi_{n-1}}$ pour que les conditions (18), (18 *bis*), (19) et (20) soient vérifiées.

En effet, (19) et (20) ont lieu, (18 *bis*) donne

$$|a_{n+1}| \leqq \mu \frac{\varpi_{n+1}}{\varpi_n} |a_n| \qquad \text{ou} \qquad 1 \leqq \mu |a_n|,$$

condition qui est toujours vérifiée pour $\mu = 1$. D'où cette conclusion :

*Corollaire II.* — La fraction

$$\frac{\alpha_1}{q^{\psi_1}} + \frac{\alpha_2}{q^{\psi_2}} + \ldots + \frac{\alpha_n}{q^{\psi_n}} + \ldots < 1,$$

où $q$ est entier, et où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ sont des entiers $\neq 0$ et $< q$ en valeur absolue, n'est solution d'aucune des équations

$$f = a_0 + a_1 x^{\varpi_1} + \ldots + a_n x^{\varpi_n} + \ldots = 0,$$

$a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ étant des entiers positifs ou négatifs, lorsque $\frac{\varpi_{n+1}}{\varpi_n^2}$ croît indéfiniment avec $n$, que $\lim \frac{\psi_n}{\varpi_n} = 1$ pour $n = \infty$ et que $|a_n| \leqq \frac{\varpi_n}{\varpi_{n-1}}$. La série $f$ est alors toujours convergente pour $x < 1$.

## III.

Considérons maintenant une série procédant suivant les puissances croissantes ou décroissantes de $x$

$$(21) \qquad f_1 = \theta_0 + \sum \theta_n x^{\varpi_n} + \sum \frac{\tau_n}{x^{\chi_n}},$$

convergente dans le domaine où se trouve compris X, l'origine étant un pôle ou un point singulier essentiel de $f_1$.

Dans le cas où l'origine est un pôle, il suffit de multiplier par une certaine puissance de $x$ pour ramener l'équation $f_1 = 0$ à celle déjà traitée.

Nous nous contenterons donc de considérer le cas où $f_1$ a, à l'origine, un point singulier essentiel.

Alors on peut encore établir pour l'équation $f_1 = 0$ un théorème analogue au théorème I.

En effet, posons

$$(22) \qquad f_1 = \varphi_n + \psi_{n_1} + R_n + S_{n_1},$$

$$(23) \qquad \begin{cases} \varphi_n = \theta_0 + \displaystyle\sum_1^n \theta_n x^{\varpi_n}, \\ \psi_{n_1} = \displaystyle\sum_1^{n_1} \frac{\eta_n}{x^{\chi_n}}, \end{cases}$$

on aura

$$(24) \qquad \left|\psi_{n_1}\left(\frac{p_l}{q_l}\right) + \varphi_n\left(\frac{p_l}{q_l}\right)\right| = \frac{A}{Tq_l^{\varpi_n} p_l^{\chi_{n_1}}} \geq \frac{1}{Tq_l^{\varpi_n} p_l^{\chi_{n_1}}},$$

T étant le dénominateur commun à $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_n, \eta_1, \ldots, \eta_{n_1}$. On pourra, en effet, supposer A, qui est entier, $\neq 0$; car si $R_n + S_{n_1} = 0$, $R_{n+1} + S_{n_1}$ et $R_n + S_{n_1+1}$ sont $\neq 0$.

Prenons $\theta_{n+1}, \ldots, \eta_{n_1+1}, \ldots$ assez petits pour que

$$(25) \qquad R_n\left(\frac{p_l}{q_l}\right) + S_{n_1}\left(\frac{p_l}{q_l}\right) < \frac{1}{2Tq_l^{\varpi_n} p_l^{\chi_{n_1}}};$$

on aura

$$(26) \qquad f_1\left(\frac{p_l}{q_l}\right) > \frac{1}{2Tq_l^{\varpi_n} p_l^{\chi_{n_1}}}.$$

Supposons que X soit racine de $f_1 = 0$ et de ses $\alpha - 1$ premières dérivées. On aura, si $h = \frac{p_l}{q_l} - X$,

$$f_1\left(\frac{p_l}{q_l}\right) = f_1(X + h) = \frac{h^\alpha}{\alpha!}\left[f_1^{(\alpha)}(X) + \varepsilon\right],$$

et, pour $h$ assez petit,

$$\left|f_1^{(\alpha)}(X) + \varepsilon\right| < \lambda \left|f_1^{(\alpha)}(X)\right|,$$

$\lambda$ étant fini,

$$|h|^{\alpha} > \left| f_1\left(\frac{p_l}{q_l}\right) \frac{\alpha!}{\lambda f_1^{(\alpha)}(\mathrm{X})} \right|,$$

(27) $$|h| > \frac{\alpha!}{2\lambda \mathrm{T} q_l^{\varpi_n} p_l^{\chi_{n_1}} |f_1^{(\alpha)}(\mathrm{X})|}.$$

Quels que soient $\varpi_1, \ldots, \varpi_n, \chi_1, \ldots, \chi_{n_1}, p_l$ et $q_l$, on pourra prendre $\psi_{l+1}$ assez grand pour que $|h|^{\alpha}$ soit $<$ le second membre. On en conclut :

Théorème II. — *Soit*

(21) $$f_1(x) = \theta_0 + \sum \theta_n x^{\varpi_n} + \sum \frac{\eta_{n_1}}{x^{\chi_{n_1}}}$$

*une série rationnelle ayant un point singulier essentiel à l'origine* ($\varpi_1, \ldots, \varpi_n, \chi_1, \ldots, \chi_n$ *étant des entiers croissants,* $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_n, \eta_1, \ldots, \eta_{n_1}, \ldots,$ *des nombres rationnels*), *la série étant convergente dans le domaine où se trouve la quantité*

$$\mathrm{X} = \mathrm{X}_1 + \sum \frac{\alpha_l}{q^{\psi_l}},$$

X *étant un nombre rationnel ou non, exprimé dans le système de numération de base* $q$ ($\psi_l$ *étant un entier positif croissant,* $\alpha_l$ *un entier positif ou négatif* $<q$ *en valeur absolue*); *soit* $\frac{p_l}{q_l}$ *la fraction irréductible obtenue en s'arrêtant dans* X *au terme d'indice* $l$, $\theta_1, \ldots, \theta_n, \eta_1, \ldots, \eta_{n_1}, \varpi_1, \ldots, \varpi_n, \chi_1, \ldots, \chi_{n_1}, \alpha_1, \ldots, \alpha_l, \psi_1, \ldots, \psi_l$ *étant absolument quelconques, si l'on prend* $\theta_{n+1}$ *et* $\eta_{n_1+1}$ *assez petits pour qu'on ait*

(25) $$\left\{\begin{aligned} &\mathrm{R}_n\left(\frac{p_l}{q_l}\right) + \mathrm{S}_{n_1}\left(\frac{p_l}{q_l}\right) \\ &\quad = \theta_{n+1}\left(\frac{p_l}{q_l}\right)^{\varpi_{n+1}} + \ldots + \eta_{n_1+1}\left(\frac{q_l}{p_l}\right)^{\chi_{n_1+1}} + \ldots < \frac{1}{2\mathrm{T} q_l^{\varpi_n} p_l^{\chi_{n_1}}}, \end{aligned}\right.$$

*ce qui est toujours possible* (T *étant le dénominateur commun à* $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_n, \eta_1, \ldots, \eta_{n_1}$), X *ne pourra être racine de* $fx = 0$ *que si*

(27) $$\left|\mathrm{X} - \frac{p_l}{q_l}\right|^{\alpha} > \frac{\alpha!}{4\mathrm{T} q_l^{\varpi_n} p_l^{\chi_{n_1}} \mathrm{M}},$$

(*$\alpha$ désignant l'ordre de multiplicité de la racine* X, M *un nombre fini convenablement choisi*). *Par suite, on peut toujours prendre* $\psi_{l+1}$ *assez grand pour que* X *ne soit pas racine de* $fx = 0$ (¹).

On peut trouver un corollaire analogue au corollaire I du théorème I.

Prenons $\theta_n = \frac{a_n}{t_n}$, $\eta_n = \frac{b_n}{l_n}$, $t_n$ divisant $t_{n+1}$, $l_n$ divisant $l_{n+1}$, $a_n$ et $b_n$ restant finis et $\neq 0$ en général, $\varpi_n = \chi_n = n$. Supposons encore que l'on prenne

$$R_n\left(\frac{p_l}{q_l}\right) + S_{n_1}\left(\frac{p_l}{q_l}\right) < \frac{1}{2T q_l^{\varpi_n} p_l^{\chi_{n_1}}}, \tag{28}$$

d'après (25). On a

$$R_n\left(\frac{p_l}{q_l}\right) = \left(\frac{p_l}{q_l}\right)^{n+1}\left(\frac{a_{n+1}}{t_{n+1}} + \frac{a_{n+2}}{t_{n+2}}\frac{p_l}{q_l} + \ldots\right) < 2\,|u_{n+1}|$$

dès que

$$D\left|\frac{p_l}{q_l}\,\frac{t_{n+i}}{t_{n+i+1}}\right| \leqq k < \frac{1}{2}, \tag{29}$$

$\left(\text{D désignant le maximum du rapport } \left|\frac{a_{n+i+1}}{a_{n+i}}\right|\right)$;

$$S_{n_1}\left(\frac{p_l}{q_l}\right) = \left(\frac{q_l}{p_l}\right)^{n_1+1}\left(\frac{b_{n_1+1}}{l_{n_1+1}} + \frac{b_{n_1+2}}{l_{n_1+2}}\frac{q_l}{p_l} + \ldots\right) < 2\,|v_{n_1+1}|$$

(¹) On remarquera que ce qui précède reste vrai quand $\theta_1 = \ldots = \theta_n = \ldots = 0$, pourvu que l'on suppose $\varpi_n = 0$ dans (25) et (27). On arriverait ainsi à des propriétés complètement analogues à celles du paragraphe précédent, soit en ce qui concerne les coefficients $\eta_i$, soit en ce qui concerne les exposants $\chi$.

On remarquera encore que la série $f_1$ conserve sa forme quand on y change $x$ en $\frac{1}{x}$. On pourra en conclure que, sous des conditions analogues, $f_1 = 0$ n'admet pas de solutions de la forme $\frac{1}{X}$ : nous n'insistons pas.

Enfin on pourra supposer les $\theta$ entiers et $X < 1$, ou les $\eta_i$ entiers et $X > 1$. Les raisonnements à faire sont suffisamment indiqués par ceux du corollaire II du théorème I et ceux du § III.

dès que

$$(30)\qquad \Delta\left|\frac{q_l}{p_l}\frac{l_{n_1+l}}{l_{n_1+l+1}}\right| \leqq k < \frac{1}{2}$$

$\left(\Delta\right.$ désignant le maximum du rapport $\left.\left|\frac{b_{n_1+l+1}}{b_{n_1+l}}\right|\right)$.

Dès lors (28) a lieu dès que

$$|u_{n+1}| + |v_{n+1}| < \frac{1}{4\mathrm{T}q_l^{\varpi_n}p_l^{\chi_{n_1}}},$$

ou

$$(31)\qquad \left|\frac{a_{n+1}}{l_{n+1}}\left(\frac{p_l}{q_l}\right)^{n+1}\right| + \left|\frac{b_{n_1+1}}{l_{n_1+1}}\left(\frac{q_l}{p_l}\right)^{n_1+1}\right| < \frac{1}{4\mathrm{T}q_l^{\varpi_n}p_l^{\chi_{n_1}}}.$$

Ceci posé, prenons $n_1 = n$, $t_n = l_n$ (1); on a

$$\frac{p_l}{q_l} < 2\mathrm{X}', \qquad \frac{q_l}{p_l} < 2\mathrm{X}',$$

en désignant par X′ la plus grande des quantités X, $\frac{1}{\mathrm{X}}$. Il suffira *a fortiori* qu'on ait

$$\frac{|a_{n+1}| + |b_{n+1}|}{l_{n+1}}(2\mathrm{X}')^{n+1} < \frac{1}{4\,l_n q_l^{\varpi_n}p_l^{\chi_n}},$$

$$l_{n+1} > (|a_{n+1}| + |b_{n+1}|)(2\mathrm{X}')^{n+1}\,4\,l_n q_l^{\varpi_n}p_l^{\chi_n},$$

ou, en remarquant que

$$p_l = \left(\frac{p_l}{q_l}\right)q_l < 2\mathrm{X}'q_l, \qquad q_l = q^{\psi_l},$$

$$(32)\qquad l_{n+1} > (|a_{n+1}| + |b_{n+1}|)(2\mathrm{X}')^{n+1}\,4\,l_n q^{\psi_l(\varpi_n+\chi_n)}(2\mathrm{X}')^{\chi_n}.$$

---

(1) Si $\psi_{n-1}\left(\frac{p_l}{q_l}\right) + \varphi_{n-1}\left(\frac{p_l}{q_l}\right) = 0$, $\psi_n\left(\frac{p_l}{q_l}\right) + \varphi_n\left(\frac{p_l}{q_l}\right)$ ne peut être nul que si $\frac{a_n}{l_n}\left(\frac{p_l}{q_l}\right)^n + \frac{b_n}{l_n}\left(\frac{q_l}{p_l}\right)^n = 0$, ce qui est impossible pour $n$ et $l$ assez grands, puisque $\left(\frac{p_l}{q_l}\right)^n$ croît ou décroît indéfiniment avec $n$ et que $t_n = l_n$. On pourra donc toujours supposer ici $n$ tel que $\mathrm{A} > 0$ dans (24).

Cette condition remplace ici la condition (25). Si elle a lieu, il suffira, pour que X ne soit pas racine de $f_1 = 0$, d'après (27), qu'on ait

$$\left|X - \frac{p_l}{q_l}\right|^{\alpha} < \frac{\alpha!}{4 T q_l^{\varpi_n} p_l^{\chi_n} M},$$

$\alpha$ et M étant finis. Ici

$$\left|X - \frac{p_l}{q_l}\right| \vee \frac{1}{q^{\psi_{l+1}-1}}, \qquad T = t_n;$$

il suffit qu'on ait

$$\frac{1}{q^{\alpha\psi_{l+1}-\alpha}} < \frac{\alpha!}{4 t_n q_l^{\varpi_n} \left(\frac{p_l}{q_l}\right)^{\chi_n} M q_l^{\chi_n}},$$

ou, *a fortiori*,

$$4 t_n q^{\psi_l(\varpi_n+\chi_n)} (2X')^{\chi_n} M < \alpha!\, q^{\alpha\psi_{l+1}-\alpha}. \tag{33}$$

Cette condition remplace ici la condition (27).

Prenons, par exemple,

$$l = n = \varpi_n = \chi_n, \qquad t_n = r^{\rho_n}, \qquad r \text{ entier}.$$

(32) donne

$$r^{\rho_{n+1}} > (|a_{n+1}| + |b_{n+1}|)(2X')^{2n+1} 4 r^{\rho_n} q^{2n\psi_n},$$

ou

$$r^{\rho_{n+1}-\rho_n} q^{-2n\psi_n} > 4(|a_{n+1}| + |b_{n+1}|)(2X')^{2n+1},$$

et (33) donne

$$\alpha!\, q^{\alpha\psi_{n+1}-\alpha} > 4 r^{\rho_n} q^{2n\psi_n} (2X')^n M,$$

ou

$$q^{\alpha\psi_{n+1}-\alpha-2n\psi_n} r^{-\rho_n} > \frac{4M}{\alpha!}(2X')^n.$$

Il suffira de poser $r = q^{\lambda_1}$ ($\lambda_1$ fini) et

$$\left.\begin{array}{l} q^{\lambda_1(\rho_{n+1}-\rho_n)-2n\psi_n} \geqq q^{n\nu} \\ q^{\psi_{n+1}-2n\psi_n-\lambda\rho_n} \geqq q^{n\nu} \end{array}\right\} \qquad (\nu \text{ fonction croissante de } n),$$

c'est-à-dire

$$(34)\qquad \begin{cases} \lambda_1(\rho_{n+1}-\rho_n)-2n\psi_n \geqq nv, \\ \psi_{n+1}-2n\psi_n-\lambda\rho_n \geqq nv, \end{cases}$$

où $\lambda_1$ est fini.

Quel que soit $\lambda_1$ il suffira de prendre $\lim\frac{\psi_n}{\rho_n}=1$ pour $n=\infty$, $\frac{\rho_{n+1}}{n\rho_n}$, $\frac{\psi_{n+1}}{n\psi_n}$ croissant infiniment avec $n$ pour que (34) ait lieu. Nous obtenons ainsi ce corollaire :

*Corollaire.* — La fraction

$$X = X_1 + \frac{\alpha_1}{q^{\psi_1}} + \ldots + \frac{\alpha_n}{q^{\psi_n}} + \ldots,$$

où $X_1$ et $q$ sont des entiers et où $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$ sont des entiers positifs ou négatifs $\leqq q-1$ en valeur absolue, n'est solution d'aucune des équations

$$0 = f_1 x = \ldots + \frac{b_n}{r^{\rho_n} x^n} + \ldots + \frac{b_1}{r^{\rho_1} x} + a_0 + \frac{a_1 x}{r^{\rho_1}} + \ldots + \frac{a_n x^n}{r^{\rho_n}} + \ldots,$$

quand $\frac{\rho_{n+1}}{n\rho_n}$, $\frac{\psi_{n+1}}{n\psi_n}$ croissent indéfiniment avec $n$ et que $\lim\frac{\psi_n}{\rho_n}=1$ pour $n=\infty$ ($a_i$, $b_j$, $r$ étant des entiers finis $\neq 0$ en général, $\rho_n$ et $\psi_n$ des entiers $\neq 0$).

## IV.

Les idées qui précèdent paraissent avoir une portée encore plus générale que nous ne l'avons indiqué. D'abord elles s'appliquent aux équations algébriques : X et $\frac{1}{X}$, plus généralement leurs puissances rationnelles ou une fonction algébrique à coefficients entiers de X (Liouville ne l'a indiqué que pour X) ne peuvent être racines d'une équation algébrique quand $\psi_i$ croît suffisamment vite. Mais il y a des équations transcendantes, en nombre indéfini, pour lesquelles on peut obtenir des résultats analogues. On peut même dire qu'un théorème analogue au théorème I a lieu, dans un domaine donné, pour l'équation la plus générale $f_2 x = 0$ dont le premier membre admet une dérivée et a ses coefficients rationnels.

En effet, si

$$\frac{p_l}{q_l} = X + h,$$

et si X est racine d'ordre $\alpha$ de multiplicité non rationnelle de $f_2 X$

$$\left| f_2\left(\frac{p_l}{q_l}\right) \right| = \left| \frac{h^\alpha}{\alpha!} [f_2^{(\alpha)}(X) + \varepsilon]^2 \right| \leqq \frac{h^\alpha}{\alpha!} \lambda \,|f_2^{(\alpha)}(X)|,$$

$$|h^\alpha| \geqq \frac{\alpha!}{\lambda} \left| \frac{f_2\left(\frac{p_l}{q_l}\right)}{f_2^{(\alpha)}(X)} \right|.$$

Or $f_2\left(\frac{p_l}{q_l}\right)$ est parfaitement déterminé quand $l$ est donné. Donc $h$ a une limite inférieure, par suite $\psi_{l+1}$ une limite supérieure. Il resterait à classer les quantités X par rapport aux fonctions $f_2$. En considérant certaines catégories convenablement choisies de fonctions $f_2$, on pourra obtenir des catégories correspondantes de quantités X. Ce qui précède constitue une application de cette idée.

D'autre part, les méthodes des premiers paragraphes s'étendent aux racines imaginaires des équations algébriques ou transcendantes, résultat que Liouville n'a indiqué que pour les équations algébriques.

Les extensions pour les équations considérées aux § II et III sont immédiates : il suffit de remplacer A par A + B$i$ dans (5); on a encore

$$(5\ bis) \qquad \left| \varphi_n\left(\frac{p_l}{q_l}\right) \right| = \left| \frac{A + Bi}{T q_l^{\varpi_n}} \right| \geqq \frac{1}{T q_l^{\varpi_n}}.$$

Il suffira de prendre

$$(7\ bis) \qquad \left| R_n\left(\frac{p_l}{q_l}\right) \right| < \frac{1}{2 T q_l^{\varpi_n}},$$

pour que (8) subsiste; (9) subsiste également, par suite le théorème I.

De même pour le théorème II. Nous n'insisterons pas davantage.

Nous croyons utile de mettre en lumière une conséquence importante des résultats établis dans notre Note : les nombres algébriques réels ou imaginaires et ceux qui sont des solutions des équations considérées aux théorèmes I et II jouissent de cette propriété curieuse que le nombre des zéros de la partie fractionnaire réelle ou imaginaire qui suit le $n^{\text{ième}}$ chiffre significatif $\neq 0$ de cette partie est limité en fonction de $n$, quelle que soit la base du système de numération. On en conclut cette conséquence :

*Il existe, et c'est là un fait bien remarquable, une infinité de nombres réels ou imaginaires qui, quel que soit le système de numération dans lequel on les exprime, n'ont, après le $n^{\text{ième}}$ chiffre significatif $\neq 0$ qu'un nombre de zéros limité en fonction de $n$, quel que soit $n$.*

Cette existence n'était pas évidente *a priori*.

## V.

Des considérations de même nature s'appliquent aux nombres X représentés par un développement en fraction continue

$$(1\ bis)\qquad X = \gamma + \cfrac{1}{\gamma_1 + \cfrac{1}{\gamma_2 + \dots}}.$$

Désignons par $\frac{p_l}{q_l}$ la réduite de rang $l$ : on a

$$p_l q_{l+1} - p_{l+1} q_l = (-1)^l,$$

$$\left|\frac{p_l}{q_l} - X\right| < \frac{1}{q_l q_{l+1}},$$

$$q_{l+1} = \gamma_l q_l + q_{l-1}.$$

Si $\gamma_l$ est suffisamment grand par rapport à $q_l$, $\frac{1}{q_l q_{l+1}}$ sera beaucoup plus petit que $q_l$. X sera donc égal à $\frac{p_l}{q_l}$ + une certaine fraction très petite par rapport à $\frac{1}{q_l}$ et sera alors un nombre analogue à ceux que nous avons considérés dans les trois premiers paragraphes; il jouit des mêmes propriétés.

On peut d'ailleurs se dispenser de passer par l'intermédiaire de ces paragraphes et raisonner directement : on serait encore conduit à des théorèmes analogues aux théorèmes I et II.

Par exemple, le théorème I subsiste : on pourra toujours prendre $\gamma_l$ assez grand pour que X ne soit pas racine de $f(x) = 0$.

Faisons application au premier exemple considéré dans le § II; (12) devient

$$(12\ bis) \qquad t_{n+1} > 4 t_n q_l^n (2X)^{n+1} |a_{n+1}|.$$

De plus

$$|h| < \frac{1}{q_l q_{l+1}}.$$

Il suffit que (12 *bis*) ait lieu ainsi que

$$\frac{\alpha!}{4 t_n q_l^n M} > \frac{1}{q_l^\alpha q_{l+1}^\alpha},$$

ou

$$(13\ bis) \qquad q_{l+1} > 4 t_n q_l^{n-\alpha} \frac{M}{\alpha!},$$

M étant fini.

Prenant $l = n$, $t_n = r^{\lambda_n}$, il suffira évidemment de poser $q_n = q^{\lambda_n}$ pour que le corollaire I subsiste.

On raisonnerait de même pour le théorème II.

## VI.

Enfin, on peut étendre les considérations qui précèdent à d'autres modes de représentation des nombres que ceux de la forme (1) et (1 *bis*).

Soient

$$(35) \qquad q_1, q_2, q_3, \ldots$$

une suite d'entiers. On pourra écrire

$$X = X_1 + \frac{\varepsilon_1}{q_1}, \qquad |\varepsilon_1| < q_1,$$

$X_1$ étant le plus grand entier contenu dans X ou l'entier immédiatement supérieur; puis

$$X = X_1 + \frac{\alpha_1}{q_1} + \frac{\varepsilon_2}{q_1 q_2},$$

$|\alpha_1|$ étant le plus grand entier contenu dans $\varepsilon_1$ ou l'entier immédiatement supérieur, et ayant le signe de $\varepsilon_1$; on aura

$$\frac{\alpha_1 q_2 + \varepsilon_2}{q_1 q_2} = \frac{\varepsilon_1}{q_1},$$
$$\varepsilon_2 = q_2(\varepsilon_1 - \alpha_1),$$

et $\varepsilon_2$ pourra être pris $< q_2$ en valeur absolue si les signes de $\varepsilon_1$ et $\alpha_1$ sont convenables. Nous supposerons qu'il en soit ainsi.

En continuant de la sorte, on mettra évidemment X sous la forme

$$(36) \qquad X = X_1 + \frac{\alpha_1}{q_1} + \frac{\alpha_2}{q_1 q_2} + \ldots + \frac{\alpha_n}{q_1 q_2 q_n} + \ldots.$$

(35) sera la *base du système de numération généralisé* considéré, (36) la représentation du nombre dans ce système. En prenant

$$q_1 = q_2 = \ldots,$$

on retrouve évidemment les systèmes de numération ordinaires.

Quand on se donne l'ordre des nombres $q_1, q_2, \ldots$ et les signes successifs de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, à chaque nombre X correspond un mode unique de représentation sous la forme (36).

Il est bien évident, dès lors, si les $|z_i|$ sont limités, que le théorème I subsistera sous la seule condition de remplacer $q^{\frac{1}{l}}$ par $q_1$, $q_2 \ldots q_l$. Il suffira de prendre $q_{l+1}$ assez grand pour que X ne soit pas racine de $f(x) = 0$.

Le théorème II subsistera évidemment aussi et l'on aura des corollaires analogues à ceux que nous avons indiqués.