# JOURNAL

DE

# MATHÉMATIQUES

## PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE



ÉMILE BOREL


**Contribution à l'analyse arithmétique du continu**


*Journal de mathématiques pures et appliquées 5e série*, tome 9 (1903), p. 329-375.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1903_5_9__329_0>

# *Contribution à l'analyse arithmétique du continu;*

PAR M. ÉMILE BOREL.

## Introduction.

1. Toutes les Mathématiques peuvent se déduire de la seule notion de nombre entier; c'est là un fait aujourd'hui universellement admis. Voici ce que l'on entend généralement par là : les notions fondamentales où intervient l'idée de limite (nombres incommensurables, dérivées, intégrales définies, intégrales d'équations différentielles, etc.) sont définies successivement à partir du nombre entier; ces notions une fois acquises, on peut les utiliser sans qu'il soit nécessaire de faire intervenir dans toute circonstance leur définition au moyen des nombres entiers. Telle est, dans ses grandes lignes, la méthode de Weierstrass.

On peut se placer à un point de vue plus strictement arithmétique, comme l'a fait Kronecker en Algèbre, et comme M. Jules Drach a récemment tenté de le faire en Analyse (¹). Ce nouveau point de vue

(¹) M. Jules Drach a exposé ses idées dans la seconde partie de l'*Introduction à la Théorie des nombres et de l'Algèbre supérieure* (d'après des Conférences de M. Jules Tannery, par ÉMILE BOREL et JULES DRACH; Paris, Nony; 1895) et dans sa Thèse : *Essai sur la théorie générale de l'intégration et sur la classification des transcendantes* (Paris, Gauthier-Villars; 1898, et *Annales de l'École Normale supérieure*, 1898).

Ces idées me paraissent mériter d'être plus connues (en Algèbre elles ne sont peut être caractérisé par le fait que l'on ne fait jamais intervenir dans chaque question qu'*un nombre limité de nombres entiers* au moyen desquels tous les éléments de la question sont explicitement définis. On arrive ainsi à définir les nombres algébriques et certains nombres transcendants uniquement au moyen des relations par lesquelles ils sont reliés aux entiers, les signes opératoires étant définis uniquement par leurs propriétés fondamentales [1]. Dans cette construction, l'idée de grandeur n'intervient en rien. On ignore d'ailleurs complètement ce que peut être un nombre incommensurable non défini *logiquement* et, d'après la marche même suivie, on n'en peut définir qu'une infinité dénombrable. Certains esprits verront là une lacune; d'autres penseront, au contraire, que, pratiquement, tout nombre, pour être connu effectivement, doit pouvoir *être caractérisé* par un nombre fini de mots et, par suite, doit trouver sa place dans le système de M. Drach (convenablement complété).

Si l'on considère ainsi un nombre (rationnel, algébrique ou transcendant) caractérisé par un certain nombre d'*entiers* et par certaines *opérations*, il est clair qu'on est conduit à regarder ce nombre comme d'autant plus compliqué que ces entiers sont plus *nombreux* et plus *élevés* et ces opérations plus *nombreuses*. La complication de chaque nombre peut être ainsi caractérisée numériquement; la marche que l'on peut employer dans ce but présente un certain arbitraire qui sera précisé plus loin dans la mesure nécessaire; je tenais simplement à signaler ici cette notion de la plus ou moins grande complication d'un nombre (à partir des entiers, c'est-à-dire à partir de l'unité); le nombre ou symbole qui mesurera cette complication sera dit la *hauteur* du nombre dans le système considéré.

**2.** Un point de vue presque opposé au précédent consiste à ne se

---

pas sans analogie avec celles de Kronecker, tout en s'en distinguant essentiellement en bien des points); il y aura lieu, bien entendu, de ne pas se borner, comme l'a fait jusqu'ici M. Drach, à étudier les équations différentielles et aux dérivées partielles, mais d'attaquer par la même méthode les autres procédés transcendants par lesquels on peut définir des nombres et des fonctions. Cette remarque appartient d'ailleurs à M. Drach.

[1] Drach, *loc. cit.*

préoccuper que des *valeurs numériques*, de la *grandeur* des nombres, sans s'inquiéter de leur définition logique; on recherche alors les nombres rationnels approchés et c'est par cette voie que les entiers apparaissent. La théorie des fractions continues numériques joue ici un rôle capital. Elle fournit les nombres rationnels les plus approchés d'un nombre *quelconque*. Dans un grand nombre d'autres questions interviennent ainsi des relations de *grandeur* entre certains systèmes d'entiers et un ou plusieurs nombres incommensurables quelconques. Parmi les plus célèbres citons la proposition de Jacobi sur l'impossibilité d'une fonction uniforme à trois périodes et les beaux travaux de Lejeune-Dirichlet.

Vinrent ensuite les mémorables recherches arithmétiques de Charles Hermite, qui furent suivies par celles de Kronecker et de M. Minkowski sur les systèmes de formes linéaires à coefficients quelconques et à indéterminées entières. M. Minkowski a rassemblé, dans sa *Geometrie der Zahlen*, malheureusement encore inachevée, les principaux résultats acquis dans cet ordre d'idées, et en grande partie dus à ses propres recherches.

M. Minkowski a montré que l'on pouvait arriver à des résultats nombreux et importants par une méthode uniforme, basée sur un petit nombre de principes simples et intuitifs.

Rappelons en quoi elle consiste, en nous bornant au cas le plus simple, pour lequel elle paraît due à Lejeune-Dirichlet. Si l'on a $n+1$ points sur une droite, dans un intervalle dont la longueur est égale à $n$, il y a au moins deux de ces points dont la distance est inférieure à $1$ (sauf dans le cas particulier où les $n+1$ points ont les coordonnées $0, 1, 2, 3, \ldots, n-1, n$, lorsque l'on prend pour origine l'une des extrémités de l'intervalle). Cette proposition se démontre en divisant l'intervalle donné en $n$ parties égales; comme il y a $n+1$ points, il y a au moins un intervalle partiel qui en renferme deux et la distance de ces deux points est inférieure à $1$ (une discussion facile relative aux points coïncidant avec les extrémités conduit au seul cas exceptionnel signalé).

**3.** Les nombres incommensurables sont ainsi définis de deux manières essentiellement différentes, à partir des nombres entiers; il est du plus grand intérêt d'étudier les relations entre ces deux définitions. Le premier résultat, à ce point de vue, est dû à Lagrange qui a démontré, en 1770, la périodicité du développement en fraction continue des irrationnelles quadratiques. Les résultats obtenus par M. Minkowski relativement à la périodicité de certains algorithmes numériques pour les nombres algébriques de degré déterminé ([1]), doivent être regardés comme la généralisation, à un certain point de vue, du résultat de Lagrange.

Les résultats de Liouville sur l'approximation des nombres algébriques par des nombres rationnels le généralisent dans une autre direction, bien qu'ils ne fassent pas connaître une propriété *caractéristique* des nombres algébriques.

On peut aussi obtenir des résultats très simples, soit au sujet de l'approximation des nombres algébriques les uns par les autres, soit au sujet de l'approximation par des nombres rationnels ou algébriques de certains nombres transcendants se rattachant à la fonction exponentielle; ces dernières recherches se rattachent à celles qui ont été inspirées par le célèbre Mémoire de Charles Hermite sur la transcendance du nombre $e$. J'ai déjà indiqué certains résultats à ce sujet ([2]); je compte y revenir en utilisant les méthodes de ce Mémoire ([3]).

Ces diverses recherches ont une même conclusion générale : la rapidité de l'approximation des nombres incommensurables par des nombres rationnels est en relation simple avec la *hauteur* de ces nombres, telle que nous l'avons définie tout à l'heure.

C'est là un principe dont l'importance à la fois théorique et pratique me paraît devoir être considérable.

**4.** Ce Mémoire est consacré exclusivement aux nombres rationnels et à leur emploi pour l'approximation des incommensurables *quel-*

---

([1]) *Ein Kriterium für die algebraischen Zahlen.* (*Göttinger Nachrichten,* 11 février 1899). *Ueber periodische Approximation algebraischer Zahlen* (*Acta mathematica,* t. XXVI).

([2]) *Comptes rendus,* 6 mars 1899.

([3]) Comparez ma Note dans le *Bulletin de la Société mathématique de France,* 1903.

*conques*. Parmi les résultats nouveaux qui y sont renfermés, je citerai notamment le suivant :

*Il est possible de déterminer* a priori *une infinité d'intervalles* $(A_n, B_n)$ *tels que* $A_n$ *et* $B_n$ *augmentent indéfiniment avec n et tels que,* $\alpha$ *étant un nombre incommensurable quelconque compris entre* 0 *et* 1, *il existe des nombres* $p_n$, $q_n$, *vérifiant les inégalités*

$$\left|\frac{p_n}{q_n} - \alpha\right| < \frac{1}{q_n^2\sqrt{5}},$$
$$A_n < q_n < B_n.$$

Ce théorème est d'ailleurs susceptible de nombreuses généralisations.

5. Plusieurs des résultats de ce Mémoire ont été obtenus comme conséquence d'un principe très simple, dont je voudrais dire quelques mots, en me bornant au cas d'un domaine à une seule dimension.

Reprenons la question qui a été traitée tout à l'heure par la méthode de Lejeune-Dirichlet : *on sait que* $n+1$ *points sont sur l'axe* $Ox$ *et que leurs abscisses sont toutes comprises entre* 0 et $n$; il faut prouver que, parmi ces points, il en est deux au moins dont la distance est *inférieure à un* (en excluant le cas où les abscisses seraient 0, 1, 2, ..., $n-1$, $n$).

Voici comment nous pourrons raisonner : soit $x_i$ l'abscisse de l'un des points; considérons les $n+1$ intervalles

$$(A_i) \qquad \left(x_i - \frac{1}{2}, x_i + \frac{1}{2}\right) \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

L'*étendue totale* de ces $n+1$ intervalles est $n+1$; comme ils s'étendent *au plus* dans l'intervalle

$$(A) \qquad \left(-\frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\right)$$

d'étendue $n+1$, deux hypothèses seulement sont possibles : ou bien les intervalles $A_i$ sont exactement juxtaposés de manière à constituer l'intervalle A (c'est le cas où l'on a $x_i = i$); ou bien il existe des points de A qui n'appartiennent à aucun des $A_i$ et *il existe par suite des points de* A *qui appartiennent à deux des* $A_i$ (sinon l'étendue totale des $A_i$ serait inférieure à celle de A); si un point de A appartient aux intervalles $A_p$ et $A_q$, c'est-à-dire aux intervalles

$$\left(x_p - \frac{1}{2}, x_p + \frac{1}{2}\right), \quad \left(x_q - \frac{1}{2}, x_q + \frac{1}{2}\right),$$

il en résulte

$$|x_p - x_q| < 1. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Cette démonstration est assurément très analogue à celle de tout à l'heure; elle s'en distingue cependant en un point important : au lieu de diviser l'intervalle o, $n$ en intervalles fixes, indépendants des nombres $x_0, x_1, \ldots, x_n$ sur lesquels on raisonne, on considère des intervalles formés à partir de ces nombres eux-mêmes.

Lorsqu'il n'y a qu'un *nombre limité* d'intervalles, les deux méthodes sont, au fond, équivalentes. Il en est tout autrement lorsqu'il y en a un nombre illimité.

Considérons, par exemple, le segment $0 \leqq x \leqq 1$ et les points d'abscisse rationnelle qu'il renferme; si l'on divise, *a priori*, le segment en un nombre quelconque de segments partiels, chacun de ces segments partiels renfermera des points d'abscisse rationnelle; de sorte que la somme des segments qui renferment des points d'abscisse rationnelle est égale à *un*, quelque nombreux que soient ces segments.

On peut, au contraire, en construisant des segments *à partir* des points d'abscisse rationnelle, obtenir un ensemble dénombrable de segments, dont la longueur totale soit inférieure à tout nombre donné d'avance et tel que tout point à abscisse rationnelle soit intérieur à un segment de l'ensemble.

Il y a donc ici une différence essentielle entre les deux méthodes; j'ai indiqué, pour la première fois, cette différence à propos de la définition de la mesure des ensembles linéaires de points (¹). M. Lebesgue a ensuite appliqué des principes analogues à la généralisation de la

(¹) *Leçons sur la théorie des fonctions*. Paris, Gauthier-Villars, 1898.

notion d'intégrale définie et est arrivé à des résultats fort remarquables (¹).

On peut caractériser cette différence de méthode en disant que l'on construit le continu au moyen de petits intervalles entourant des points isolés, au lieu d'arriver à ces points par la subdivision indéfinie de l'étendue donnée d'avance; la construction est faite, si l'on peut ainsi dire, du dedans et non plus du dehors. Je pense que la lecture de ce Mémoire convaincra des avantages que présente le plus souvent cette nouvelle manière de procéder.

## La notion de hauteur.

6. Sauf indication expresse du contraire, nous nous bornerons à considérer les nombres réels compris entre o et 1; l'intervalle $0 \leqq x \leqq 1$ sera dit l'*intervalle fondamental;* le *domaine fondamental* à $n$ dimensions sera l'ensemble des valeurs des $n$ variables $x_1$, $x_2$, .., $x_n$ qui satisfont aux inégalités

$$0 \leqq x_1 \leqq 1, \qquad 0 \leqq x_2 \leqq 1, \qquad \ldots, \qquad 0 \leqq x_n \leqq 1.$$

Les nombres rationnels peuvent être, comme l'on sait, rangés sous la forme d'une suite simplement infinie; nous adopterons l'ordre suivant :

$$\frac{0}{1}, \quad \frac{1}{1}; \quad \frac{0}{2}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{2}{2}; \quad \frac{0}{3}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{3}{3}; \quad \frac{0}{4}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{2}{4}, \quad \frac{3}{4}, \quad \frac{4}{4}; \quad \frac{0}{5}; \quad \ldots.$$

Les dénominateurs prennent successivement les valeurs entières successives 1, 2, 3, 4, ..., et, pour chaque valeur du dénominateur, le numérateur prend des valeurs entières croissantes, de manière que

(¹) *Voir* la Thèse de M. Lebesgue; l'historique de la notion d'intégrale définie a été exposée par M. Lebesgue, avec ses idées personnelles, dans un Cours fait au Collège de France en 1902-1903. Ce Cours paraîtra prochainement dans la *Collection de monographies sur la théorie des fonctions* (publiée par M. Gauthier-Villars sous la direction de M. Émile Borel).

la fraction varie de o à 1, *ces valeurs extrêmes comprises*. Le rang occupé par un nombre rationnel $\frac{p}{q}$ dans la suite précédente est évidemment

$$r = 2 + 3 + 4 + \ldots + q + (p + 1),$$

c'est-à-dire

$$r = \frac{q(q+1)}{2} + p.$$

Comme $p$ est au plus égal à $q$, ce rang est sûrement inférieur à $q^2$ dès que $q$ dépasse 2. Lorsque $r$ augmente indéfiniment, le rapport $\frac{r}{q^2}$ a pour limite $\frac{1}{2}$.

Nous appellerons, d'une manière générale, *hauteur* du nombre $\frac{p}{q}$ *une fonction positive non décroissante quelconque, mais bien déterminée, de r, assujettie à la seule condition d'augmenter indéfiniment avec r.*

Dans ce qui suit nous prendrons simplement, sauf indication contraire

$$h = q,$$

c'est-à-dire que *la hauteur d'un nombre rationnel est égale à son dénominateur.*

Il importe de remarquer qu'il n'y a qu'un *nombre fini* de nombres dont la hauteur est inférieure à un nombre fixe.

Il est clair que l'on aurait pu adopter un autre rangement, par exemple le suivant :

$$\frac{0}{1};\ \frac{1}{1},\ \frac{0}{2};\ \frac{0}{3},\ \frac{1}{2};\ \frac{0}{4},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{2};\ \frac{0}{5},\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{3};\ \frac{0}{6},\ \frac{1}{5},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{3};\ \ldots$$

On aurait alors pour chaque nombre un autre rang $r'$ et l'on définirait d'autres hauteurs $h'$; nous n'entrerons pas dans le détail de la comparaison des diverses définitions qu'il pourrait sembler naturel d'adopter; indiquons cependant que, si celle que nous avons choisie nous a paru la plus simple pour notre but actuel, d'autres pourraient être préférables dans d'autres recherches (¹).

**7.** Considérons maintenant un système fini de nombres rationnels (toujours compris entre o et 1). On pourra ranger tous les systèmes possibles dans un ordre déterminé et définir ainsi pour chacun d'eux le *rang* et la *hauteur*.

Si l'on suppose d'abord que le nombre des nombres du système est donné d'avance, et qu'on le désigne par $n$, on pourra, par exemple, procéder ainsi : soit

$$(\mathrm{A}) \qquad \frac{p_1}{q_1}, \quad \frac{p_2}{q_2}, \quad \ldots, \quad \frac{p_n}{q_n}$$

un quelconque des systèmes; on supposera que le plus grand des nombres $q_1, q_2, \ldots, q_n$ est égal à $q$; tous les systèmes (A) satisfaisant à cette condition constitueront le $q^{\text{ième}}$ groupe et seront rangés dans ce groupe suivant une loi arbitraire; il suffira d'écrire alors le premier groupe, puis le second, puis le troisième, etc., pour avoir la suite cherchée.

Nous prendrons généralement comme *hauteur* du système (A) le plus grand des nombres $q_1, q_2, \ldots, q_n$; on pourrait prendre aussi la somme de ces nombres, ou bien leur produit, etc.

Un cas particulier intéressant est celui où tous les nombres d'un système sont supposés avoir le même dénominateur; il en résulte une

---

(¹) Dans le cas où l'on définirait la hauteur $h$ d'un nombre $\frac{p}{q}$ comme égale à $p+q$, il y aurait une relation particulièrement simple entre cette hauteur et le nombre des opérations élémentaires nécessaires pour définir le nombre à partir de l'unité; par exemple : $\frac{3}{5} = \frac{1+1+1}{1+1+1+1+1}$.

Cette remarque peut conduire à des aperçus fort généraux sur les résultats que nous obtiendrons, les faisant apparaître comme se rattachant à une conception que nous ne développerons pas ici. Elle a été brièvement esquissée dans ma Note des *Comptes rendus* du premier semestre 1903. Indiquons aussi la possibilité de définir la hauteur d'un nombre entier en tenant compte de son expression comme produit de facteurs premiers. Mais il serait nécessaire pour la développer de posséder quelques lueurs sur la distribution des nombres premiers.

diminution très notable du nombre des systèmes; soit un tel système

$$(B) \qquad \frac{p_1}{q}, \quad \frac{p_2}{q}, \quad \ldots, \quad \frac{p_n}{q}.$$

Si l'on range les systèmes (A) d'une part et les systèmes (B) d'autre part, un système appartenant aux deux suites occupera un rang bien plus élevé dans la première que dans la seconde. Cette remarque sera précisée plus loin.

Enfin, il peut arriver que le nombre $n$ ne soit pas donné, mais puisse prendre toutes les valeurs possibles; la hauteur d'un système tel que (A) devra être encore définie de manière qu'il n'y ait qu'un nombre fini de systèmes dont la hauteur soit inférieure à un nombre fixe. Nous n'insistons pas sur le choix des diverses définitions possibles, car nous n'aurons guère à nous en servir.

## L'approximation des nombres rationnels les uns par les autres. L'écart.

**8.** Rappelons quelques propriétés élémentaires des fractions continues limitées, de manière à fixer les notations que nous emploierons.

Tout nombre rationnel $\alpha$ compris entre o et 1 peut être écrit sous la forme

$$\alpha = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}},$$

les nombres entiers $a_1, a_2, \ldots, a_n$ étant positifs, et $a_n$ pouvant être toujours supposé différent de 1 (car on peut, si $a_n = 1$, remplacer $a_{n-1}$ par $a_{n-1} + 1$). Nous poserons

$$\begin{cases} p_0 = 0, \\ q_0 = 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} p_1 = 1, \\ q_1 = a_1, \end{cases} \qquad \begin{cases} p_2 = a_2, \\ q_2 = 1 + a_1 a_2; \end{cases}$$

$$(1) \qquad \begin{cases} p_i = a_i p_{i-1} + p_{i-2} \\ q_i = a_i q_{i-1} + q_{i-2} \end{cases} \qquad (i = 3, 4, \ldots, n).$$

Le nombre $\alpha$ est égal à $\frac{p_n}{q_n}$; les réduites $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_3}{q_3}, \frac{p_5}{q_5}, \ldots$ sont supérieures à $\alpha$; $\frac{p_0}{q_0}, \frac{p_2}{q_2}, \frac{p_4}{q_4}, \frac{p_6}{q_6}, \ldots$ sont inférieures à $\alpha$. On a toujours

$$p_{i-1}q_i - p_i q_{i-1} = (-1)^i.$$

Nous aurons à utiliser la valeur du rapport $\frac{q_i}{q_{i-1}}$ des dénominateurs de deux réduites consécutives; posons

$$\mu_i = \frac{q_i}{q_{i-1}}.$$

La relation (1) donne

$$\mu_i = a_i + \frac{1}{\mu_{i-1}}. \tag{2}$$

On peut conclure de la relation (2) que *l'un au moins des deux nombres* $\mu_i$, $\mu_{i-1}$ *est supérieur à* $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

En effet, si $a_i > 1$, il est clair que l'on a

$$\mu_i > a_i \geqq 2 > \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

Si $a_i = 1$, la relation (2) devient

$$\mu_i = 1 + \frac{1}{\mu_{i-1}}. \tag{3}$$

Le nombre $\mu_{i-1}$ étant rationnel, si l'on n'a pas

$$\mu_{i-1} > \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \tag{4}$$

on a certainement

$$\mu_{i-1} < \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \tag{5}$$

le signe $<$ excluant l'égalité. Les relations (3) et (5) entraînent

$$\mu_i > 1 + \frac{2}{1+\sqrt{5}}.$$

c'est-à-dire

$$\mu_i > \frac{1+\sqrt{5}}{2}. \tag{6}$$

On a donc certainement l'une des relations (4) ou (6).

Il n'est pas inutile d'observer que, si l'on désigne par A un nombre quelconque supérieur à $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, il est possible de former une fraction continue limitée telle que deux rapports consécutifs $\mu_i$, $\mu_{i-1}$ soient tous deux inférieurs à A. Il suffit de prendre $n$ et $i$ assez grands et de supposer $a_j = 1$ pour toute valeur de $j$; nous omettrons la démonstration facile de ce point [1].

Nous énoncerons donc le théorème suivant :

Théorème I. — *Si l'on désigne par* $\frac{p_{i-2}}{q_{i-2}}$, $\frac{p_{i-1}}{q_{i-1}}$, $\frac{p_i}{q_i}$ *trois réduites consécutives d'une fraction continue, l'un au moins des rapports*

$$\mu_i = \frac{q_i}{q_{i-1}}, \qquad \mu_{i-1} = \frac{q_{i-1}}{q_{i-2}}$$

*est supérieur à* $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

**9.** Étant données deux fractions $\frac{p}{q}$ et $\frac{r}{s}$, on peut définir un nombre positif $\lambda$ par la relation

$$\left|\frac{p}{q} - \frac{r}{s}\right| = \lambda\left(\frac{1}{q^2} + \frac{1}{s^2}\right). \tag{7}$$

Ce nombre $\lambda$ sera dit l'*écart relatif* des deux *fractions*. Nous verrons plus loin quels avantages il peut y avoir à ne pas considérer exclusivement des fractions irréductibles; c'est pourquoi nous parlons de l'écart relatif *de deux fractions* et non pas de deux *nombres*.

Calculons l'*écart relatif* $\lambda_i$ de deux réduites consécutives $\frac{p_i}{q_i}$ et $\frac{p_{i-1}}{q_{i-1}}$,

---

[1] *Comparer* avec le Mémoire de M. Hurwitz cité à la page suivante.

on a

$$\lambda_i = \frac{\left|\frac{p_i}{q_i} - \frac{p_{i-1}}{q_{i-1}}\right|}{\frac{1}{q_i^2} + \frac{1}{q_{i-1}^2}} = \frac{\frac{1}{q_i q_{i-1}}}{\frac{1}{q_i^2} + \frac{1}{q_{i-1}^2}} = \frac{q_i q_{i-1}}{q_i^2 + q_{i-1}^2}.$$

On en conclut

$$\frac{1}{\lambda_i} = \frac{q_i}{q_{i-1}} + \frac{q_{i-1}}{q_i} = \mu_i + \frac{1}{\mu_i}.$$

Supposons que l'on ait

$$\mu_i > \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Il en résulte, la fonction $x + \frac{1}{x}$ étant croissante pour $x > 1$,

$$\frac{1}{\lambda_i} > \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{2}{1+\sqrt{5}},$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{\lambda_i} > \sqrt{5},$$

$$\lambda_i < \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Le théorème I entraîne donc le théorème suivant :

Théorème II. — *Si l'on considère trois réduites consécutives et que l'on désigne par $\lambda_{i-1}$ et $\lambda_i$ les écarts relatifs de la réduite intermédiaire et des deux autres, on peut affirmer que l'un au moins de ces écarts est inférieur à $\frac{1}{\sqrt{5}}$.*

**10.** Nous appellerons *intervalle canonique relatif à une fraction* $\frac{p}{q}$ l'intervalle

$$\frac{p}{q} - \frac{1}{q^2\sqrt{5}}, \quad \frac{p}{q} + \frac{1}{q^2\sqrt{5}}.$$

Il résulte d'une proposition de M. Hurwitz que tout nombre incommensurable est compris dans une infinité d'intervalles canoniques (¹);

---

(¹) *Mathematische Annalen*, t. XXXIX.

*il en est de même de tout nombre commensurable,* si l'on ne se borne pas aux fractions $\frac{p}{q}$ irréductibles. Dès lors, on peut conclure, de la théorie de la mesure des ensembles linéaires de points ([1]), qu'*il est possible de déterminer une infinité d'ensembles finis d'intervalles canoniques tels que tout nombre compris entre* 0 *et* 1 *soit compris dans l'un des intervalles de chaque ensemble*. En d'autres termes, il est possible de recouvrir complètement le segment 0 — 1 avec des intervalles canoniques en nombre fini (empiétant les uns sur les autres), de telle manière qu'il n'y ait aucun vide; et l'on peut répéter cette opération une infinité de fois sans utiliser plusieurs fois le même intervalle canonique.

La théorie de la mesure qui nous fournit ce résultat donne seulement un moyen théorique de déterminer les ensembles finis d'intervalles dont nous venons de parler; nous déterminerons bientôt *effectivement* de tels ensembles ([2]). Nous serons ainsi amenés à retrouver, par une autre voie, le théorème de M. Hurwitz, tout en établissant d'autres résultats, d'une nature très différente.

**11.** Nous dirons que deux intervalles canoniques sont adjacents lorsqu'ils ont une partie commune; les fractions correspondantes sont dites aussi *adjacentes. La condition nécessaire et suffisante pour que deux fractions soient adjacentes est que leur écart relatif soit inférieur à* $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Soient, en effet, $\frac{p}{q}$ et $\frac{r}{s}$ deux fractions; nous pouvons supposer, pour fixer les idées,

$$\frac{p}{q} < \frac{r}{s}. \tag{8}$$

([1]) *Voir* ma *Thèse* (note finale) et mes *Leçons sur la théorie des fonctions,* Chap. III.

([2]) Il est clair que leur choix peut être fait d'une infinité de manières; il y a lieu de penser qu'il est possible de simplifier celui que j'indique; j'ai surtout recherché la simplicité de la démonstration. Ce qui paraît moins aisé, c'est de faire le choix de manière que tout nombre se trouve dans deux au plus des intervalles de chaque ensemble (ce qui est théoriquement possible).

Les intervalles canoniques correspondants sont

$$(9)\qquad \left(\frac{p}{q}-\frac{1}{q^2\sqrt{5}},\ \frac{p}{q}+\frac{1}{q^2\sqrt{5}}\right);\quad \left(\frac{r}{s}-\frac{1}{s^2\sqrt{5}},\ \frac{r}{s}+\frac{1}{s^2\sqrt{5}}\right).$$

En vertu de la relation (8), pour que les intervalles (9) soient adjacents, il faut et il suffit que l'on ait

$$(10)\qquad \frac{r}{s}-\frac{1}{s^2\sqrt{5}}<\frac{p}{q}+\frac{1}{q^2\sqrt{5}},$$

c'est-à-dire

$$(11)\qquad \frac{r}{s}-\frac{p}{q}<\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{q^2}+\frac{1}{s^2}\right).$$

Il suffit de comparer cette inégalité (11) avec la relation (7) par laquelle nous avons défini l'écart relatif $\lambda$, pour en conclure :

$$(12)\qquad \lambda<\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Il n'est pas inutile d'observer que l'écart relatif étant forcément un nombre rationnel, l'inégalité (11) exclut certainement l'égalité. Il en résulte qu'il en est de même de (10), c'est-à-dire que les extrémités des intervalles canoniques ne peuvent pas coïncider; ou bien ces intervalles empiètent l'un sur l'autre $\left(\text{lorsque } \lambda<\frac{1}{\sqrt{5}}\text{; les fractions sont adjacentes}\right)$; ou bien ils sont complètement extérieurs l'un à l'autre $\left(\text{lorsque } \lambda>\frac{1}{\sqrt{5}}\text{; les fractions ne sont pas adjacentes}\right)$.

En utilisant les résultats précédemment acquis, on peut énoncer les théorèmes suivants :

Théorème III. — *Pour que deux réduites consécutives d'une fraction continue soient adjacentes, il est nécessaire et suffisant que le rapport de leurs dénominateurs soit supérieur à* $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Théorème IV. — *Si les réduites de rangs* $i-2$ *et* $i-1$ *ne sont pas adjacentes, on peut affirmer que les réduites de rangs* $i-1$ *et* $i$

*le sont.* (Il pourrait d'ailleurs arriver que les deux premières soient adjacentes et que les deux autres le soient aussi.)

La valeur $\alpha$ de la fraction continue est comprise entre celle de deux réduites consécutives; lorsque ces deux réduites sont des fractions adjacentes, l'intervalle formé par la réunion de leurs intervalles canoniques renferme à son intérieur le nombre $\alpha$; ce nombre $\alpha$ est donc *intérieur* à l'un de ces intervalles canoniques (extrémités exclues); cette remarque suffit à établir le théorème de M. Hurwitz (en supposant $\alpha$ irrationnel); on peut même en conclure que, *parmi les réduites d'une fraction continue, il ne peut pas y en avoir trois consécutives, telles que la valeur de la fraction continue ne soit pas intérieure à l'intervalle canonique correspondant.* Mais, pour atteindre complètement notre but, il est indispensable d'étudier d'autres catégories d'intervalles adjacents, correspondant à des fractions non irréductibles.

### La formation de systèmes complets de fractions.

**12.** Nous dirons que des fractions (*en nombre limité*) constituent un système complet lorsque les intervalles canoniques correspondants recouvrent complètement l'intervalle $0 - 1$; c'est-à-dire lorsque tout point (*nombre*) compris entre $0$ et $1$ est *intérieur* à l'un de ces intervalles (extrémités exclues).

*Pour que des fractions constituent un système complet, il est évidemment nécessaire et suffisant qu'elles puissent être rangées en une suite linéaire, telle que chaque fraction de la suite soit supérieure à la précédente et lui soit adjacente, et que, de plus, les intervalles canoniques relatifs aux fractions extrêmes de la suite renferment l'une le point* $0$ *et l'autre le point* $1$. Pratiquement, nous supposerons toujours que la première fraction de la suite est égale à $0$ et que la dernière est égale à $1$ $\left(\text{ces fractions seront de la forme } \frac{0}{h}, \frac{h}{h}\right)$.

**13.** Nous donnerons à cette condition une forme plus commode pour les applications.

Théorème V. — *Étant donné un système limité de fractions (comprises entre* o *et* 1) *renfermant une fraction égale à zéro et une fraction égale à un; pour que ce système soit complet, il est nécessaire et suffisant que, étant donnée une fraction quelconque* $\frac{p}{q}$ *du système, il soit possible de trouver deux fractions* $\frac{r}{s}$ *et* $\frac{v}{w}$ *du système l'une supérieure, l'autre inférieure ou égale, ou identique à* $\frac{p}{q}$ *et adjacentes entre elles.*

Soit, en effet, $\frac{p_1}{q_1}$ la fraction du système qui est égale à zéro, ou l'une quelconque d'entre elles s'il y en a plusieurs. Par hypothèse, il existe deux *fractions adjacentes entre elles* $\frac{p'_2}{q'_2}$ et $\frac{p_2}{q_2}$, telles que l'on ait

$$\frac{p'_2}{q'_2} \leqq \frac{p_1}{q_1} < \frac{p_2}{q_2}. \tag{13}$$

D'ailleurs, comme $\frac{p_1}{q_1} = 0$ et que $\frac{p'_2}{q'_2}$ ne peut pas être négatif, on a ici certainement

$$\frac{p'_2}{q'_2} = \frac{p_1}{q_1}.$$

De même, à la fraction $\frac{p_2}{q_2}$ correspondent deux fractions adjacentes entre elles $\frac{p'_3}{q'_3}$ et $\frac{p_3}{q_3}$ telles que l'on ait

$$\frac{p'_3}{q'_3} \leqq \frac{p_2}{q_2} < \frac{p_3}{q_3}.$$

On écrira de même la relation générale

$$\frac{p'_{\mu+1}}{q'_{\mu+1}} \leqq \frac{p_\mu}{q_\mu} < \frac{p_{\mu+1}}{q_{\mu+1}}, \tag{14}$$

les fractions $\frac{p'_\mu}{q'_\mu}$, $\frac{p_\mu}{q_\mu}$ appartenant au système, quel que soit $\mu$, et les fractions $\frac{p'_{\mu+1}}{q'_{\mu+1}}$ et $\frac{p_{\mu+1}}{q_{\mu+1}}$ étant adjacentes entre elles.

Les fractions $\frac{p_\mu}{q_\mu}$ vont en *croissant* avec $\mu$; comme les fractions du système sont en nombre limité, et que la plus grande d'entre elles est égale à l'unité (il peut y en avoir plusieurs égales à l'unité), il arrivera nécessairement que, pour une certaine valeur de $\mu$, la fraction $\frac{p_\mu}{q_\mu}$ sera égale à 1; si nous désignons cette valeur par $m$, nous aurons

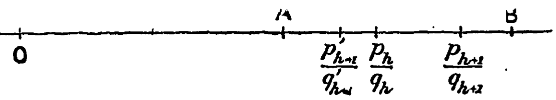
$$(15) \qquad \frac{p'_m}{q'_m} \leqq \frac{p_{m-1}}{q_{m-1}} < \frac{p_m}{q_m} = 1,$$

les fractions $\frac{p'_m}{q'_m}$ et $\frac{p_m}{q_m}$ étant adjacentes.

Il s'agit maintenant de faire voir que l'ensemble des fractions

$$(16) \qquad \frac{p'_\mu}{q'_\mu}, \quad \frac{p_\mu}{q_\mu} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

constitue un système complet. Pour cela, il suffit de montrer que, quel que soit $h$, l'ensemble des intervalles canoniques relatifs à celles des fractions (16) pour lesquelles $\mu$ est inférieur ou égal à $h$ recouvre complètement l'intervalle compris entre o et $\frac{p_h}{q_h}$. Cette proposition est vraie pour $h = 1$, car alors cet intervalle se réduit au seul point o; il suffit donc de montrer que, si la proposition est vraie pour une valeur de $h$, elle subsiste pour la valeur immédiatement supérieure $h + 1$.




Or ceci est évident pour peu qu'on y réfléchisse et devient intuitif par une figure; les intervalles canoniques relatifs à $\frac{p'_{h+1}}{q'_{h+1}}$ et $\frac{p_{h+1}}{q_{h+1}}$ étant adjacents recouvrent complètement un segment AB tel que A est à gauche de $\frac{p'_{h+1}}{q'_{h+1}}$ (non coïncidant avec lui) et, par suite, à gauche de $\frac{p_h}{q_h}$, B étant à droite de $\frac{p_{h+1}}{q_{h+1}}$ (non coïncidant avec lui). Si donc on adjoint ces intervalles aux intervalles $\frac{p_\mu}{q_\mu}$ $(\mu = 1, 2, \ldots, h)$, lesquels sont supposés recouvrir entièrement l'intervalle $\left(0, \frac{p_h}{q_h}\right)$, on recouvrira complètement l'intervalle $\left(0, \frac{p_{h+1}}{q_{h+1}}\right)$, en débordant même au delà des extrémités. Il suffit de faire croître le nombre $h$ jusqu'à la valeur $m$ pour avoir le théorème V.

**14.** Nous allons maintenant former effectivement des systèmes complets de fractions; on en obtient une infinité par le théorème suivant :

THÉORÈME VI. — *Si l'on désigne par* A *et* B *deux nombres positifs assujettis aux deux conditions* $\begin{cases} B > 15A^2, \\ A > 10, \end{cases}$ *les fractions dont le dénominateur est compris entre* A *et* B *constituent un système complet.*

Pour démontrer ce théorème, nous nous appuierons sur le théorème V; pour chaque fraction $\frac{p}{q}$ de l'ensemble, nous démontrerons l'existence de fractions $\frac{r}{s}$ et $\frac{v}{w}$ de l'ensemble satisfaisant aux conditions du théorème V; pour cela, nous distinguerons deux cas généraux suivant que $\frac{p}{q}$ est irréductible ou non; chacun de ces cas se subdivisera d'ailleurs en plusieurs suivant la valeur relative de $q$ par rapport à A et B.

PREMIER CAS. — *La fraction* $\frac{p}{q}$ *est irréductible.*

1° *L'on suppose* $3q < B$. Nous prendrons alors

$$\frac{v}{w} \equiv \frac{p}{q};$$

(le signe $\equiv$ signifiant que l'on a : $v = p$; $w = q$); quant à la fraction $\frac{r}{s}$, nous la déterminerons comme il suit : soient $\alpha$ et $\beta$ *les deux nombres inférieurs à* $\frac{p}{q}$ *et tels que l'on ait*

$$p\beta - q\alpha = \pm 1$$

(on peut dire aussi que $\frac{\alpha}{\beta}$ est l'avant-dernière réduite du développement de $\frac{p}{q}$ en fraction continue; $\frac{p}{q}$ est la dernière).

Si l'on a

$$p\beta - q\alpha = -1,$$

on prendra

$$r = 2p + \alpha,$$
$$s = 2q + \beta,$$

et l'on aura

$$(17)\quad \frac{r}{s} - \frac{p}{q} = \frac{2p+\alpha}{2q+\beta} - \frac{p}{q} = \frac{q\alpha - p\beta}{q(2q+\beta)} = \frac{1}{qs} < \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{q^2} + \frac{1}{s^2}\right),$$

car $\frac{s}{q}$ est supérieur à 2 et, par suite, supérieur à $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$; on a d'ailleurs

$$s < 3q < \mathrm{B};$$

la fraction $\frac{r}{s}$ satisfait donc aux conditions requises.

Si l'on a

$$p\beta - q\alpha = +1,$$

on prendra

$$r = 3p - \alpha,$$
$$s = 3q - \beta,$$

et l'on aura

$$(18)\quad \frac{r}{s} - \frac{p}{q} = \frac{3p-\alpha}{3q-\beta} - \frac{p}{q} = \frac{p\beta - q\alpha}{q(3q-\beta)} = \frac{1}{qs} < \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{q^2} + \frac{1}{s^2}\right),$$

car on a encore

$$\frac{s}{q} > 2 > \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad s < 3q < \mathrm{B};$$

la fraction $\frac{r}{s}$ satisfait encore aux conditions requises.

2° *L'on suppose* $3q > \mathrm{B}$, *c'est-à-dire* $q > \frac{\mathrm{B}}{3}$. Nous pouvons développer alors $\frac{p}{q}$ en fraction continue limitée,

$$\frac{p}{q}=\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\ldots+\cfrac{1}{a_{2n}}}},$$

en nous arrangeant, comme il a été expliqué plus haut, de manière que le nombre des quotients incomplets soit pair; désignons par

$$\frac{p_0}{q_0}=\frac{0}{1},\qquad \frac{p_1}{q_1}=\frac{1}{a_1},\qquad \frac{p_2}{q_2}=\frac{a_2}{1+a_1a_2},\qquad \ldots,\qquad \frac{p_{2n}}{q_{2n}}=\frac{p}{q},$$

les réduites de cette fraction continue; nous considérerons les trois dernières réduites

$$\frac{p_{2n-2}}{q_{2n-2}},\qquad \frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}},\qquad \frac{p_{2n}}{q_{2n}}\equiv\frac{p}{q},$$

et nous supposerons d'abord que $q_{2n-2}$ et $q_{2n-1}$ sont supérieurs à A.

D'après ce que nous avons vu, ou bien $\frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}}$ et $\frac{p_{2n}}{q_{2n}}$ sont adjacentes, nous prendrons alors

$$\frac{v}{w}\equiv\frac{p}{q},\qquad \frac{r}{s}\equiv\frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}},$$

ou bien $\frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}}$ et $\frac{p_{2n-2}}{q_{2n-2}}$ sont adjacentes, dans ce cas nous prendrons

$$\frac{v}{w}\equiv\frac{p_{2n-2}}{q_{2n-2}},\qquad \frac{r}{s}\equiv\frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}};$$

dans les deux cas, on voit visiblement que les conditions requises sont vérifiées.

Il reste à étudier le cas où les nombres $q_{2n-1}$ et $q_{2n-2}$ ne sont pas tous deux supérieurs à A.

Supposons d'abord

$$q_{2n-1}>\mathrm{A}>q_{2n-2}.$$

Écrivons la relation fondamentale

$$q_{2n}=a_{2n-1}q_{2n-1}+q_{2n-2}. \tag{19}$$

Dans le cas où $a_{2n-1}$ est supérieur à 1, on a

$$\frac{q_{2n}}{q_{2n-1}} > 2 > \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

et les fractions $\frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}}$ et $\frac{p_{2n}}{q_{2n}}$ sont adjacentes; on prendra alors

$$\frac{r}{s} \equiv \frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}} \qquad \text{et} \qquad \frac{v}{w} \equiv \frac{p_{2n}}{q_{2n}} \equiv \frac{p}{q}.$$

Supposons maintenant

$$a_{2n-1} = 1,$$

c'est-à-dire

$$(20) \qquad q_{2n} = q_{2n-1} + q_{2n-2},$$

on a, de plus,

$$(21) \qquad q_{2n} > \frac{B}{3};$$

$$(22) \qquad q_{2n-2} < A.$$

Désignons par $\rho$ le plus petit nombre entier, tel que $\rho q_{2n-2}$ soit supérieur à A; on aura

$$(23) \qquad \rho q_{2n-2} > A \geqq (\rho - 1) q_{2n-2}.$$

Posons

$$(24) \qquad \frac{r}{s} \equiv \frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}}, \qquad \frac{v}{w} \equiv \frac{\rho p_{2n-2}}{\rho q_{2n-2}}.$$

Nous aurons

$$(25) \qquad \frac{r}{s} - \frac{v}{w} = \frac{1}{q_{2n-1} q_{2n-2}} = \frac{\rho}{sw};$$

or on a, d'après (20), (21), (22), (23), (24),

$$s > \frac{B}{3} - A,$$

$$\rho - 1 \leqq \frac{A}{q_{2n-2}} \leqq A,$$

$$w = \frac{\rho}{\rho - 1}(\rho - 1) q_{2n-2} \leqq \frac{\rho}{\rho - 1} A \leqq 2A,$$

donc

(26)
$$\frac{\rho\varpi}{s} \leqq \frac{2\mathrm{A}(\mathrm{A}+1)}{\frac{\mathrm{B}}{3}-\mathrm{A}} < \frac{1}{\sqrt{5}},$$

car cette dernière inégalité revient à

$$\mathrm{B} > 3\left[\mathrm{A} + 2\sqrt{5}(\mathrm{A}^2 + \mathrm{A})\right],$$

et elle est certainement vérifiée si l'on suppose $\mathrm{B} > 15\mathrm{A}^2$, au moins pour $\mathrm{A} > 10$. Or la relation (26) peut s'écrire

$$\frac{\rho}{s\varpi} < \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{\varpi^2},$$

d'où, *a fortiori*,

$$\frac{\rho}{s\varpi} < \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{\varpi^2} + \frac{1}{s^2}\right).$$

Donc, d'après (25), les fractions $\frac{r}{s}$ et $\frac{\upsilon}{\varpi}$ sont adjacentes.

Il reste à examiner le cas où l'on a

$$q_{2n-1} < \mathrm{A}.$$

Nous désignerons alors par $\rho$ le nombre entier tel que

$$\rho q_{2n-1} > \mathrm{A} \geqq (\rho - 1)q_{2n-1},$$

et nous prendrons

$$\frac{\upsilon}{\varpi} \equiv \frac{p_{2n}}{q_{2n}} \equiv \frac{p}{q}, \qquad \frac{r}{s} \equiv \frac{\rho p_{2n-1}}{\rho q_{2n-1}}.$$

Il viendra, comme tout à l'heure,

$$\frac{r}{s} - \frac{\upsilon}{\varpi} = \frac{\rho}{s\varpi},$$

$$\rho - 1 \leqq \mathrm{A},$$

$$s \leqq 2\mathrm{A},$$

$$\varpi > \frac{\mathrm{B}}{3} - \mathrm{A},$$

$$\frac{\rho s}{\varpi} < \frac{2\mathrm{A}(\mathrm{A}+1)}{\frac{\mathrm{B}}{3}-\mathrm{A}} < \frac{1}{\sqrt{5}};$$

c'est-à-dire

$$\frac{\rho}{s\varpi} < \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{s^2} < \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{s^2}+\frac{1}{\varpi^2}\right).$$

Les cas où $\frac{p}{q}$ est irréductible sont ainsi complètement examinés.

Deuxième cas. — *La fraction $\frac{p}{q}$ n'est pas irréductible.*

Soit $\frac{P}{Q}$ la fraction irréductible équivalente à $\frac{p}{q}$; si $Q > A$, nous savons faire correspondre à cette fraction $\frac{P}{Q}$ deux fractions $\frac{\varphi}{\varpi}$ et $\frac{r}{s}$; il est clair que nous pouvons faire correspondre les mêmes à $\frac{p}{q}$. Il reste à examiner le cas où Q est inférieur à A; nous désignerons alors par $\rho$ le nombre entier tel que l'on ait

$$\rho Q > A \geqq (\rho-1)Q,$$

et nous prendrons

$$\frac{\varphi}{\varpi} \equiv \frac{\rho P}{\rho Q} = \frac{p}{q}, \qquad \frac{r}{s} \equiv \frac{3\rho^2 PQ+1}{3\rho^2 Q^2}.$$

Nous aurons

$$\frac{r}{s} - \frac{\varphi}{\varpi} = \frac{1}{3\rho^2 Q^2} = \frac{1}{3\varpi^2} < \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{\varpi^2}+\frac{1}{s^2}\right).$$

On a d'ailleurs

$$s = 3\rho^2 Q^2 \leqq \frac{3\rho^2}{(\rho-1)^2}A^2 \leqq 12A^2 < B,$$

donc $s$ et $\varpi$ sont bien compris dans l'intervalle A, B.

Le théorème VI est ainsi complètement démontré.

## L'approximation des nombres incommensurables par les nombres rationnels.

**15.** Le théorème VI entraîne immédiatement la conséquence suivante :

THÉORÈME VII. — *Soient* $\alpha$ *un nombre réel quelconque et* A *et* B *des nombres réels vérifiant les inégalités*

$$A > 10,$$
$$B > 15A^2,$$

*on peut trouver deux nombres entiers* $p$ *et* $q$ *tels que l'on ait*

$$A < q < B,$$
$$\left|\frac{p}{q} - \alpha\right| < \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{q^2}.$$

Ce théorème paraît devoir être particulièrement utile dans le cas où l'on veut approcher simultanément de plusieurs nombres (incommensurables ou non) $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$; on peut alors, quels que soient les nombres A et B satisfaisant aux inégalités précédentes, trouver des entiers $p_1, q_1, p_2, q_2, \ldots, p_n, q_n$, tels que l'on ait

$$
\begin{array}{ll}
A < q_1 < B, & \left|\frac{p_1}{q_1} - \alpha_1\right| < \frac{1}{q_1^2\sqrt{5}}, \\
A < q_2 < B, & \left|\frac{p_2}{q_2} - \alpha_2\right| < \frac{1}{q_2^2\sqrt{5}}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
A < q_n < B, & \left|\frac{p_n}{q_n} - \alpha_n\right| < \frac{1}{q_n^2\sqrt{5}}.
\end{array}
$$

**16.** On peut arriver à un résultat plus précis que le précédent par une méthode que nous nous contenterons d'exposer brièvement dans le cas de *deux* nombres $\alpha_1, \alpha_2$.

Soient A et B deux nombres vérifiant les inégalités

$$A > 100,$$
$$B > 15A^2,$$

on peut trouver deux nombres entiers $p_1$ et $q_1$, tels que l'on ait

$$\left|\frac{p_1}{q_1} - \alpha_1\right| < \frac{1}{q_1^2\sqrt{5}},$$
$$A < q_1 < B.$$

Déterminons maintenant deux nombres positifs, supérieurs à 1, $A_1$ et $B_1$ vérifiant les inégalités

$$\log A_1 \log B_1 = 2 \log q_1,$$
$$B_1 = 15 A_1^2,$$

on aura, de plus, visiblement

$$A_1 > 10,$$

de sorte que l'on pourra affirmer qu'il existe des nombres entiers $p_2$ et $q_2$, tels que l'on ait

$$\left|\frac{p_2}{q_2} - \alpha_2\right| < \frac{1}{q_2^2\sqrt{5}},$$
$$A_1 < q_2 < B_1.$$

Il est manifeste que l'on a

$$\frac{\log A_1}{\log q_1} = \frac{\log q_1}{\log B_1} = \sqrt{\frac{\log A_1}{\log B_1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\log 15}{2 \log A_1}}}.$$

Cette expression diffère aussi peu que l'on veut de $\frac{1}{\sqrt{2}}$, quand on suppose $A_1$ assez grand. On peut donc énoncer le résultat obtenu sous la forme suivante :

Théorème VII *bis*. — *Soient $\alpha_1$ et $\alpha_2$ deux nombres réels quel-*

*conques,* $\varepsilon$ *un nombre positif arbitrairement petit, on peut trouver des entiers* $p_1$, $q_1$, $p_2$, $q_2$, *tels que l'on ait*

$$\left|\frac{p_1}{q_1} - \alpha_1\right| < \frac{1}{q_1^2\sqrt{5}},$$

$$\left|\frac{p_2}{q_2} - \alpha_2\right| < \frac{1}{q_2^2\sqrt{5}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} - \varepsilon < \frac{\log q_1}{\log q_2} < \sqrt{2} + \varepsilon.$$

**17.** On peut se placer à un point de vue différent et chercher à approcher simultanément de plusieurs nombres $\alpha_1$, $\alpha_2$, ..., $\alpha_n$ par des fractions de *même dénominateur*. Le résultat fondamental suivant est dû à Charles Hermite ([1]); on peut trouver des entiers $p_1$, $p_2$, ..., $p_n$, $q$, tels que l'on ait

$$\left|\frac{p_1}{q} - \alpha_1\right| < \frac{\rho_n}{q^{\frac{1}{n+1}}},$$

$$\left|\frac{p_2}{q} - \alpha_2\right| < \frac{\rho_n}{q^{\frac{1}{n+1}}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\left|\frac{p_n}{q} - \alpha_n\right| < \frac{\rho_n}{q^{\frac{1}{n+1}}};$$

la constante $\rho_n$ ne dépendant que de $n$. Nous avons vu que l'on peut prendre, d'après M. Hurwitz,

$$\rho_1 = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

et que l'on ne peut pas prendre

$$\rho_1 < \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

---

([1]) *Journal de Crelle*, t. 40, p. 266.

Pour $n > 1$, M. Minkowski a montré [1] que l'on peut prendre

$$\rho_n = \frac{n}{n+1}.$$

Nous reviendrons sur le théorème d'Hermite; mais il nous faut d'abord démontrer une proposition fondamentale sur les ensembles à $n$ dimensions.

### Théorème fondamental sur la mesure des ensembles à $n$ dimensions.

**18.** Nous donnerons le nom de *point* à tout système de valeurs *réelles* des $n$ variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$; un ensemble de tels points sera dit un *ensemble à n dimensions*. La distance de deux points $x, y$ est la quantité *positive* $r$ définie par la relation

$$r^2 = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2.$$

Au lieu de la distance, il est indifférent de considérer soit la somme

$$|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \ldots + |x_n - y_n|,$$

que M. Jordan appelle l'*écart*, soit le plus grand des termes de cette somme que M. Minkowski appelle *spanne*. Un ensemble est dit *borné* lorsqu'il existe un nombre B tel que la distance de tous ses points à un point fixe convenablement choisi soit inférieure à B. Un point $y$ est point limite d'un ensemble E lorsqu'il y a dans E des points $x$ dont la distance à $y$ est inférieure à un nombre arbitraire $\varepsilon$.

L'ensemble des points limites d'un ensemble E constitue l'*ensemble dérivé* E'; les points qui n'appartiennent pas à E constituent l'*ensemble complémentaire de* E que l'on désignera par C(E), dont l'ensemble dérivé sera désigné par C'(E). Enfin, on appelle *frontière*

---

(1) *Geometrie der Zahlen*, p. 112. Nous écrivons $\rho_n$ là où M. Minkowski écrit $\rho_{n+1}$.

de E l'ensemble des points communs à E′ et C(E) d'une part, à E et C′(E) d'autre part, et points *intérieurs* à E les points de E qui n'appartiennent pas à sa frontière. L'ensemble E est dit *fermé* lorsqu'il contient tous les points de l'ensemble dérivé E′.

**19.** Ces définitions étant rappelées, nous allons démontrer le théorème suivant (¹) :

THÉORÈME VIII. — *Soit* E *un ensemble borné et fermé donné,* $E_1, E_2, \ldots, E_p, \ldots$ *une infinité dénombrable* (²) *d'ensembles tels que tout point de* E *soit* INTÉRIEUR *à, au moins, l'un d'eux; il est possible de trouver, parmi* $E_1, E_2, \ldots, E_p, \ldots$, *un nombre* LIMITÉ *d'ensembles tels que tout point de* E *soit intérieur à, au moins, l'un d'eux.*

Il suffit de prouver qu'il existe un nombre fini M, tel que tout point de E soit *intérieur* à un $E_j$, tel que $j < M$. Or, nier l'existence de M, c'est affirmer que, *quel que soit le nombre* A, *il existe dans* E *au moins un point $x$ tel que tous les* $E_i$ *qui renferment $x$ à leur intérieur soient tels que* $i > A$. Si l'on décompose l'ensemble E en un nombre limité d'autres ensembles, il y en aura au moins un ayant la même propriété.

L'ensemble E étant borné, il existe un nombre positif B tel que l'on ait, pour tout point de E,

$$|x_i| < B \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

(¹) J'ai énoncé ce théorème pour le cas des ensembles linéaires ($n = 1$) dans ma Thèse (*Sur quelques points de la théorie des fonctions,* Paris, Gauthier-Villars, 1894); j'en ai donné dans mes *Leçons sur la théorie des fonctions* une démonstration qui s'étend immédiatement au cas de $n$ dimensions (c'est cette extension qui est donnée dans le texte). Dans sa Thèse (*Intégrale, longueur, aire,* publiée dans les *Annali di Mathematica*), M. Lebesgue a fait d'importantes applications de ce théorème et de sa généralisation; *voir* aussi son Cours cité au bas de la page 335.

Le théorème est énoncé et démontré ici pour le cas d'un ensemble borné et fermé quelconque.

(²) On pourrait supprimer le mot *dénombrable* sans que l'énoncé cessât d'être exact; je dois cette remarque à M. Lebesgue. Mais nous n'avons besoin ici que de l'énoncé du texte, un peu plus aisé à démontrer.

Soit $j$ un nombre entier quelconque; considérons l'ensemble $E^{(j)}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}$ formé *des points de* E dont les coordonnées vérifient les inégalités

$$(E^{(j)}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\alpha_1 B}{2^j} \leqq x_1 \leqq \dfrac{(\alpha_1 + 1) B}{2^j}, \\ \dfrac{\alpha_2 B}{2^j} \leqq x_2 \leqq \dfrac{(\alpha_2 + 1) B}{2^j}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{\alpha_n B}{2^j} \leqq x_n \leqq \dfrac{(\alpha_n + 1) B}{2^j}; \end{array} \right.$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ étant des entiers positifs ou négatifs tels que $|\alpha_h|$ et $|\alpha_h + 1|$ soient inférieurs à $2^j$.

Parmi les ensembles en nombre limité $E^{(j)}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}$, il y en a, comme nous l'avons dit, au moins un qui a la même propriété que E; nous le désignerons par $E^{(j)}$ (s'il y en a plusieurs, nous choisissons l'un d'eux). Si l'on remplace $j$ par $j + 1$, on peut choisir $E^{(j+1)}$ de telle manière que tous les points intérieurs à $E^{(j+1)}$ soient intérieurs à $E^j$, et ainsi de suite. On forme ainsi une suite indéfinie

$$(\alpha) \qquad E, \quad E^{(1)}, \quad E^{(2)}, \quad \ldots, \quad E^{(h)}, \quad \ldots$$

ayant les propriétés suivantes :

1° *Tout point intérieur à l'un de ces ensembles est intérieur aux précédents;*

2° *La distance maximum de deux points de* $E^{(h)}$ *tend vers zéro avec* $\frac{1}{h}$;

3° *Quels que soient* A *et* $h$, *il existe un point* $x$ *intérieur à* $E^{(h)}$ *et tel que tous les* $E_i$ *auxquels* $x$ *est intérieur soient tels que* $i > A$.

Or, la propriété 1° entraîne l'existence d'un point $x$ intérieur à tous les $E^{(h)}$; ce point $x$ appartient à E, puisque E est fermé; par suite, il est *intérieur* à un ensemble déterminé $E_i$; on en conclut qu'il existe un nombre $\delta$ tel que tous les points, dont la distance à $x$ est inférieure à $\delta$, appartiennent à $E_i$ [sinon il y aurait des points de $C(E_i)$ aussi voisins que l'on veut de $x$; $x$ appartiendrait à $C'(E_i)$ et, par suite, à la frontière de $E_i$; il ne serait pas *intérieur* à $E_i$]; d'après 2°, quelque petit que soit $\delta$, il existe un nombre $k$ tel que la distance de deux points quelconques de $E^{(k)}$ soit inférieure à $\delta$; comme $x$ est intérieur à $E^{(k)}$, on peut affirmer que tous les points de $E^{(k)}$ sont *intérieurs* à $E_i$, ce qui est en contradiction avec la condition 3°.

Le théorème VIII est donc démontré.

Ce théorème peut aisément être étendu aux ensembles non bornés, moyennant quelques conventions. Bornons-nous au cas de deux dimensions, pour plus de simplicité; nous dirons qu'un ensemble est *borné au sens projectif* (ou *borné* P) lorsqu'il est possible de le transformer en un ensemble borné par une transformation homographique convenable. On définira de même un ensemble *fermé au sens projectif* (ou *fermé* P), et aussi ce que l'on doit entendre par points *intérieurs* à un ensemble qui s'étend à l'infini (on définit les ensembles dérivés, les frontières, etc.). Avec ces définitions, le théorème VIII subsiste évidemment si l'on suppose l'ensemble E *borné* P *et fermé* P au lieu de le supposer simplement borné et fermé.

Or, il est clair que l'on peut déterminer trois ensembles bornés P et fermés P, tels que tout point du plan appartienne à, au moins, l'un d'eux. Il suffit, en effet, de les définir, par exemple, par les relations

$$\begin{aligned} 2x^2 - y^2 - \phantom{2}z^2 &\geqq 0, \\ 2y^2 - x^2 - \phantom{2}z^2 &\geqq 0, \\ x^2 - y^2 - 2z^2 &\geqq 0, \end{aligned}$$

$x, y, z$ étant des coordonnées trilinéaires quelconques. Si l'on applique à chacun de ces ensembles le théorème VIII généralisé on obtient le résultat suivant :

Théorème VIII *bis*. — *Si l'on a une infinité dénombrable d'ensembles* $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$, *tels que tout point du plan soit* INTÉRIEUR *à, au moins, l'un d'eux (les points à l'infini non exclus, bien entendu), on peut déterminer parmi les* $E_i$ *un nombre limité d'ensembles tels que tout point du plan soit intérieur à l'un d'eux.*

Il est clair que l'on pourrait utiliser d'autres transformations que les transformations projectives; il y aurait seulement lieu de tenir compte de l'existence des points singuliers des transformations. Ce qui précède s'étend d'ailleurs immédiatement au cas de $n$ dimensions. Nous verrons plus loin l'usage que l'on peut faire de certaines transformations non ponctuelles; il est clair que l'on pourrait utiliser dans la théorie des ensembles toutes les transformations géométriques, et, en particulier, les transformations de contact; mais il ne paraît y avoir intérêt à développer cette indication que si l'on trouve des applications.

**20.** Revenons aux ensembles bornés et au théorème VIII; nous allons en établir une conséquence importante qui s'en déduit immédiatement. Donnons le nom de *domaine* à tout ensemble *borné et fermé* défini par un nombre limité d'inégalités *algébriques* (1) de la forme

$$\varphi_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqq 0,$$

Le volume d'un domaine est l'intégrale

$$V = \int\int \cdots \int dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$

étendue aux points intérieurs, telle qu'on la définit dans les éléments; cette intégrale est toujours positive; le volume d'un domaine formé par la réunion de plusieurs autres est la somme de leurs volumes. Cela posé, la conséquence dont nous voulions parler est la suivante :

Théorème IX. — *Lorsqu'un domaine* E *est tel que chacun de ses points est intérieur à un domaine* $E_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n, \ldots)$, *on peut affirmer que la somme des volumes des domaines* $E_i$ *est supérieure au volume de* E. Bien entendu, si la série $\sum v_i$, $v_i$ étant le volume de $E_i$, est divergente, sa somme est regardée comme infinie et supérieure à tout nombre positif.

(1) On pourrait adopter pour le domaine une définition bien plus large; nous n'en aurons pas besoin.

On peut donner à cet énoncé une forme quelquefois plus commode.

Théorème IX *bis*. — *Étant donné un domaine* E *et une infinité dénombrable de domaines*

$$E_1, \quad E_2, \quad \ldots, \quad E_n, \quad \ldots,$$

*tels que l'on ait*

$$\sum v_i < v,$$

*$v_i$ étant le volume de $E_i$ et $v$ le volume de* E, *on peut affirmer qu'il y a des points de* E *qui ne sont intérieurs à aucun des $E_i$.*

**21.** L'énoncé précédent n'exclut pas le cas où tout point de E appartiendrait à l'un des $E_i$ (mais pourrait être point frontière). On peut observer qu'étant donné un domaine quelconque $E_i$ et un nombre positif arbitraire $\varepsilon$, on peut construire un domaine $E'_i$, tel que :

1° Tout point de $E_i$ soit *intérieur* à $E'_i$;

2° L'on ait

$$v'_i \leqq (1 + \varepsilon) v_i,$$

$v_i$ étant le volume de $E_i$ et $v'_i$ celui de $E'_i$.

Or si l'on a

$$\sum v_i < v,$$

on peut choisir $\varepsilon$ de telle manière que l'on ait aussi

$$(1 + \varepsilon) \sum v_i < v,$$

c'est-à-dire

$$\sum v'_i < v,$$

et l'on peut conclure qu'il y a des points de E qui ne sont intérieurs à aucun des $E'_i$ et qui, par suite, n'appartiennent à aucun des $E_i$.

On a donc le théorème suivant :

Théorème X. — *Étant donné un domaine* E, *de volume $v$, et une* *infinité dénombrable de domaines* $E_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n, \ldots)$ *de volumes* $v_i$, *et tels que*

$$\sum v_i < v,$$

*il existe des points de* E *qui n'appartiennent à aucun des* $E_i$.

**22.** Les théorèmes IX et X entraînent, comme on le voit aisément, les conséquences suivantes :

Théorème XI. — *Soit* E *un domaine et* $E_1, E_2, \ldots, E_h, \ldots$ *des domaines tels que tout point de* E *soit intérieur à une infinité d'entre eux; on peut affirmer que les volumes* $v_1, v_2, \ldots, v_h, \ldots$ *de ces domaines sont tels que la série*

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_h + \ldots$$

*est divergente.*

Théorème XI *bis*. — *Soient* $E_1, E_2, \ldots, E_h, \ldots$ *des domaines de volumes* $v_1, v_2, \ldots, v_h, \ldots$ *tels que la série*

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_h + \ldots$$

*soit convergente; on peut affirmer que l'ensemble* H *des points qui appartiennent à une infinité de ces domaines est tel que, étant donné un nombre arbitrairement petit* $\varepsilon$, *on peut construire des domaines* $H_1, H_2, \ldots, H_\alpha, \ldots$ *en nombre fini ou en infinité dénombrable, tels que tout point de* H *soit intérieur à l'un d'eux et que, de plus,* $v_\alpha$ *étant le volume de* $H_\alpha$, *l'on ait*

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_\alpha + \ldots < \varepsilon.$$

**L'approximation par des fractions de même dénominateur.**

**23.** Considérons l'ensemble des points dont les coordonnées s'expriment par les formules

$$(\mathrm{P}) \qquad x_1 = \frac{p_1}{q}, \quad x_2 = \frac{p_2}{q}, \quad \ldots, \quad x_n = \frac{p_n}{q},$$

dans lesquelles $q$ est un nombre entier positif, $p_1, p_2, \ldots, p_n$ étant des entiers satisfaisant aux inégalités

$$(27)\qquad \begin{cases} 0 \leqq p_1 \leqq q, \\ 0 \leqq p_2 \leqq q, \\ \ldots\ldots\ldots, \\ 0 \leqq p_n \leqq q. \end{cases}$$

Tous ces points sont intérieurs au domaine E défini par les inégalités : $0 \leqq x_1 \leqq 1$; ...; $0 \leqq x_n \leqq 1$; le volume de E est visiblement égal à 1.

Les points (P) peuvent être rangés en une suite simplement infinie (*voir* n° **7**); désignons par $P_h$ le point (P) qui occupe le rang $h$ dans cette suite et à chaque point $P_h\left(\frac{p_1}{q}, \frac{p_2}{q}, \ldots, \frac{p_n}{q}\right)$ faisons correspondre le domaine $E_h$ défini par les inégalités :

$$(28)\qquad \begin{cases} \dfrac{p_1}{q} - \dfrac{a}{q^\alpha} \leqq x_1 \leqq \dfrac{p_1}{q} + \dfrac{a}{q^\alpha}, \\ \dfrac{p_2}{q} - \dfrac{a}{q^\alpha} \leqq x_2 \leqq \dfrac{p_2}{q} + \dfrac{a}{q^\alpha}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{p_n}{q} - \dfrac{a}{q^\alpha} \leqq x_n \leqq \dfrac{p_n}{q} + \dfrac{a}{q^\alpha}; \end{cases}$$

$a$ et $\alpha$ étant des nombres positifs, dont le second est supposé plus grand que un.

Le volume du domaine $E_h$ est évidemment

$$v_h = \frac{2^n a^n}{q^{n\alpha}},$$

D'ailleurs, le nombre des $E_h$ ayant ce volume est égal au nombre des systèmes de valeurs de $p_1, p_2, \ldots, p_n$ qui satisfont aux inégalités (27), c'est-à-dire à

$$(q+1)^n.$$

On a donc

$$\sum v_h = 2^n a^n \sum \frac{(q+1)^n}{q^{n\alpha}}.$$

Pour que cette série converge, il faut et il suffit que l'on ait

$$n\alpha > n + 1,$$

c'est-à-dire

$$\alpha > \frac{n+1}{n}. \tag{29}$$

Le théorème XI *bis* entraîne alors la conséquence suivante :

Théorème XII. — *Le nombre $\alpha$ satisfaisant à l'inégalité* (29) *et le nombre $a$ étant quelconque, on peut affirmer que l'ensemble E des points, dont les coordonnées vérifient les inégalités*

$$0 \leqq x_1 \leqq 1, \qquad \ldots, \qquad 0 \leqq x_n \leqq 1,$$

*renferme des points qui ne sont intérieurs qu'à un nombre limité des domaines $E_h$ définis par les inégalités* (28).

Ce théorème peut, en un certain sens, être regardé comme la réciproque de la célèbre proposition d'Hermite que nous rappelions tout à l'heure; on peut, en effet, lui donner la forme suivante :

Théorème XII *bis*. — *Le nombre positif $a$ étant quelconque et le nombre $\alpha$ supérieur à $\frac{n+1}{n}$, il existe une infinité de systèmes de $n$ nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, tels qu'à chacun de ces systèmes corresponde un nombre Q tel que l'inégalité, dans laquelle $q$ désigne un entier*

$$q > Q$$

*entraîne*

$$\left|\frac{p_1}{q} - \alpha_1\right| > \frac{a}{q^\alpha},$$
$$\left|\frac{p_2}{q} - \alpha_2\right| > \frac{a}{q^\alpha},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\left|\frac{p_n}{q} - \alpha_n\right| > \frac{a}{q^\alpha},$$

*quels que soient d'ailleurs les entiers $p_1, p_2, \ldots, p_n$.*

Le théorème d'Hermite nous apprenait que, si $\alpha$ est égal à $\frac{n+1}{n}$, on peut prendre pour $a$ une valeur telle qu'il n'existe pas de nombre Q ayant cette propriété.

Il est clair que la réciproque précédente est loin d'être aussi précise que celle que M. Hurwitz a déduite de la théorie des fractions continues dans le cas où $n = 1$; il nous a cependant paru intéressant de la signaler.

**24.** Conservant les mêmes notations, supposons maintenant que l'on ait

$$(30) \qquad \begin{cases} \alpha = \dfrac{n+1}{n}, \\ a = \dfrac{n}{n+1}. \end{cases}$$

On peut faire alors la remarque suivante :

*Étant donné un système quelconque de nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, il existe une infinité de systèmes d'entiers $p_1, p_2, \ldots, p_n$, $q$ tels que l'on ait*

$$\left|\frac{p_1}{q} - \alpha_1\right| < \frac{a}{q^\alpha},$$
$$\left|\frac{p_2}{q} - \alpha_2\right| < \frac{a}{q^\alpha},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$$\left|\frac{p_n}{q} - \alpha_n\right| < \frac{a}{q^\alpha}.$$

Il existe, en effet, au moins un tel système, comme nous l'avons rappelé (p. 355).

Dans le cas où les nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ne sont pas tous rationnels, les différences $\frac{p_1}{q} - \alpha_1$, $\frac{p_2}{q} - \alpha_2$, $\ldots$, $\frac{p_n}{q} - \alpha_n$ ne sont pas toutes nulles et le maximum $\mu$ de leurs valeurs absolues n'est pas nul; or, d'après le théorème que nous avons rappelé, on peut déterminer des entiers

$p'_1, p'_2, \ldots, q'$ tels que les différences

$$\frac{p'_1}{q'} - \alpha_1, \quad \frac{p'_2}{q'} - \alpha_2, \quad \ldots, \quad \frac{p'_n}{q'} - \alpha_n$$

soient en valeur absolue inférieures à $\mu$ tout en satisfaisant aux inégalités du type

$$\left|\frac{p'_i}{q'} - \alpha_i\right| < \frac{a}{q'^{\alpha}},$$

les nombres $p'_1, p'_2, \ldots, q'$ sont donc nécessairement distincts de $p_1$, $p_2, \ldots, p_n, q$.

Si les nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont tous rationnels, on peut déterminer des nombres $p_1, p_2, \ldots, p_n, q$ tels que l'on ait

$$\frac{p_1}{q} - \alpha_1 = 0, \qquad \frac{p_2}{q} - \alpha_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \frac{p_n}{q} - \alpha_n = 0,$$

et le raisonnement précédent ne s'applique plus.

Mais il est manifeste que l'on a, quel que soit l'entier $h$,

$$\frac{p_1 h}{qh} - \alpha_1 = 0, \qquad \frac{p_2 h}{qh} - \alpha_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \frac{p_n h}{qh} - \alpha_n = 0.$$

Notre remarque est donc justifiée; on peut encore l'énoncer en disant que les relations (30) entraînent la conséquence que tout point de E est intérieur à *une infinité* des domaines $E_h$ définis par les relations (28).

On en conclut, d'après le théorème VIII, qu'il est possible de choisir parmi les $E_h$, un nombre limité de domaines $E_{h_1}, E_{h_2}, \ldots, E_{h_q}$, tels que tout point de E soit intérieur à, au moins, l'un d'eux. Si l'on considère l'ensemble des $E_h$ dont l'indice est différent de $h_1, h_2, \ldots, h_q$, on peut affirmer que tout point de E est encore intérieur à une infinité d'entre eux, de telle sorte que l'on peut encore en déterminer un nombre limité $E_{h'_1}, E_{h'_2}, \ldots, E_{h'_{q'}}$, *distincts des précédents* et tels que tout point de E soit intérieur à l'un d'entre eux. On peut continuer de même indéfiniment et l'on arrive ainsi au résultat suivant :

Théorème XIII. — *Si l'on considère l'ensemble des systèmes de* *n fractions de même dénominateur :*

$$\frac{p_1}{q}, \quad \frac{p_2}{q}, \quad \ldots, \quad \frac{p_n}{q} \qquad (q = 1, 2, 3, \ldots);$$

$$0 \leqq p_1 \leqq q, \qquad 0 \leqq p_2 \leqq q, \qquad \ldots, \qquad 0 \leqq p_n \leqq q;$$

*il est possible de classer cette infinité de systèmes de n fractions en une infinité de classes, chaque classe ne renfermant qu'un nombre limité de systèmes, et deux classes distinctes ne renfermant pas de systèmes identiques (c'est-à-dire de systèmes formés de n fractions identiques deux à deux, dans le même ordre), cette classification ayant la propriété suivante :* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ *étant n nombres réels quelconques compris entre* 0 *et* 1, *il y a, dans chaque classe, un système au moins donnant lieu aux inégalités*

$$\left| \frac{p_i}{q} - \alpha_i \right| < \frac{n}{n+1} \frac{1}{q^{\frac{n+1}{n}}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Dans le cas où $n = 1$, nous avons *effectivement* obtenu une classification ayant les propriétés indiquées dans cet énoncé; dans le cas général, nous nous contentons de démontrer la *possibilité* d'une telle classification; il serait intéressant de l'obtenir aussi effectivement.

## Les formes linéaires à indéterminées entières.

**25.** Des méthodes analogues aux précédentes s'appliquent à l'étude des formes linéaires à indéterminées entières et à coefficients quelconques. Pour ne pas allonger démesurément, je me bornerai à quelques indications sur ce sujet, en prenant comme exemple une forme *unique* à *trois* variables; je me réserve d'y revenir ultérieurement.

Considérons la forme linéaire

$$\varphi = ax + by + cz,$$

dans laquelle $a$, $b$, $c$ sont des nombres réels donnés quelconques et $x$, $y$, $z$ des indéterminées entières.

Considérons deux axes rectangulaires OX, OY et la droite représentée par l'équation

$$(\mathrm{D}) \qquad aX + bY + c = 0.$$

La distance $d$ du point

$$P\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)$$

à la droite (D) est donnée par la formule

$$(31) \qquad d = \frac{a\frac{x}{z} + b\frac{y}{z} + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\varphi}{z\sqrt{a^2 + b^2}},$$

formule fondamentale que l'on peut écrire aussi sous la forme

$$\varphi = dz\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Le point P est un point quelconque à coordonnées rationnelles; on voit que la recherche des plus petites valeurs que peut prendre la forme $\varphi$ pour des valeurs entières des variables est intimement liée à la recherche des points (P) à coordonnées rationnelles dont la distance à la droite (D) est très petite par rapport à $\frac{1}{z}$.

Relativement aux plus petites valeurs de la forme $\varphi$, on déduit immédiatement des méthodes classiques de Lejeune-Dirichlet la proposition suivante :

*Si l'on pose*

$$\psi = ax + by + z,$$
$$h = \sqrt{a^2 + b^2 + 1} \qquad (h > 0)$$

*et que l'on désigne par* M *un nombre quelconque, on peut déterminer des valeurs entières de $x$, $y$, $z$ telles que l'on ait*

$$|x| < M, \qquad |y| < M, \qquad |z| < M,$$
$$|\psi| < \frac{\theta h}{M^2},$$

$\theta$ *étant une constante déterminée, indépendante de* $a$, $b$, M.

Nous ne nous occuperons pas de la détermination effective de $\theta$ ; on peut y arriver par la méthode rappelée ou employer les méthodes analogues, mais plus générales, de M. Minkowski, qui fourniraient une valeur plus petite.

On peut aussi écrire l'inégalité précédente

$$|\psi| < \frac{\theta h}{z^2}$$

et énoncer le théorème suivant :

*Il existe une infinité de systèmes de valeurs entières $x, y, z$ telles que l'on ait*

$$|ax + by + z| < \frac{\theta\sqrt{a^2 + b^2 + 1}}{z^2},$$

*les constantes $a$, $b$ étant quelconques et $\theta$ étant une constante indépendante de $a$ et $b$.*

Pour démontrer ce théorème, on distingue deux cas suivant qu'il existe ou non des valeurs entières $x$, $y$, $z$ annulant $ax + by + z$ et l'on raisonne comme au nº **24**.

Si l'on utilise la formule (31), on peut énoncer le théorème suivant :

*Étant donnée une droite quelconque*

$$\text{(D)} \qquad aX + bY + 1 = 0,$$

*il existe une infinité de systèmes de trois nombres entiers $x$, $y$, $z$, tels que la distance (essentiellement positive) $d$ du point $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$ à la droite (D) vérifie l'inégalité*

$$d < \frac{\theta}{|z|^3} \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

On peut donner à ce résultat une forme plus géométrique.

Dans ce but, remarquons que la distance de l'origine à la droite

$$aX + bY + 1 = 0$$

est $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$; d'autre part, la distance de l'origine à un point $\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}$ de cette droite est $\sqrt{\frac{X^2+Y^2}{Z^2}}$; on a donc

$$\frac{X^2+Y^2}{Z^2} > \frac{1}{a^2+b^2},$$

$$\frac{a^2+b^2+1}{a^2+b^2} = 1 + \frac{1}{a^2+b^2} < 1 + \frac{X^2+Y^2}{Z^2} = \frac{X^2+Y^2+Z^2}{Z^2}.$$

On peut donc $\Big($en modifiant légèrement la valeur de $\theta$ pour tenir compte du fait que le point $\frac{x}{z}, \frac{y}{z}$ n'est pas sur la droite, mais en est voisin$\Big)$ écrire l'inégalité précédente sous la forme

$$d < \frac{\theta\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{z^3}.$$

Ceci posé, attachons *à chaque système de deux fractions de même dénominateur* $\frac{x}{z}, \frac{y}{z}$ le cercle qui a pour centre le point de coordonnées $\frac{x}{z}, \frac{y}{z}$ et pour rayon $\frac{\theta\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{z^3}$; nous appellerons ce cercle *le cercle* $C(x, y, z)$ ou *cercle attaché aux fractions* $\frac{x}{z}, \frac{y}{z}$ [à un point de coordonnées rationnelles correspondent évidemment tous les cercles $C(x, y, z)$ tels que l'on ait $x = \lambda p$, $y = \lambda q$, $z = \lambda r$, $p$, $q$, $r$ étant des entiers convenablement choisis et $\lambda$ un entier arbitraire]; nous pourrons énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME XIV. — *Toute droite du plan coupe une infinité de cercles* $C(x, y, z)$.

Ce théorème n'est qu'une simple transformation de résultats classiques; nous en déduirons des résultats nouveaux, mais il est d'abord nécessaire d'entrer dans quelques détails au sujet des ensembles de droites.

**26.** Étant donné un ensemble de droites dans un plan, nous dirons que cet ensemble est borné lorsqu'il existe un nombre A tel que la distance d'un certain point fixe à toutes les droites de l'ensemble soit inférieure à A.

Nous dirons qu'un ensemble *borné* est *simple* lorsqu'il existe un cercle tel que l'ensemble des points, pôles des droites de l'ensemble par rapport à ce cercle, soit *borné* et *fermé*. Nous ramènerons les ensembles bornés aux ensembles simples au moyen du théorème suivant :

Théorème XV. — *Étant donné un ensemble borné de droites* E, *il est possible de déterminer trois ensembles simples* $E_1$, $E_2$, $E_3$ *tels que toute droite appartenant à* E *appartienne à l'un au moins de ces trois ensembles.*

Traçons, en effet, trois cercles $C_1$, $C_2$, $C_3$ tels qu'il n'existe aucune droite qui coupe ces *trois* cercles; cela est évidemment possible d'une infinité de manières. Désignons par $F_i$ l'ensemble des droites de E qui ne coupent pas le cercle $C_i$; il est clair que toute droite de E appartient à l'un au moins des ensembles $F_1$, $F_2$, $F_3$. Soit maintenant $f_1$ l'ensemble des pôles des droites de l'ensemble $F_1$ par rapport au cercle $C_1$; tous les points de $f_1$ sont intérieurs à $C_1$ puisque les droites de $F_1$ ne coupent pas $C_1$; de plus, l'ensemble $F_1$ étant borné, il existe nécessairement un cercle $c_1$ concentrique à $C_1$ et tel que tous les points de $f_1$ soient extérieurs à $c_1$. Soient $f'_1$ l'ensemble dérivé de $f_1$ et $e_1$ l'ensemble $f_1 + f'_1$; on sait que l'ensemble $e_1$ est parfait; les points de cet ensemble sont nécessairement intérieurs à $C_1$ et extérieurs à $c_1$ (ou sur ces cercles); il est donc borné et l'ensemble $E_1$ des droites polaires des points de $e_1$ par rapport à $C_1$ est aussi borné; c'est donc un ensemble *simple;* toute droite de $F_1$ appartient à $E_1$; si donc on construit de même les ensembles $E_2$, $E_3$ au moyen des cercles $C_2$ et $C_3$ et des ensembles $F_2$, $F_3$, toute droite de E appartiendra à l'un au moins des ensembles simples $E_1$, $E_2$, $E_3$. C. Q. F. D.

Démontrons maintenant la proposition suivante :

THÉORÈME XVI. — *Soient* E *un ensemble simple de droites,* $E_1$, $E_2, \ldots, E_n, \ldots$ *une infinité dénombrable de domaines, tels que toute droite de* E *contienne des points intérieurs à l'un d'eux; on peut déterminer un nombre limité de domaines* $E_i$ *tels que toute droite de* E *renferme des points intérieurs à l'un d'eux.*

Soit, en effet, C un cercle tel que les pôles des droites de E par rapport à C forment un ensemble *borné et fermé* $e$ [1]. Construisons les courbes polaires réciproques par rapport à C des courbes qui limitent les domaines $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ ; ces courbes définissent certains ensembles de points [2] $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ tels que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une droite renferme des points *intérieurs* à $E_i$, soit que son pôle soit INTÉRIEUR à $e_i$. Tout point de $e$ est *intérieur* à, au moins, l'un des ensembles $e_i$ ; il existe donc un nombre limité d'ensembles $e_i$ tel que tout point de $e$ soit intérieur à, au moins, l'un d'eux (théorème VIII); les domaines $E_i$ correspondants, en nombre limité, sont tels que toute droite de E renferme des points intérieurs à l'un d'eux. C. Q. F. D.

D'après le théorème XV, le théorème XVI entraîne immédiatement la conséquence suivante :

THÉORÈME XVI *bis*. — *Soient* E *un ensemble borné de droites,* $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ *une infinité dénombrable de domaines tels que toute droite de* E *contienne des points intérieurs à l'un d'eux; on peut déterminer un nombre limité de domaines* $E_i$ *tels que toute droite de* E *renferme des points intérieurs à l'un d'eux.*

---

(1) On pourrait simplifier un peu en utilisant le théorème VIII *bis* et les considérations qui sont développées à cette occasion; nous ne nous servons que du théorème VIII.

(2) Les ensembles $e_i$ ne sont généralement pas bornés; comme l'ensemble $e$ est borné, il existe un point O et un nombre A tels que les distances à O de tous les points de $e$ soient inférieures à A; on peut supprimer dans les $e_i$ tous les points dont la distance à O est supérieure à A et appeler encore $e_i$ les ensembles ainsi obtenus.

Il serait aisé d'étendre le théorème au cas où l'ensemble E n'est pas borné; nous n'y insisterons pas.

**27.** Il suffit de combiner le théorème XIV et le théorème XVI *bis* pour obtenir le résultat suivant :

Théorème XVII. — *Soit* E *l'ensemble des droites du plan telles que leur distance à l'origine soit inférieure à un nombre quelconque, mais fixe,* A. *On peut déterminer une infinité de systèmes de cercles* $C(x, y, z)$, *chaque système se composant d'un nombre limité de cercles et tels que toute droite de l'ensemble* E *coupe, au moins, un cercle de chaque système.*

Ce théorème peut être énoncé sous une forme purement arithmétique :

Théorème XVII *bis.* — *Soit* A *un nombre positif quelconque, on peut partager l'ensemble des systèmes de trois entiers $x, y, z$ en une infinité de classes, chaque classe en renfermant un nombre limité, et telles que, $\alpha$, $\beta$ étant deux nombres quelconques vérifiant la relation*

$$\alpha^2 + \beta^2 > A^2,$$

*il y ait, dans chaque classe, au moins un système $x, y, z$ donnant lieu à l'inégalité*

$$|\alpha x + \beta y + z| < \frac{\theta}{(1+A)z^2},$$

$\theta$ *étant une constante indépendante de* A, $\alpha$, $\beta$, $x$, $y$, $z$.

**28.** Nous laissons de côté l'extension des résultats précédents au cas général du système de $n$ formes linéaires à $m$ indéterminées entières.

**Relation entre la hauteur et l'approximation. — Conclusion.**

**29.** Il serait aisé d'énoncer à nouveau les divers résultats que nous avons rappelés ou obtenus en faisant intervenir dans les énoncés la *hauteur* ou le *rang* des systèmes d'entiers qui y figurent. Mais il est inutile de faire cette longue énumération pour prévoir le résultat auquel elle conduirait. Ce résultat peut s'énoncer brièvement ainsi : l'approximation que l'on peut obtenir, *en général*, varie en raison inverse de la hauteur ou d'une puissance de la hauteur (suivant la définition que l'on adopte pour la hauteur). Les mots *en général* signifient : lorsque l'on ne fait pas intervenir des nombres incommensurables *spéciaux*, en donnant le nom de *nombres incommensurables spéciaux* à ceux qui donnent une approximation plus rapide que celle qui résulte des théorèmes généraux. Ces nombres incommensurables jouent un grand rôle dans de nombreuses questions d'Analyse ([1]); en fait, on n'a aucune raison de croire qu'ils s'introduiraient dans un système *logique*, au sens de M. Drach; on peut même légitimement supposer qu'ils ne s'introduiraient pas. Mais nous ne savons pas actuellement démontrer d'une manière rigoureuse et générale cette hypothèse, qui, si elle était exacte, simplifierait bien des questions d'Analyse.

Le but final des recherches de ce Mémoire et des recherches analogues me paraît être précisément d'exclure les complications introduites par les nombres incommensurables *spéciaux*; de même que le but final des recherches sur les fonctions continues non dérivables ou autres fonctions singulières doit être de montrer que ces fonctions ne s'introduisent pas dans un système *logique*; ces diverses questions ont

---

([1]) *Voir*, par exemple, mes Notes *Sur les équations aux dérivées partielles à coefficients constants et les fonctions non analytiques* (*Comptes rendus*, 16 décembre 1895); *Sur la croissance des fonctions définies par des équations différentielles* (*Comptes rendus*, 20 février 1899).

d'ailleurs entre elles de grandes analogies [1]. Mais il serait puéril de vouloir exclure *a priori* de l'Analyse ces diverses complications, sous le simple prétexte que ce sont des complications : *car elles se présentent d'elles-mêmes dans l'étude des questions les plus simples,* lorsqu'on ne fait pas d'hypothèse sur la nature arithmétique des constantes numériques introduites; une étude directe en est donc nécessaire.

Paris, avril 1903.

---

[1] Comparer aussi avec la théorie de la croissance *régulière*. *Voir* mes *Leçons sur les fonctions entières*, Notes II et III.