JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

WALTER-B. FORD

Sur la fonction définie par une série de Maclaurin

Journal de mathématiques pures et appliquées 5e série, tome 9 (1903), p. 223-232.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1903_5_9__223_0>

Sur la fonction définie par une série de Maclaurin;

PAR M. WALTER-B. FORD.

---

1. Le but de cette Note est d'étudier le problème général suivant sous quelques-uns de ses aspects les plus importants.

Étant donnée la série de Maclaurin :

$$g(0) + g(1)z + g(2)z^2 + \ldots + g(n)z^n + \ldots \tag{1}$$

qui définit une fonction $f(z)$ de la variable complexe z dans un cercle de rayon r (centre à $z = 0$); *calculer la valeur de $f(z)$ en un point quelconque de son domaine d'existence* [1].

Nous commencerons par démontrer le théorème suivant :

Si, dans la série (1), *la fonction $g(w)$ de la variable complexe w est uniforme et analytique quand on la considère pour toutes les valeurs de w dont la partie réelle est positive, et si, pour les mêmes valeurs de w, il existe une constante c telle que $\lim\limits_{\text{mod}\, w = \infty} |g(w)| < c$, alors la fonction $f(z)$ possède une branche* [*dont la série* (1) *est une partie*] *uniforme et analytique dans tout le plan* (*fini*) *de la*

---

[1] On trouve un résumé des résultats déjà obtenus qui concernent ce problème dans le Traité de M. Hadamard intitulé : *La série de Taylor et son prolongement analytique*. Paris, 1901.

variable $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, *excepté les valeurs réelles et positives, et cette branche est définie par la formule*

$$f(z) = g(0) - \frac{i\sqrt{z}}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g\left(\frac{1}{2} + iy\right)(-z)^{iy}}{\cosh\pi y}\,dy,$$

en supposant toujours que $-2\pi < \varphi < 0$.

La démonstration de ce théorème s'appuie sur le résultat suivant dû à M. Dini (¹) :

« Soient données les deux fonctions $\Phi(w)$ et $U(w)$ de la variable complexe $w (w = x + iy)$, l'une et l'autre uniformes et analytiques dans une région A du plan de la variable w, et dont la seconde ne s'annule dans A qu'aux points $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ qui sont des zéros simples. Alors, si nous désignons par C_n un contour quelconque compris entièrement dans A et renfermant les points $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$, mais ne passant par aucun d'eux, nous aurons

$$(2) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{C_n} \frac{\Phi(w)}{U(w)}\,dw = \sum_1^n \frac{\Phi(\lambda_n)}{U'(\lambda_n)},$$

l'intégrale étant prise le long du contour C_n dans le sens positif. »

Ceci posé, pour arriver à notre but, choisissons

$$\Phi(w) = \pi g(w)(-z)^{w}, \qquad U(w) = \sin\pi w$$

et prenons comme contour C_n le rectangle formé par les droites

$$w = \frac{1}{2} + iy, \qquad w = x \pm ij, \qquad w = \frac{1}{2} + 2n + iy$$

(j étant une quantité positive et n un nombre entier positif quelconque).

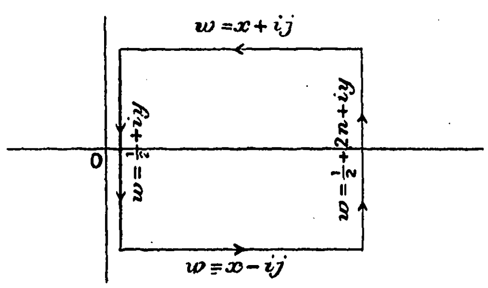
(¹) *Serie di Fourier e altre rappresentazioni analitiche delle funzioni di una variabile reale*, § 61, 62, 63; Pisa, 1880. M. Dini y obtient des résultats généraux dont celui-ci est un cas particulier.

Alors le second membre de l'égalité (2) se réduit à

$$g(1)z+g(2)z^2+g(3)z^3+\ldots+g(n)z^n;$$

nous pouvons donc écrire

$$(3)\qquad \sum_0^n g(n)z^n = g(0)+\frac{1}{2i}\int_{C_n}\frac{g(w)(-z)^w}{\sin\pi w}\,dw.$$



Afin d'étudier l'intégrale (3), nous écrivons $z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, en supposant toujours que $-2\pi<\varphi<0$. Considérons d'abord le côté de C_n le long duquel $w=x+ij$. Nous avons ici

$$dw=dx$$

et l'intégration s'effectue de $x=\frac{1}{2}+2n$ à $x=\frac{1}{2}$; le long de ce côté, nous pouvons donc écrire

$$\begin{aligned}\sin\pi w=\sin(\pi x+i\pi j)&=\sin\pi x\cosh\pi j+i\cos\pi x\sinh\pi j\\&=\sinh\pi j(\sin\pi x\coth\pi j+i\cos\pi x),\\(-z)^w=(-z)^x e^{ij\log(-z)}&=(-z)^x e^{ij\log\rho-j(\varphi+\pi)}\\&=(-z)^x e^{-j(\varphi+\pi)}[\cos(j\log\rho)+i\sin(j\log\rho)].\end{aligned}$$

Par suite, en désignant par I_j la contribution apportée à l'intégrale (3) par le côté $w=x+ij$, il vient

$$I_j=\frac{e^{-j(\varphi+\pi)}[\cos(j\log\rho)+i\sin(j\log\rho)]}{2i\sinh\pi j}\int_{\frac{1}{2}+2n}^{\frac{1}{2}}\frac{g(x+ij)(-z)^x}{\sin\pi x\coth\pi j+i\cos\pi x}\,dx.$$

Or, pour toutes les valeurs de x, nous avons

$$\lim_{j=\infty} |(\sin\pi x \coth\pi j + i\cos\pi x)| = 1,$$

et, grâce à notre hypothèse concernant $g(w)$, nous pouvons écrire, pour toutes les valeurs de j plus grandes qu'une quantité fixe j_0,

$$|\mathrm{I}_j| < \frac{e^{-j(\varphi+\pi)}}{2(1-\varepsilon_j)\sinh\pi j} c\rho^{2n+\frac{1}{2}} \int_{\frac{1}{2}}^{2n+\frac{1}{2}} dx, \qquad \left\{\begin{array}{l} 0 < \varepsilon_j < 1 \\ \lim\limits_{j=\infty} \varepsilon_j = 0 \end{array}\right. .$$

D'où, écrivant $\sinh\pi j = \frac{e^{\pi j} - e^{-\pi j}}{2}$, nous voyons que si φ a une valeur telle que nous l'avons supposée (savoir $-2\pi < \varphi < 0$), alors, en prenant $j = \infty$, on peut négliger tout de suite la contribution I_j.

On raisonnerait de même pour la contribution due au côté

$$w = x - ij.$$

Considérons donc le côté de C_n le long duquel $w = \frac{1}{2} + 2n + iy$. Nous avons ici

$$dw = i\,dy$$

et

$$\sin\pi w = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi + i\pi y\right) = \cos i\pi y = \cosh\pi y,$$

$$(-z)^w = iz^{\frac{1}{2}+2n}\{\cos[y\log(-z)] + i\sin[y\log(-z)]\}.$$

Par conséquent, si l'on se rappelle que

$$\log(-z) = \log\rho + i(\varphi + \pi),$$

et, par suite,

$$\begin{aligned} &\cos[y\log(-z)] \\ &\quad = \cos(y\log\rho)\cosh(\varphi+\pi)y - i\sin(y\log\rho)\sinh(\varphi+\pi)y, \\ &\sin[y\log(-z)] \\ &\quad = \sin(y\log\rho)\cosh(\varphi+\pi)y + i\cos(y\log\rho)\sinh(\varphi+\pi)y, \end{aligned}$$

on voit de suite que la contribution $I_{\frac{1}{2}+2n}$ en question peut s'écrire (ayant pris $j=\infty$)

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} I_{\frac{1}{2}+2n} = {} & \frac{iz^{\frac{1}{2}+2n}}{2}\int_{-\infty}^{\infty} g\left(\frac{1}{2}+2n+iy\right)\frac{\cos(y\log\rho)\cosh(\varphi+\pi)y}{\cosh\pi y}\,dy \\ & +\frac{z^{\frac{1}{2}+2n}}{2}\int_{-\infty}^{\infty} g\left(\frac{1}{2}+2n+iy\right)\frac{\sin(y\log\rho)\sinh(\varphi+\pi)y}{\cosh\pi y}\,dy \\ & -\frac{z^{\frac{1}{2}+2n}}{2}\int_{-\infty}^{\infty} g\left(\frac{1}{2}+2n+iy\right)\frac{\sin(y\log\rho)\cosh(\varphi+\pi)y}{\cosh\pi y}\,dy \\ & -\frac{iz^{\frac{1}{2}+2n}}{2}\int_{-\infty}^{\infty} g\left(\frac{1}{2}+2n+iy\right)\frac{\cos(y\log\rho)\sinh(\varphi+\pi)y}{\cosh\pi y}\,dy. \end{aligned}\right.$$

D'ailleurs, on voit que chacune des intégrales de (4) a une signification quand la fonction $g(w)$ satisfait aux hypothèses de notre théorème, et que $-2\pi<\varphi<0$, comme nous l'avons supposé (¹).

Enfin, le long du côté $w=\frac{1}{2}+iy$, nous avons, comme auparavant,

$$dw = i\,dy, \qquad \sin\pi w = \cosh\pi y,$$

et, par suite, la contribution provenant de cette source à l'intégrale de (3) est

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} I_{\frac{1}{2}} &= -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} g\left(\frac{1}{2}+iy\right)\frac{(-z)^{\frac{1}{2}+iy}}{\cosh\pi y}\,dy \\ &= -\frac{iz^{\frac{1}{2}}}{2}\int_{-\infty}^{\infty} g\left(\frac{1}{2}+iy\right)\frac{(-z)^{iy}}{\cosh\pi y}\,dy, \end{aligned}\right.$$

(¹) Chacune de ces intégrales est, en effet, *absolument* convergente.

où, comme plus haut, nous pouvons écrire

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{I}_{\frac{1}{2}} = &-\frac{i\sqrt{z}}{2}\int_{-\infty}^{\infty} g\left(\frac{1}{2}+iy\right)\frac{\cos(y\log\rho)\cosh(\varphi+\pi)y}{\cosh\pi y}dy \\ &-\frac{\sqrt{z}}{2}\int_{-\infty}^{\infty} g\left(\frac{1}{2}+iy\right)\frac{\sin(y\log\rho)\sinh(\varphi+\pi)y}{\cosh\pi y}dy \\ &+\frac{\sqrt{z}}{2}\int_{-\infty}^{\infty} g\left(\frac{1}{2}+iy\right)\frac{\sin(y\log\rho)\cosh(\varphi+\pi)y}{\cosh\pi y}dy \\ &+\frac{i\sqrt{z}}{2}\int_{-\infty}^{\infty} g\left(\frac{1}{2}+iy\right)\frac{\cos(y\log\rho)\sinh(\varphi+\pi)y}{\cosh\pi y}dy. \end{aligned}\right.$$

Ceci dit, considérons la région du plan z située dans un cercle concentrique au cercle de convergence de (1), mais ayant un rayon η tel que $\begin{cases}\eta < r \\ \eta < 1\end{cases}$. Pour une valeur quelconque de z dans ce cercle, nous avons

$$|z| < 1,$$

et, par suite, nous pouvons alors écrire

$$\lim_{n=\infty} \mathrm{I}_{\frac{1}{2}+2n} = 0.$$

Mais, pour une telle valeur de z, la série (1) est convergente et ainsi nous arrivons à la conclusion que, pour une valeur quelconque de z située dans ce cercle de rayon η, excepté toujours les valeurs réelles et positives, nous avons

$$(7)\qquad f(z) = g(0) + \mathrm{I}_{\frac{1}{2}}.$$

Or on voit, par l'égalité (6), que $\mathrm{I}_{\frac{1}{2}}$ conserve une signification, quelle que soit la valeur (positive) de ρ, pourvu que $-2\pi < \varphi < 0$. Ainsi, (7) donne une valeur de $f(z)$ non seulement dans le cercle de rayon η, mais dans le plan entier de z, excepté les valeurs réelles et positives. D'ailleurs, dans cette région, I_1 est uniforme, puisque, quand z décrit un chemin fermé quelconque dans cette région, on voit que les intégrales (6), tout en conservant une signification, reviennent à leurs valeurs primitives.

Il reste donc simplement à montrer que $I_{\frac{1}{2}}$ est une fonction *analytique* de z dans cette région étendue, et pour cela il suffit de montrer que la fonction [*voir* la formule (5)]

$$\frac{d}{dz}\int_{-\infty}^{\infty} g\left(\frac{1}{2}+iy\right)\frac{(-z)^{iy}}{\cosh \pi y}dy \quad \text{ou} \quad \frac{i}{z}\int_{-\infty}^{\infty} g\left(\frac{1}{2}+iy\right)\frac{y(-z)^{iy}}{\cosh \pi y}dy,$$

considérée pour une valeur quelconque de z dans cette région, est bien déterminée. Écrivant cette fonction sous une forme analogue à (6) et remarquant que les intégrales

$$\int_{-\infty}^{\infty} g\left(\frac{1}{2}+iy\right)y\frac{\cos(y\log\rho)\cosh(\varphi+\pi)y}{\cosh \pi y}dy, \quad \ldots$$

ont une signification quand $-2\pi<\varphi<0$, nous arrivons immédiatement au résultat désiré.

2. *Exemples :*

(*a*). Considérons la série

$$f(z)=1+z+z^2+z^3+\ldots+z^n+\ldots \quad (^1).$$

En appliquant le théorème, nous avons, pour toutes les valeurs de $z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ qui ne sont pas sur la moitié positive de l'axe réel,

$$f(z)=1-\frac{i\sqrt{z}}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(-z)^{iy}}{\cosh \pi y}dy, \tag{8}$$

en supposant toujours que $-2\pi<\varphi<0$. D'ailleurs, en nous servant

---

(1) Dans ce simple cas, on sait, *a priori*, que $r=1$ et que l'extension analytique est possible, puisque $f(z)=\frac{1}{1-z}$. Des exemples de ce type sont choisis parce qu'ils ont l'avantage de montrer comme notre théorème donne des résultats conformes aux faits connus.

de (6) et en négligeant les intégrales qui se détruisent, nous trouvons

$$
(9)\quad \left\{
\begin{aligned}
f(z) &= 1 - \frac{i\sqrt{z}}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(y\log\rho)\cosh(\varphi+\pi)y}{\cosh\pi y}\,dy\\
&\quad - \frac{\sqrt{z}}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(y\log\rho)\sinh(\varphi+\pi)y}{\cosh\pi y}\,dy.
\end{aligned}
\right.
$$

(b). Considérons la série

$$f(z) = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \ldots + \frac{z^n}{n} + \ldots \quad (^1).$$

Ici $g(o) = o$ et nous pouvons prendre

$$g(w) = \frac{1}{w}.$$

Par suite, pour toutes les valeurs de $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, excepté celles qui sont réelles et positives, nous avons

$$(10)\qquad f(z) = -\frac{i\sqrt{z}}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(-z)^{iy}}{\left(\frac{1}{2}+iy\right)\cosh\pi y}\,dy,$$

en supposant toujours que $-2\pi < \varphi < 0$. Cette expression peut être développée facilement comme auparavant.

(c). Considérons la série

$$(11)\quad f(z) = 1 + \frac{z}{2} + \frac{1.3}{2.4}z^2 + \ldots + \frac{1.3.5.7\ldots(2n-1)}{2.4.6.8\ldots 2n}z^n + \ldots \quad (^2).$$

Ici on peut prendre

$$g(w) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{dv}{(v^2+1)^{w+1}}.$$

---

(1) *i. e.*, $f(z) = -\log(1-z)$.

(2) *i. e.*, $f(z) = \dfrac{1}{\sqrt{1-z}}$.

En effet, cette fonction de w est analytique dans la moitié droite du plan w, et quand w est égale à un nombre entier positif n elle se réduit par des méthodes bien connues au $n^{\text{ième}}$ coefficient de (11). En outre, en désignant par $p\,(p > 0)$ la partie réelle de w, nous avons

$$|g(w)| \leqq \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{dv}{(v^2+1)^{p+1}} < \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{dv}{v^2+1} = 1,$$

de sorte que toutes les conditions exigées de $g(w)$ sont satisfaites.

Par suite, nous avons ici, pour toutes les valeurs de

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

en dehors de la moitié positive de l'axe réel,

$$f(z) = 1 - \frac{i\sqrt{z}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^\infty \frac{(-z)^{iy}}{(v^2+1)^{\frac{3}{2}+iy}\cosh\pi y}\,dy\,dv,$$

en supposant toujours que $-2\pi < \varphi < 0$.

(d). Considérons la série

$$(12)\quad f(z) = g(0) - g(1)z + g(2)z^2 - \ldots + (-1)^n g(n)z^n + \ldots,$$

où $g(w)$ satisfait aux conditions du théorème et où le rayon du cercle de convergence est fini.

Ici, nous n'avons qu'à substituer $z = -z'$ dans le théorème pour voir tout de suite que la fonction définie en partie par (12) possède une branche qui est uniforme et analytique dans tout le plan fini, excepté les valeurs réelles et négatives. D'ailleurs, dans cette région, nous avons

$$f(z) = g(0) - \frac{\sqrt{z}}{2}\int_{-\infty}^{\infty} g\left(\frac{1}{2} + iy\right)\frac{z^{iy}}{\cosh\pi y}\,dy,$$

où, si nous posons $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, nous supposons toujours que $-\pi < \varphi < \pi$.

(e). Considérons la série

$$(13)\quad f(z) = g(0) - g(1)z^2 + g(2)z^4 - \ldots + (-1)^n g(n)z^{2n} + \ldots,$$

où $g(w)$ satisfait aux conditions du théorème et le rayon du cercle de convergence est fini.

Ici, si nous substituons $z = -z'^2$ dans le théorème, nous arrivons à la conclusion que la fonction $f(z)$ définie en partie par (13) possède une branche uniforme et analytique dans tout le plan fini, excepté les valeurs de z dont l'argument est $-\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{\pi}{2}$. D'ailleurs, nous pouvons construire la fonction donnant cette extension et en étudier les caractéristiques.

Nous ne donnerons pas d'autres exemples de l'application de cette méthode à l'étude de séries spéciales, croyant que nous avons montré suffisamment le rapport important que la formule (2) a avec notre sujet. On ne peut, il est vrai, employer cette formule que quand les coefficients donnés suivent une loi analytique, mais même avec cette restriction son utilité reste encore très grande.