JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

EDMOND MAILLET

Sur les fonctions monodromes et les nombres transcendants

Journal de mathématiques pures et appliquées 5^e^ série, tome 10 (1904), p. 275-362.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1904_5_10__275_0>

Sur les fonctions monodromes et les nombres transcendants;

PAR M. EDMOND MAILLET.

Introduction.

Dans trois Communications à l'Académie des Sciences, en 1903, et un Mémoire corrélatif ([1]), nous avons indiqué une classification des fonctions entières d'ordre infini, non transfini, et de celles d'ordre zéro. Nous commençons ici (§ I) par compléter cette classification pour les fonctions entières d'ordre zéro : si une fonction entière

$$f(x) = \sum_0^\infty a_m x^m$$

renferme une infinité de coefficients tels que $|a_m| = e_k(m)^{-m\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon\right)}$ (ρ entier, $\lim \varepsilon = 0$ pour $m = \infty$), les autres ayant un module plus petit que ne l'indique cette égalité, on a, en désignant par M_r le maximum du module de $f(x)$ pour $|x| = r$, et posant

$$E(x, k, \rho) = \sum_0^\infty \frac{x^m}{e_k(m)^{\frac{m}{\rho}}},$$

$M_r \leqq E(r, k, \rho + \varepsilon')$, et, pour une infinité de valeurs de r,

$$M_r \geqq E(r, k, \rho - \varepsilon') \qquad (\varepsilon' \text{ analogue à } \varepsilon).$$

Nous n'avions antérieurement établi ce résultat que pour $k \leqq 1$.

([1]) *Comptes rendus*, 1903, 1er semestre, p. 348, 2e semestre, p. 407 et 478. — *Journal de l'École Polytechnique*, 1904 et 1905.

Dès lors cette classification, un théorème de M. Hadamard (auquel il n'est indispensable de se reporter que pour les fonctions d'ordre transfini ou d'indice infini) et une proposition de Liouville sur les fractions rationnelles approchées d'un nombre irrationnel ou transcendant, nous ont permis de préciser des résultats obtenus par nous au sujet de ces derniers nombres et d'en obtenir de nouveaux; nous exposons ces recherches dans le présent Mémoire (§ II et suivants).

Étant donnée une fonction entière $f(x) = \sum_0^\infty u_m = \sum_0^\infty a_m x^m$ quelconque, en s'aidant d'un théorème de M. Hadamard, on peut toujours déterminer une fonction φ_m de m croissant constamment avec m, et telle que $f(x)$ renferme une infinité de coefficients a_m satisfaisant à $\left|\frac{a_m}{a_{m+l}}\right| > \varphi_{m+l}^l$, quel que soit $l > 0$.

Pour les fonctions entières d'ordre non transfini ou d'indice fini, notre classification permet d'arriver directement à cette inégalité en prenant $\varphi_m = (\log_k m)^{\frac{1}{\rho}-\varepsilon_1}$ (ε_1 fini aussi petit qu'on veut pour m assez grand), quand $f(x)$ renferme une infinité de coefficients tels que $|a_m|^{-1} = (\log_k m)^{m\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon\right)}$, les autres ayant leurs modules plus petits que ne l'indique cette égalité.

De là, et de quelques lemmes relatifs aux fonctions $e_k(m)$, nous concluons divers résultats sur l'irrationnalité ou la transcendance des nombres $f\left(\frac{1}{q}\right)$ ou $f\left(\frac{p}{q}\right)$ (p, q entiers, a_n rationnel), principalement quand a_n est positif ou que $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ croît constamment et indéfiniment avec n (a_n réel). Ainsi soit $a_n = \frac{p_n}{q_n}$, et p_n, q_n, $\frac{q_{n+1}}{q_n}$ entiers; quand l'indice $k \geqq 3$ et $p_n \leqq e_k(n)^{\tau n}$ $\left(\tau < \frac{1}{2\rho}\right)$, $f\left(\frac{p}{q}\right)$ n'est pas algébrique; pour les deux formes de a_n ci-dessus, $f\left(\frac{p}{q}\right)$ est transcendant $\left(\frac{p}{q} > 0\right)$. Il y a des extensions aux fonctions entières d'ordre quelconque présentant des lacunes.

Nous étudions ensuite les nombres dérivés des fonctions entières ou quasi-entières de la forme

$$\varphi(x) = F(x) + F_1\left(\frac{1}{x}\right) + F_2\left(\frac{1}{x-a_1}\right) + \ldots + F_{\theta+1}\left(\frac{1}{x-a_\theta}\right),$$

($a_1, \ldots, a_\theta$ rationnels), où $F(x)$, $F_1(x)$, $\ldots$, $F_{\theta+1}(x)$ sont de la forme

$$\sum_0^\infty \frac{p_n}{q_n} x^n$$

$\left[k \geqq 3,\ \frac{q_{n+1}}{q_n} \text{ entier},\ q_n = e_k(n)^{\left(\frac{1}{\rho} - \varepsilon'_n\right)^n},\ 0 \leqq p_n < e_k(n)^{\varepsilon_n n}\right]$, et aussi les nombres dérivés de la somme, du produit, du quotient (fonctions quasi-méromorphes), plus généralement d'une fraction rationnelle à coefficients rationnels de fonctions $\varphi(x)$. Ainsi, quand les $a_1, \ldots, a_\theta$ sont tous négatifs, tout polynome à coefficients rationnels positifs de fonctions $\varphi(x)$, s'il ne se réduit pas à une fraction rationnelle en x, prend pour x rationnel positif une valeur transcendante. Toute fonction rationnelle à coefficients rationnels des fonctions $F(x)$, où x rationnel quelconque, est un nombre, exceptionnellement rationnel, en général transcendant, et qui n'est jamais algébrique. Enfin $F[F_1(x)]$ pour x rationnel > 0 est transcendant si $k \geqq k_1 \geqq 3$ (k_1 indice de F_1).

On obtient des théorèmes analogues, mais souvent bien moins généraux, quand $F(x)$ est d'indice 2 ou 1. Ainsi, soient θ, θ_1, θ_2, θ_3 les quatre fonctions θ de Jacobi (notations du *Cours d'Analyse* lithographié de l'École Polytechnique, de M. Jordan); $\frac{\theta_2(1)}{\theta_3(1)}$, $r^{\frac{1}{4}}\frac{\theta_1(1)}{\theta_3(1)}$, $\frac{\theta''_3(1)}{\theta_3(1)}$, $\frac{\theta'''_3(1)}{\theta_3(1)}$, $\cdots$ sont des irrationnelles (r entier > 1).

Il y a aussi des extensions aux fonctions non entières, avec lacunes, et dont le rayon de convergence est fini.

En terminant, nous définissons les nombres *quasi-rationnels* et les fractions ordinaires ou continues *quasi-périodiques* qui ont des caractères voisins de ceux des nombres rationnels et des fractions ordinaires ou continues périodiques : une fraction ordinaire ou continue quasi-périodique est un nombre transcendant.

La lecture de notre Mémoire exige seulement la connaissance du *Cours d'Analyse* de l'École Polytechnique, d'un passage d'un Mémoire de M. Hadamard indiqué plus loin, de notre Mémoire précité du *Journal de l'École Polytechnique* et de ce qui est nécessaire pour l'intelligence de ce dernier et s'y trouve mentionné.

§ I. — *Sur les fonctions entières d'ordre zéro.*

Considérons la fonction

$$(1)\qquad f(x)=\sum_0^\infty u_m=\sum_0^\infty a_m x^m,$$

dont les coefficients peuvent s'écrire

$$|a_m|=e_k(m)^{-m\tau}.$$

Supposons de plus que, pour une infinité de valeurs de m, dès que $m>\mu$, on puisse écrire

$$(2)\qquad \theta_1 \geqq \tau \geqq \theta \qquad (\theta_1, \theta \text{ donnés fixes}),$$

quel que soit m, la valeur de τ pour les autres étant $>\theta_1$.

Soit τ_1 la valeur de τ correspondant à un de ces coefficients satisfaisant à (2), d'indice m. Considérons, quand m croît, la suite des valeurs τ_1; portons dans un plan où nous prenons deux axes rectangulaires Om, $O\tau_1$, m en abscisse, τ_1 en ordonnée. Nous obtiendrons une suite de points compris entre les droites $\tau_1=\theta$, $\tau_1=\theta_1$. Parmi ces points, quand m croît, nous en prendrons un pour lequel τ_1 a une valeur $\tau'_1 \leqq$ celle de tous les précédents (pour $m=m'$); puis nous prendrons $m>m'$, et, quand m croît, le premier de tous ces points pour lequel $\tau_1=\tau''_1\leqq\tau'_1$, si la chose est possible, et ainsi de suite. Si ceci peut se poursuivre indéfiniment, $\tau'_1, \tau''_1, \ldots$ vont en décroissant indéfiniment (ou ne croissant pas), tout en restant $\geqq\theta$. Cette suite s_1 de quantités possède une limite η_1, c'est-à-dire que, dès que m est assez grand, $\tau_1^{(i)}=\eta_1+\varepsilon$ ($\lim\varepsilon=0$ pour $m=\infty$). Si ceci ne peut se poursuivre indéfiniment pour une certaine valeur m'''_1 de m, $\tau_1=\tau'''_1$, et les valeurs de τ_1 correspondant à $m>m'''_1$ sont $>\tau'''_1$. On peut raisonner alors comme nous venons de le faire sur les quantités τ_1 correspondant à $m>m'''_1$; ou bien on y trouvera une infinité de nombres τ'_2,

τ_2'', ... possédant une limite η_2 au plus égale à tous les nombres τ_1 quand $m > m_1'''$; ou bien on y trouvera une quantité $\tau_2^{(i_1)}$, analogue à τ_1''', et ainsi de suite. Finalement, en continuant, ou bien on trouvera une suite analogue à s_1, ou bien on aura une suite σ de quantités τ_1''', $\tau_2^{(i_2)}$, ... correspondant à des valeurs m_1''', $m_2^{(i_2)}$, ... de m telles que, pour $m > m_2^{(i_2)}$, par exemple, on ait $\tau_1 > \tau_2^{(i_2)}$. Cette suite σ est formée de quantités croissantes $\leqq \theta_1$; elle doit donc tendre vers une limite η', c'est-à-dire que, dès que m est assez grand, pour une infinité de valeurs de τ_1, $\tau_1 = \eta' - \varepsilon'$ ($\lim \varepsilon' = 0$ pour $m = \infty$).

Par conséquent, ceci s'appliquant aussi bien aux fonctions d'ordre fini ou infini, mais non transfini [1] :

Lemme. — *Soit une fonction entière*

$$(1) \qquad f(x) = \sum_0^\infty u_m = \sum_0^\infty a_m x^m,$$

qui possède une infinité de coefficients a_m tels que

$$|a_m| = e_k(m)^{-m\tau}$$

(k entier positif, nul ou négatif), avec

$$\theta_1 \geqq \tau \geqq \theta \qquad (\theta, \theta_1 \textit{ donnés et fixes}),$$

la valeur de τ pour les autres coefficients étant plus grande que θ_1. Il existe un nombre ρ tel que $\theta_1 \geqq \frac{1}{\rho} \geqq \theta$, et que $f(x)$ renferme une infinité de coefficients a_m satisfaisant à

$$(3) \qquad |a_m| = e_k(m)^{-m\left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon\right)}$$

($\lim \varepsilon = 0$ *pour* $m = \infty$), *les autres ayant une valeur plus petite que ne l'indique cette égalité. Les coefficients satisfaisant à l'égalité* (3) *seront dits* principaux.

---

[1] Si l'on pose $\log_{-k}(m) = e_k(m)$.

Soit $k > 1$. Nous avons vu dans un Mémoire antérieur [1] que l'on avait alors

$$(4) \qquad |f(x)| \leqq r^{(1+\varepsilon_1)\log_k r}$$

$(r = |x|)$, dès que $r \geqq \xi$, ξ fini, et que, pour une infinité de valeurs de $|x|$, $|f(x)| \geqq r^{(1-\varepsilon_2)\log_k r}$. Mais ce résultat ne fournit aucune indication sur le caractère spécial que donne à $f(x)$ le nombre ρ parmi les fonctions d'ordre zéro satisfaisant aux conditions du lemme précédent.

Il nous suffira, pour ce qui suit, d'établir à cet égard la propriété suivante :

Théorème. — *Soit une fonction entière*

$$(1) \qquad f(x) = \sum_0^\infty a_m x^m,$$

où, pour une infinité de valeurs m_1 de m,

$$|a_{m_1}| = e_k(m_1)^{-m_1\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon\right)} \qquad (k > 1),$$

les autres coefficients a_m ayant un module plus petit que ne l'indique cette égalité.

Prenons $|x| = r_1$ [2]

$$\log r_1 = \left(\frac{1}{\rho} - \varepsilon\right) e_{k-1}(m_1)\left[e_{k-2}(m_1)\ldots e_1(m_1)m_1 + 1\right].$$

On a

$$|f(x)| = (1+\varepsilon')e_k(m_1)^{\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon_1\right)e_{k-2}(m_1)\ldots e_1(m_1)m_1^2}.$$

Pour une valeur quelconque de $|x| = r$ déterminons m_2 par

$$\log r = \left(\frac{1}{\rho} - \varepsilon''\right) e_{k-1}(m_2)\left[e_{k-2}(m_2)\ldots e_1(m_2)\, m_2 + 1\right]$$

---

[1] *Comptes rendus*, p. 407, prop. V et VI, 17 août 1903, et *Journal de l'École Polytechnique*, 1904 et 1905, p. 43.

[2] Pour $k = 1$, la propriété correspondant à ce théorème est établie dans notre Mémoire précité. Nous supposons donc $k > 1$.

(ε'' *fini, mais aussi petit qu'on veut*); *on a*

$$|f(x)| \leqq (1 + \varepsilon''') e_k(m_2)^{\left[\frac{1}{\rho} + \varepsilon^{(\mathrm{IV})}\right] e_{k-2}(m_2) \ldots e_1(m_2) m_2^2}.$$

En effet, on a, pour $r = |x|$,

$$(5) \qquad |u_m| = \frac{r^m}{e_k(m)^{\left(\frac{1}{\rho} - \varepsilon\right) m}},$$

$$(6) \qquad \log |u_m| = m \log r - \left(\frac{1}{\rho} - \varepsilon\right) m \, e_{k-1}(m).$$

Pour une valeur de r, m étant entier ou non, l'expression du deuxième membre de (6), où on laisse ε fixe, est maxima (elle comporte évidemment un maximum et non un minimum) quand

$$(7) \qquad \log r - \left(\frac{1}{\rho} - \varepsilon\right) e_{k-1}(m) [e_{k-2}(m) \ldots e_1(m) m + 1] = 0.$$

Donnons à m une valeur m_1 assez grande, et telle que $|a_m|$ soit coefficient principal, et à ε la valeur correspondante ε_1; la formule ci-dessus nous détermine une valeur r_1 de r. On a

$$(8) \qquad \left\{\begin{aligned} \log r_1 \quad &= \left(\frac{1}{\rho} - \varepsilon_1\right) e_{k-1}(m_1) [e_{k-2}(m_1) \ldots m_1 + 1], \\ \log |u_{m_1}| &= \left(\frac{1}{\rho} - \varepsilon_1\right) e_{k-1}(m_1) [e_{k-2}(m_1) \ldots m_1^2 + m_1] \\ &\qquad\qquad - \left(\frac{1}{\rho} - \varepsilon_1\right) m_1 \, e_{k-1}(m_1), \\ \log |u_{m_1}| &= \left(\frac{1}{\rho} - \varepsilon_1\right) e_{k-1}(m_1) e_{k-2}(m_1) \ldots e_1(m_1) m_1^2. \end{aligned}\right.$$

Soit u_{m_1+i} (i positif ou négatif $\neq 0$) un autre terme de la série

$$|u_{m_1+i}| \leqq \frac{r^{m_1+i}}{e_k(m_1+i)^{\left(\frac{1}{\rho} - \varepsilon'\right)(m_1+i)}};$$

dès que $m_1 + i$ est assez grand, $|\varepsilon'| < \varepsilon_2$,

$$\log |u_{m_1+i}| \leqq (m_1 + i) \log r - \left(\frac{1}{\rho} - \varepsilon_2\right) (m_1 + i) e_{k-1}(m_1 + i).$$

Lorsque r a la valeur r_1 [formule (7)],

$$\log\left|\frac{u_{m_1+i}}{u_{m_1}}\right| \leqq (m_1+i)\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon_1\right)e_{k-1}(m_1)[e_{k-2}(m_1)\ldots m_1+1]$$
$$-\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon_2\right)(m_1+i)e_{k-1}(m_1+i)$$
$$-\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon_1\right)e_{k-1}(m_1)e_{k-2}(m_1)\ldots e_1(m_1)m_1^2,$$

$$\frac{\log\left|\dfrac{u_{m_1+i}}{u_{m_1}}\right|}{\dfrac{1}{\rho}-\varepsilon_1} \leqq i\,e_{k-1}(m_1)e_{k-2}(m_1)\ldots e_1(m_1)m_1+(m_1+i)e_{k-1}(m_1)$$
$$-(1-\varepsilon_3)(m_1+i)e_{k-1}(m_1+i)=\mathrm{N}_i$$

(ε_3 fixe).

Considérons la valeur de N_i *quand i est entier ou non.*

Soit $i>0$:

$$\mathrm{N}_i \leqq e_{k-1}(m_1)\ldots e_1(m_1)m_1\left(i+\frac{i}{m_1}+1\right)$$
$$-(1-\varepsilon_3)(m_1+i)e_{k-1}(m_1+i).$$

Si $k=2$:

$$\mathrm{N}_i = e^{m_1}m_1\left(i+\frac{i}{m_1}+1\right)-(1-\varepsilon_3)(m_1+i)e^{m_1+i}$$
$$=e^{m_1}[m_1 i+i+m_1 \quad -(1-\varepsilon_3)(m_1+i)e^i].$$

Or

$$\mathrm{N}_i+\lambda e^{m_1+i}=e^{m_1}[m_1 i+i+m_1-(1-\varepsilon_3)(m_1+i)e^i+\lambda e^i].$$

La dérivée de la parenthèse par rapport à i est

$$m_1+1-(1-\varepsilon_3)e^i-(1-\varepsilon_3)(m_1+i)e^i+\lambda e^i<0,$$

dès que $\lambda=0,1$, $i\geqq\frac{1}{2}$.

La parenthèse est alors au plus égale à

$$\tfrac{3}{2}m_1+\tfrac{1}{2}-(1-\varepsilon_3)(m_1+\tfrac{1}{2})e^{\frac{1}{2}}+\lambda e^{\frac{1}{2}}<0,$$

car $\sqrt{e}>1,62$, et

$$\mathrm{N}_i<-0,1\,e^{m_1+i}.$$

En général, quand $k > 2$,

$$N_i \leqq e_{k-1}(m_1)^{1+\varepsilon'_3}\left(i + \frac{i}{m_1} + 1\right) - (1 - \varepsilon_3)(m_1 + i)\, e_{k-1}(m_1 + i),$$

où ε'_3 ne dépend que de m_1 ($\lim \varepsilon'_3 = 0$ pour $m_1 = \infty$),

$$e_{k-1}(m_1 + i) \geqq e_{k-1}(m_1)^{1,2} \quad (^1),$$

dès que $i \geqq \frac{1}{2}$ et $k \geqq 3$;

$$N_i + \lambda\, e_{k-1}(m_1 + i) \leqq e_{k-1}(m_1)^{1+\varepsilon'_3}\left(i + \frac{i}{m_1} + 1\right)$$
$$- [1 - \varepsilon_3)(m_1 + i) - \lambda]\, e_{k-1}(m_1 + i) < 0,$$
$$N_i < -\lambda\, e_{k-1}(m_1 + i) \qquad (i \geqq \tfrac{1}{2}).$$

Finalement, quel que soit $k > 1$, pour $i \geqq \frac{1}{2}$,

$$N_i < -\,0,1\, e_{k-1}(m_1 + i),$$
$$e^{\left(\frac{1}{\rho} - \varepsilon_1\right) N_i} = \left|\frac{u_{m_1+i}}{u_{m_1}}\right| < \frac{1}{e^{\lambda'(i+m_1)}},$$

λ' fini positif, quand i au moins égal à $\frac{1}{2}$, entier ou non;

$$\sum_{m_1+1}^{\infty} |u_m| < |u_{m_1}| \frac{1}{e^{\lambda'(m_1+1)}}\left(1 + \frac{1}{e^{\lambda'}} + \frac{1}{e^{2\lambda'}} + \ldots\right)$$
$$< |u_{m_1}| \frac{1}{e^{\lambda'(m_1+1)}\left(1 - \frac{1}{e^{\lambda'}}\right)} = |u_{m_1}| \frac{1}{e^{\lambda' m_1}(e^{\lambda'} - 1)} < |u_{m_1}|\, \varepsilon_4$$

(ε_4 aussi petit qu'on veut quand m_1 assez grand).

Soit maintenant i négatif et $= -\,i_1$ et $k > 1$.

$$N_i < e_{k-1}(m_1)\,[i\, e_{k-2}(m_1) \ldots m_1 + m_1 + i]$$
$$< e_{k-1}(m_1)(-\,m_1 i_1 + m_1 - i_1) < -\,e_{k-1}(m_1) \qquad \text{si} \qquad i_1 \geqq 1;$$

$$\left|\frac{u_{m_1+i}}{u_{m_1}}\right| \leqq e^{-\lambda'' e_{k-1}(m_1)},$$

λ'' fini positif.

---

(1) Il suffit

$$e_{k-2}(m_1 + i) \geqq 1,2\, e_{k-2}(m_1),$$
$$e_{k-3}(m_1 + i) \geqq \log 1,2 + e_{k-2}(m_1),$$

ce qui a lieu.

La somme des modules des m_1 premiers termes (à part un nombre fini) est

$$|u_{m_1}|\varepsilon_5,$$

où ε_5 est aussi petit qu'on veut.

Nous avons négligé, dans cette évaluation, la somme des modules d'un nombre fini de termes, somme plus petite que

$$A r_1^{\mu_1} \quad (A,\ \mu_1 \text{ finis}),$$

dont le logarithme est plus petit que $\log A + \mu_1 \log r_1$, terme aussi petit qu'on veut par rapport à $\log|u_{m_1}|$ [formule (8)] quand m_1 assez grand.

Finalement, le module de $|u_{m_1}|$ est aussi grand qu'on veut par rapport à la somme des modules des autres termes.

Nous avons ainsi établi la première moitié de notre théorème :

Il existe une infinité de valeurs entières m_1 de m pour lesquelles le module de $f(x)$ est

$$|f(x)| = (1+\varepsilon'_6)|u_{m_1}| = (1+\varepsilon')e_k(m_1)^{\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon_1\right)e_{k-2}(m_1)\dots e_1(m_1)m_1^2},$$

quand

$$|x| = r = e_k(m_1)^{\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon_1\right)[e_{k-2}(m_1)\dots e_1(m_1)m_1+1]},$$

a_{m_1} étant alors un coefficient principal.

Passons à la seconde moitié.

Au lieu d'opérer en donnant dans (7) à r la valeur qui correspond à $m = m_1$, nous pouvons nous donner, *a priori*, r et considérer la série

$$\sum U_m = \sum \frac{r^m}{e_k(m)^{\frac{m}{\rho}}};$$

r étant donné, si nous cherchons le maximum de $\dfrac{r^m}{e_k(m)^{\frac{m}{\rho}}}$, nous sommes conduit à (7), où $\varepsilon = 0$, et nous savons que, si m_2 est la racine correspondante [(7) n'en ayant évidemment qu'une],

$$\log U_m \leqq \frac{1}{\rho} e_{k-1}(m_2)\ldots e_1(m_2) m_2^2 = \log V.$$

Pour la même valeur de r, formons

$$\log\left|\frac{U_{m_2+i}}{V}\right| \qquad (m_2 + i \text{ entier}).$$

$$\begin{aligned}\rho \log\left|\frac{U_{m_2+i}}{V}\right| = {} & (m_2+i)e_{k-1}(m_2)[e_{k-2}(m_2)\ldots m_2+1] \\ & -(m_2+i)e_{k-1}(m_2+i) \\ & - e_{k-1}(m_2)\ldots e_1(m_2)m_2^2 = N'_i \\ = {} & i\, e_{k-1}(m_2)\ldots e_1(m_2)m_2 \\ & +(m_2+i)e_{k-1}(m_2) - (m_2+i)e_{k-1}(m_2+i).\end{aligned}$$

$m_2 + i$ est entier; si $i = 0$, $U_{m_2+i} = V$; soit $i \neq 0$: quand $|i| \geqq 1$, tous nos raisonnements faits sur N_i s'appliquent à N'_i et l'on est conduit aux mêmes limites supérieures de N'_i; le seul cas où il est douteux que des inégalités de même nature aient lieu est celui où $|i| < 1$, c'est-à-dire celui qui correspond aux termes $U_{E(m_2)}$, $U_{E(m_2)+1}$ en supposant m_2 non entier.

La somme des autres termes de ΣU_m d'après ce qui précède est $\leqq \varepsilon_6 V$. Pour montrer que $\Sigma U_m \leqq (1+\varepsilon_7)V$, il reste à faire voir que

$$U_{E(m_2)} + U_{E(m_2)+1} \leqq (1+\varepsilon_8)V.$$

Soient

$$E(m_2) = m_2 - i_1, \qquad E(m_2)+1 = m_2 + i_2,$$

$$i_2 + i_1 = 1, \qquad i_2 \quad \text{ou} \quad i_1 \geqq \frac{1}{2}.$$

Il s'agit de prouver que, si

$$X_1 = \frac{U_{E(m_2)}}{V}, \qquad X_2 = \frac{U_{E(m_2)+1}}{V},$$

$$X_1 + X_2 \leqq 1 + \varepsilon_8.$$

Quand $k = 2$,

$$N'_i = i e^{m_2} m_2 - (m_2 + i) e^{m_2+i} + (m_2 + i) e^{m_2},$$

$$N'_i e^{-m_2} = i m_2 + m_2 + i - (m_2 + i) e^i \leqq i m_2 + m_2 + i - (m_2 + i)(1 + i) \leqq - i^2,$$

car $e^i > 1 + i$, i positif ou négatif;

$$N'_i \leqq - i^2 e^{m_2}.$$

Les deux valeurs X_1, X_2 sont au plus égales à

$$e^{-\frac{i_2^2}{\rho} e^{m_2}} = a^{-i_2^2}, \qquad e^{-\frac{i_1^2}{\rho} e^{m_2}} = a^{-i_1^2},$$

où a est aussi grand qu'on veut. Leur somme est

$$S = a^{-i_1^2} + a^{-i_2^2};$$

$|i_1|$ ou $|i_2|$ est $\geqq \frac{1}{2}$, et l'une des quantités $a^{-i_1^2}$ ou $a^{-i_2^2}$ est aussi petite qu'on veut pour m_2 assez grand; par suite, on a bien $S \leqq 1 + \varepsilon_8$.

Quand $k > 2$, on a pour $i_2 \geqq \frac{1}{2}$,

$$\log \left| \frac{U_{m_2+i_2}}{V} \right| < - m_2,$$

d'après ce qu'on a vu pour N_i.

D'autre part, pour i négatif $= - i_1$,

$$N'_i < e_{k-1}(m_2)[i e_{k-2}(m_2) \ldots m_2 + m_2 + i] < e_{k-1}(m_2)(- i_1 m_2^2 + m_2 - i_1) < - e_{k-1}(m_2),$$

si

$$|i_1| \geqq \frac{1}{2};$$

par suite, quand $k \geqq 3$, l'un des rapports $\frac{U_{E(m_2)}}{V}$, $\frac{U_{E(m_2)+1}}{V}$ est toujours aussi petit qu'on veut pour m_2 assez grand, et leur somme est bien encore $\leqq 1 + \varepsilon_8$.

Par conséquent, ΣU_m *est bien* $\leqq V(1+\varepsilon_7)$.

Étant donné alors $f(x)$, où $|a_m|^{-1} \geqq e_k(m)^{\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon\right)m}$, on peut choisir une quantité ε'' finie aussi petite qu'on veut et telle que, à partir d'une certaine valeur de m, $|a_m|^{-1} \geqq e_k(m)^{\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon''\right)m}$. Le module de $f(x)$ pour $|x|=r$ est $\leqq (1+\varepsilon_1''')\sum \frac{r^m}{e_k(m)^{\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon''\right)m}}$. Posant $\frac{1}{\rho}-\varepsilon''=\frac{1}{\rho_1}$, et appliquant à la série du deuxième membre de cette inégalité le résultat obtenu pour ΣU_m, on arrive à la seconde moitié du théorème.

C. Q. F. D.

Remarque. — Il suit de là que le nombre ρ est bien pour la fonction $f(x)$ un nombre caractéristique. Si

$$E(x, k, \rho) = \sum \frac{x^m}{e_k(m)^{\frac{m}{\rho}}},$$

on a, quel que soit $|x|=r$, M_r étant le maximum de $|f(x)|$ pour

$$|x|=r,$$

$$M_r \leqq E(r, k, \rho+\varepsilon), \tag{9}$$

et, pour une infinité de valeurs de r déterminées comme l'indique l'énoncé

$$M_r \geqq E(r, k, \rho-\varepsilon). \tag{10}$$

On pourra dire alors que $f(x)$ *est d'indice* k *et d'ordre* $(0, k, \rho)$ [1].

Les inégalités (9) et (10) sont encore vraies pour $k=1$ (Mémoire précité, p. 34 et 36).

---

[1] Les extensions aux fonctions quasi-entières et aux fonctions monodromes sont évidentes.

§ II.

Soit

$$f(x) = \sum_0^\infty u_m = \sum_0^\infty a_m x^m$$

une fonction entière quelconque; M. Hadamard a montré ([1]) que l'on pouvait toujours déterminer une fonction φ_m de m telle que $L\varphi_m + \frac{K}{m}$ (K entier arbitraire), et, *a fortiori*, $L\varphi_m$ ou φ_m fût constamment croissant avec m, dès que m dépasse une certaine limite, et telle encore que

$$(\alpha) \qquad |a_m|^{-1} \geqq \varphi_m^m,$$

l'égalité $|a_m|^{-1} = \varphi_m^m$ ayant lieu pour une infinité de valeurs de m. Soit m_1 une de ces valeurs :

$$\left|\frac{a_{m_1}}{a_{m_1+l}}\right| = \frac{\varphi_{m_1}^{-m_1}}{|a_{m_1+l}|} \geqq \frac{\varphi_{m_1+l}^{m_1+l}}{\varphi_{m_1}^{m_1}} > \varphi_{m_1+l}^{l}.$$

Nous pouvons ainsi énoncer ce théorème, corollaire immédiat du théorème précité de M. Hadamard :

Théorème I. — *Soit*

$$(11) \qquad f(x) = \sum_0^\infty u_m = \sum_0^\infty a_m x^m$$

une fonction entière absolument quelconque : on peut toujours déterminer une fonction φ_m croissant constamment avec m, et telle que (1) *renferme une infinité de coefficients a_m satisfaisant à l'inégalité*

$$(12) \qquad \left|\frac{a_m}{a_{m+l}}\right| > \varphi_{m+l}^{l},$$

quel que soit $l > 0$.

([1]) *Journal de mathématiques*, 1893.

On peut indiquer une variante de l'inégalité (12) qui peut être utile : nous aurons

$$\varphi_{m+l}^{l} \geqq \varphi_{m+1}\varphi_{m+2}\ldots\varphi_{m+l}.$$

Donc, *a fortiori*, on aura

$$(13) \qquad \left|\frac{a_m}{a_{m+l}}\right| > \varphi_{m+1}\varphi_{m+2}\ldots\varphi_{m+l}$$

pour une infinité de valeurs de m.

Il est évident que ces inégalités (12) et (13) se conserveront pour une fonction ψ_m croissante, mais telle que $\psi_m < \varphi_m$.

Dans le cas des fonctions entières d'ordre non transfini ou d'indice fini, un de nos Mémoires précédents [1] permet une détermination simple et directe d'une pareille fonction ψ_m, sans qu'il soit nécessaire de s'appuyer sur l'inégalité (α) de M. Hadamard.

En effet :

1° *Ordre* > 0 *et non transfini.* — Prenons une fonction d'ordre (k, ρ), en nous bornant au cas où ρ est fini et $\neq 0$; il y a une infinité de coefficients a_m tels que

$$(14) \qquad |a_m| = (\log_k m)^{-m\left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon\right)} \qquad (\text{où } \varepsilon \text{ dépend de } m),$$

les autres ayant un module plus petit que ne l'indique cette formule.

Prenons ces coefficients a_m; si, pour une infinité d'entre eux,

$$(15) \qquad \left|\frac{a_m}{a_{m+i}}\right| \geqq [\log_k(m+i)]^{\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon_1\right)i},$$

quel que soit i (ε_1 fini, positif, aussi petit qu'on veut dès que m dépasse une certaine limite, mais indépendant de m), on peut prendre dans (12), mais non dans (α),

$$\varphi_n = \psi_n = (\log_k n)^{\frac{1}{\rho}-\varepsilon_1}.$$

Sinon, on a, pour une infinité de valeurs de m, par suite pour une

---

(1) *Comptes rendus*, 1er sem., p. 348; 2e sem. 1903, p. 407 et 478; *Journal de l'École Polytechnique*, 1904.

d'entre elles, des inégalités de la forme

$$(16) \qquad \left|\frac{a_m}{a_{m+i_j}}\right| < [\log_k(m+i_j)]^{\tau i_j},$$

où $\frac{1}{\rho} - \tau$ est fini et positif (τ fixe).

Ceci ne peut avoir lieu pour une infinité de valeurs de i_j, i_1, i_2, ..., sans quoi dans la série

$$\Sigma = |u_m| + |u_{m+i_1}| + |u_{m+i_2}| + \ldots,$$

$$|u_{m+i_j}| > |u_m| \frac{|x|^{i_j}}{[\log_k(m+i_j)]^{\tau i_j}},$$

et

$$\Sigma > |u_m| \left\{ 1 + \frac{|x|^{i_1}}{[\log_k(m+i_1)]^{\tau i_1}} + \frac{|x|^{i_2}}{[\log_k(m+i_2)]^{\tau i_2}} + \ldots \right\}.$$

Le second membre est une série entière d'ordre $\left(k, \frac{1}{\tau}\right) > (k, \rho)$, alors que Σ est forcément d'ordre $\leqq (k, \rho)$; résultat absurde. Donc l'inégalité (16) n'a lieu que pour un nombre fini de valeurs i_j. Soit i' la plus grande de ces valeurs. On a

$$\left|\frac{a_m}{a_{m+i'}}\right| < [\log_k(m+i')]^{\tau i'},$$

et, quel que soit l,

$$\left|\frac{a_m}{a_{m+i'+l}}\right| \geqq [\log_k(m+i'+l)]^{\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon_1\right)(i'+l)},$$

$$|a_{m+i'+l}| < \frac{|a_{m+i'}|\,[\log_k(m+i')]^{\tau i'}}{[\log_k(m+i'+l)]^{\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon_1\right)(i'+l)}},$$

$$\left|\frac{a_{m+i'}}{a_{m+i'+l}}\right| > [\log_k(m+i'+l)]^{\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon_1\right)l},$$

quel que soit l; en sorte que l'inégalité (15) a lieu pour $a_{m+i'}$: il y a alors une infinité de valeurs de $m+i'$ satisfaisant à cette inégalité, *et l'on peut toujours prendre*

$$\psi_n = (\log_k n)^{\frac{1}{\rho}-\varepsilon_1}.$$

2° *Ordre non nul, indice non infini.* — Les mêmes raisonnements subsistent avec des valeurs négatives de k, grâce à la notation

$$\log_{-k'} x = e_{k'}(x),$$

au théorème du paragraphe I, page 280, et à la remarque de la page 287. C. Q. F. D.

On peut d'ailleurs toujours supposer que $a_{m+i'}$ est *un coefficient principal, c'est-à-dire satisfaisant à* (14). En effet, sinon, soit

$$|a_{m+i'}| = [\log_k(m+i')]^{-\tau_2(m+i')},$$

avec $\tau_2 - \frac{1}{\rho}$ fini et positif. D'après (14) et (16),

$$(\log_k m)^{-m\left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon\right)} < [\log_k(m+i')]^{\tau i' - \tau_2(m+i')},$$

avec $\tau < \frac{1}{\rho} < \tau_2$, et, *a fortiori*,

$$(\log_k m)^{\left(\tau_2 - \frac{1}{\rho} - \varepsilon\right)m} < 1,$$

ce qui est absurde.

Nous pouvons ainsi énoncer le corollaire suivant :

Corollaire I. — *Soit*

$$(11) \qquad f(x) = \sum_0^\infty u_m = \sum_0^\infty a_m x^m$$

une fonction entière absolument quelconque d'ordre (k, ρ) *non transfini ou d'ordre* $(0, -k, \rho)$ *et d'indice* $-k > 0$ *fini. Il y a une infinité de coefficients* a_m *principaux, c'est-à-dire satisfaisant à*

$$|a_m|^{-1} = (\log_k m)^{m\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon\right)},$$

et tels que

$$(12\ bis) \qquad \left|\frac{a_m}{a_{m+l}}\right| > \log_k(m+l)^{\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon_1\right)l},$$

quel que soit $l > 0$ (ε_1 *fini, positif, aussi petit qu'on veut dès que* m *est supérieur à une certaine limite*).

Ceci va nous permettre de déterminer une limite supérieure du module E_m de l'erreur commise quand on s'arrête, dans le calcul de $f(x)$, au terme d'indice m jouissant de la propriété (12) ou (12 *bis*). On a

$$E_m \leqq T_m = |a_{m+1} x^{m+1}| + |a_{m+2} x^{m+2}| + \ldots,$$

$$T_m \leqq |a_m x^m| \left(\left| \frac{a_{m+1} x}{a_m} \right| + \left| \frac{a_{m+2} x^2}{a_m} \right| + \ldots \right),$$

$$\left| \frac{a_{m+1}}{a_m} \right| < \varphi_{m+1}^{-1}, \qquad \left| \frac{a_{m+2}}{a_m} \right| < \varphi_{m+2}^{-2} < \varphi_{m+1}^{-2}, \qquad \ldots;$$

$$T_m < |a_m x^m| \left(\frac{|x|}{\varphi_{m+1}} + \frac{|x|^2}{\varphi_{m+1}^2} + \ldots \right),$$

$$T_m < |a_m x^m| \frac{|x|}{\varphi_{m+1}} \frac{1}{1 - \frac{|x|}{\varphi_{m+1}}},$$

et, si $|x| \leqq \xi$, m assez grand par rapport à ξ,

$$E_m \leqq T_m < 2 |a_m x_m| \frac{|x|}{\varphi_{m+1}} \quad (^1).$$

Quand m est assez grand, l'erreur a son module aussi petit qu'on veut par rapport à celui du dernier des termes non négligés. Nous obtenons ainsi ce corollaire :

Corollaire II. — *Tout étant posé comme au théorème ci-dessus, et a_m étant un coefficient satisfaisant à* (12), *on a*

$$\left| f(x) - \sum_0^m u_m \right| < |u_m| \frac{|x|}{\varphi_{m+1} - |x|},$$

---

(1) On voit de suite que cette inégalité subsiste quand le premier terme $\neq 0$ après u_m a son indice $> m+1$. Elle est, en effet, remplacée par

$$T_m < 2 |a_m x^m| \left| \frac{x}{\varphi_{m+\mu_1}} \right|^{\mu_1},$$

si $a_{m+1} = a_{m+2} = \ldots = a_{m+\mu_1-1} = 0$, $a_{m+\mu_1} \neq 0$, et

$$\left| \frac{x}{\varphi_{m+\mu_1}} \right|^{\mu_1} \leqq \left| \frac{x}{\varphi_{m+1}} \right|^{\mu_1} \leqq \frac{|x|}{\varphi_{m+1}}.$$

et même, si m est assez grand par rapport à $|x|$,

$$\left| f(x) - \sum_0^m u_m \right| < 2|u_m| \frac{|x|}{\varphi_{m+1}}.$$

Prenons une fonction $f(x)$ d'ordre (k, ρ) non transfini ou d'indice fini. D'après le corollaire I, on peut trouver une infinité de coefficients principaux tels que

$$\left| \frac{a_m}{a_{m+l}} \right| > \log_k(m+l)^{\left(\frac{1}{\rho} - \varepsilon_1\right)l}$$

(k négatif $= -i$ pour les fonctions d'ordre 0). Appliquant le raisonnement qui nous a conduit au corollaire II, on conclut :

Corollaire III. — *Tout étant posé comme au corollaire I, on a, pour une infinité de valeurs de m* [a_m *coefficient principal satisfaisant à* (12 *bis*)]

$$\left| f(x) - \sum_0^m u_m \right| < 2|u_m| \frac{|x|}{\log_k(m+1)^{\frac{1}{\rho} - \varepsilon_1}}.$$

Dans certains cas un peu plus particuliers on peut écrire une inégalité analogue pour toute valeur de m. En effet, supposons que $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ soit constamment décroissant, quel que soit n, et tende vers 0 quand n croît indéfiniment. On aura pour toute valeur de x, et pour m assez grand, $\geqq \mu(x)$, mais quelconque,

$$\begin{aligned} T_m^{(1)} &= |a_{m+2}x^{m+2}| + |a_{m+3}x^{m+3}| + \ldots \\ &\leqq |a_{m+2}x^{m+2}| \left(1 + \left| \frac{a_{m+3}}{a_{m+2}} x \right| + \ldots \right) \\ &\leqq |a_{m+2}x^{m+2}| (1 + k|x| + k^2|x|^2 + \ldots), \end{aligned}$$

où

$$\left| \frac{a_{m+i+1}}{a_{m+i}} \right| \leqq k \qquad (i \geqq 2),$$

k étant aussi petit qu'on veut dès que m est assez grand;

$$T_m^{(1)} \leqq |u_{m+2}| \frac{1}{1 - k|x|},$$

$$\begin{aligned} u_{m+1}| - T_m^{(1)} &\leqq |u_{m+1} + u_{m+2} + \ldots| \\ &\leqq |u_{m+1}| + T_m^{(1)} \leqq |u_{m+1}| \left(1 + \left| \frac{a_{m+2}}{a_{m+1}} \right| \frac{|x|}{1 - k|x|} \right). \end{aligned}$$

$\left|f(x)-\sum\limits_{0}^{m} u_m\right|$ diffère donc de $|u_{m+1}|$ d'aussi peu qu'on veut, et

$$|u_{m+1}|(1-\varepsilon) \leqq \left|f(x)-\sum_{0}^{m} u_m\right| \leqq |u_{m+1}|(1+\varepsilon) \leqq \frac{2|u_m||x|}{\chi_{m+1}},$$

avec

$$\chi_{m+1} = \left|\frac{a_m}{a_{m+1}}\right|.$$

Si certains des coefficients a_n étaient nuls, le raisonnement subsisterait à condition de supposer que le rapport

$$\left|\frac{u_{n+\nu}}{u_n}\right| \qquad (a_n \neq 0,\ a_{n+\nu} \neq 0,\ a_{n+1} = \ldots = a_{n+\nu-1} = 0)$$

fût constamment décroissant et tendît vers zéro avec $\frac{1}{n}$. Dans la dernière inégalité, il faudrait remplacer u_{m+1} par $u_{m+\mu_1}$

$$(a_{m+1} = \ldots = a_{m+\mu_1-1} = 0,\ a_m \neq 0,\ a_{m+\mu_1} \neq 0).$$

Corollaire IV. — *Si $f(x)$ est une fonction entière telle que le module du rapport d'un terme $\neq 0$ au suivant croisse constamment et indéfiniment avec son indice n, pour toute valeur de x donnée, au moins à partir d'une certaine valeur de l'indice, on a, dès que m dépasse une certaine limite,*

$$|u_{m+\mu_1}|(1-\varepsilon) \leqq \left|f(x)-\sum_{0}^{m} u_m\right| \leqq |u_{m+\mu_1}|(1+\varepsilon),$$

ε tendant vers 0 avec $\frac{1}{m}$, $u_{m+\mu_1}$ étant le premier des termes d'indice $> m$ qui soit $\neq 0$.

Nous allons encore établir deux lemmes préliminaires sur les fonctions $e_k(x)$.

A quelles conditions a-t-on

$$e_k(n+1)^{(n+1)\left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon\right)} > e_k(n)^{n\tau\alpha}, \qquad \alpha \geqq 1, \qquad \tau \text{ fixe} > \frac{1}{\rho},$$

ou

$$e_k(n+1)^{\left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon\right)} > e_k(n)^{n\tau\alpha}?$$

Premier cas. — Il faut

$$(n+1)\left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon\right)e_{k-1}(n+1) > n\tau\alpha\, e_{k-1}(n).$$

Pour $k=1$, ceci est impossible; donc $k>1$. De plus

$$\log\left[(n+1)\left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon\right)\right] + e_{k-2}(n+1) > \log n\tau\alpha + e_{k-2}(n).$$

Quand $k=2$, il faut

$$\frac{(n+1)\left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon\right)}{n\tau\alpha}e > 1,$$

$$\left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon\right)e > \tau\alpha.$$

Si $\tau - \frac{1}{\rho}$ est assez petit, on pourra prendre $\alpha = 1$ ou 2, ou encore $\alpha = 2,1$ par exemple.

Quand $k \geqq 3$, il faut

$$\left[e^{e_{k-3}(n+1)-e_{k-3}(n)} - 1\right] e^{e_{k-3}(n)} \geqq \log n\tau\alpha - \log(n+1)\left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon\right),$$

ce qui a toujours lieu pour n assez grand. Donc :

Lemme I. — *Soient τ et ρ deux nombres fixes, avec $\tau - \frac{1}{\rho} > 0$, α un nombre $\geqq 1$ On a :*

1° *Si $\tau - \frac{1}{\rho}$ est assez petit,*

$$e_2(n+1)^{(n+1)\left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon\right)} > e_2(n)^{n\tau\alpha},$$

pourvu que $\alpha \leqq 2,1$;

2° *Pour $k \geqq 3$,*

$$e_k(n+1)^{(n+1)\left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon\right)} > e_k(n)^{n\tau\alpha},$$

quel que soit α.

Deuxième cas. — Il faut

$$\left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon\right)e_{k-1}(n+1) > n\tau\alpha\, e_{k-1}(n) \qquad (k>1),$$

$$\log\left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon\right)+e_{k-2}(n+1) > \log n\tau\alpha + e_{k-2}(n) \qquad (k>2),$$

$$\left[e^{e_{k-3}(n+1)-e_{k-3}(n)}-1\right]e^{e_{k-3}(n)} > \log n\tau\alpha - \log\left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon\right),$$

ce qui a lieu, quels que soient τ et α, dès que $k \geqq 3$. Donc :

Lemme II. — *Tout étant posé comme au lemme I, on a pour $k \geqq 3$,*

$$e_k(n+1)^{\frac{1}{\rho}+\varepsilon} > e_k(n)^{n\tau\alpha},$$

quels que soient τ et α, dès que n est assez grand.

§ III. — *Application à la théorie des nombres irrationnels ou transcendants.*

Nous pouvons maintenant passer aux applications de la classification des fonctions entières d'ordre non transfini ou d'indice fini à la théorie des nombres irrationnels ou transcendants.

Nous rappellerons d'abord cette propriété fondamentale, due à J. Liouville (¹) :

Propriété I. — *Soit ξ une quantité quelconque positive, $\frac{P_1}{Q_1}$, $\frac{P_2}{Q_2}$, ..., $\frac{P_n}{Q_n}$, ... des fractions rationnelles réelles ou imaginaires à dénominateur réel, qui tendent vers la limite ξ quand n croît indéfiniment, et dont les dénominateurs croissent indéfiniment, au moins à partir d'un certain indice. ξ ne peut être racine d'une équation algébrique à coefficients entiers de degré $\leqq \alpha$, c'est-à-dire ξ ne*

(¹) *Journal de Liouville* (ou *Journal de Mathématiques*), 1851, p. 137; ou encore Borel, *Leçons sur la théorie des fonctions*, p. 27. Paris, Gauthier-Villars, 1898.

peut être une irrationnelle algébrique de degré $\leqq \alpha$ *que si l'on a, dès que n est assez grand,*

$$\left|\xi - \frac{P_n}{Q_n}\right| > \frac{1}{MQ_n^\alpha},$$

M *étant une quantité finie indépendante de n* (¹).

Considérons maintenant une fonction entière $f(x)$ à coefficients *rationnels et réels*. Nous pourrons toujours écrire

$$a_n = \pm \frac{p_n}{q_n},$$

p_n et q_n étant entiers positifs, premiers ou non entre eux, et q_n étant divisible par $q_{n-1}, q_{n-2}, \ldots, q_0$. *Nous supposerons toutes les fonctions entières à coefficients rationnels que nous considérerons mises sous cette forme.*

Substituons alors à x, dans $f(x)$, une fraction rationnelle réelle $\frac{p}{q}$, et admettons que $f\left(\frac{p}{q}\right)$ soit rationnel et $= \frac{A}{B}$ (A, B entiers premiers entre eux). On aura

$$\frac{A}{B} = \pm \frac{p_0}{q_0} \pm \ldots \pm \frac{p_m}{q_m}\left(\frac{p}{q}\right)^m + R_m = N + R_m,$$

$$A q_m q^m = B q_m q^m \left(\pm \frac{p_0}{q_0} \pm \ldots \pm \frac{p_m}{q_m}\frac{p^m}{q^m}\right) + BR_m q_m q^m.$$

L'expression $|Bq_m q^m R_m|$ devra alors être nulle ou égale à un nombre entier $\geqq 1$.

On a $R_m \neq 0$, soit si tous les coefficients a_n sont positifs à partir d'une certaine valeur de n, soit dans le cas des séries du corollaire IV : plaçons-nous dans ces deux cas [(cas A)].

D'après le théorème I et le corollaire II (ou encore les corollaires I

(¹) Si $\xi = \frac{\alpha' + \beta' i}{\gamma'}$, avec α', β', γ' entiers réels, cette inégalité est vraie pour $\alpha = 1$.

à IV), pour une infinité de valeurs de m,

$$|R_m| < 2\,|u_m|\,\frac{|x|}{\varphi_{m+1}} = 2\,\frac{p_m}{q_m}\,\frac{p^m}{q^m}\,\frac{p}{q\varphi_{m+1}},$$

$$1 \leqq |BR_m q_m q^m| < 2Bp_m\frac{p^{m+1}}{q\varphi_{m+1}}:$$

p étant donné, il y aura impossibilité dès que

$$\frac{p_m p^{m+1}}{\varphi_{m+1}}$$

décroît indéfiniment avec $\frac{1}{m}$ $(p_m \geqq 1)$. Par conséquent :

1° Si $\varphi_m < 2^m$, on ne peut affirmer l'impossibilité que quand $p = 1$, pourvu que p_m soit d'ordre de grandeur $< \varphi_{m+1}$; alors $\varphi_m^{-m} > 2^{-m^2}$: ce sera donc le cas pour toutes les fonctions entières des formes en question, en particulier pour celles d'ordre non transfini ou d'indice fini (corollaire I du théorème I), car on peut prendre pour elles

$$\varphi_m = (\log_k m)^{\frac{1}{\rho}-\varepsilon_1},$$

et si $\varphi_m \geqq 2^m$, l'impossibilité a lieu *a fortiori;*

2° Si $s^m < \varphi_m \leqq (s+1)^m$ (s entier), on ne peut affirmer l'impossibilité que quand $p \leqq s$, pourvu que p_m soit d'ordre de grandeur plus petit que celui de $\frac{\varphi_{m+1}}{p^{m+1}}$. Ce sera, en général, le cas des fonctions entières d'une des formes en question et d'ordre $(0, 1, \rho)$: pour ces fonctions, qui sont d'indice 1, on peut prendre (corollaire I) $\varphi_m = e^{m\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon_1\right)}$, et s sera déterminé par

$$s = \mathrm{E}\left(e^{\frac{1}{\rho}-\varepsilon}\right)$$

(ε positif, petit), puisque ε_1 tend vers 0 quand m croît indéfiniment.

Si $\frac{1}{\rho}$ est infiniment grand (cas des fonctions d'indice $\geqq 2$), on peut affirmer l'impossibilité quel que soit p, pourvu que p_m soit d'ordre de grandeur plus petit que celui de $\frac{\varphi_{m+1}}{p^{m+1}}$. Prenons

$$\varphi_m = e_k(m)^{\frac{1}{\rho}-\varepsilon_1} \qquad (k \geqq 2);$$

il suffira que p_m soit d'ordre plus petit que

$$e_k(m+1)^{\frac{1}{\rho}-\varepsilon_1} e^{-(m+1)\log p} = e_k(m+1)^{\frac{1}{\rho}-\varepsilon_1-\sigma},$$

avec

$$e_k(m+1)^{-\sigma} \;\;= e^{-(m+1)\log p},$$

$$\sigma e_{k-1}(m+1) = (m+1)\log p, \qquad \sigma = \frac{(m+1)\log p}{e_{k-1}(m+1)}.$$

L'impossibilité sera manifeste si $p_m \leqq e_k(m+1)^\tau$, où $\frac{1}{\rho} - \tau > \eta$ (η fini positif), c'est-à-dire que dans ce cas $f\left(\frac{p}{q}\right)$ est toujours irrationnel.

3° Enfin, si $k \geqq 3$, on peut aller plus loin encore : nous savons déjà que, pour les deux formes de séries considérées, $f\left(\frac{p}{q}\right)$ n'est pas rationnel, pourvu que $p_m \leqq e_k(m+1)^\tau$. Je dis que $f\left(\frac{p}{q}\right)$ ne peut être algébrique, quand $p_m \leqq e_k(m)^{\tau m}$.

Considérons une fonction entière *absolument quelconque* d'indice $k \geqq 3$, pour laquelle $p_m \leqq e_k(m)^{\tau m}$, où τ est fixe et $< \frac{1}{\rho}$. Soit

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = \xi = \mathrm{N} + \mathrm{R}_m,$$

où ξ est algébrique, et non rationnel, de degré $\alpha > 1$. On aura forcément $\mathrm{R}_m \neq 0$, puisque N est rationnel et $\xi - \mathrm{N}$ irrationnel. Les signes des coefficients a_i sont donc indifférents, et ceci nous permet néanmoins de prendre pour a_m un coefficient satisfaisant à (12) et d'appliquer le corollaire II, tout en ayant la condition $\mathrm{R}_m \neq 0$.

Ceci posé (propriété I),

$$|\xi - \mathrm{N}| = \left|\xi - \frac{q^m q_m \mathrm{N}}{q^m q_m}\right| \geqq \frac{1}{\mathrm{M}(q^m q_m)^\alpha} \qquad (\mathrm{M} \text{ fini}),$$

$$|\mathrm{R}_m| < 2\,|u_m| \frac{|x|}{\varphi_{m+1}} = 2\frac{p_m}{q_m}\frac{p^m}{q^m}\frac{p}{q\varphi_{m+1}}.$$

Donc

$$2\frac{p_m}{q_m}\frac{p^m}{q^m}\frac{p}{q\varphi_{m+1}} > \frac{1}{\mathrm{M}(q^m q_m)^\alpha}, \qquad \varphi_{m+1} < \frac{2\mathrm{M}}{q} p_m q_m^{\alpha-1} p^{m+1} q^{m(\alpha-1)}.$$

Pour les fonctions d'indice fini, d'après le corollaire I, on peut prendre $\varphi_{m+1} \geqq e_k(m+1)^{\frac{1}{\rho}-\varepsilon_1}$ $(k \geqq 3)$, et il faut (¹)

$$e_k(m+1)^{\frac{1}{\rho}-\varepsilon_1} < \frac{2M}{q} e_k(m)^{\tau m} e_k(m)^{\tau_1 m(\alpha-1)} p^{m+1} q^{m(\alpha-1)} < e_k(m)^{\tau_2 m},$$

où τ_1, τ_2 sont finis, a_m satisfaisant ici à (12 *bis*). D'après le lemme II, cette inégalité est impossible, quel que soit α, et $f\left(\frac{p}{q}\right)$ est transcendant.

$f\left(\frac{p}{q}\right)$ est d'ailleurs ici irrationnel dans les deux cas (A), car

$$p_m \leqq e_k(m)^{\tau m} < e_k(m+1)^{\tau}$$

(lemme II), pour m assez grand.

Nous pouvons alors énoncer ce théorème :

THÉORÈME II. — *Soit une fonction entière d'ordre ou d'indice absolument quelconque, même transfini ou infini,*

$$f(x) = \sum_0^\infty a_n x^n,$$

à coefficients tous rationnels et réels : on pourra toujours supposer

$$a_n = \pm \frac{p_n}{q_n}$$

(p_n, q_n entiers, premiers entre eux ou non), q_{n+i} étant divisible par q_n ($i > 0$). Supposons de plus [conditions (A)] ou bien que les a_n soient positifs, ou bien que $\left|\frac{a_n}{a_{n+\mu}}\right|$ croisse constamment et indéfiniment avec n (a_n, $a_{n+\mu} \neq 0$, $a_{n+1} = \ldots = a_{n+\mu-1} = 0$, $\mu > 0$). Si à partir d'une certaine valeur de n, p_n est d'ordre de grandeur inférieur à une certaine fonction croissante Φ_n de n qui dépend du

---

(¹) $\left|\frac{q_m}{p_m}\right| = e_k(m)^{\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon\right)m}$; $\quad q_m = |p_m| e_k(m)^{\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon\right)m} = e_k(m)^{\tau_1 m}$ $\quad$ (τ_1 fini).

mode de décroissance des a_n, $f\left(\frac{1}{q}\right)$ est irrationnel, quel que soit l'entier $q \geqq 1$. En particulier $f(1)$ est irrationnel. L'ordre de grandeur de Φ_n croît avec l'ordre de grandeur des inverses des coefficients a_n.

Quand ces fonctions entières sont d'ordre $(0, 1, \rho)$, $f\left(\frac{p}{q}\right)$ (p, q positifs premiers entre eux) est irrationnel dans les mêmes conditions, tant que p ne dépasse pas une certaine limite.

Quand ces fonctions entières sont d'indice $\geqq 2$, $f\left(\frac{p}{q}\right)$ est irrationnel dans les mêmes conditions.

Enfin quand ces fonctions entières sont d'indice $\geqq 3$, $f\left(\frac{p}{q}\right)$ est transcendant.

On peut déterminer pour toutes celles de ces fonctions qui sont d'ordre non transfini ou d'indice fini des limites supérieures de p_m telles que ces résultats aient sûrement lieu.

1° *Ordre non transfini (k, ρ) ou indice fini $-k$. — Il suffit*

$$p_m \leqq (\log_k m)^\tau,$$

où τ est fixe et $< \frac{1}{\rho}$, pour que $f\left(\frac{1}{q}\right)$ soit irrationnel. Ceci a lieu même pour $k = 0$ ou $k < 0$ (1).

2° *Ordre nul, indice fini $k \geqq 2$. — Il suffit $p_m \leqq e_k(m+1)^\tau$, où τ est fixe et $< \frac{1}{\rho}$.*

3° *Ordre nul, indice fini $k \geqq 3$. La fonction entière étant absolument quelconque [conditions (A) réalisées ou non], avec*

$$p_m \leqq e_k(m)^{\tau m} \qquad \left(\tau \text{ fixe} < \frac{1}{\rho}\right),$$

$f\left(\frac{p}{q}\right)$ ne peut être algébrique. Si donc les a_n satisfont aux conditions (A), $f\left(\frac{p}{q}\right)$ est transcendant.

---

(1) $\log_{-1} m = e^m, \quad \log_{-2} m = e_2(m) = e^{e^m}, \quad \ldots.$

A ce théorème on peut rattacher la question 2339 posée par nous dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens*.

Nous allons encore établir la propriété suivante :

THÉORÈME II *bis*. — *Tout étant posé, comme au premier alinéa du théorème II, supposons que* $\left|\frac{a_n}{a_{n+\mu}}\right|$ *croisse constamment et indéfiniment avec n. Quel que soit l'ordre de* $f(x)$, *supposé toutefois non transfini,* $f\left(\frac{p}{q}\right)$ *est transcendant dès que* $\frac{n+\mu}{n}$ *croît indéfiniment avec n et* $p_n \leqq (\log_k n)^\tau$.

En effet, considérons une fonction entière $f(x)$ quelconque, d'ordre quelconque transfini ou non, mais qui ait des lacunes. On a ([1])

$$|R_m| < 2|u_m|\frac{|x|^\mu}{\varphi_{m+\mu}^\mu}.$$

Si μ croît assez vite avec m, pour $x = \frac{p}{q}$, $|R_m| < \frac{1}{M(q^m q_m)^\alpha}$. On a

$$R_m \neq 0$$

quand les conditions (A) ont lieu, et alors $f\left(\frac{p}{q}\right)$ est transcendant.

Plaçons-nous en particulier dans le cas du corollaire IV et des fonctions entières d'ordre non transfini ou d'indice fini : $R_m \neq 0$. Il faut

$$|R_m| \leqq |a_{m+\mu}|\left(\frac{p}{q}\right)^{m+\mu}(1+\varepsilon),$$

d'où

$$\frac{p_{m+\mu}}{q_{m+\mu}}\left(\frac{p}{q}\right)^{m+\mu}(1+\varepsilon') > \frac{1}{M q^{m\alpha} q_m^\alpha},$$

si $f\left(\frac{p}{q}\right)$ est algébrique. Prenons

$$p_m \leqq (\log_k m)^\tau, \qquad \tau < \frac{1}{\rho} \quad \text{et fixe.}$$

D'après le corollaire I, si a_m satisfait à (12 *bis*),

$$\frac{p_m}{q_m} = (\log_k m)^{-m\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon\right)},$$

$$p_n = (\log_k n)^{n\varepsilon_1}, \qquad q_m = (\log_k m)^{m\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon_2\right)},$$

$$\frac{q_{m+\mu}}{p_{m+\mu}} \geqq [\log_k(m+\mu)]^{\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon_3\right)(m+\mu)}.$$

([1]) Note ([1]), p. 292.

Il faudrait

$$\left(\frac{q}{p}\right)^{m+\mu}[\log_k(m+\mu)]^{\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon_3\right)(m+\mu)} < \mathrm{M}q^{m\alpha}(\log_k m)^{m\alpha\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon_1\right)}(1+\varepsilon'),$$

$$(m+\mu)\log\left(\frac{q}{p}\right)+\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon_3\right)(m+\mu)\log_{k+1}(m+\mu)$$
$$< m\alpha\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon_1\right)\log_{k+1} m.$$

Que k soit positif ou négatif, ceci est manifestement impossible quand $\frac{m+\mu}{m\log_{k+1}m}$ croît indéfiniment avec m, ou même si seulement

$$m+\mu = m\Psi_m,$$

où Ψ_m croît indéfiniment avec m. C. Q. F. D.

Remarque. — Ce raisonnement s'étend d'ailleurs aux fonctions d'ordre transfini quand p_{m_1} est fini ou $\leqq \varphi_{m_1}^{m_1\theta}$ (θ fini).

En effet, on aura, d'après l'inégalité (α) de M. Hadamard,

$$|a_{m_1}^{-1}| \geqq \varphi_{m_1}^{m_1}, \qquad |a_m^{-1}| = \varphi_m^m \quad \text{et} \quad q_m \leqq \varphi_m^{m(1+\theta)},$$

$$\left(\frac{q}{p}\right)^{m+\mu}|a_{m+\mu}^{-1}| < \mathrm{M}q^{m\alpha}q_m^{\alpha}(1+\varepsilon');$$

$$(m+\mu)\log\left(\frac{q}{p}\right)+(m+\mu)\log\varphi_{m+\mu} < m\alpha\log q + m\alpha(1+\theta+\varepsilon'')\log\varphi_m.$$

Il suffit encore que $m+\mu = m\Psi_m$, où Ψ_m croît indéfiniment avec m, pour que cette inégalité soit impossible, par suite, pour que $f\left(\frac{p}{q}\right)$ soit transcendant.

§ IV. — *Addition des fonctions entières et des nombres transcendants.*

Soient les fonctions entières

$$(17) \qquad \mathrm{F}(x) = \sum_0^\infty u_n = \sum_0^\infty a_n x^n = \sum_0^\infty \pm \frac{p_n}{q_n}x^n,$$

où $\frac{q_{n+1}}{q_n}$ est entier, $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ croît constamment et indéfiniment avec n, et où p_n est d'ordre de grandeur moindre qu'une certaine fonction de n déterminée comme précédemment. Si, par exemple, $F(x)$ est d'ordre non transfini (k, ρ), ou d'indice fini, on pourra prendre pour les valeurs de a_n satisfaisant à (12 *bis*) (corollaire I) φ_n ou $\psi_n = (\log_k n)^{\frac{1}{\rho}-\varepsilon_1}$ (k positif ou négatif), $q_n = (\log_k n)^{\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon\right)n}$, $p_n < (\log_k n)^\tau$ $\left(\tau \text{ fixe} < \frac{1}{\rho}\right)$ au moins à partir d'une certaine valeur de n. Le corollaire IV du théorème I est applicable à ces fonctions.

Les valeurs $q_0, q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots$ étant données, et les $\pm p_n$ prenant toutes les valeurs positives ou négatives compatibles avec les conditions ci-dessus, nous dirons que les fonctions $F(x)$ *correspondantes forment* un ensemble E. *Nous désignerons par* ΣE *l'ensemble des ensembles* E *correspondant à une même valeur de k et de ρ.*

Ces ensembles jouissent de propriétés arithmétiques curieuses, dont nous allons nous occuper (¹).

1° *Somme algébrique ou arithmétique des fonctions de* E *ou de* ΣE.

A étant rationnel, $AF(x)$ appartient à l'ensemble.

Si $F(x)$ et $F_1(x)$ appartiennent à l'ensemble E, $F(x) \pm F_1(x)$ lui appartiendra, à moins que cette somme ne soit un polynome $P(x)$, c'est-à-dire

$$F \pm F_1 = P.$$

Donc

La somme algébrique $f(x)$ d'un nombre fini quelconque de fonctions $F, F_1, F_2, \ldots$ *de l'ensemble* E *lui appartient ou se réduit à un polynone.*

D'après le théorème II, $F\left(\frac{p}{q}\right)$, $F_1\left(\frac{p}{q}\right)$, $\cdots$ sont respectivement irrationnels (pour $p = 1$, ou $p > 1$) ou transcendants. Suivant ces divers

(¹) Les extensions au cas où les p_n et p sont imaginaires sont assez souvent évidentes : nous en ajouterons à l'occasion.

cas, nous dirons que les nombres irrationnels ou transcendants correspondants forment *un ensemble* H_{pq} (p, q fixes). Les fonctions $F(x)$, $F_1(x)$, ... seront *les fonctions génératrices* de ces nombres. Donc :

La somme algébrique d'un nombre quelconque fini de nombres de l'ensemble H_{pq} *est un nombre de l'ensemble, à moins que la somme algébrique des fonctions génératrices correspondantes ne se réduise à un polynome.*

On peut généraliser cette propriété quand $k \geqq 2$: le nombre $F_1\left(\frac{p_1}{q_1}\right)$ peut être considéré comme engendré par la fonction

$$F_1\left(\frac{q}{p}\frac{p_1}{q_1}x\right) = F_1^{(1)}(x) = \Sigma \pm \frac{P_n}{Q_n}x^n,$$

pour $x = \frac{p}{q}$, en posant

$$\left(\frac{qp_1}{pq_1}\right)^n \frac{p_n}{q_n} = \frac{P_n}{Q_n}.$$

On a, au moins pour les valeurs de n satisfaisant à (12 *bis*), k étant supposé fini,

$$q_n = e_k(n)^{\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon\right)n}, \qquad p_n < e_k(n)^{\tau} \quad (^1),$$

$$p_n(qp_1)^n < e_k(n)^{\tau+\varepsilon_2}, \qquad (pq_1)^n q_n = e_k(n)^{\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon_3\right)n},$$

ε_2, ε_3 tendant vers zéro quand n croît indéfiniment. Donc $F_1^{(1)}(x)$ appartient aussi à un ensemble $E^{(1)}$ analogue à E, qui contient d'ailleurs E, car les fonctions $F(x)$ de E sont de la forme

$$\Sigma \pm \frac{(pq_1)^n}{(pq_1)^n}\frac{p_n}{q_n}x^n = \Sigma \pm \frac{(pq_1)^n p_n}{Q_n}x^n,$$

où

$$(pq_1)^n p_n < e_k(n)^{\tau+\varepsilon_4}.$$

Le nombre $F\left(\frac{p}{q}\right) + F_1\left(\frac{p_1}{q_1}\right)$ sera respectivement au moins irra-

---

(1) Si $k \geqq 3$, on peut prendre $p_n < e_k(n)^{\tau n}$, avec τ fixe $< \frac{1}{\rho}$.

tionnel, ou transcendant suivant que $k = 2$ ou $k \geqq 3$, sauf si

$$F(x) + F_1\left(\frac{qp_1}{pq_1}x\right)$$

se réduit à un polynome.

Si nous supposons de plus *tous les coefficients de* $F(x)$ *ou* $F_1^{(1)}(x)$ *positifs,* celles des fonctions E ou $E^{(1)}$ qui jouissent de cette propriété formeront un *sous-ensemble* E′ ou $E'^{(1)}$, $E'^{(1)}$ contenant E′. *La somme arithmétique de deux ou plusieurs fonctions de l'ensemble* E′ *ou* $E'^{(1)}$ *lui appartient et ne peut se réduire à un polynome. La somme arithmétique d'un nombre fini quelconque de nombres du sous-ensemble* H'_{pq} *ou* $H'^{(1)}_{pq}$ (*correspondant à* $E'^{(1)}$) *lui appartient.*

Mais, de plus, soient deux de ces sous-ensembles H'_{pq}, $H'_{p_1q_1}$ de nombres issus de E′. Ces deux sous-ensembles appartiennent à $H'^{(1)}_{pq}$, d'après ce qui précède; donc :

On obtient tous les nombres irrationnels ou transcendants, respectivement, engendrés par les fonctions du sous-ensemble E′ *quand* x *prend les diverses valeurs* $\frac{\varpi}{\chi}$ (ϖ, χ *entiers positifs limités*) *en donnant à* x *dans les fonctions d'un sous-ensemble* $E'^{(2)}$ *analogue et contenant* E′ *une valeur rationnelle arbitraire,* 1 *par exemple. Le sous-ensemble* $H'^{(2)}$ *de ces nombres est tel que la somme arithmétique de deux nombres de* $H'^{(2)}$ *appartient à* $H'^{(2)}$.

Quels que soient ϖ et χ, $E'^{(2)}$ appartient à $\Sigma E'$ et $H'^{(2)}$ à $\Sigma H'_{pq}$ qui correspond à $\Sigma E'$. On obtient donc tous les nombres transcendants que peut donner E′ quand x est rationnel, en donnant à x dans les fonctions de $\Sigma E'$ une valeur rationnelle arbitraire, par exemple $x = 1$.

Soit, en particulier,

$$f(x) = F(x) + F_1\left(\frac{q^2}{p^2}x\right),$$

et faisons $x = \frac{p}{q}$.

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = F\left(\frac{p}{q}\right) + F_1\left(\frac{q}{p}\right);$$

c'est-à-dire que, si

$$\varphi(x) = F(x) + F_1\left(\frac{1}{x}\right),$$
$$f\left(\frac{p}{q}\right) = \varphi\left(\frac{p}{q}\right).$$

Plus généralement, soient $a = \frac{p_2}{q_2}$ un nombre rationnel, $F_2(z)$ une fonction de E′ et la fonction $F_2\left(\frac{1}{x-a}\right)$; pour $x = \frac{p}{q}$, $F_2\left(\frac{1}{\frac{p}{q} - a}\right)$ appartient à $H'^{(2)}$, pourvu que $\frac{p}{q}$ soit $> a$, ce qui a lieu si $a < 0$ $\left(\text{nous supposons toujours } \frac{p}{q} > 0\right)$.

Appelons alors l'ensemble des fonctions quasi-entières

$$\varphi(x) = F(x) + F_1(x) + F_2\left(\frac{1}{x - a_1}\right) + \ldots,$$

où $F(z)$, $F_1(z)$, $F_2(z)$, ... appartiennent à E′, *ensemble* Q *de fonctions quasi-entières dérivé de* E′ (a_1, a_2, ... *négatifs et donnés, en nombre limité*) : *la somme arithmétique de deux fonctions de* Q *appartient à* Q. *L'ensemble des nombres* $\varphi\left(\frac{p}{q}\right)$ *coïncide avec un ensemble de nombres analogue à* H'_{pq}, *et est compris dans* $\Sigma H'_{11}$.

Autrement dit :

Théorème III. — *Soient* $F(x)$, $F_1(x)$, ... *des fonctions appartenant au sous-ensemble* E′; a_1, a_2, ..., a_θ *des nombres rationnels positifs ou négatifs, et la fonction quasi-entière*

$$\varphi(x) = F(x) + F_1(x) + F_2\left(\frac{1}{x - a_1}\right) + \ldots + F_{\theta+1}\left(\frac{1}{x - a_\theta}\right).$$

Si E′ *est d'indice* $\geqq 2$ (¹), $\varphi\left(\frac{p}{q}\right)$ *est irrationnel dès que* $\frac{p}{q}$ *est rationnel, positif et* $\geqq a_j$, *quel que soit* j. *Si* E′ *est d'indice* $\geqq 3$, $\varphi\left(\frac{p}{q}\right)$ *est transcendant.*

(¹) L'indice de l'ensemble est l'indice commun aux diverses fonctions de cet ensemble; de même pour l'ordre.

Pour les fonctions quasi-entières d'indice $\leqq 1$ d'un même ensemble E, on peut aussi obtenir des applications arithmétiques intéressantes, mais beaucoup plus particulières. Nous savons seulement que $F\left(\frac{p}{q}\right)$ est irrationnel pour des valeurs de p limitées; la fonction $F_1\left(\frac{1}{x}\right)$ introduira la quantité $F\left(\frac{q}{p}\right)$ que nous ne savons irrationnelle que pour des valeurs de q limitées. On est conduit à ne considérer que des valeurs de p et q limitées. Nous prendrons en particulier $p = 1$, $q = 1$ et les fonctions quasi-entières $F(x) + F_1\left(\frac{1}{x}\right) = \varphi_1(x)$, de façon que le raisonnement soit toujours applicable, même si $F(z)$ et $F_1(z)$ sont d'ordre fini.

Dans ce cas, on peut considérer le nombre $F(1) + F_1(1)$ comme issu aussi bien de $F(x) + F_1\left(\frac{1}{x}\right)$ que de $F(x) + F_1(x)$ pour $x = 1$. Par suite, le nombre $F(1) + F_1(1) + F_2(1) + \ldots$ provenant d'une somme de fonctions de la forme $\varphi_1(x)$ issues de E sera irrationnel, sauf si la fonction $F(x) + F_1(x) + \ldots$ se réduit à un polynome.

Théorème IV. — *Soient* $F(x)$, $F_1(x)$, ... *des fonctions de l'ensemble* E *d'ordre ou d'indice quelconque* : $F(1) + F_1(1) + \ldots$ *est irrationnel si* $F(x) + F_1(x) + \ldots$ *ne se réduit pas à un polynome. Par suite, si* $F(x)$ *et* $F_1(x)$ *ont leurs coefficients positifs (ensemble* E'*), et si* $\varphi(x) = F(x) + F_1\left(\frac{1}{x}\right)$, $\varphi(1)$ *et toute somme arithmétique de nombres* $\varphi(1)$ *sont irrationnels.*

Considérons particulièrement les quatre fonctions θ, θ_1, θ_2, θ_3 de Jacobi sous la forme

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} i r^{\frac{1}{4}}\theta(z) &= \sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^n r^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}} z^{2n+1} = \sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^n r^{-n^2-n} z^{2n+1}, \\ r^{\frac{1}{4}}\theta_1(z) &= \sum_{-\infty}^{+\infty} r^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}} z^{2n+1} = \sum_{-\infty}^{+\infty} r^{-n^2-n} z^{2n+1}, \\ \theta_2(z) &= \sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^n r^{-n^2} z^{2n}, \\ \theta_3(z) &= \sum_{-\infty}^{+\infty} r^{-n^2} z^{2n}, \end{aligned}\right.$$

ou encore

$$ir^{\frac{1}{4}}\theta(z) = \sum_{0}^{\infty}(-1)^n r^{-n^2-n} z^{2n+1} + \sum_{1}^{\infty}(-1)^{n_1} r^{-n_1^2+n_1}\left(\frac{1}{z}\right)^{2n_1-1}$$

$$= \sum_{0}^{\infty}(-1)^n r^{-n^2-n} z^{2n+1} + \sum_{0}^{\infty}(-1)^{n+1} r^{-(n+1)^2+n+1}\left(\frac{1}{z}\right)^{2n+1},$$

$$ir^{\frac{1}{4}}\theta(z) = \sum_{0}^{\infty}(-1)^n r^{-n^2-n}\left(z^{2n+1} - \frac{1}{z^{2n+1}}\right);$$

$$r^{\frac{1}{4}}\theta_1(z) = \sum_{0}^{\infty} r^{-n^2-n}\left(z^{2n+1} + \frac{1}{z^{2n+1}}\right);$$

$$\theta_2(z) = \sum_{0}^{\infty}(-1)^n r^{-n^2} z^{2n} + \sum_{1}^{\infty}(-1)^{n_1} r^{-n_1^2}\frac{1}{z^{2n_1}},$$

$$\theta_2(z) = 1 + \sum_{1}^{\infty}(-1)^n r^{-n^2}\left(z^{2n} + \frac{1}{z^{2n}}\right);$$

$$\theta_3(z) = 1 + \sum_{1}^{\infty} r^{-n^2}\left(z^{2n} + \frac{1}{z^{2n}}\right).$$

On a $r^{n^2+n} = R^{2n+1}$ avec $R = r^{\frac{n^2+n}{2n+1}} = e^{\frac{\log r}{4}(2n+1)(1+\varepsilon)}$ (on suppose ici r entier réel et >1), et $\theta(z)$ et $\theta_1(z)$ sont d'ordre $\left(0,\ 1,\ \frac{4}{\log r}\right)$, et d'indice 1 aux environs de leurs deux points essentiels, ainsi que leurs dérivées [1]. De même, si

$$r^{n^2} = R_1^{2n}, \qquad R_1 = r^{\frac{n^2}{2n}} = r^{\frac{n}{2}} = e^{\frac{\log r}{4}\cdot 2n},$$

et θ_2, θ_3 sont du même ordre que θ, θ_1, ainsi que leurs dérivées. Cette propriété a lieu aussi bien aux environs de $z=0$ que de $z=\infty$.

---

[1] La dérivée d'une fonction entière ou quasi-entière d'ordre non transfini, ou d'indice fini est évidemment de même ordre ou de même indice.

Au sujet de $\theta_3(z)$ comp. E. Lindelöf, *Mémoire sur la théorie des fonctions entières*, p. 43; *Acta Societ. Scient. Fennicæ*, t. XXXI, 1902; Hadamard, Mémoire couronné, *Journal de Mathématiques*, 1893, p. 179.

On a $\theta(1)=0$. Mais $r^{\frac{1}{4}}\theta_1(1)$ et $\theta_3(1)$ ont tous leurs termes positifs, et, par suite, sont irrationnels ([1]) quand r est entier. De même pour $\theta_2(1)$, le corollaire IV du théorème I étant applicable aux quatre fonctions θ.

On voit encore que toutes les dérivées de $r^{\frac{1}{4}}\theta_1(z)$ et $\theta_3(z)$ autres que les dérivées premières sont irrationnelles pour $z=1$ (r entier >1). En effet, on a

$$\frac{d^{2\lambda}\left[\theta_1(z).r^{\frac{1}{4}}\right]}{dz^{2\lambda}}=\Sigma r^{-n^2-n}\left[z^{2n-2\lambda+1}(2n+1)2n\ldots(2n+2-2\lambda)\right.$$
$$\left.+z^{-2n-2\lambda-1}(2n+1)(2n+2)\ldots(2n+2\lambda)\right].$$

En laissant de côté un certain nombre de termes relatifs aux petites valeurs de n, ceci peut s'écrire, pour $z=1$,

$$\Sigma r^{-n^2-n}\Pi_\lambda \qquad (n>0),$$

Π_λ étant un polynome en n de degré 2λ, ce qui est la valeur de

$$\Sigma r^{-n^2-n}\Pi_\lambda y^n,$$

pour $y=1$. Pour cette fonction, d'après le corollaire I du théorème I,

$$|a_n^{-1}|=r^{(n^2+n)(1+\varepsilon)}=r^{n^2(1+\varepsilon')}=e^{n^2\log r(1+\varepsilon'')},$$

et

$$\varphi_n=e^{n\log r(1-\varepsilon_1)}=r^{n(1-\varepsilon_1)},$$

qui, pour $r>1$, est d'ordre de grandeur supérieur à Π_λ, dès que n est assez grand (p. 301) : donc la dérivée $(2\lambda)^{\text{ième}}$ de $r^{\frac{1}{4}}\theta_1(z)$ est irrationnelle pour $z=1$.

On peut faire un raisonnement analogue pour les dérivées d'ordre pair de $\theta_3(z)$.

De même, pour les dérivées d'ordre impair, autres que les dérivées premières $[\theta_1'(1)=\theta_2'(1)=\theta_3'(1)=0]$.

([1]) Propriété déjà indiquée par Liouville (*Journal de Mathématiques*, 1851, p. 140), en ce qui concerne une de ces quantités.

Ainsi

$$\frac{d^{2\lambda+1}\theta_3}{dz^{2\lambda+1}} = \sum r^{-n^2}[z^{2n-2\lambda-1}\,2n(2n-1)\ldots(2n-2\lambda)$$
$$-z^{-2n-2\lambda-1}\,2n(2n+1)\ldots(2n+2\lambda)] \qquad (n>0).$$

Ceci s'écrit encore, pour $z=1$,

$$\sum r^{-n^2}\chi_\lambda \qquad (n>0),$$

χ_λ étant un polynome en n de degré $\leqq 2\lambda$ qui ne s'annule pas, dès que n est supérieur à une certaine limite, et qui a une valeur négative. Le corollaire IV du théorème I étant applicable à $\sum r^{-n^2}\chi_\lambda z^n$ $(n>0)$, le raisonnement s'achève comme précédemment, et $\frac{d^{2\lambda+1}\theta_3}{dz^{2\lambda+1}}$ est irrationnel pour $z=1$; de même pour les dérivées d'ordre impair de $r^{\frac{1}{4}}\theta_1(z)$.

En résumé :

Corollaire. — *Soient* $\theta(z)$, θ_1, θ_2, θ_3 *les quatre fonctions* θ *de Jacobi, avec, par exemple,*

$$\theta_3(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} r^{-n^2}z^{2n},$$

r étant entier réel >1. $r^{\frac{1}{4}}\theta_1(z)$, $\theta_3(z)$, *et toutes leurs dérivées d'ordre* $\geqq 2$, *enfin* $\theta_2(z)$ *sont, pour* $z=1$, *des quantités irrationnelles* (¹).

Il en est de même pour toute fonction linéaire à coefficients rationnels positifs de $r^{\frac{1}{4}}\theta_1(z)$, $\theta_3(z)$ et leurs dérivées d'indice pair et de $\theta_2(z)$, quand $z=1$; car les corollaires I et IV du théorème I sont applicables à cette combinaison.

(¹) Nous n'insistons pas sur l'extension possible de ces résultats aux dérivées de $ir^{\frac{1}{4}}\theta(z)$ et de $\theta_2(z)$.

§ V. — 2° *Produits de fonctions de* E *ou de* $\sum$E. *Multiplication des nombres transcendants.*

Considérons les deux fonctions $F(x)$, $F_1(x)$ de l'ensemble E, et

$$F(x)F_1(x)=\sum_0^\infty \frac{p_n}{q_n}x^n \sum_0^\infty \frac{p_n^{(1)}}{q_n}x^n \qquad (p_n,\ p_n^{(1)} \text{ positifs ou négatifs}).$$

Nous supposerons ici que, dès que n dépasse une certaine limite, $q_n = e_k(n)^{\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon\right)n}$, quel que soit n.

Nous pouvons faire le développement de ce produit en mettant en évidence la somme

$$\frac{\Phi_\nu(x)}{q_\nu^2} = p_\nu^{(1)}\frac{x^\nu}{q_\nu}\sum_0^{\nu-1}\frac{p_n}{q_n}x^n + \frac{p_\nu}{q_\nu}x^\nu\sum_0^{\nu-1}\frac{p_n^{(1)}}{q_n}x^n + \frac{p_\nu p_\nu^{(1)}}{q_\nu^2}x^{2\nu}.$$

Admettons que l'ensemble E soit d'indice $k \geqq 3$. On a

$$F(x)F_1(x)=\sum \frac{\Phi_\nu(x)}{q_\nu^2}.$$

On peut aussi écrire

$$\frac{\Phi_\nu(x)}{q_\nu^2} = \frac{x^\nu \sum_0^{\nu-1} \varpi_n x^n}{q_\nu q_{\nu-1}} + \frac{x^{2\nu}\varpi'_n}{q_\nu^2},$$

où ϖ_n, ϖ'_n sont d'ordres respectivement au plus égaux à ceux de $q_{\nu-1}$ multiplié par celui de la plus grande des quantités $p_n p_{n'}^{(1)}$ $(n,\ n' \leqq \nu)$, ou à celui de $p_\nu p_\nu^{(1)}$.

Considérons plus généralement

$$F(x)F_1(x)\ldots F_{\lambda-1}(x) = \sum_0^\infty \frac{p_n}{q_n}x^n \ldots \sum_0^\infty \frac{p_n^{(\lambda-1)}}{q_n}x^n.$$

Ce sera la somme de termes de la forme

$$\sum_0^{\nu-1}\frac{p_n}{q_n}x^n\ldots\sum_0^{\nu-1}\frac{p_n^{(\lambda-2)}}{q_n}x^n\frac{p_\nu^{(\lambda-1)}}{q_\nu}x^\nu,$$

$$\sum_0^{\nu-1}\frac{p_n}{q_n}x^n\ldots\sum_0^{\nu-1}\frac{p_n^{(\lambda-3)}}{q_n}x^n\frac{p_\nu^{(\lambda-2)}p_\nu^{(\lambda-1)}}{q_\nu^2}x^{2\nu},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{p_\nu\ldots p_\nu^{(\lambda-1)}}{q_\nu^\lambda}x^{\lambda\nu}.$$

Nous supposons ici $p_\nu, \ldots, p_\nu^{(\lambda-1)}$ croissant assez lentement avec ν. On aura ainsi

$$\mathrm{F}(x)\mathrm{F}_1(x)\ldots\mathrm{F}_{\lambda-1}(x)=\sum_0^\infty\left[\frac{\psi'_\nu(x)}{q_\nu q_{\nu-1}^{\lambda-1}}+\frac{\psi''_\nu(x)}{q_\nu^2 q_{\nu-1}^{\lambda-2}}+\ldots+\frac{\psi_\nu^{(\lambda)}(x)}{q_\nu^\lambda}\right],$$

avec

$$\psi_\nu^{(\lambda)}(x)=\mathrm{P}_\nu x^{\lambda\nu},\qquad \mathrm{P}_\nu=p_\nu\ldots p_\nu^{(\lambda-1)},$$

les $\psi_n^{(i)}$ étant des polynomes à coefficients entiers. Ici (lemmes I et II)

$$q_{\nu-1}^i=e_k(\nu-1)^{\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon\right)(\nu-1)i}=e_k(\nu)^{\nu\varepsilon_1},$$

où ε_1 tend vers o avec $\frac{1}{\nu}$. D'ailleurs $q_\nu^{\lambda-i}q_{\nu-1}^i$ divise $q_\nu^{\lambda-j}q_{\nu-1}^j$ dès que $j<i$, car le quotient est $\left(\frac{q_\nu}{q_{\nu-1}}\right)^{i-j}$.

Nous sommes ainsi amené à étudier les expressions de la forme

$$g^{(\lambda)}(x)=\sum_0^\infty\left[\frac{\psi'_\nu(x)}{\mathrm{Q}'_\nu}+\frac{\psi''_\nu(x)}{\mathrm{Q}''_\nu}+\ldots+\frac{\psi_\nu^{(\lambda)}(x)}{\mathrm{Q}_\nu^{(\lambda)}}\right],\tag{19}$$

où

$$\mathrm{Q}_\nu^{(i)}=e_k(\nu)^{\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon\right)i\nu},$$

les polynomes $\psi'_\nu, \ldots, \psi_\nu^{(\lambda)}$ étant de degrés $\leqq\lambda\nu$, et leurs coefficients, qui sont entiers (¹), d'ordre $\leqq e_k(\nu)^{\nu\varepsilon_1}$, si l'on suppose que $|p_\nu|$, $|p_\nu^{(1)}|$, ... aient une limite supérieure de même forme. $Q_\nu^{(i-1)}$ divise $Q_\nu^{(i)}$, $Q_\nu^{(\lambda)}$ divise $Q'_{\nu+1}$.

Considérons l'ensemble des fonctions $g^{(\lambda)}(x)$ satisfaisant à ces conditions : la fonction $F(x)$ est évidemment de la forme $g^{(\lambda)}(x)$. *Le produit de deux fonctions* $g^{(\lambda)}(x)$ *est une fonction* $g^{(2\lambda)}(x)$. *Toute somme algébrique de fonctions* (²) $g^{(\lambda)}(x)$ *est une fonction* $g^{(\lambda)}(x)$. *Le produit de* λ *fonctions* $F(x)$ *de* E *appartient à* L'ENSEMBLE $g^{(\lambda)}(x)$ [c'est-à-dire est de la forme $g^{(\lambda)}(x)$].

En considérant les produits de λ fonctions au plus du sous-ensemble E' on obtiendrait de même une suite de sous-ensembles tous contenus respectivement dans les sous-ensembles $\gamma^{(\lambda)}(x)$ déduits de $g^{(\lambda)}(x)$ en n'attribuant aux coefficients que des valeurs nulles ou positives : la somme arithmétique de deux $\gamma^{(\lambda)}(x)$ est de la même forme; le produit est de la forme $\gamma^{(2\lambda)}(x)$.

Les séries $g^{(\lambda)}(x)$ *sont des fonctions entières,* car, pour toute valeur de x, le rapport d'un terme au précédent tend évidemment vers o (lemme II). *Toute propriété commune aux séries* $g^{(\lambda)}(x)$ *appartient simultanément aux fonctions de* E' *et à leurs produits* 2 à 2, 3 à 3, ..., λ à λ. *En particulier, pour toute valeur de* $x = \frac{p}{q}$ *rationnelle, d'ailleurs réelle ou imaginaire,* $g^{(\lambda)}\left(\frac{p}{q}\right)$ *est, en général, transcendant.*

En effet, d'abord, le corollaire IV du théorème I s'étend à $g^{(\lambda)}(x)$. Soit

$$g^{(\lambda)}(x) = \sum_1^\infty u_n.$$

$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ est d'une des formes

$$\delta = \frac{\psi_\nu^{(i+1)}(x)}{\psi_\nu^{(i)}(x)} \frac{Q_\nu^{(i)}}{Q_\nu^{(i+1)}},$$

(¹) Nos raisonnements subsistent quand on donne aux coefficients des $\psi_\nu^{(i)}(x)$ des valeurs imaginaires dont les modules satisfont à des conditions analogues.

(²) Correspondant à des valeurs identiques des $Q_\nu^{(i)}$.

ou

$$\delta' = \frac{\psi'_{\nu+1}(x)}{\psi_\nu^{(\lambda)}(x)} \frac{Q_\nu^{(\lambda)}}{Q'_{\nu+}}.$$

Or

$$|\psi_\nu^{(i)}(x)| \leqq \xi_1^{\lambda\nu} e_k(\nu)^{\nu\varepsilon_3}, \qquad \text{si} \qquad |x| \leqq \xi_1,$$

$$\frac{Q_\nu^{(i)}}{Q_\nu^{(i+1)}} \leqq e_k(\nu)^{\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon_4\right)i\nu - \left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon_5\right)(i+1)\nu} = e_k(\nu)^{-\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon_6\right)\nu},$$

$$\frac{Q_\nu^{(\lambda)}}{Q'_{\nu+1}} \leqq \frac{e_k(\nu)^{\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon_7\right)\lambda\nu}}{e_k(\nu+1)^{\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon_8\right)(\nu+1)}} = e_k(\nu+1)^{-\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon_9\right)(\nu+1)},$$

d'après le lemme II. Dès lors, x étant donné, pour m assez grand, δ et δ' sont aussi petits qu'on veut; et ceci s'étendrait de suite au cas où $g^{(\lambda)}(x)$ présente des lacunes. Donc

$$|u_{m+\mu}|(1-\varepsilon') \leqq \left| g^{(\lambda)}(x) - \sum_0^m u_n(x) \right| \leqq |u_{m+\mu}|(1+\varepsilon')$$

$$(u_{m+1} = \ldots = u_{m+\mu-1} = 0, \; u_m, \; u_{m+\mu} \neq 0).$$

Les inégalités du corollaire IV du théorème I s'appliquent encore à $g^{(\lambda)}(x)$.

Ceci posé, soit

$$\frac{p}{q} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2} = \frac{\alpha+\beta i}{\gamma}$$

(α, β, γ entiers réels),

$$\sum_1^m u_n\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{M+Ni}{Q_\nu^{(i)}\gamma^{\lambda\nu}},$$

où M et N sont entiers, et $u_m(x) = u_m$ est un terme de $g^{(\lambda)}(x)$ de la forme $\frac{\psi_\nu^{(i)}(x)}{Q_\nu^{(i)}}$. Dans le cas où $g^{(\lambda)}(x) = F(x)F_1(x)\ldots F_{\lambda-1}(x)$,

$$\psi_\nu^{(\lambda)}(x) = P_\nu x^{\lambda\nu} \qquad \text{où} \qquad P_\nu = p_\nu p'_\nu \ldots p_\nu^{(\lambda-1)}.$$

Admettons que $g^{(\lambda)}\left(\frac{p}{q}\right) = \xi$ soit rationnel ou algébrique de degré α_1.

1° ξ est rationnel. Deux cas pourront se présenter : ou bien

$$g^{(\lambda)}\left(\frac{p}{q}\right)-\sum_{1}^{m\lambda} u_n\left(\frac{p}{q}\right)$$

est $\neq 0$ pour une infinité de valeurs de m; d'après la propriété I,

$$\left|\xi-\sum_{1}^{m\lambda} u_n\left(\frac{p}{q}\right)\right| \geqq \frac{1}{M_1 Q_m^{(\lambda)} \gamma^{\lambda m}} \qquad (M_1 \text{ fini}),$$

pour une infinité de valeurs de m; ou bien

$$g^{(\lambda)}\left(\frac{p}{q}\right)-\sum_{1}^{m\lambda} u_n\left(\frac{p}{q}\right)=0$$

dès que $m > m_1$; ce cas est évidemment impossible [1], soit quand $g^{(\lambda)}(x) = F F_1 \ldots F_{\lambda-1}$ et que $p_\nu p'_\nu \ldots p_\nu^{(\lambda-1)}$ est $\neq 0$ pour une infinité de valeurs de $\nu > \nu_1$ (comme cela a lieu par exemple quand les F, ...,

---

[1] Si ce cas est réalisé, on a, pour $x=\frac{p}{q}$,

$$\Psi=\frac{\psi'_\nu(x)}{Q'_\nu}+\frac{\psi''_\nu(x)}{Q''_\nu}+\ldots+\frac{\psi_\nu^{(\lambda)}(x)}{Q_\nu^{(\lambda)}}=0.$$

Or, on a, si $\psi_\nu^{(i)}(x) \neq 0$,

$$\gamma^{-\lambda\nu} \leqq |\psi_\nu^{(i)}(x)| \leqq e_k(\nu)^{\nu\varepsilon_2},$$
$$Q_\nu^{(i)} = e_k(\nu)^{\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon_i\right)i\nu}.$$

Si

$$\psi'_\nu\left(\frac{p}{q}\right) \neq 0, \qquad \Psi\gamma^{\lambda\nu}Q'_\nu = \gamma^{\lambda\nu}\psi'_\nu\left(\frac{p}{q}\right)+\text{A}=0,$$

où A est aussi petit qu'on veut, quand ν est assez grand, et $\gamma^{\lambda\nu}\psi'_\nu\left(\frac{p}{q}\right)$ est entier $\neq 0$: ce résultat est absurde, et $\psi'_\nu\left(\frac{p}{q}\right)=0$. De même, successivement,

$$\psi'_\nu\left(\frac{p}{q}\right)=\psi''_\nu\left(\frac{p}{q}\right)=\ldots=\psi_\nu^{(\lambda)}\left(\frac{p}{q}\right)=0.$$

$F^{(\lambda-1)}$ ne présentent pas de lacunes), soit quand $\frac{p}{q}$ est réel, > 0, et que les coefficients d'une infinité des polynomes $\psi_\nu^{(i)}(x)$ sont $\neq 0$, et de même signe pour chaque polynome. De toutes façons si, pour $m > m_1$, $g^{(\lambda)}\left(\frac{p}{q}\right) - \sum_1^{m\lambda} u_n\left(\frac{p}{q}\right) = 0$, chacun des polynomes $\psi_\nu^{(i)}(x)$ a entre ses coefficients une certaine relation quand $\nu > \nu_1$. Ce cas n'est donc pas le cas général [1].

---

(1) Quand les coefficients d'une infinité des polynomes $\psi_\nu^{(i)}(x)$ ont leurs modules limités et $\leqq a$ (a nombre fixe), les racines de $\psi_\nu^{(i)}(x)$ ont leurs modules limités, et le cas exceptionnel $g^{(\lambda)}\left(\frac{p}{q}\right) - \sum_1^{m\lambda} u_n\left(\frac{p}{q}\right) = 0$ pour $m > m_1$ ne peut avoir lieu que quand $\left|\frac{p}{q}\right|$ est inférieur à un nombre fixe.

Mais l'on peut former des fonctions $g^{(\lambda)}(x)$ qui ne sont pas des polynomes, et qui ont des valeurs rationnelles pour une infinité de valeurs rationnelles de x, et même pour toute valeur rationnelle x. Soit le polynome

$$Z_m(x) = \prod_m (\chi x - \varpi),$$

où ϖ et χ prennent toutes les valeurs des entiers positifs ou négatifs $\neq 0$ et de modules $\leqq m$. $Z_m(x)$ est de degré $4m^2$ et a ses coefficients entiers et d'ordre $< m^{4m^2} = e^{4m^2 \log m}$. La fonction

$$\Phi(x) = A + x \sum_1^{\infty} \frac{Z_m(x)}{q^{\lambda}_{(4m^2+1)}} \qquad (\text{A constante rationnelle, } \lambda \text{ entier} \geqq 1),$$

où

$$q_{(4m^2+1)} = e_k(4m^2+1)^{\left(\frac{1}{\rho} - \varepsilon\right)(4m^2+1)} \qquad \left[k \geqq 3,\ \frac{q_{4(m+1)^2+1}}{q_{(4m^2+1)}} \text{ entier}\right]$$

est une fonction $g^{(1)}(x)$, et $\Phi(x)$ est rationnel pour x rationnel réel. La fonction

$$\Phi_1(x) = A^2 + x^2 \sum_1^{\infty} \frac{Z_m(x)^2}{q^{\lambda}_{(4m^2+1)}} \qquad (\lambda \geqq 2)$$

est une fonction $g^{(2)}(x)$, et $\Phi_1(x)$ est rationnel et positif pour x rationnel réel. $\Phi_1(x)$ ne s'annule pour aucune valeur rationnelle de x. Toute fonction rationnelle $\Phi_2(x)$ à coefficients rationnels de fonctions analogues à $\Phi(x)$ ou $\Phi_1(x)$

2° ξ est algébrique : $\xi - \sum_1^{m\lambda} u_n\left(\frac{p}{q}\right)$ n'est jamais nul, puisque $\sum_1^{m\lambda} u_n\left(\frac{p}{q}\right)$ est rationnel. D'après la propriété I,

$$\left|\xi - \sum_1^{m\lambda} u_n\left(\frac{p}{q}\right)\right| \geqq \frac{1}{M_1 Q_m^{(\lambda)\alpha_1} \gamma^{\alpha_1 \lambda m}} \qquad (M_1 \text{ fini, } \alpha_1 \text{ entier}).$$

En résumé, que ξ soit rationnel ou algébrique, il faut, *en général*,

$$\left|\xi - \sum_1^{m\lambda} u_n\left(\frac{p}{q}\right)\right| \geqq \frac{1}{M_1 Q_m^{(\lambda)\alpha_1} \gamma^{\alpha_1 \lambda m}} \qquad (M_1 \text{ fini}),$$

cette condition ayant *toujours* lieu, si ξ est algébrique.

Or, d'après ce qu'on a vu tout à l'heure,

$$\left|\xi - \sum_1^{m\lambda} u_n\left(\frac{p}{q}\right)\right| \leqq |u_{m\lambda+\mu}|(1+\varepsilon') \leqq 2|u_{m\lambda+\mu}| \leqq 2\,\frac{\psi_{m+\mu_1}^{(j)}\left(\frac{p}{q}\right)}{Q_{m+\mu_1}^{(j)}},$$

où l'on a $\mu_1 > 0$. Le dernier membre est encore de la forme

$$e_k(m+\mu_1)^{-\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon\right)(m+\mu_1)j},$$

alors que $\frac{1}{M_1 Q_m^{(\lambda)\alpha_1} \gamma^{\alpha_1 \lambda m}}$ est de la forme

$$e_k(m)^{-\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon_1\right)\lambda m \alpha_1};$$

le rapprochement des deux inégalités précédentes donnerait

$$e_k(m)^{\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon_1\right)\lambda m \alpha_1} \geqq e_k(m+\mu_1)^{\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon\right)(m+\mu_1)j},$$

ce qui est en contradiction avec le lemme II.

Par conséquent, pour x rationnel, si $g^{(\lambda)}(x)$ n'est pas un polynome, $g^{(\lambda)}(x)$ n'est jamais algébrique ; il ne peut être rationnel quand $g^{(\lambda)}(x)$ est un produit de λ fonctions $F(x)$ sans lacunes ou pour lesquelles

---

prend pour x rationnel réel quelconque une valeur rationnelle (*Comp.* P. STAECKEL, *Math. Ann.*, t. XLVI, 1895, p. 513, et *Comptes rendus*, 20 et 27 mars 1899).

$p_\nu p'_\nu \dots p_\nu^{(\lambda-1)} \neq 0$ pour une infinité de valeurs de ν, quand $g^{(\lambda)}(x)$ possède une infinité de polynomes $\psi_\nu^{(i)}(x)$ dont les coefficients sont tous de même signe, x étant réel et > 0, quand les coefficients d'une infinité de polynomes $\psi_\nu^{(i)}(x)$ ont leurs modules limités et que $|x| > x_1$, x_1 étant positif et limité. Donc :

THÉORÈME V. — *Soit la fonction*

$$(19) \qquad g^{(\lambda)}(x) = \sum_0^\infty \left[\frac{\psi'_\nu(x)}{Q'_\nu} + \frac{\psi''_\nu(x)}{Q''_\nu} + \dots + \frac{\psi_\nu^{(\lambda)}(x)}{Q_\nu^{(\lambda)}} \right],$$

où λ entier, et pour $\nu \geqq \nu_1$,

$$Q_\nu^{(i)} = e_k(\nu)^{\left(\frac{1}{\rho} - \varepsilon_i\right) i\nu},$$

$Q_\nu^{(i)}$ diviseur de $Q_\nu^{(i+1)}$, $Q_\nu^{(\lambda)}$ de $Q'_{\nu+1}$, ρ nombre fixe, $k \geqq 3$, ε_i tendant vers o quand n croît indéfiniment, $\psi'_\nu(x), \dots, \psi_\nu^{(\lambda)}(x)$ polynomes de degré $\leqq \lambda\nu$ à coefficients entiers, réels ou non, d'ordre $\leqq e_k(\nu)^{\nu\varepsilon_1}$.

Si $g^{(\lambda)}(x)$ n'est pas un polynome, $\frac{p}{q}$ étant rationnel, réel ou imaginaire, $g^{(\lambda)}\left(\frac{p}{q}\right)$ n'est jamais algébrique et, en général, est transcendant.

COROLLAIRE I. — *Le produit de λ fonctions* (¹) *$F(x), F_1(x), \dots, F_{\lambda-1}(x)$ de l'ensemble E, sans lacunes, au moins à partir d'un certain terme, ou pour lesquelles $p_\nu p'_\nu \dots p_\nu^{(\lambda-1)} \neq 0$ pour une infinité de valeurs de ν, ne prend, pour x rationnel, que des valeurs transcendantes; il en est de même pour les fonctions $g^{(\lambda)}(x)$ renfermant une infinité de polynomes $\psi_\nu^{(i)}(x)$ dont les coefficients sont tous de même signe dans chaque polynome, quand x est réel et > 0; les fonctions $g^{(\lambda)}(x)$ pour lesquelles les coefficients d'une infinité des polynomes $\psi_\nu^{(i)}(x)$ ont leurs modules limités ne prennent pour x rationnel, avec $|x| > x_1$ (x_1 positif limité), que des valeurs transcendantes.*

COROLLAIRE II. — *Les fonctions $g^{(\lambda)}(x)$ où tous les coefficients des $\psi_\nu^{(i)}(x)$ sont nuls ou positifs, c'est-à-dire les fonctions $\gamma^{(\lambda)}(x)$, ne*

(¹) $|p_\nu|, \quad \dots, \quad |p_\nu^{(\lambda-1)}| \leqq e_k(\nu)^{\nu\varepsilon_2}$.

prennent, pour x rationnel et positif, que des valeurs transcendantes.

C'est, en particulier, le cas des produits λ à λ des fonctions du sous-ensemble E'.

Les produits λ à λ des nombres du sous-ensemble $H'^{(2)}$ (p. 306) *sont transcendants.*

La somme arithmétique d'un nombre quelconque de $\gamma^{(\lambda)}\left(\frac{p}{q}\right)$ $\left(\frac{p}{q}\text{ rationnel} > 0\right)$ est de la même forme et est un nombre transcendant. Le produit d'un nombre quelconque λ_1 de $\gamma^{(\lambda)}\left(\frac{p}{q}\right)$ est de la forme $\gamma^{(\lambda_1\lambda)}\left(\frac{p}{q}\right)$ et est un nombre transcendant.

Pour obtenir tous les $\gamma^{(\lambda)}\left(\frac{p}{q}\right)$, p et q variant, mais p et q restant limités et positifs, on remarque que $\gamma^{(\lambda)}\left(\frac{p'}{q'}\right) = \gamma^{(\lambda)}\left(\frac{q}{p}\frac{p'}{q'}\frac{p}{q}\right)$. C'est la valeur pour $x = \frac{p}{q}$ de $\gamma^{(\lambda)}\left(\frac{q}{p}\frac{p'}{q'}x\right)$. Il suffira donc, pour avoir toutes ces valeurs $\gamma^{(\lambda)}\left(\frac{p'}{q}\right)$, d'attribuer à $\frac{p}{q}$ une valeur arbitraire, 1 par exemple, dans les fonctions d'un ensemble analogue à celui des $\gamma^{(\lambda)}(x)$, et le comprenant. Les mêmes propriétés restent vraies pour les nombres $g^{(\lambda)}\left(\frac{p}{q}\right)$.

Théorème VI. — *Par addition, soustraction ou multiplication, les nombres $g^{(\lambda)}(x)$ (où x prend toute valeur rationnelle, réelle ou non), en particulier les nombres de* E, *ne peuvent donner que des nombres transcendants, ou, exceptionnellement, rationnels. Dans ce dernier cas, les polynomes $\psi_\nu^{(i)}(x)$ de la fonction génératrice correspondante doivent tous s'annuler pour la valeur rationnelle de x considérée, quand $\nu > \nu_1$.*

Par addition ou multiplication, les nombres $\gamma^{(\lambda)}(x)$ (où x prend toute valeur rationnelle réelle positive), qui sont transcendants quand $\gamma^{(\lambda)}(x)$ n'est pas un polynome, en particulier les nombres de E', *ne peuvent donner que des nombres transcendants.*

Pour obtenir tous les nombres transcendants que peuvent donner pour les valeurs rationnelles de x toutes les fonctions $g^{(\lambda)}(x)$ ou

$\gamma^{(\lambda)}(x)$ (*avec* $x > 0$), *correspondant à une même valeur de* k, ρ *et* λ, *il suffit de donner à* x, *dans l'ensemble de ces fonctions, une valeur rationnelle arbitraire, la valeur* 1 *par exemple.*

On peut faire application de ces deux théorèmes aux produits des nombres engendrés par les fonctions quasi-entières. Reprenons les fonctions quasi-entières et les nombres considérés au théorème III : $a_1, a_2, \ldots, a_\theta$ étant des nombres rationnels donnés (et négatifs), et $F, F_1, \ldots$ étant des fonctions de E' (p. 306), $\varphi\left(\frac{p}{q}\right)$ appartient à $\sum H'_{1,1}$. Tout nombre engendré par un produit de λ fonctions quasi-entières de la même forme que $\varphi(x)$, et correspondant à des valeurs de $a_1, \ldots, a_\theta$ différentes ou non, en même nombre ou non, mais négatives, appartient alors à $\sum \gamma^{(\lambda)}(1)$.

Théorème VII. — *Soient, comme au théorème III,* $F(x), F_1(x), \ldots$ *des fonctions appartenant aux sous-ensembles* $\Sigma E'$; $a_1, a_2, \ldots, a_\theta$; $a'_1, a'_2, \ldots, a'_{\theta'}$; ... *toutes les suites quelconques de nombres négatifs rationnels, et les fonctions quasi-entières*

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} \varphi(x) &= F(x) + F_1\left(\frac{1}{x}\right) \\ &\qquad + F_2\left(\frac{1}{x-a_1}\right) + \ldots + F_{\theta+1}\left(\frac{1}{x-a_\theta}\right), \\ \varphi^{(1)}(x) &= F^{(1)}(x) + F_1^{(1)}\left(\frac{1}{x}\right) \\ &\qquad + F_2^{(1)}\left(\frac{1}{x-a'_1}\right) + \ldots + F_{\theta'+1}^{(1)}\left(\frac{1}{x-a_{\theta'}}\right), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Par addition ou multiplication, les nombres $\varphi(x)$, $\varphi^{(1)}(x)$, ... (x *prenant toute valeur rationnelle positive* > 0), *qui sont transcendants, ne peuvent donner que des nombres transcendants.*

Ces nombres sont d'ailleurs compris parmi les nombres $\gamma^{(\lambda)}(x)$ *du théorème VI précédent qui correspondent au même indice* k.

Tout polynome à coefficients rationnels positifs formé avec ces nombres est un nombre transcendant.

Nous venons d'obtenir ainsi des résultats tout à fait complets pour le produit des fonctions $F(x)$ de E ou de E', quand ces ensembles E ou E' sont d'indices $\geqq 3$. Mais les fonctions entières les plus usuelles sont d'indice < 3, et il serait bien intéressant d'obtenir aussi à l'égard de leurs produits quelques résultats, fussent-ils moins complets.

Nous allons considérer les fonctions et les nombres des sous-ensembles E' et H' quand l'indice $k = 2$, et les nombres analogues pour $k \leqq 1$, c'est-à-dire les nombres déduits de $F(x)$ pour x rationnel > 0, quand $k \leqq 1$, les coefficients de $F(x)$ étant tous positifs :

$$F_1\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p_0}{q_0} + \frac{p_1}{q_1}\frac{p}{q} + \ldots + \frac{p_m}{q_m}\left(\frac{p}{q}\right)^m + R_m^{(1)} = S_m^{(1)} + R_m^{(1)},$$

$$F_2\left(\frac{p}{q}\right) = S_m^{(2)} + R_m^{(2)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

avec $\frac{p}{q}$ réel, $S_m^{(1)} = \frac{M_m^{(1)}}{q_m q^m}, \ldots$ Soit (A_1, B_1 entiers)

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{A_1}{B_1} &= F_1\left(\frac{p}{q}\right) F_2\left(\frac{p}{q}\right) \cdots F_\lambda\left(\frac{p}{q}\right) \\ &= S_m^{(1)} S_m^{(2)} \ldots S_m^{(\lambda)} \left(1 + \frac{R_m^{(1)}}{S_m^{(1)}} + \ldots + \frac{R_m^{(\lambda)}}{S_m^{(\lambda)}} + \prod \frac{R_m^{(i)} R_m^{(l)}}{S_m^{(i)} S_m^{(l)}} + \ldots\right), \end{aligned}\right.$$

$$S_m^{(1)} S_m^{(2)} \ldots S_m^{(\lambda)} = \frac{M_m^{(1)} M_m^{(2)} \ldots M_m^{(\lambda)}}{q_m^\lambda q^{m\lambda}};$$

$$(22)\qquad A = \left| F_1\left(\frac{p}{q}\right) \cdots F_\lambda\left(\frac{p}{q}\right) - S_m^{(1)} \ldots S_m^{(\lambda)} \right| \geqq \frac{1}{B_1 q_m^\lambda q^{m\lambda}}.$$

Or

$$\frac{R_m^{(1)}}{S_m^{(1)}} \leqq 2\alpha_1 \frac{p_{m+1}^{(1)}}{q_{m+1}^{(1)}} \left(\frac{p}{q}\right)^{m+1} \qquad (\alpha_1 \text{ fini}),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots,$$

d'après le corollaire IV du théorème I. Le nombre des termes du second membre de (21) étant fini,

$$\frac{1}{B_1 q_m^\lambda q^{m\lambda}} \leqq A \leqq \beta \left[\left(\frac{p}{q}\right)^{(m+1)\lambda} \frac{p_{m+1}^{(1)} + \ldots + p_{m+1}^{(\lambda)}}{q_{m+1}}\right] \;(^1) \qquad (\beta \text{ fini}),$$

$$q_{m+1} \leqq \frac{\beta_1 p^{(m+1)\lambda}}{q^\lambda} (p_{m+1}^{(1)} + \ldots + p_{m+1}^{(\lambda)}) q_m^\lambda.$$

(1) Ceci suppose $\frac{p}{q} \geqq 1$: si $\frac{p}{q} < 1$, on remplacera $\left(\frac{p}{q}\right)^{(m+1)\lambda}$ par 1 : le raisonnement est le même.

Si ceci est impossible, le produit du second membre de (21) sera irrationnel. Soit $p_{m+1}^{(1)} \leqq e_{k-1}(m+1)^{\tau(m+1)}, \ldots, p_{m+1}^{(\lambda)} \leqq e_{k-1}(m+1)^{\tau(m+1)}$; il faut

$$e_k(m+1)^{\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon\right)(m+1)} \leqq \gamma p^{(m+1)\lambda} e_{k-1}(m+1)^{\tau(m+1)} e_k(m)^{\lambda\left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon_1\right)m},$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon\right)(m+1)e_{k-1}(m+1) \leqq \log\gamma &+ (m+1)\lambda\log p \\ &+ \tau(m+1)e_{k-2}(m+1) \\ &+ \lambda m\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon_1\right)e_{k-1}(m).\end{aligned}$$

Pour $k=2$, ceci n'est impossible que si $\lambda \leqq 2$. Pour $k \leqq 1$, il n'y a pas impossibilité [1]. Donc, quand $k \leqq 2$, la seule conclusion que nous puissons tirer est la suivante :

THÉORÈME VIII. — *Le produit de deux fonctions entières ou quasi-entières quelconques d'indice* 2 *considérées au théorème III prend pour x rationnel positif* ($a_j < 0$) *des valeurs irrationnelles. Le produit de deux nombres de* $H'^{(2)}$, *quand* $H'^{(2)}$ *est d'indice* 2, *est irrationnel, comme chacun de ces nombres.*

§ VI. 3° *Quotients de fonctions de* E *ou de* ΣE. — *Nombres méromorphes.*

Le quotient

$$\frac{F(x)F_1(x)\ldots F_\lambda(x)}{F^{(1)}(x)F_1^{(1)}(x)\ldots F_\lambda^{(1)}(x)},$$

où quelques-unes des fonctions F ou $F^{(1)}$ peuvent se réduire à l'unité, soit au numérateur, soit au dénominateur, est une fonction méromorphe de la forme

$$\frac{g^{(\lambda)}(x)}{g_1^{(\lambda)}(x)} = L^{(\lambda)}(x).$$

Nous dirons que tout quotient de deux fonctions $g^{(\lambda)}(x)$ est *une*

(1) Les raisonnements restent vrais, *a fortiori*, si les fonctions considérées $F(x)$, $F_1(x)$, ... présentent des lacunes ($p_{m+1}=\ldots=p_{m+\mu-1}=0$, p_m, $p_{m+\mu} \neq 0$, par exemple).

fonction méromorphe issue de l'ensemble $g^{(\lambda)}(x)$, *ou une fonction méromorphe* $L^{(\lambda)}(x)$.

Considérons le nombre

$$L^{(\lambda)}\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{g^{(\lambda)}\left(\frac{p}{q}\right)}{g_1^{(\lambda)}\left(\frac{p}{q}\right)}.$$

Nous dirons que c'est *un nombre méromorphe*.

Premier cas : $\lambda = 1$. — Soient des fonctions $F(x)$, $F_1(x)$ analogues à celles envisagées au théorème II, et auxquelles le corollaire IV du théorème I est applicable :

$$L^{(1)}\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{F\left(\frac{p}{q}\right)}{F_1\left(\frac{p}{q}\right)} = \frac{N + R_m}{N_1 + R_m^{(1)}} \quad (^1),$$

$$N = \sum_0^m a_m \left(\frac{p}{q}\right)^m, \qquad N_1 = \sum_0^m a_m^{(1)} \left(\frac{p}{q}\right)^m, \qquad \frac{p}{q} \neq 0.$$

Admettons d'abord que $L^{(1)}\left(\frac{p}{q}\right)$ soit rationnel et $= \frac{A}{B}$ (A, B entiers). On a

$$AN_1 + AR_m^{(1)} = BN + BR_m,$$
$$AN_1 - BN = BR_m - AR_m^{(1)},$$
$$q_m q^m (AN_1 - BN) = q_m q^m (BR_m - AR_m^{(1)}).$$

Le premier membre est entier, le second doit l'être; il est nul quel que soit m, ou ≥ 1 pour une infinité de valeurs de m, dès que $m > \mu$.

S'il est nul (²),

$$BR_m - AR_m^{(1)} = 0,$$

(¹) Nous n'étudions ici que les nombres $L^{(1)}\left(\frac{p}{q}\right)$ issus du quotient $\frac{F(x)}{F_1(x)}$ de deux fonctions de l'ensemble E (p. 304).

(²) On remarquera que, A et B étant donnés, les raisonnements resteraient vrais si $F(x)$ et $F_1(x)$ étaient des polynomes d'un nombre assez grand de termes jouissant, dès que $m > \mu$, des propriétés que nous supposons pour les termes de F et F_1; ou encore si les séries F, F_1 présentent des lacunes.

dès que $m > \mu$. Alors

$$\mathrm{BR}_{m+1} - \mathrm{AR}^{(1)}_{m+1} = 0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Donc, retranchant membre à membre chacune de ces inégalités de celle qui la précède,

$$\mathrm{B}u_{m+1} - \mathrm{A}u^{(1)}_{m+1} = 0,$$
$$\mathrm{B}u_{m+2} - \mathrm{A}u^{(1)}_{m+2} = 0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

ou

$$\mathrm{B}a_{m+1} - \mathrm{A}a^{(1)}_{m+1} = 0, \qquad \mathrm{B}(\pm p_{m+1}) - \mathrm{A}(\pm p^{(1)}_{m+1}) = 0,$$
$$\mathrm{B}a_{m+2} - \mathrm{A}a^{(1)}_{m+2} = 0, \qquad \mathrm{B}(\pm p_{m+2}) - \mathrm{A}(\pm p^{(1)}_{m+2}) = 0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

On aurait, pour $m > \mu$,

$$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} \sum_{m+1}^{\infty} a^{(1)}_n x^n = \sum_{m+1}^{\infty} a_n x^n,$$
$$\mathrm{F}(x) = \mathrm{P}(x) + \lambda_1 \mathrm{F}_1(x),$$

où λ_1 est rationnel, et $\mathrm{P}(x)$ un polynome à coefficients rationnels,

$$\mathrm{L}^{(1)}(x) = \frac{\mathrm{F}(x)}{\mathrm{F}_1(x)} = \frac{\mathrm{P}(x)}{\mathrm{F}_1(x)} + \lambda_1.$$

Quand $\mathrm{P}\left(\frac{p}{q}\right) \neq 0$, $\mathrm{L}^{(1)}\left(\frac{p}{q}\right)$ ne peut être rationnel que si $\mathrm{F}_1\left(\frac{p}{q}\right)$ l'est; c'est-à-dire que $\mathrm{L}^{(1)}\left(\frac{p}{q}\right)$ est irrationnel dans les mêmes conditions que $\mathrm{F}_1\left(\frac{p}{q}\right)$ ou $\mathrm{F}\left(\frac{p}{q}\right)$, sauf pour les valeurs de $\frac{p}{q}$ qui rendent

$$\mathrm{L}^{(1)}\left(\frac{p}{q}\right) = \lambda_1$$

(valeur exceptionnelle unique pour les nombres $\mathrm{L}^{(1)}(x)$ où x rationnel $\neq 0$).

Nous pouvons donc admettre que, en général, pour une infinité de valeurs de m,

$$q_m q^m |BR_m - AR_m^{(1)}| \geqq 1,$$

c'est-à-dire, *a fortiori*, puisque [le corollaire IV du théorème I étant supposé s'appliquer à $F(x)$ et $F_1(x)$],

$$|R_m| \leqq 2|a_{m+1}x^{m+1}|, \qquad |R_m^{(1)}| \leqq 2|a_{m+1}^{(1)}x^{m+1}|,$$

$$2q_m q^m \left(B\frac{|p_{m+1}|}{q_{m+1}} + A\frac{|p_{m+1}^{(1)}|}{q_{m+1}}\right)\left|\frac{p}{q}\right|^{m+1} \geqq 1.$$

Posant

$$\frac{q_{m+1}}{q_m} = \psi_{m+1} \qquad (\psi_{m+1} \text{ croissant indéfiniment avec } m \text{ par hypothèse}) :$$

$$\frac{2|p|^{m+1}}{q}(B|p_{m+1}| + A|p_{m+1}^{(1)}|) \geqq \psi_{m+1}. \tag{23}$$

Nous retiendrons seulement ces conséquences : 1° si $p = 1$, cette inégalité sera toujours impossible pour un mode de croissance assez lent des $|p_{m+1}|$, $|p_{m+1}^{(1)}|$; 2° si $|p|$ quelconque, il suffira que $\psi_{m+1} = \chi_m^m$ (χ_m fonction constamment croissante de m absolument quelconque) pour que cette inégalité soit impossible pour un mode de croissance assez lent des $|p_{m+1}|$, $|p_{m+1}^{(1)}|$. En particulier, prenons (¹)

$$|p_n| \leqq e_{k-1}(n)^{\tau n}, \qquad |a_n| = e_k(n)^{-n\left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon\right)} \qquad (\rho \text{ et } \tau \text{ fixes});$$

alors

$$q_n = e_k(n)^{n\left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon'\right)},$$

car

$$|p_n| = e_k(n)^{\varpi} \leqq e_{k-1}(n)^{\tau n},$$

et

$$\varpi e_{k-1}(n) \leqq \tau n\, e_{k-2}(n),$$

en sorte que ϖ tend vers zéro quand n croît indéfiniment;

$$\left|\frac{q_{m+1}}{q_m}\right| = \frac{e_k(m+1)^{(m+1)\left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon''\right)}}{e_k(m)^{m\left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon'\right)}} = \psi_{m+1} = \chi_m^m,$$

$$(m+1)\left(\frac{1}{\rho} + \varepsilon''\right)e_{k-1}(m+1) - m\left(\frac{1}{\rho} + \varepsilon'\right)e_{k-1}(m) = m\log\chi_m.$$

(¹) Pour $k \geqq 3$ on peut prendre $|p_n| \leqq e_k(n)^{\varepsilon_1 n}$.

Dès que $k \geqq 2$, χ_m croît indéfiniment, et $L^{(1)}\left(\frac{p}{q}\right)$ est irrationnel.

Un exemple simple d'application de ce qui précède est celui du quotient

$$L^{(1)}(x) = \frac{\eta_0 + \frac{\eta_1 x}{1} + \frac{\eta_2 x^2}{2!} + \ldots + \frac{\eta_n x^n}{n!} + \ldots}{\eta_0^{(1)} + \frac{\eta_1^{(1)} x}{1} + \frac{\eta_2^{(1)} x^2}{2!} + \ldots + \frac{\eta_n^{(1)} x^n}{n!} + \ldots},$$

où les η_n, $\eta_n^{(1)}$ sont égaux à ± 1 ; sauf si $\eta_n \eta_n^{(1)}$ conserve un signe constant dès que n est supérieur à une certaine limite, $L^{(1)}\left(\frac{1}{q}\right)$ est irrationnel.

Nous obtenons ainsi le résultat suivant :

Théorème IX. — *Soient* $F(x)$, $F_1(x)$ *deux fonctions entières* (*de l'ensemble* E, p. 304), *et* $f(x) = \frac{F(x)}{F_1(x)}$,

$$F(x) = \sum_0^\infty \pm \frac{p_n}{q_n} x^n, \qquad F_1(x) = \sum_0^\infty \pm \frac{p_n^{(1)}}{q_n} x^n,$$

p_n, $p_n^{(1)}$, q_n *étant des entiers*, $|p_n|$, $|p_n^{(1)}|$ *ayant leur croissance suffisamment lente, et* $\frac{q_{n+1}}{q_n}$, *entier, croissant constamment et indéfiniment avec* n (*q_n réel et positif*).

Si l'on n'a pas $F(x) - \lambda_1 F_1(x) = P(x)$ [λ_1 *constante rationnelle*, $P(x)$ *polynome*] :

1° $f\left(\frac{1}{q}\right)$ *est irrationnel* (*q entier quelconque*);

2° *Si* $\frac{q_{n+1}}{q_n}$ *croît suffisamment vite avec* n (*au moins aussi vite que* χ_m^m, *où* χ_m *est une fonction constamment croissante de* m, *d'ailleurs quelconque*), $f\left(\frac{p}{q}\right)$ *est irrationnel* (*p, q entiers quelconques, p positif, négatif ou imaginaire; q positif*). *Ce sera le cas quand* $q_n = e_k(n)^{\left(\frac{1}{\rho} - \varepsilon\right)n}$, ($k \geqq 2$), $p_n \leqq e_{k-1}(n)^{\tau n}$, (*$\tau$ fini*).

Si l'on a $F(x) - \lambda_1 F_1(x) = P(x)$, $f(x)$ *est irrationnel quand* $F(x)$ *l'est, sauf pour les valeurs rationnelles de* x *qui annulent* $P(x)$, *et rendent* $f(x)$ *égal à* λ_1.

On établira de même que, sous certaines conditions, $f\left(\frac{p}{q}\right) = L^{(1)}\left(\frac{p}{q}\right)$ est transcendant. En effet, supposons que

$$L^{(1)}\left(\frac{p}{q}\right) = A = \frac{N + R_m}{N_1 + R_m^{(1)}}$$

soit algébrique et non rationnel, de degré $\alpha > 1$. On a

$$AN_1 - N = R_m - AR_m^{(1)}.$$

D'abord, dès que $m > \mu$, on ne peut avoir constamment

$$R_m - AR_m^{(1)} = 0,$$

sans quoi

$$R_{m+1} - AR_{m+1}^{(1)} = 0, \qquad u_{m+1} - A u_{m+1}^{(1)} = 0,$$

ce qui est absurde, puisque u_{m+1} et $u_{m+1}^{(1)}$ sont rationnels. Il y a une infinité de valeurs de m telles que $R_m - AR_m^{(1)} \neq 0$.

Ceci posé, on a (propriété I),

$$AN_1 - N = N_1\left(A - \frac{N}{N_1}\right),$$

$$\left|A - \frac{N}{N_1}\right| = \left|A - \frac{q_m q^m N}{q_m q^m N_1}\right| \geqq \frac{1}{M|q_m q^m N_1|^\alpha} \qquad (\text{M fini}),$$

$$|N_1| = \left|F_1\left(\frac{p}{q}\right)(1 + \varepsilon)\right| \leqq M_1 \qquad (M_1 \text{ fini}),$$

dès que m est assez grand.

$$|AN_1 - N| \geqq |N_1| \frac{1}{Mq^{m\alpha} q_m^\alpha |N_1|^\alpha} = \frac{1}{Mq^{m\alpha} q_m^\alpha |N_1|^{\alpha-1}},$$

$$|AN_1 - N| \geqq \frac{1}{M_2 q^{m\alpha} q_m^\alpha}, \qquad M_2 = M|N_1|^{\alpha-1}.$$

D'autre part,

$$|R_m - AR_m^{(1)}| \leqq 2(|a_{m+1}| + |a_{m+1}^{(1)}|)\left|\frac{p}{q}\right|^{m+1} M_3, \qquad M_3 \text{ fini},$$

$$\leqq 2\frac{|p_{m+1}| + |p_{m+1}^{(1)}|}{q_{m+1}} \frac{|p|^{m+1}}{q^{m+1}} M_3.$$

Il faudra donc

$$\frac{1}{M_2 q^{m\alpha} q_m^\alpha} \leqq 2 \frac{|p_{m+1}| + |p_{m+1}^{(1)}|}{q_{m+1}} \frac{|p|^{m+1}}{q^{m+1}} M_3,$$

ou

$$q_{m+1} \leqq \frac{2 M_2 M_3}{q} (|p_{m+1}| + |p_{m+1}^{(1)}|) |p|^{m+1} q_m^\alpha q^{m(\alpha-1)}.$$

Il est dès lors évident que, la croissance des $|p_{m+1}|$ et $|p_{m+1}^{(1)}|$ étant donnée, on peut prendre celle des q_m assez rapide pour que cette inégalité soit impossible pour m assez grand, et même impossible quels que soient α, p, q.

Prenons $|p_n|$ et $|p_m^{(1)}| \leqq e_k(n)^{\varepsilon_1 n}$ (ε_1 aussi petit qu'on veut), $|a_n|$, $|a_n^{(1)}|$ de la forme $e_k(n)^{-n\left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon\right)}$, avec $k \geqq 3$. On a encore, comme tout à l'heure (p. 326),

$$q_n = e_k(n)^{n\left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon'\right)}.$$

De même

$$\frac{2 M_1 M_3}{q} |p|^{m+1} q^{m(\alpha-1)} = e_k(m)^{\varpi_1 m},$$

et ϖ_1 tend vers o quand m croît indéfiniment. Il faudrait ainsi

$$e_k(m+1)^{(m+1)\left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon_1\right)} \leqq e_k(m)^{m\left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon_1\right)\alpha},$$

ce qui est absurde d'après le lemme I.

Nous pouvons donc énoncer ce théorème :

Théorème X. — *Tout étant posé comme au théorème IX ci-dessus, si* $|a_n|$, $|a_n^{(1)}|$, q_n *sont de la forme* $e_k(n)^{-n\left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon\right)}$ (ρ *fini*, $k \geqq 3$), $|p_n|$ *et* $|p_n^{(1)}|$ *au plus égaux à* $e_{k-1}(n)^{\tau n}$ (τ *fini*), $f\left(\frac{p}{q}\right)$ *est transcendant, à moins que* $F(x) - \lambda_1 F_1(x) = P(x)$.

Dans ce dernier cas, $f(x)$ *est rationnel pour les valeurs rationnelles de* x *qui annulent* $P(x)$, *transcendant pour les autres (sauf* $x = 0$); $f(x)$ *ne peut prendre, en dehors de* $f(0)$, *qu'une* *valeur rationnelle au plus* [1]. *Pour* $k \geqq 3$, $f(x)$ *n'est jamais algébrique pour* x *rationnel.*

On peut aussi énoncer ces deux théorèmes de la manière suivante en se bornant au cas où $k \geqq 2$:

THÉORÈME XI. — *Soit le quotient* $L^{(1)}(x)$ *de deux fonctions* $F(x)$, $F_1(x)$ *de l'ensemble* E, *qui ne sont pas liées par une relation de la forme* $F(x) - \lambda_1 F_1(x) = P(x)$: *si* $k \geqq 2$, $L^{(1)}\left(\frac{p}{q}\right)$ *est irrationnel* [2]; *si* $k \geqq 3$, *il est transcendant.*

On obtient tous les nombres $L^{(1)}\left(\frac{p}{q}\right)$ *correspondant à une valeur de* k *et à l'ensemble* ΣE *en donnant à* $\frac{p}{q}$ *une valeur unique,* 1 *par exemple, dans les fonctions de* $\Sigma L^{(1)}(x)$.

Le quotient de deux nombres quelconques du sous-ensemble H'_{pq} (p. 306), *qui est un nombre* $L^{(1)}\left(\frac{p}{q}\right)$, *est respectivement irrationnel ou transcendant, à moins que* $F(x) - \lambda F_1(x) = P(x)$.

Les résultats précédents comportent déjà des applications aux fonctions quasi-méromorphes. Exemple :

$$\frac{F(x) + F_1\left(\frac{1}{x}\right)}{F^{(1)}(x) + F_1^{(1)}\left(\frac{1}{x}\right)},$$

quel que soit k, sera irrationnel pour $x = 1$, si l'on n'a pas

$$F(x) + F_1(x) - \lambda_1 [F^{(1)}(x) + F_1^{(1)}(x)] = P(x),$$

et si $F(x) + F_1(x)$, $F^{(1)}(x) + F_1^{(1)}(x)$ ne sont pas simultanément des polynomes.

---

(1) Ce cas exceptionnel peut évidemment se présenter, et l'énoncé du théorème indique à quelles conditions nécessaires et suffisantes.

(2) Il est bien entendu que nous laissons ici les nombres transcendants parmi les nombres irrationnels.

La considération des fonctions θ, θ_1, θ_2, θ_3 de Jacobi [formule (18), p. 308, r entier > 1] nous fournit une application plus particulière.

Prenons

$$\frac{\theta_2(1)}{\theta_3(1)} = \frac{1 + 2\sum_1^\infty (-1)^n r^{-n^2}}{1 + 2\sum_1^\infty r^{-n^2}}, \qquad r \text{ entier réel} > 1.$$

Ici

$$F(x) = 1 + 2\sum_1^\infty (-1)^n r^{-n^2} x^n,$$

$$F_1(x) = 1 + 2\sum_1^\infty r^{-n^2} x^n.$$

$F(x) - \lambda_1 F_1(x)$ n'est pas un polynome;

$$|p_n| = |p_n^{(1)}| = 2,$$

$\frac{q_{n+1}}{q_n} = r^{2n+1}$ croît indéfiniment avec n. Donc $\frac{\theta_2(1)}{\theta_3(1)}$ est irrationnel d'après (23) (p. 326). De même $r^{\frac{1}{4}}\frac{\theta_1(1)}{\theta_3(1)}$ (1); de même encore $\frac{\theta_3''(1)}{\theta_3(1)}$, $\frac{\theta_3'''(1)}{\theta_3(1)}$, ..., car, par exemple, on a

$$\theta_3''(1) = \sum_1^\infty r^{-n^2}[2n(2n-1) + 2n(2n+1)] = \sum_1^\infty 8n^2 r^{-n^2},$$

(1) Si l'on pose

$$\frac{\lambda'(u)}{\sqrt{[1-\lambda^2(u)][1-k_1^2\lambda^2(u)]}} = g, \qquad \lambda(u) = \pm\, sn\, gu,$$

$\frac{\theta_1(1)}{\theta_3(1)}$ est la valeur de $\sqrt{k_1}$ (Jordan, *Analyse*, t. II, 1883, p. 387). Il faut avoir soin, dans le *Cours d'Analyse* imprimé de M. Jordan, de permuter les indices de θ, θ_1, θ_2, de façon à y remplacer θ par θ_2, θ_1 par θ, θ_2 par θ_1.

Nous rappelons que $r = e^{-\pi i \tau}$, $\frac{2\omega_2}{2\omega_1} = \tau$. Ici r est supposé entier réel, $\tau = \alpha i$ (α réel). Si $r = r_1^{\frac{1}{4}}$ (r_1 entier), $\sqrt{k_1}$ est irrationnel.

et

$$\sum_1^\infty 8n^2 r^{-n^2} x^n - \lambda_1 \mathrm{F}_1(x)$$

ne se réduit pas à un polynome.

Corollaire. — *Soient* $\theta, \theta_1, \theta_2, \theta_3$ [*formules* (18), *p.* 308] *les quatre fonctions* θ *de Jacobi* : $\frac{\theta_2(1)}{\theta_3(1)}$, $r^{\frac{1}{4}}\frac{\theta_1(1)}{\theta_3(1)}$, $\frac{\theta''_3(1)}{\theta_3(1)}$, $\frac{\theta'''_3(1)}{\theta_3(1)}$, $\ldots$ *sont des irrationnelles* (r *entier* > 1).

Plus généralement, prenons la fonction $\frac{\varphi(x)}{\varphi_1(x)}$, où $\varphi(x)$ et $\varphi_1(x)$ sont des fonctions quasi-entières comme celles considérées au théorème III (p. 307). On sait [1] que $\varphi\left(\frac{p}{q}\right)$ est de la même forme que $\mathrm{F}\left(\frac{p}{q}\right)$; de même $\varphi_1\left(\frac{p}{q}\right)$. Ce rapport $\frac{\varphi(x)}{\varphi_1(x)}$ est irrationnel quand $k = 2$, transcendant quand $k \geqq 3$, $\left(x = \frac{p}{q}\right)$, si $\frac{\varphi(x)}{\varphi_1(x)}$ ne satisfait pas à une condition particulière exigeant entre les coefficients de $\varphi(x)$ et de $\varphi_1(x$ une infinité dénombrable de relations. On peut énoncer une partie de la propriété corrélative sous cette forme :

Théorème XII. — *Soient, comme au théorème III, toutes les fonctions quasi-entières*

$$\varphi(x) = \mathrm{F}(x) + \mathrm{F}_1\left(\frac{1}{x}\right) + \mathrm{F}_2\left(\frac{1}{x - a_1}\right) + \ldots + \mathrm{F}_{\theta+1}\left(\frac{1}{x - a_\theta}\right),$$

$a_1, \ldots, a_\theta$ *étant des quantités rationnelles et négatives, en nombre fini quelconque* (*une au moins de ces fonctions étant* $\neq 0$, *et alors ne se réduisant pas à un polynome*), $\mathrm{F}(x)$, $\mathrm{F}_1(x)$, $\ldots$, $\mathrm{F}_{\theta+1}(x)$ *des fonctions de l'ensemble* E′ (*p.* 306).

Soit N *l'ensemble des nombres irrationnels* ($k = 2$) *ou transcendants* ($k \geqq 3$) *obtenus en donnant à* x *des valeurs rationnelles* > 0 *dans* $\varphi(x)$. *Le quotient de deux nombres de* N *est en général un nombre irrationnel si* $k = 2$, *transcendant si* $k \geqq 3$: *le contraire ne pourra se produire que si les deux fonctions génératrices* $\varphi(x)$,

---

[1] Ici p, q sont réels et positifs, $p_n \leqq e_1(n)^{\tau n}$ pour $k = 2$, $p_n \leqq e_k(n)^{\varepsilon n}$ pour $k \geqq 3$.

$\varphi_1(x)$ correspondantes ont entre leurs coefficients une infinité dénombrable de relations particulières. En tout cas, pour $k \geqq 3$, ce quotient n'est pas algébrique.

On peut préciser davantage la portée de ce théorème, et établir ce résultat :

Théorème XIII. — *Soit la fonction quasi-méromorphe* Q *obtenue en divisant deux des fonctions $\varphi(x)$ l'une par l'autre ($a_1, \ldots, a_\theta$ quantités rationnelles* quelconques *différentes et $\neq 0$). Si* Q *ne se réduit pas à une constante ou à une fraction rationnelle, parmi les valeurs en nombre infini que* Q *prend pour x rationnel* quelconque, *il n'y en a en général* (¹) *qu'un nombre fini qui puissent n'être pas irrationnelles pour $k = 2$, transcendantes pour $k \geqq 3$; ces valeurs exceptionnelles sont alors rationnelles.*

En effet, on a, si $a_1 = \frac{\alpha_1}{\beta_1}, \cdots$ ($\alpha_1, \beta_1, \ldots$, entiers),

$$\left\{\begin{aligned} \varphi\left(\frac{p}{q}\right) &= \sum \pm \frac{p_m}{q_m}\frac{p^m}{q^m} \pm \frac{p_m^{(1)}}{q_m}\left(\frac{q}{p}\right)^m \pm \frac{p_m^{(2)}}{q_m}\frac{(\beta_1 q)^m}{(p\beta_1 - \alpha_1 q)^m} \pm \ldots = \sum u_m,\\ \varphi_1\left(\frac{p}{q}\right) &= \sum \pm \frac{\varpi_m}{q_m}\frac{p^m}{q^m} \pm \frac{\varpi_m^{(1)}}{q_m}\left(\frac{q}{p}\right)^m \pm \frac{\varpi_m^{(2)}}{q_m}\frac{(\beta_1 q)^m}{(p\beta_1 - \alpha_1 q)^m} \pm \ldots = \sum u_m^{(1)}.\end{aligned}\right.$$

Nous savons déjà que, $\varphi\left(\frac{p}{q}\right)$ et $\varphi_1\left(\frac{p}{q}\right)$ pouvant être mis sous une forme analogue à celle de $F\left(\frac{p}{q}\right)$, leur quotient n'est jamais algébrique (théorème X, p. 329), quand $k \geqq 3$.

Supposons ce quotient rationnel pour $x = \frac{p}{q}$.

Dès que m est assez grand, il faudra, pour que $\dfrac{\varphi\left(\frac{p}{q}\right)}{\varphi_1\left(\frac{p}{q}\right)}$ soit rationnel et $= \lambda_1$, que (raisonnement identique à celui de la page 325)

$$P_m - \lambda_1 P_m^{(1)} = 0,$$

(¹) Par exemple si une des $2\theta + 4$ fonctions $F(x)$, $F_1(x)$, ..., $F_{\theta+1}(x)$, $F^{(1)}(x)$, ..., $F_{\theta+1}^{(1)}(x)$ ne présente pas de lacunes à partir d'un certain terme.

quel que soit m, avec

$$\begin{cases} P_m = u_m\, q_m q^m p^m (p\beta_1 - \alpha_1 q)^m \ldots, \\ P_m^{(1)} = u_m^{(1)} q_m q^m p^m (p\beta_1 - \alpha_1 q)^m \ldots, \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{aligned}(\pm p_m \mp \lambda_1 \varpi_m)\frac{p^m}{q^m} &+ (\pm p_m^{(1)} \mp \lambda_1 \varpi_m^{(1)})\frac{q^m}{p^m} \\ &+ (\pm p_m^{(2)} \mp \lambda_1 \varpi_m^{(2)})\frac{(\beta_1 q)^m}{(p\beta_1 - \alpha_1 q)^m} + \ldots = 0.\end{aligned}$$

Le nombre des coefficients $p_m, \varpi_m, p_m^{(1)}, \varpi_m^{(1)}, \ldots$ qui entrent dans cette relation est $2(\theta + 2)$.

Si alors il y avait au moins $2(\theta + 2)$ relations de ce genre, c'est-à-dire au moins $2(\theta + 2)$ valeurs différentes $\frac{p}{q} \neq 0$ donnant à $\frac{\varphi(x)}{\varphi_1(x)}$ des valeurs rationnelles distinctes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, le déterminant des relations correspondantes entre les $p_m, \varpi_m, \ldots$ devrait s'annuler, puisque $p_m, \varpi_m, p_m^{(1)}, \ldots$ ne sont pas tous nuls, au moins pour une infinité de valeurs de m, les fonctions $F(x), F_1(x), F_2(x), \ldots$ n'étant pas supposées toutes des polynomes. On aurait ainsi, dès que m dépasse une certaine limite,

$$0 = \begin{vmatrix} \frac{p^m}{q^m} & -\lambda_1\frac{p^m}{q^m} & \frac{q^m}{p^m} & -\lambda_1\frac{q^m}{p^m} & \frac{(\beta_1 q)^m}{(p\beta_1 - \alpha_1 q)^m} & \frac{-\lambda_1(\beta_1 q)^m}{(p\beta_1 - \alpha_1 q)^m} & \cdots \\ \frac{p_1^m}{q_1^m} & -\lambda_2\frac{p_1^m}{q_1^m} & \frac{q_1^m}{p_1^m} & -\lambda_2\frac{q_1^m}{p_1^m} & \frac{(\beta_1 q_1)^m}{(p_1\beta_1 - \alpha_1 q_1)^m} & \frac{-\lambda_2(\beta_1 q_1)^m}{(p_1\beta_1 - \alpha_1 q_1)^m} & \cdots \\ \cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots \end{vmatrix},$$

pour une infinité de valeurs de m (consécutives s'il n'y a pas de lacunes), ou, en posant, pour simplifier, $\frac{p_i}{q_i} = \gamma_{i+1}$,

$$\Delta_{2\theta+4}^{(m)} = \begin{vmatrix} \gamma_1^m & \lambda_1\gamma_1^m & \frac{1}{\gamma_1^m} & \frac{\lambda_1}{\gamma_1^m} & \frac{1}{(\gamma_1 - a_1)^m} & \frac{\lambda_1}{(\gamma_1 - a_1)^m} & \cdots \\ \gamma_2^m & \lambda_2\gamma_2^m & \frac{1}{\gamma_2^m} & \frac{\lambda_2}{\gamma_2^m} & \frac{1}{(\gamma_2 - a_1)^m} & \frac{\lambda_2}{(\gamma_2 - a_1)^m} & \cdots \\ \cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots \end{vmatrix} = 0.$$

C'est un déterminant à $2(\theta + 2)$ lignes et colonnes, dont nous allons obtenir la valeur.

D'abord, pour $\theta = -1$, ce déterminant se réduit à

$$\begin{vmatrix} \gamma_1^m & \lambda_1\gamma_1^m \\ \gamma_2^m & \lambda_1\gamma_2^m \end{vmatrix} = \gamma_1^m\gamma_2^m(\lambda_2 - \lambda_1) \neq 0.$$

Il y a au plus une valeur de $\frac{\varphi(x)}{\varphi_1(x)}$ qui soit rationnelle [1] (théorèmes IX et X). Voyons le cas général.

Le déterminant

$$\Delta_{2n} = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \ldots & a_1^{2n} \\ a_2^1 & a_2^2 & \ldots & a_2^{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{2n}^1 & a_{2n}^2 & \ldots & a_{2n}^{2n} \end{vmatrix}$$

est une somme algébrique de termes de la forme

$$(24) \qquad \pm \begin{vmatrix} a_{i_1}^1 & a_{i_1}^2 \\ a_{i_2}^1 & a_{i_2}^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{i_3}^3 & a_{i_3}^4 \\ a_{i_4}^3 & a_{i_4}^4 \end{vmatrix} \cdots \begin{vmatrix} a_{i_{2n-1}}^{2n-1} & a_{i_{2n-1}}^{2n} \\ a_{i_{2n}}^{2n} & a_{i_{2n}}^{2n} \end{vmatrix},$$

$i_1 \neq i_2 \neq \ldots \neq i_{2n}$; le premier de ces déterminants d'ordre deux est formé avec des éléments des deux premières colonnes appartenant deux à deux à une même ligne, et ainsi de suite. On aura alors

$$\Delta_{2\theta+4}^{(m)} = \sum \pm \begin{vmatrix} \gamma_{i_1}^m & \lambda_{i_1}\gamma_{i_1}^m \\ \gamma_{i_2}^m & \lambda_{i_2}\gamma_{i_2}^m \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{1}{\gamma_{i_3}^m} & \frac{\lambda_{i_3}}{\gamma_{i_3}^m} \\ \frac{1}{\gamma_{i_4}^m} & \frac{\lambda_{i_4}}{\gamma_{i_4}^m} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{1}{(\gamma_{i_5} - a_1)^m} & \frac{\lambda_{i_5}}{(\gamma_{i_5} - a_1)^m} \\ \frac{1}{(\gamma_{i_6} - a_1)^m} & \frac{\lambda_{i_6}}{(\gamma_{i_6} - a_1)^m} \end{vmatrix} \cdots$$

$$(25) \left\{ \begin{aligned} \Delta_{2\theta+4}^{(m)} = \sum \pm (\lambda_{i_2} - \lambda_{i_1})(\lambda_{i_4} - \lambda_{i_3})\ldots(\lambda_{i_{2\theta+4}} - \lambda_{i_{2\theta+3}}) \\ \times \frac{\gamma_{i_1}^m\gamma_{i_2}^m}{[\gamma_{i_3}\gamma_{i_4}(\gamma_{i_5} - a_1)(\gamma_{i_6} - a_1)\ldots(\gamma_{i_{2\theta+3}} - a_\theta)(\gamma_{i_{2\theta+4}} - a_\theta)]^m}, \end{aligned} \right.$$

avec $\lambda_{i_j} - \lambda_{i_{j_1}} \neq 0$, $\gamma_{i_j} - \gamma_{i_{j_1}} \neq 0$ quand $j \neq j_1$.

Le nombre des termes de (24) dans $\Delta_{2\theta+4}^{(m)}$ est $\sigma = C_{2\theta+4}^2 C_{2\theta+2}^2 \ldots C_4^2 C_2^2$.

Écrivons alors les équations (25) pour σ valeurs de m assez grandes

[1] Nous laissons, bien entendu, tout à fait de côté la valeur $x = 0$.

et consécutives, m, $m+\mu_1$, ..., $m+\mu_{\sigma-1}$, où l'on peut prendre, s'il n'y a pas de lacunes dans les fonctions $F(x)$, $F_1(x)$, ..., ou si ces lacunes sont assez espacées, $\mu_1=1$, ..., $\mu_{\sigma-1}=\sigma-1$; nous obtenons par rapport aux σ quantités $A=(\lambda_{i_2}-\lambda_{i_1})$, ..., différentes ou non, σ équations linéaires homogènes qui ne peuvent être satisfaites qui si le déterminant des coefficients est nul; posons

$$(26)\qquad \frac{\gamma_{i_1}\gamma_{i_2}}{\gamma_{i_3}\gamma_{i_4}(\gamma_{i_5}-a_1)(\gamma_{i_6}-a_1)\dots}=\delta_i\qquad (i=1,2,\dots,\sigma).$$

On aura

$$\begin{vmatrix} \delta_1^m & \delta_2^m & \dots & \delta_\sigma^m \\ \delta_1^{m+\mu_1} & \delta_2^{m+\mu_1} & \dots & \delta_\sigma^{m+\mu_1} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ \delta_1^{m+\mu_{\sigma-1}} & \delta_2^{m+\mu_{\sigma-1}} & \dots & \delta_\sigma^{m+\mu_{\sigma-1}} \end{vmatrix}=0,$$

ce qui exige

$$\Delta'_\sigma=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \delta_1^{\mu_1} & \delta_2^{\mu_1} & \dots & \delta_\sigma^{\mu_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_1^{\mu_{\sigma-1}} & \delta_2^{\mu_{\sigma-1}} & \dots & \delta_\sigma^{\mu_{\sigma-1}} \end{vmatrix}=0$$

$$(0<\mu_1<\dots<\mu_{\sigma-1})\quad (^1).$$

---

(1) Δ'_σ n'est pas nul identiquement quels que soient δ_1, δ_2, ..., δ_σ. Cette propriété est évidente pour $\sigma=1$ ou 2; admettons-la pour $\sigma\leqq\sigma'-1$. Si $\Delta'_{\sigma'}=0$ identiquement, $\Delta'_{\sigma'}$ est *a fortiori* nul pour $\delta_1=0$, et

$$\begin{vmatrix} \delta_2^{\mu_1} & \dots & \delta_\sigma^{\mu_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \delta_2^{\mu_{\sigma-1}} & \dots & \delta_\sigma^{\mu_{\sigma-1}} \end{vmatrix}=\delta_2^{\mu_1}\dots\delta_\sigma^{\mu_1}\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \delta_2^{\mu_2-\mu_1} & \dots & \delta_\sigma^{\mu_2-\mu_1} \\ \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ \delta_2^{\mu_{\sigma-1}-\mu_1} & \dots & \delta_\sigma^{\mu_{\sigma-1}-\mu_1} \end{vmatrix}=0$$

Mais le deuxième déterminant est un déterminant $\Delta'_{\sigma'-1}$, et l'on est conduit à une contradiction; donc $\Delta'_{\sigma'}\neq 0$.

Ceci posé, Δ'_σ est divisible par $\delta_i-\delta_j$ $(i\neq j)$. Δ'_σ s'écrira, en le supposant

Bornons-nous au cas où l'on peut prendre $\mu_l = l$. Alors

$$\Delta'_\sigma = \Pi(\delta_i - \delta_j) = 0 \qquad (i \neq j).$$

Écrivons toutes les équations

$$\delta_i - \delta_j = 0,$$

l'une d'elles doit être satisfaite. Ici δ_j diffère de δ_i [formules (26)], soit par le numérateur, soit, si les numérateurs sont identiques, par le dénominateur. Autrement dit, $\delta_i = \delta_j$ n'est pas une identité quand on n'attribue pas à quelques-unes des quantités $\gamma_{i_1}, \gamma_{i_2}, \ldots$ des valeurs particulières.

Chassons dans les équations $\delta_i - \delta_j = 0$ les dénominateurs et supprimons les facteurs littéraux communs à δ_i et δ_j, qui sont de la forme γ_l ou $\gamma_l - a_{l_1}$, les γ_i étant supposés $\neq 0$ et des a_{l_1}. Nous obtiendrons des équations entre deux au moins des quantités $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$. Nous considérerons successivement celles de ces relations contenant $\eta, \eta+1, \eta+2, \ldots$ des quantités γ, si une de ces relations en contient η exactement, aucune n'en contenant moins. Soient

$$(27) \qquad \begin{cases} D_\eta \ = 0, & D_\eta^{(1)} = 0, & \ldots, \\ D_{\eta+1} = 0, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots & \ldots, \end{cases}$$

ces relations $D_{\eta+j} = 0$ contenant $\eta + j$ des quantités γ exactement. Prenons d'abord $D_\eta = 0$, et donnons à $\eta - 1$ des γ qui y entrent des valeurs rationnelles déterminées différentes [1] et différentes de o,

décomposé en facteurs irréductibles,

$$\Delta''_1 \ldots \Delta''_\tau \, \Pi(\delta_i - \delta_j),$$

où $\Delta''_1, \ldots, \Delta''_\tau, \delta_i - \delta_j$ sont des facteurs irréductibles dont aucun n'est nul identiquement quels que soient les δ_i.

Pour étendre au cas des lacunes le théorème que nous établissons ici, il resterait à établir qu'aucun des facteurs $\Delta''_1, \ldots, \Delta''_\tau$ n'est nul identiquement quand on substitue aux δ_i leurs valeurs en fonction des γ_j [formules (26)].

[1] Pour lesquelles $\dfrac{\varphi(x)}{\varphi_1(x)}$ est supposé rationnel.

$a_1, \ldots, a_\theta$; la $\eta^{\text{ième}}$ γ_η est alors déterminée et a au plus deux valeurs. On a, en effet, pour déterminer γ_η une des équations

$$\gamma_\eta(\gamma_\eta - a) = \text{const.} \neq 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{\gamma_\eta - a}{\gamma_\eta - b} = \text{const.} \neq 0$$
$$(a, b = 0, a_1, \ldots, \text{ou } a_\theta, a \neq b).$$

Dans la deuxième relation $D_\eta^{(1)} = 0$, donnons à $\eta - 1$ des γ des valeurs différentes et différentes des précédentes et de $0, a_1, \ldots, a_\theta$: la $\eta^{\text{ième}}$ est déterminée; et ainsi de suite : dans $D_{\eta+1}$, on choisit convenablement η des γ qui y entrent. Nous continuerons de la sorte jusqu'à épuisement des relations (27).

Prenons alors une valeur γ' de γ différente de toutes celles ainsi fixées ou trouvées, qui sont en nombre fini et de $0, a_1, \ldots, a_\theta$: $\frac{\varphi(\gamma')}{\varphi_1(\gamma')}$ *ne peut être rationnel*, sans quoi, si l'on raisonne comme ci-dessus, une au moins des relations (27), $D_{\eta+j} = 0$ par exemple, devrait être satisfaite, quand on prend pour $\eta + j - 1$ des γ qui y entrent les valeurs déjà choisies pour cette équation, et pour la $(\eta + j)^{\text{ième}}$ γ la valeur γ' différente de celles que détermine la relation $D_{\eta+j} = 0$.

C. Q. F. D.

Remarque. — Le théorème se trouve ainsi complètement établi lorsque, dans les fonctions $F(x)$, $F_1(x)$, .., $F_{\theta+1}(x)$, $F^{(1)}(x)$, ..., $F_{\theta+1}^{(1)}(x)$, on peut trouver, si grand que soit m, une suite de

$$\sigma = C_{2\theta+4}^2 C_{2\theta+2}^2 \ldots C_4^2 C_2^2$$

termes en $x^m, x^{m+1}, \ldots, x^{m+\sigma-1}$ tels qu'un au moins des coefficients de x^{m+i} soit $\neq 0$ pour une au moins des $2\theta + 4$ fonctions, quel que soit $i = 0, 1, \ldots$, ou $\sigma - 1$. C'est ce qu'on peut appeler le *cas général*.

Deuxième cas : $\lambda > 1$. — Quand on veut étudier les produits deux à deux, trois à trois, etc. des nombres $L^{(1)}\left(\frac{p}{q}\right)$, on est conduit à envisager les nombres $L^{(\lambda)}\left(\frac{p}{q}\right)$. *Toute propriété commune aux fonctions $L^{(\lambda)}(x)$ appartient simultanément aux quotients de fonctions* *de* E *et au quotient de leurs produits deux à deux, trois à trois, ..., λ à λ.* Nous supposons encore, jusqu'à nouvel ordre, $k \geqq 3$.

Je dis que (¹), même si $\lambda = 1$, $L^{(\lambda)}\left(\frac{p}{q}\right)$ est rationnel ou transcendant, mais n'est pas algébrique.

En effet, d'abord, établissons pour le calcul approximatif de $L^{(\lambda)}(x)$ une formule analogue à celle que nous avons trouvée (p. 315) pour $g^{(\lambda)}(x)$. On a, si $u_{m+\mu}, u_{m+\mu_1}^{(1)} \neq 0$, $u_{m+1} = \ldots = u_{m+\mu-1} = u_{m+1}^{(1)} = \ldots = u_{m+\mu_1-1}^{(1)} = 0$,

$$|u_{m+\mu}|(1-\varepsilon) \leqq \left| g^{(\lambda)}(x) - \sum_0^m u_n \right| \leqq |u_{m+\mu}|(1+\varepsilon_1),$$

$$|u_{m+\mu_1}^{(1)}|(1-\varepsilon') \leqq \left| g_1^{(\lambda)}(x) - \sum_0^m u_n \right| \leqq |u_{m+\mu_1}^{(1)}|(1+\varepsilon'_1).$$

Posons

$$\sum_0^m u_n = S_m, \qquad \sum_0^m u_n^{(1)} = S_m^{(1)},$$

$$g^{(\lambda)}(x) = S_m + R_m, \qquad g_\lambda^{(1)}(x) = S_m^{(1)} + R_m^{(1)}:$$

$$\frac{g^{(\lambda)}(x)}{g_1^{(\lambda)}(x)} - \frac{S_m}{S_m^{(1)}} = \frac{S_m + R_m}{S_m^{(1)} + R_m^{(1)}} - \frac{S_m}{S_m^{(1)}} = \frac{R_m S_m^{(1)} - R_m^{(1)} S_m}{S_m^{(1)}[S_m^{(1)} + R_m^{(1)}]}.$$

Pour toute valeur de x telle que $g_1^{(\lambda)}(x) \neq 0$, on peut assigner des limites supérieures finies de

$$\frac{1}{S_m^{(1)} + R_m^{(1)}} = \frac{1}{g_1^{(\lambda)}(x)}, \qquad \frac{S_m}{S_m^{(1)}} = L^{(\lambda)}(x)(1+\varepsilon_2),$$

(m assez grand) (²). D'ailleurs

$$|R_m| \leqq |u_{m+\mu}|(1+\varepsilon_1), \qquad |R_m^{(1)}| \leqq |u_{m+\mu_1}^{(1)}|(1+\varepsilon'_1).$$

Donc

$$\left| L^{(\lambda)}(x) - \frac{S_m}{S_m^{(1)}} \right| \leqq \alpha |u_{m+\mu}| + \beta |u_{m+\mu_1}^{(1)}|, \tag{28}$$

(α, β positifs limités); c'est la formule que nous voulions établir. Donc :

(¹) $L^{(\lambda)}(x)$ est une fonction méromorphe; ici $L^{(\lambda)}(x)$ est le quotient de deux quelconques des fonctions $g^{(\lambda)}(x)$, formule (19), p. 313.

(²) Si m est assez grand, $S_m^{(1)}(x)$ est alors $\neq 0$.

Pour toute valeur de x qui n'annule pas $g_1^{(\lambda)}(x)$, à partir d'une certaine valeur de m,

$$(28)\qquad \left| L^{(\lambda)}(x) - \frac{\sum\limits_0^m u_n}{\sum\limits_0^m u_n^{(1)}} \right| \leqq \alpha \, | u_{m+\mu} | + \beta \, | u_{m+\mu_1}^{(1)} |,$$

($u_{m+1} = \ldots = u_{m+\mu-1} = u_{m+1}^{(1)} = \ldots = u_{m+\mu_1-1}^{(1)} = 0$, $u_{m+\mu}$, $u_{m+\mu_1} = 0$, α, β *positifs et finis*).

On a encore pour $L^{(\lambda)}(x)$ des inégalités analogues à celles du corollaire IV du théorème I.

Ceci posé, soit, comme à la page 315,

$$\frac{p}{q} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{\alpha_1 + \beta_1 i}{\gamma_1} \qquad (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1 \text{ entiers}),$$

et supposons que $L^{(\lambda)}\left(\frac{p}{q}\right) = \xi$ soit rationnel ou algébrique de degré α. On a

$$\left| \xi - \frac{\sum\limits_1^m u_n}{\sum\limits_1^m u_n^{(1)}} \right| = \left| \xi - \frac{Q_\nu^{(i)} \gamma_1^{\lambda\nu} \sum\limits_1^m u_n}{Q_\nu^{(i)} \gamma_1^{\lambda\nu} \sum\limits_1^m u_n^{(1)}} \right|,$$

$$\sum_1^m u_n\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{M + Ni}{Q_\nu^{(i)} \gamma^{\lambda\nu}},$$

où M et N sont entiers et $u_m(x) = u_m$ est un terme de $g^{(\lambda)}(x)$ de la forme $\frac{\psi_\nu^{(i)}(x)}{Q_\nu^{(i)}}$

1° ξ est rationnel; deux cas pourraient se présenter : ou bien

$$g^{(\lambda)}\left(\frac{p}{q}\right) - \frac{\sum\limits_1^{m\lambda} u_n}{\sum\limits_1^{m\lambda} u_n^{(1)}}$$

est $\neq 0$ pour une infinité de valeurs de m; d'après la propriété I,

$$\left| \xi - \frac{\sum_{1}^{m\lambda} u_n}{\sum_{1}^{m\lambda} u_n^{(1)}} \right| \geqq \frac{1}{M_1 Q_m^{(\lambda)} \gamma_1^{\lambda m}} \qquad (M_1 \text{ fini});$$

ou bien

$$\xi - \frac{\sum_{1}^{m\lambda} u_n}{\sum_{1}^{m\lambda} u_n^{(1)}} = 0,$$

dès que $m > m_1$.

Soit

$$\sum_{1}^{\lambda m} u_n = S_m, \qquad \sum_{\lambda m+1}^{\infty} u_n = R_m,$$

$$\sum_{1}^{\lambda m} u_n^{(1)} = S_m^{(1)}, \qquad \sum_{\lambda m+1}^{\infty} u_n = R_m^{(1)};$$

pour $m > m_1$,

$$(28\ bis)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{S_m}{S_m^{(1)}} = \frac{S_{m+1}}{S_{m+1}^{(1)}} = \ldots = \frac{S_{m+j}}{S_{m+j}^{(1)}} = \ldots \\ &= \frac{S_{m+1} - S_m}{S_{m+1}^{(1)} - S_m^{(1)}} = \frac{S_{m+2} - S_{m+1}}{S_{m+2}^{(1)} - S_{m+1}^{(1)}} = \ldots . \end{aligned} \right.$$

Soit

$$S_{\nu+1} - S_\nu = \Psi_\nu = \frac{\psi'_\nu(x)}{Q'_\nu} + \ldots + \frac{\psi_\nu^{(\lambda)}(x)}{Q_\nu^{(\lambda)}},$$

$$S_{\nu+1}^{(1)} - S_\nu^{(1)} = \Psi_\nu^{(1)} = \frac{\psi'_{\nu 1}(x)}{Q'_\nu} + \ldots + \frac{\psi_{\nu 1}^{(\lambda)}(x)}{Q_\nu^{(\lambda)}}.$$

On a

$$\begin{aligned} 0 &= \Psi_\nu \Psi_{\nu+1}^{(1)} - \Psi_\nu^{(1)} \Psi_{\nu+1} \\ &= \left(\frac{\psi'_\nu}{Q'_\nu} + \ldots\right)\left(\frac{\psi'_{\nu+1,1}}{Q'_{\nu+1}} + \ldots\right) - \left(\frac{\psi'_{\nu 1}}{Q'_\nu} + \ldots\right)\left(\frac{\psi'_{\nu+1}}{Q'_{\nu+1}} + \ldots\right). \end{aligned}$$

Ce produit est de la forme

$$0 = \sum \frac{a_{ij}}{Q_\nu^{(i)} Q_{\nu+1}^{(j)}},$$

avec

$$a_{ij} = \psi_\nu^{(i)} \psi_{\nu+1,1}^{(j)} - \psi_{\nu,1}^{(i)} \psi_{\nu+1}^{(j)}.$$

Si l'on sait que a_{11}, a_{21}, $\ldots$, a_{l1} sont nuls, multiplions les deux membres de ce produit par

$$q^{\lambda(2\nu+1)} Q_\nu^{(l+1)} Q_{\nu+1}^{(1)}.$$

Le produit devient

$$0 = a_{l+1,1} q^{\lambda(2\nu+1)} + \sum a_{ij} q^{\lambda(2\nu+1)} \frac{Q_\nu^{(l+1)} Q_{\nu+1}^{(1)}}{Q_\nu^{(i)} Q_{\nu+1}^{(j)}}$$

où, soit $j > 1$, soit $j = 1$, $i \geqq l + 2$.

$$\frac{Q_\nu^{(l+1)} Q_{\nu+1}^{(1)}}{Q_\nu^{(i)} Q_{\nu+1}^{(j)}} = e_k(\nu)^{\left(\frac{1}{\rho} - \varepsilon\right)(l+1)\nu - \left(\frac{1}{\rho} - \varepsilon_1\right) i\nu} e_k(\nu+1)^{\left(\frac{1}{\rho} - \varepsilon'\right)(\nu+1) - \left(\frac{1}{\rho} - \varepsilon'_1\right) j(\nu+1)},$$

qui est aussi petit qu'on veut dès que ν est assez grand. Donc $a_{l+1,1} q^{\lambda(2\nu+1)}$, qui est entier, est nul, et

$$a_{l+1,1} = 0.$$

On conclura ainsi de proche en proche que $\frac{\psi_\nu^{(i)}}{\psi_{\nu,1}^{(i)}}$ est indépendant de i, par suite $= \frac{S_\nu}{S_\nu^{(1)}}$, par suite indépendant de ν et i, quand $\nu > \nu_1$, d'après (28 *bis*). Donc on peut écrire

$$\text{(28 ter)} \qquad \frac{u_{\lambda m+1}}{u_{\lambda m+1}^{(1)}} = \frac{u_{\lambda m+2}}{u_{\lambda m+2}^{(1)}} = \ldots.$$

Nous savons que ceci est loin d'être toujours impossible pour une valeur de $\frac{p}{q}$ [*comparer* notes (¹), p. 316 et 317)]. Mais on peut indiquer des cas étendus où ceci n'a jamais lieu.

Les coefficients de $u_{\lambda m+1}(x)$, $u_{\lambda m+1}^{(1)}$, $u_{\lambda m+2}$, $u_{\lambda m+2}^{(1)}$ étant donnés sauf un, il n'y a qu'une valeur au plus du dernier restant à fixer qui permette de satisfaire à

$$u_{\lambda,m+1}\, u^{(1)}_{\lambda,m+2} - u_{\lambda,m+2}\, u^{(1)}_{\lambda,m+1} = 0.$$

Il sera dès lors facile de former une infinité de fonctions $L^{(\lambda)}(x)$ dans lesquelles

$$u_{\lambda,m+1}\, u^{(1)}_{\lambda,m+2} - u_{\lambda,m+2}\, u^{(1)}_{\lambda,m+1} \neq 0,$$

pour une infinité de valeurs de m $\left(\text{quand } x = \frac{p}{q}\right)$. On voit en même temps que, en général, les conditions (28 *ter*) n'ont pas lieu.

Supposons encore, par exemple, que pour $m > m_1$, $u_{\lambda,m+1}(x)$ et $u^{(1)}_{\lambda,m+1}(x)$ aient leurs coefficients réels et de même signe; que $u_{\lambda,m+2}(x)$ et $u^{(1)}_{\lambda,m+2}(x)$ aient leurs coefficients de signes contraires. Si cette circonstance se présente pour une infinité de valeurs de m, (28 *ter*) est impossible dès que $\frac{p}{q} > 0$. Dans ce cas d'ailleurs, d'après le théorème V et son corollaire I, $g^{(\lambda)}(x)$ et $g_1^{(\lambda)}(x)$ sont transcendants pour $x > 0$.

Ces deux exemples comportent des extensions évidentes lorsque $g^{(\lambda)}(x)$ et $g_1^{(\lambda)}(x)$ présentent des lacunes. Nous n'insistons pas.

Supposons enfin que $g^{(\lambda)}(x)$ et $g_1^{(\lambda)}(x)$ soient des produits $FF_1\ldots F_{\lambda-1}$. Pour une infinité de valeurs de m

$$\psi_\nu^{(\lambda)} = p_\nu p'_\nu \ldots p_\nu^{(\lambda-1)} x^{\lambda\nu}, \qquad \psi_{\nu,1}^{(\lambda)} = \varpi_\nu \varpi'_\nu \ldots \varpi_\nu^{(\lambda-1)} x^{\lambda\nu},$$

et l'on a une infinité de relations

$$\frac{p_\nu p'_\nu \ldots p_\nu^{(\lambda-1)}}{\varpi_\nu \varpi'_\nu \ldots \varpi_\nu^{(\lambda-1)}} = \frac{p_{\nu+i} p'_{\nu+i} \ldots p_{\nu+i}^{(\lambda-1)}}{\varpi_{\nu+i} \varpi'_{\nu+i} \ldots \varpi_{\nu+i}^{(\lambda-1)}} = \ldots.$$

On peut toujours choisir les fonctions F, F_1, ... de façon que ceci ait lieu. Mais il y a des cas étendus où, quel que soit λ, ceci n'a jamais lieu.

En effet, il suffira que, pour une infinité de valeurs de ν,

$$p_\nu p'_\nu \ldots p_\nu^{(\lambda-1)} \neq 0, \qquad \varpi_\nu \varpi'_\nu \ldots \varpi_\nu^{(\lambda-1)} \neq 0,$$

et, pour une infinité d'autres valeurs de ν,

$$p_\nu p'_\nu \ldots p_\nu^{(\lambda-1)} = 0, \qquad \varpi_\nu \varpi'_\nu \ldots \varpi_\nu^{(\lambda-1)} \neq 0;$$

ou encore que les p'_ν, ..., $p_\nu^{(\lambda-1)}$, ϖ_ν, ..., $\varpi^{(\lambda-1)}$ soient tous réels et de même signe, les p_ν étant alternativement positifs ou négatifs. On sait d'ailleurs que, dans ces cas, $F(x)$, ..., $F_{\lambda-1}(x)$ sont transcendants pour x rationnel > 0.

2° ξ est algébrique. $\xi - \dfrac{\sum_1^{m\lambda} u_n}{\sum_1^{m\lambda} u_n^{(1)}}$ n'est jamais nul, le second terme étant rationnel. D'après la propriété I,

$$\left| \xi - \frac{\sum_1^{m\lambda} u_n}{\sum_1^{m\lambda} u_n^{(1)}} \right| \geqq \frac{1}{M_1\left(Q_m^{(\lambda)}\gamma_1^{\lambda m}\sum_1^{m\lambda} u_n^{(1)}\right)^{\alpha_1}} \qquad (M_1 \text{ fini}).$$

En résumé, que ξ soit rationnel ou algébrique, il faut, *en général*,

$$\left| \xi - \frac{\sum_1^{m\lambda} u_n}{\sum_1^{m\lambda} u_n^{(1)}} \right| \geqq \frac{1}{M_1\left(Q_m^{(\lambda)}\gamma_1^{\lambda m}\sum_1^{m\lambda} u_n^{(1)}\right)^{\alpha_2}} \qquad (M_1 \text{ fini}), \tag{29}$$

cette condition ayant *toujours* lieu quand ξ est algébrique.

Or, d'après (28), le premier membre est au plus égal à

$$\alpha \,|\, u_{\lambda m+\mu} \,| + \beta \,|\, u_{\lambda m+\mu_1} \,|;$$

donc

$$\left\{ \begin{aligned} \delta_1(|u_{\lambda m+\mu}| + |u_{\lambda m+\mu_1}|) &\geqq \delta_1 \left\{ \left| \frac{\psi_{m+\mu_2}^{(j)}\left(\frac{p}{q}\right)}{Q_{m+\mu_2}^{(j)}} \right| + \left| \frac{\psi_{m+\mu_3}^{(j_1)}\left(\frac{p}{q}\right)}{Q_{m+\mu_3}^{(j_1)}} \right| \right\} \\ &\geqq \left| \xi - \frac{\sum_1^{m\lambda} u_n}{\sum_1^{m\lambda} u_n^{(1)}} \right|. \end{aligned} \right. \tag{30}$$

Le second membre, si, par exemple, $\mu_2 < \mu_3$ ou $\mu_2 = \mu_3$, $j \leqq j_1$, est de la forme

$$e_k(m+\mu_2)^{-\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon\right)(m+\mu_2)j},$$

alors que le dernier membre de (29) est de la forme

$$e_k(m)^{-\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon_1\right)\lambda\alpha_2 m}.$$

$\sum_1^{m\lambda} u_n^{(1)}$ est d'ailleurs $\neq 0$ pour une infinité de valeurs de m, soit quand ξ est algébrique, soit, en général, quand ξ est rationnel (en particulier dans les cas indiqués précédemment). On a ici $\mu_2 > 0$. La comparaison des deux inégalités (29) et (30) conduit de suite à une impossibilité, d'après le lemme II.

Dans les cas mentionnés pages 343-344, $L^{(\lambda)}\left(\frac{p}{q}\right)$ est alors transcendant. Sans rappeler ces cas en détail, nous pourrons énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME XIV. — *Tout étant posé comme au théorème V (p. 319), le quotient de deux fonctions $g^{(\lambda)}(x)$ ne prend pour des valeurs rationnelles (réelles ou imaginaires) de x que des valeurs rationnelles ou transcendantes. Autrement dit, les nombres $L^{(\lambda)}\left(\frac{p}{q}\right)$, où $\frac{p}{q}$ est rationnel (réel ou imaginaire), sont exceptionnellement rationnels, en général transcendants. Ils ne sont jamais algébriques.*

On peut trouver des cas étendus où les nombres $L^{(\lambda)}\left(\frac{p}{q}\right)$ correspondant à une même fonction $L^{(\lambda)}(x)$ sont tous transcendants (¹) *(soit pour $x \neq 0$, soit pour x réel > 0).*

(¹) Voici un exemple non encore cité; posons

$$V g^{(\lambda)}(x) = P(x) + U g_1^{(\lambda)}(x),$$

où V, P, U sont des polynomes à coefficients entiers, V et U pouvant se réduire

Les produits 2 *à* 2, 3 *à* 3, ... *des nombres* $L^{(\lambda)}\left(\frac{p}{q}\right)$ *sont rationnels ou transcendants.*

Corollaire. — *Tous les nombres qu'on déduit de* $H'^{(2)}$ (*p.* 306) *par multiplication ou division sont rationnels ou transcendants. Aucun n'est algébrique.*

Remarque I. — Une somme de quotients de fonctions $g^{(\lambda)}(x)$, c'est-à-dire une somme de fonctions $L^{(\lambda)}(x)$, est une fonction $L^{(\lambda+\lambda_1)}(x)$, où λ_1 est entier. Par exemple,

$$\frac{g^{(\lambda)}(x)}{g_1^{(\lambda)}(x)} + \frac{g_2^{(\lambda)}(x)}{g_3^{(\lambda)}(x)} = \frac{g^{(\lambda)}g_3^{(\lambda)} + g_1^{(\lambda)}g_2^{(\lambda)}}{g_1^{(\lambda)}g_3^{(\lambda)}} = \frac{g_4^{(2\lambda)}}{g_5^{(2\lambda)}}.$$

Les mêmes propriétés de rationalité ou de transcendance restent donc vraies pour les sommes de nombres $g^{(\lambda)}\left(\frac{p}{q}\right)$.

Nous pourrons en particulier énoncer ce théorème :

Théorème XV. — *Soient les fonctions entières*

$$F(x) = \sum_0^\infty \pm \frac{p_n}{q_n} x^n, \tag{31}$$

avec $q_n = e_k(n)^{\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon\right)n}$ *donné,* $|p_n| \leqq e_k(n)^{\varepsilon n}$ $\left(\frac{q_{n+1}}{q_n}\right.$ *entier croissant indéfiniment avec* n, ρ *fixe et* $\left.k \geqq 3\right)$, *les coefficients ayant des signes quelconques, et les nombres* $N = F\left(\frac{p}{q}\right)$ *qu'on en déduit en attribuant à* x *toutes les valeurs rationnelles possibles.*

à des constantes.

$$L^{(\lambda)}(x) = \frac{g^{(\lambda)}(x)}{g_1^{(\lambda)}(x)} = \frac{P(x)}{V g_1^{(\lambda)}(x)} + \frac{U}{V}$$

est transcendant en même temps que $g_1^{(\lambda)}(x)$ pour les valeurs rationnelles de $\frac{p}{q}$ qui n'annulent pas $P(x)$ (*comp.* théorème V et ses corollaires).

$F\left(\frac{p}{q}\right)$ *est transcendant, si* $F(x)$ *ne se réduit pas à un polynome.*

Toute fonction rationnelle à coefficients rationnels des nombres N *est un nombre rationnel ou transcendant.*

Toute fonction rationnelle à coefficients rationnels des fonctions F, *si elle ne se réduit pas à une fraction rationnelle en* x, *est un nombre rationnel ou transcendant pour toutes les valeurs rationnelles de* x.

En effet, cette dernière propriété résulte de ce que le numérateur et le dénominateur sont des fonctions $g^{(\lambda)}(x)$.

On peut aussi considérer les nombres N_2 issus de fonctions rationnelles à coefficients rationnels de fonctions quasi-entières

$$F(x) + F_1\left(\frac{1}{x}\right) + F_2\left(\frac{1}{x - a_1}\right) + \ldots;$$

$F(x)$, $F_1(x)$, $F_2(x)$, ... étant des fonctions du même ensemble E, c'est-à-dire de la forme (31).

En général, ces nombres sont transcendants : ils ne sont jamais algébriques.

§ VII. — *Extensions des théories précédentes. Nombres obtenus par itération.*

Reprenons les fonctions $F(x)$ de l'ensemble E (p. 304), en supposant l'indice $\geqq 3$. Dire que $F\left(\frac{p}{q}\right)$, $\left(\frac{p}{q}\text{ rationnel}\right)$, est transcendant, c'est dire que $F(x) = \xi$ n'a pas la racine rationnelle $\frac{p}{q}$, ξ étant rationnel ou algébrique. Mais on peut, au sujet des équations $F(x) = \xi$, se poser bien d'autres questions.

Une pareille équation peut-elle avoir une racine algébrique; autrement dit, *si* ξ_1 *est algébrique,* $F(\xi_1)$ *peut-il être algébrique?*

Mieux, soient k l'indice de $F(x)$, ζ un nombre transcendant de la forme $f\left(\frac{p}{q}\right)$ ou $f(\xi_1)$, $f(x)$ étant une fonction d'un ensemble analogue à E, d'indice $k_1 \leqq k$; $F(\zeta)$ *peut-il être rationnel, algébrique ou transcendant d'indice* $\leqq k$? Autrement dit, l'équation $F(x) = \zeta_1$, où ζ_1 est rationnel, algébrique ou transcendant d'indice $\leqq k$, possède-t-elle une racine algébrique ou transcendante d'indice $k_1 < k$? Une racine de $F(x) = 0$, par exemple, peut-elle être une transcendante d'indice k_1 (¹)?

Parmi tous ces problèmes, nous nous contenterons, à titre d'indication, de traiter une partie du dernier, qu'on peut formuler ainsi :

Soit ζ *un nombre* $f\left(\frac{p}{q}\right)$ *supposé d'indice* $k_1 \geqq 3$ (p, q entiers > 0); $F(\zeta)$, *d'indice* $k \geqq k_1$, *est-il rationnel ou algébrique?*

D'après ce que nous avons vu antérieurement (p. 306), en ne considérant que des fonctions $f(x)$, $F(x)$ d'ensembles E' à coefficients tous positifs, et les indices étant pris $\geqq 3$, on peut toujours supposer $\frac{p}{q} = 1$. On a

$$\zeta = f(1) = \frac{p_0^{(1)}}{q_0^{(1)}} + \frac{p_1^{(1)}}{q_1^{(1)}} + \ldots + \frac{p_n^{(1)}}{q_n^{(1)}} + \ldots,$$

$$F(\zeta) = \frac{p_0}{q_0} + \frac{p_1}{q_1}\zeta + \ldots + \frac{p_n}{q_n}\zeta^n + \ldots.$$

De plus nous admettons : 1° pour $F(x)$, que $\frac{q_{n+1}}{q_n}$ soit un entier croissant constamment et indéfiniment avec n, et $q_n = e_k(n)^{n\left(\frac{1}{\rho} - \varepsilon\right)}$; 2° pour $f(x)$ des conditions semblables avec des valeurs de $q_n^{(1)}$, k_1, ρ_1 différentes ou non de q_n, k, ρ.

Posons

$$\zeta = \zeta_n + \rho_n \qquad (\zeta_n \text{ somme des } n+1 \text{ premiers termes de } \zeta),$$

$$F(\zeta) = S_m(\zeta) + R_m(\zeta) = S_m(\zeta_n) + R_m(\zeta) + M\rho_n^\alpha \tag{32}$$

[M fini, α entier $\geqq 1$, $S_m(x)$ somme des $m+1$ premiers termes de $F(x)$]. On a

$$\zeta_n = \frac{A_n}{q_n^{(1)}} \qquad (A_n \text{ entier} > 0),$$

(¹) On pourrait encore examiner si deux équations $F(x) = 0$, $F_1(x) = 0$ d'ensembles analogues à E ont une ou plusieurs racines communes.

et

$$(33)\qquad \rho_n = \frac{p_{n+1}^{(1)}}{q_{n+1}^{(1)}}(1+\varepsilon'),$$

$$S_m(\zeta_n) = \frac{M_n}{q_m(q_n^{(1)})^m} \geqq \frac{1}{q_n(q_n^{(1)})^m},$$

car M_n étant une somme de termes positifs est $\neq 0$;

$$(34)\qquad R_m(\zeta) = \frac{p_{m+1}}{q_{m+1}}\zeta^{m+1}(1+\varepsilon_1).$$

Admettons que $F(\zeta) = \xi$ soit algébrique de degré β ($\beta \geqq 1$); on aurait (propriété I),

$$|\xi - S_m(\zeta_n)| = \left|\xi - \frac{M}{q_m(q_n^{(1)})^m}\right| \geqq \frac{1}{N_1 q_m^\beta q_n^{(1)m\beta}} \qquad (N_1 \text{ fini}),$$

car $\xi > S_m(\zeta_n)$, puisque $\zeta > \zeta_n$ et $S_m(x)$ croît constamment avec m et x, pour $x > 0$, et, d'après (32) à (34),

$$(35)\qquad N_1^{-1} q_m^{-\beta} q_n^{(1)-m\beta} \leqq 2\frac{p_{m+1}}{q_{m+1}}\zeta^{m+1} + 2M\frac{p_{n+1}^{(1)\alpha}}{q_{n+1}^{(1)\alpha}}.$$

Nous supposons ici que m et n sont assez grands, et que $F(x)$ et $f(x)$ ne présentent plus de lacunes à partir d'un certain terme. Alors

$$q_m = e_k(m)^{\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon_2\right)m} = e_k(m)^{\tau' m}, \qquad q_n^{(1)} = e_{k_1}(n)^{\tau'_1 n}, \qquad k \geqq 3, \qquad k_1 \geqq 3,$$

$$p_m \leqq e_k(m)^{\tau m}, \qquad p_n^{(1)} \leqq e_{k_1}(n)^{\tau_1 n} \qquad (\tau, \tau_1 \text{ fixes}),$$

$$\tau < \frac{1}{\rho}, \qquad \tau_1 < \frac{1}{\rho_1}, \qquad \tau' - \tau, \qquad \tau'_1 - \tau_1 \text{ finis positifs},$$

$$\frac{q_m}{p_m} = e_k(m)^{\tau_2 m}, \qquad \frac{q_n^{(1)}}{p_n^{(1)}} = e_{k_1}(n)^{\tau_3 n},$$

$$4N_1\frac{p_{m+1}}{q_{m+1}}\zeta^{m+1} = e_k(m+1)^{-\tau_4 m}, \qquad 4MN_1\frac{p_{n+1}^{(1)\alpha}}{q_{n+1}^{(1)\alpha}} = e_{k_1}(n+1)^{-\tau_5 n},$$

$\tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5$ finis, positifs et ayant une limite inférieure > 0. Il faudra donc, d'après (35),

$$(36)\qquad 2 \leqq e_k(m)^{\beta\tau' m} e_{k_1}(n)^{\beta\tau'_1 mn}[e_k(m+1)^{-\tau_4 m} + e_{k_1}(n+1)^{-\tau_5 n}],$$

quels que soient m et n.

Pour montrer que cette inégalité n'est pas toujours possible, par suite que $F(\zeta)$ n'est ni rationnel ni algébrique, il nous suffira de vérifier que l'on a à la fois

$$(36)\qquad \begin{cases} e_k(m+1)^{\tau_4 m} > e_k(m)^{\beta\tau' m}\, e_{k_1}(n)^{\beta\tau'_1 mn}, \\ e_{k_1}(n+1)^{\tau_5 n} > e_k(m)^{\beta\tau' m}\, e_{k_1}(n)^{\beta\tau'_1 mn}, \end{cases}$$

n étant convenablement choisi en fonction de m.

Les lemmes I et II permettent de simplifier la première inégalité, car on a

$$e_k(m+1)^{\tau_1 m}\, e_k(m)^{-\beta\tau' m} > e_k(m+1)^{\sigma m}$$

(σ fini positif ayant une limite inférieure > 0), et (36) peut être remplacé par

$$(37)\qquad \begin{cases} e_k(m+1)^{\sigma} > e_{k_1}(n)^{\beta\tau'_1 n}, \\ e_{k_1}(n+1)^{\tau_5 n} > e_k(m)^{\beta\tau' m}\, e_{k_1}(n)^{\beta\tau'_1 mn}. \end{cases}$$

Nous prendrons

$$(38)\qquad n = e_{k-k_1}(m) + \eta = \log_{k_1-k}(m) + \eta,$$

où η, positif, nul ou négatif, a son module $\leq \frac{1}{2}$, de façon que $e_{k-k_1}(m) + \eta$ soit l'entier le plus voisin de $e_{k-k_1}(m)$.

Avant d'aller plus loin, nous établirons les lemmes préliminaires suivants, qui ont lieu dès que m est assez grand (entier ou non).

Lemme III. — *Quand α est donné et > 0, $e_{k_1}[e_{k-k_1}(m) + \alpha]$ croît avec k_1 (k_1 positif ou négatif quelconque).*

Il suffira en effet que

$$e_{k_1}[e_{k-k_1}(m) + \alpha] > e_{k_1-1}[e_{k-k_1+1}(m) + \alpha],$$

ou que

$$e^{e_{k-k_1}(m)+\alpha} = e^{\alpha}.e_{k-k_1+1}(m) > \alpha + e_{k-k_1+1}(m),$$

ce qui a lieu si

$$(e^{\alpha} - 1)e_{k-k_1+1}(m)$$

croît quand m croît, c'est-à-dire dès que $\alpha > 0$.

LEMME IV. — *Quand* $\alpha > 0$, $e_{k_2}(m+\alpha) \geqq e_{k_2}(m) + \alpha$, *dès que* $k_2 \geqq 0$.

Ceci a lieu pour $k_2 = 0$. Admettant cette inégalité pour une valeur positive de k_2, on en tire

$$e_{k_2+1}(m+\alpha) \geqq e^\alpha e_{k_2+1}(m) > e_{k_2+1}(m) + \alpha,$$

en sorte que le lemme a lieu pour $k_2 = 0, 1, 2, \ldots$.

LEMME V. — *On a*

$$e_{k_2}(m+\beta) > (1+\tau)e_{k_2}(m), \qquad k_2 \geqq 1, \qquad \beta > 0,$$

τ *fixe* > 0.

Pour $k_2 = 1$,

$$e^{m+\beta} = e^\beta . e^m > (1+\tau)e^m,$$

si $\tau < e^\beta - 1$. Admettant cette inégalité pour une valeur de $k_2 \geqq 1$, on en tire

$$e_{k_2+1}(m+\beta) > e_{k_2+1}(m)^{1+\tau} = e_{k_2+1}(m) e_{k_2+1}(m)^\tau > e_{k_2+1}(m)(1+\tau),$$

où τ fini arbitraire > 0 et $\leqq e^\beta - 1$, dès que m est assez grand.

LEMME VI. — *On a*

$$e_{k-2}(m+\alpha+\beta) > (1+\tau)e_{k_1-2}[e_{k-k_1}(m)+\alpha],$$

α, β *donnés* > 0, *quand* $k \geqq k_1 \geqq 3$.

On a, si $k \geqq 3$, d'après les lemmes IV et V,

$$\begin{aligned} e_{k-2}(m+\alpha+\beta) &> (1+\tau)e_{k-2}(m+\alpha) \\ &= (1+\tau)e_{k_1-2}[e_{k-k_1}(m+\alpha)] \geqq (1+\tau)e_{k_1-2}[e_{k-k_1}(m)+\alpha], \end{aligned}$$

si $k \geqq k_1 \geqq 3$.

Si $k < k_1$, le lemme VI n'est plus exact : ainsi, pour $k = 3$, $k_1 = 4$,

$$e_{k-3}(m+\alpha+\beta) = m+\alpha+\beta,$$
$$e_{k_1-3}[e_{k-k_1}(m)+\alpha] = e^{\log m+\alpha} = me^\alpha,$$

et l'on n'a pas

$$e^{m+\alpha+\beta} > (1+\tau)e^{me^{\alpha}}.$$

Lemme VII. — *On a*

$$e_{k_1-2}[e_{k-k_1}(m)+\alpha+\beta] > (1+\tau)e_{k_1-2}[e_{k-k_1}(m)+\alpha],$$

pour $k_1 \geqq 3$, *quel que soit k positif ou négatif* ($\alpha, \beta > 0$ *donnés*).

Si $k_1 = 3$,

$$e^{e_{k-k_1}(m)+\alpha}e^{\beta} > (1+\tau)e^{e_{k-k_1}(m)+\alpha},$$

quand $\tau < e^{\beta} - 1$, quel que soit k positif ou négatif.

Admettons le lemme pour une valeur k'_1 de $k_1 \geqq 3$; on en tire

$$\begin{aligned} e_{k'_1-1}[e_{k-k'_1}(m)+\alpha+\beta] &> e_{k'_1-1}[e_{k-k'_1}(m)+\alpha]^{1+\tau} \\ &> e_{k'_1-1}[e_{k-k'_1}(m)+\alpha](1+\tau) \end{aligned}$$

ou

$$e_{(k'_1+1)-2}[e_{(k+1)-(k'_1+1)}(m)+\alpha+\beta] > e_{(k'_1+1)-2}[e_{(k+1)-(k'_1+1)}(m)+\alpha](1+\tau),$$

ce qui établit le lemme VII pour la valeur k'_1+1 de k_1, par suite en général.

Lemme VIII. — *On a*

$$e_{k_1-2}[e_{k-k_1}(m)+\alpha] > (1+\tau)e_{k-2}(m)$$

pour $k_1 \geqq 3$, *quel que soit* k, α *donné* > 0.

D'après le lemme III, le premier membre croît avec k_1; il suffira donc d'établir le lemme pour $k_1 = 3$, c'est-à-dire de montrer que

$$e^{e_{k-3}(m)+\alpha} = e^{\alpha}.e_{k-2}(m) > (1+\tau)e_{k-2}(m),$$

ce qui a lieu si $\tau < e^{\alpha} - 1$.

Ceci posé, la démonstration devient assez simple :

Prenons la première inégalité (37), ou, d'après (38),

$$e_k(m+1)^\sigma > e_{k_1}[e_{k-k_1}(m)+\eta]^{\beta\tau'_1[e_{k-k_1}(m)+\eta]}.$$

Il suffira de prouver que, γ étant fini,

$$e_k(m+1) > e_{k_1}\left[e_{k-k_1}(m)+\frac{1}{2}\right]^{\gamma e_{k-k_1}(m)}. \tag{39}$$

D'abord, ceci n'a pas forcément lieu quand $k_1 < k$: prenons $k=3$, $k_1=4$; il faudrait

$$e_2(m+1) > \gamma \log m . e_3\left(\log m + \frac{1}{2}\right),$$

$$e . e^m > \log(\gamma \log m) + e^{m\sqrt{e}},$$

ce qui n'a pas lieu.

Supposons, au contraire, $k \geqq k_1 \geqq 3$. Il suffit

$$e_{k-1}(m+1) > \gamma e_{k-k_1}(m) e_{k_1-1}\left[e_{k-k_1}(m)+\frac{1}{2}\right].$$

Or, pour $k_1 \geqq 3$,

$$\gamma[e_{k-k_1}(m)] = e_{k_1-1}[e_{k-k_1}(m)]^\varepsilon = e_{k_1-1}\left[e_{k-k_1}(m)+\frac{1}{2}\right]^{\varepsilon_1},$$

ε, ε_1 aussi petits qu'on veut. Il suffit donc, *a fortiori*,

$$e_{k-1}(m+1) > e_{k_1-1}\left[e_{k-k_1}(m)+\frac{1}{2}\right]^{1+\varepsilon},$$

$$e_{k-2}(m+1) > (1+\varepsilon) e_{k_1-2}\left[e_{k-k_1}(m)+\frac{1}{2}\right],$$

ce qui a bien lieu d'après le lemme VI : (39) est donc vérifiée.

Passons à la deuxième inégalité (37); elle devient, d'après (38),

$$\begin{aligned} &e_{k_1}[e_{k-k_1}(m)+1+\eta]^{\tau_5[e_{k-k_1}(m)+\eta]} \\ &\quad > e_k(m)^{\beta\tau' m} e_{k_1}[e_{k-k_1}(m)+\eta]^{\beta\tau'_1 m[e_{k-k_1}(m)+\eta]}. \end{aligned}$$

Il suffit que

$$e_{k_1}[e_{k-k_1}(m)+1+\eta]^{e_{k-k_1}(m)+\eta} > \{e_k(m) e_{k_1}[e_{k-k_1}(m)+\eta]\}^{\gamma m[e_{k-k_1}(m)+\eta]},$$

γ constante finie, ou

(40) $e_{k_1}[e_{k-k_1}(m)+1+\eta] > \{e_k(m)e_{k_1}[e_{k-k_1}(m)+\eta]\}^{\gamma m}$.

1° $\eta \geqq 0;\; e_k(m) \leqq e_{k_1}[e_{k-k_1}(m)+\eta]$.

Il suffit donc que

$$e_{k_1}[e_{k-k_1}(m)+1+\eta] > \{e_{k_1}[e_{k-k_1}(m)+\eta]\}^{2\gamma m}$$

ou

$$e_{k_1-1}[e_{k-k_1}(m)+1+\eta] > 2\gamma m\, e_{k_1-1}[e_{k-k_1}(m)+\eta];$$

$e_{k_1-1}[e_{k-k_1}(m)+\eta]$ croît avec k_1, d'après le lemme III, et est

$$\geqq e_{k-1}(m)+\eta = (2\gamma m)^{\frac{1}{\varepsilon}}$$

pour $k \geqq 3$ (ε aussi petit qu'on veut pour m assez grand). Donc

$$2\gamma m \leqq e_{k_1-1}[e_{k-k_1}(m)+\eta]^{\varepsilon},$$

et il suffit

$$e_{k_1-1}[e_{k-k_1}(m)+1+\eta] > e_{k_1-1}[e_{k-k_1}(m)+\eta]^{1+\varepsilon}$$

ou

$$e_{k_1-2}[e_{k-k_1}(m)+1+\eta] > (1+\varepsilon)e_{k_1-2}[e_{k-k_1}(m)+\eta],$$

ce qui est une conséquence du lemme VII; (40) a lieu quand $\eta \geqq 0$.

2° $\eta < 0;\quad e_k(m) > e_{k_1}[e_{k-k_1}(m)+\eta]$.

Il suffit que

$$e_{k_1}\left[e_{k-k_1}(m)+\frac{1}{2}\right] > e_k(m)^{2\gamma m}$$

d'après (40), ou

$$e_{k_1-1}\left[e_{k-k_1}(m)+\frac{1}{2}\right] > 2\gamma m\, e_{k-1}(m) = e_{k-1}(m)^{1+\varepsilon}$$

ou

$$e_{k_1-2}\left[e_{k-k_1}(m)+\frac{1}{2}\right] > (1+\varepsilon)e_{k-2}(m),$$

ce qui est une conséquence du lemme VIII; (40) a lieu quand $\eta < 0$.

Les deux inégalités (37) ont alors lieu quand on tient compte de (38), et nous en concluons le théorème suivant :

THÉORÈME XVI. — *Considérons les fonctions*

$$F(x)=\sum_0^\infty \frac{p_n}{q_n}x^n,$$

où p_n et q_n sont entiers et positifs, ainsi que $\frac{q_{n+1}}{q_n}$, et, dès que n est assez grand,

$$q_n=e_k(n)^{\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon_n\right)n},\qquad 0<p_n\leqq e_k(n)^{\tau n},$$

τ et ρ fixes, $\tau<\frac{1}{\rho}$, k entier $\geqq 3$, x rationnel >0. Quand k, ρ, x prennent toutes les valeurs possibles compatibles avec ces conditions, non seulement $F(x)$ est transcendant, mais encore, si $F_1(x)$ est une fonction quelconque de même forme que $F(x)$ et d'indice $k_1\leqq k$,

$$F_1(x)=\sum_0^\infty \frac{p_n^{(1)}}{q_n^{(1)}}x^n$$

satisfaisant à des conditions analogues, $F[F_1(x)]$ est aussi transcendant.

En particulier, $F(F(x))$ est transcendant.

Remarque I. — Quand $k=k_1$, la démonstration se simplifie notablement, car, si l'on prend $m=n$, les inégalités (37) sont des conséquences des lemmes I et II.

Remarque II. — On est ainsi conduit à se poser encore ce problème que nous nous contenterons d'indiquer.

x restant rationnel, et F, F_1, F_2, ... étant des fonctions de même forme que F, $F(F_1(F_2(F_3)))$, par exemple, est-il transcendant? En particulier $F(F(F(F)))$ est-il transcendant? Autrement dit, les fonctions F du théorème précédent ne donnent-elles, par itération, que des nombres transcendants?

§ VIII. — *Remarques diverses.*

1. *Extension des considérations précédentes à des séries ayant un rayon de convergence fini.* — Considérons une fonction

$$f(x) = \sum_1^{\infty} a_n x^{\varpi_n},$$

qui peut avoir un rayon de convergence fini, 1 par exemple, et où ϖ_n est un entier qui croît constamment et indéfiniment avec n. On a, si $\frac{p}{q} < 1$,

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = \sum a_n \left(\frac{p}{q}\right)^{\varpi_n} = \sum \pm \frac{p_n}{q_n} \frac{p^{\varpi_n}}{q^{\varpi_n}};$$

posons

$$p_n p^{\varpi_n} = P_n, \qquad q_n q^{\varpi_n} = Q_n;$$

Q_n divise Q_{n+1} si q_n divise q_{n+1}. Soit

$$f(z) = \sum_1^{\infty} \pm \frac{P_n}{Q_n} z^n;$$

$f\left(\frac{p}{q}\right) = F(1)$. $F(z)$, pour une croissance assez rapide des ϖ_n, est une fonction entière.

Eu égard au mode de décroissance des a_n il peut se faire que, sous cette nouvelle forme, on aperçoive, comme corollaires des théorèmes précédents, des propriétés de $f\left(\frac{p}{q}\right)$ que ces théorèmes ne pouvaient pas donner.

Exemple : soit $p = 1$, $q > 1$, $p_n = 1$, $q_n = n!$,

$$f(x) = \sum_1^{\infty} \frac{x^{\varpi_n}}{n!},$$

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{1}{n!\, q^{\varpi_n}}, \qquad F(z) = \sum_1^{\infty} \frac{z^n}{n!\, q^{\varpi_n}}.$$

LE PLUS GRAND QUADRUPLE

(10^2, 12^2, 16^2, 22^2)

CARRÉ MAGIQUE DE PIERRE FERMAT

pour la première fois édité sans fautes d'impression
par Basile de Sidoratsky en 1904.

23	464	459	457	109	111	108	110	132	133	130	131	373	371	357	356	372	382	370	335	30	22
25	48	436	435	433	432	196	195	241	242	200	225	284	287	246	245	288	261	51	58	47	460
27	45	13	474	469	467	82	81	92	90	91	83	401	400	396	398	399	397	20	12	440	458
461	53	15	34	450	449	447	446	156	157	180	181	326	327	306	307	44	37	33	470	430	24
456	56	17	42	3	484	479	477	66	65	68	67	422	421	416	415	10	2	443	468	429	29
137	428	471	41	5	127	126	125	361	362	363	364	365	366	118	117	116	480	444	14	57	348
153	431	466	31	7	347	148	338	339	145	143	342	142	344	345	139	138	478	454	19	54	332
154	439	98	453	481	325	161	169	168	318	319	320	321	163	162	324	160	4	32	387	46	331
384	266	407	445	476	292	293	191	190	299	298	297	186	185	184	302	193	9	40	78	219	101
383	268	406	442	424	270	280	272	273	211	210	209	208	278	279	205	215	61	43	79	217	102
379	265	392	172	60	248	227	250	251	230	232	231	233	256	257	258	237	425	313	93	220	106
378	267	391	173	59	226	249	228	229	252	254	253	255	234	235	236	259	426	312	94	218	107
351	282	405	176	74	204	214	206	207	277	276	275	274	212	213	271	281	411	309	80	203	134
350	263	390	177	73	182	192	301	300	189	187	188	296	295	294	183	303	412	308	95	222	135
334	199	77	330	423	171	315	323	322	164	165	166	167	317	316	170	314	62	155	408	286	151
333	216	96	311	413	149	346	147	146	340	341	144	343	141	140	337	336	72	174	389	269	152
100	221	76	310	414	369	359	360	124	123	122	121	120	119	367	368	358	71	175	409	264	385
99	223	75	291	483	1	6	8	419	420	417	418	63	64	69	70	475	482	194	410	262	386
104	202	97	452	35	36	38	39	329	328	305	304	159	158	179	178	441	448	451	388	283	381
105	238	473	11	16	18	403	404	393	395	394	402	84	85	89	87	86	88	465	472	247	380
136	438	49	50	52	53	289	290	244	243	285	260	201	198	239	240	197	224	434	427	437	349
463	21	26	28	376	374	377	375	353	352	355	354	112	114	128	129	113	103	115	150	455	462

SIDORATSKY-Imprimeur
50, r. Mozart, Paris, 16-ème.
PRIX 5 FRANCS.

Si $F(z)$ est d'indice $\geqq 3$, ce qui arrivera si ϖ_n est donné et

$$= e_k(n)^{n\left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon_n\right)}, \qquad k \geqq 2,$$

on voit que $F(1)$ est transcendant, par suite aussi $f\left(\frac{1}{q}\right)$.

Une partie des théorèmes précédents doit alors s'étendre aux fonctions $f(x)$ à rayon de convergence fini ou infini présentant des lacunes d'étendue assez rapidement croissante avec n, en particulier au produit et au quotient de deux fonctions de cette nature. Ainsi, dans l'exemple précédent, les fonctions rationnelles à coefficients rationnels des nombres de la forme $f\left(\frac{1}{q}\right)$ sont des nombres rationnels ou transcendants (théorème XV).

Nous nous contenterons d'avoir signalé ce fait. Nous avons d'ailleurs déjà indiqué antérieurement des propriétés semblables de fonctions analogues à $f(x)$ (¹).

II. *Sur* (²) *une propriété curieuse des nombres* X. — On sait (propriété I), d'après Liouville (³), que, étant donné un nombre X_1 limite d'une série infinie donnée de fractions rationnelles,

$$\frac{P_1}{Q_1}, \quad \frac{P_2}{Q_2}, \quad \ldots, \quad \frac{P_n}{Q_n}, \quad \ldots,$$

si les différences $\left| X_1 - \frac{P_n}{Q_n} \right|$ décroissent assez vite quand n croît indéfiniment, ce nombre X_1 est transcendant.

Soit, en particulier, une fraction exprimée dans un système de numération de base q qui présente dans son expression des suites de zéros de plus en plus longues au fur et à mesure que l'on s'éloigne de la virgule vers la droite. Si le nombre de zéros de ces suites croît assez vite, on obtient les nombres transcendants que nous avons appelés

---

(¹) *Journal de mathématiques*, 1902, p. 419, 429.

(²) Voir *Comptes rendus*, 1901, 2ᵉ semestre, p. 1191, la définition de ces nombres, rappelée d'ailleurs ci-après.

(³) LIOUVILLE, *Journal de mathématiques*, 1851, et BOREL, *Leçons sur la théorie des fonctions*, 1898, p. 26.

les nombres X définis précisément par cette propriété de leurs suites de zéros dans leur expression dans un système de numération ([1]).

Les nombres X jouissent d'une propriété excessivement remarquable, qui leur donne vraiment un caractère spécial : soit

$$X = \frac{\delta_1}{q^{\psi_1}} + \frac{\delta_2}{q^{\psi_2}} + \ldots + \frac{\delta_n}{q^{\psi_n}} + \ldots \qquad (X < 1).$$

Supposons ici $\delta_1, \ldots, \delta_n, \ldots$ entiers positifs, $\leqq q - 1$, ψ_n croissant assez vite avec n pour une valeur au moins de q. La fraction rationnelle

$$X_n = \frac{\delta_1}{q^{\psi_1}} + \ldots + \frac{\delta_n}{q^{\psi_n}} = \frac{B_n}{q^{\psi_n}}$$

peut être développée dans le système de numération de base q_1 (q_1 premier à q).

Quand nous effectuons, dans ce système de numération, la division de B_n par q^{ψ_n}, tous les restes sont $< q^{\psi_n}$. La division ne peut d'ailleurs pas s'arrêter, car si, par exemple,

$$\frac{B_n}{q^{\psi_n}} = \frac{C}{q_1^{\chi}} \qquad (\text{C entier}),$$

$$B_n q_1^{\chi} = C q^{\psi_n},$$

et q^{ψ_n} devrait diviser B_n : le développement en fraction de $\frac{B_n}{q^{\psi_n}}$ dans le système de numération de base q_1 est donc illimité.

Mais, les restes étant $< q^{\psi_n}$, on finira, au bout d'un nombre limité d'opérations, par retomber sur le même reste : la fraction obtenue est périodique. On aura ainsi

$$\frac{B_n}{q^{\psi_n}} = \frac{A}{q_1^{\chi_1}} + \frac{A_1}{q_1^{\chi_1 + \varpi_1}}\left(1 + \frac{1}{q_1^{\varpi_1}} + \frac{1}{q_1^{2\varpi_1}} + \ldots\right),$$

$A_1 \neq 0$ étant la période, qui a ϖ_1 chiffres. On a ici $\chi_1 = 0$, c'est-à-dire que $\frac{B}{q^{\psi_n}}$ est une fraction périodique simple. En effet, le premier chiffre

---

([1]) *Comptes rendus*, 1901, 2e semestre, p. 1191.

de la période étant le premier chiffre de A_1, les derniers de A et de A_1 sont différents, $A - A_1 \not\equiv 0 \pmod q$),

$$\frac{B_n}{q^{\psi_n}} = \frac{A}{q_1^{\chi_1}} + \frac{A_1}{q_1^{\chi_1+\varpi_1}} \frac{1}{1-\frac{1}{q_1^{\varpi_1}}} = \frac{A}{q_1^{\chi_1}} + \frac{A_1}{q_1^{\chi_1}(q_1^{\varpi_1}-1)} = \frac{A(q_1^{\varpi_1}-1)+A_1}{q_1^{\chi_1}(q_1^{\varpi_1}-1)}.$$

En chassant les dénominateurs, on voit que $q_1^{\chi_1}$ doit diviser le numérateur du deuxième membre, si $\chi_1 > 0$, ce qui exige $\chi_1 = 0$.

D'autre part

$$X - X_n = \frac{\delta_{n+1}}{q^{\psi_{n+1}}}(1 + \varepsilon'_{n+1}),$$

ε'_{n+1} tendant vers 0 quand n croît indéfiniment. Le premier chiffre significatif $\neq 0$ dans l'expression de $X - X_n$ dans le système de numération de base q_1 est le $\eta_{n+1}^{\text{ième}}$, η_{n+1} étant aussi grand que l'on veut par rapport à η_n, si ψ_{n+1} est assez grand par rapport à ψ_n. On a

$$X = \frac{B_n}{q^{\psi_n}} + \frac{\delta_{n+1}}{q^{\psi_{n+1}}}(1 + \varepsilon'_{n+1});$$

le dernier terme est $< \frac{1}{q_1^{\eta_{n+1}-1}}$, et $\frac{B_n}{q^{\psi_n}}$ a avec X, dans le système de numération de base q_1, à droite de la virgule, si la période A_1 ne comprend pas que des chiffres $q_1 - 1$ (des 9 si $q_1 = 10$), au moins les $\eta_{n+1} - \varpi_1$ premiers chiffres significatifs communs; ceci a lieu dès lors quand A_1 ne se réduit pas au chiffre unique $q_1 - 1$, ($\varpi_1 = 1$). Si, au contraire, ce cas particulier a lieu, dans $\frac{B_n}{q^{\psi_n}}$, tous les chiffres seraient des chiffres $q_1 - 1$. On aurait

$$\frac{B_n}{q^{\psi_n}} = \frac{q_1 - 1}{q_1}\left(1 + \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_1^2} + \ldots\right) = 1,$$

ce qui n'a pas lieu : autrement dit, ce cas particulier exceptionnel ne peut se présenter.

Dès lors, $\frac{B_{n+1}}{q^{\psi_{n+1}}}$ et X ont, dans le système de numération de base q_1, à droite de la virgule, au moins les $\eta_{n+2} - \varpi_2$ premiers chiffres significatifs communs. D'ailleurs ϖ_1 est fonction de ψ_n, ϖ_2 et η_{n+1} de ψ_{n+1},

η_{n+2} de ψ_{n+2}; on peut prendre la croissance de ψ_n avec n assez rapide pour que $\eta_{n+1} - \varpi_1$ soit aussi grand que l'on veut par rapport à η_n, $\eta_{n+2} - \varpi_2$ aussi grand que l'on veut par rapport à $\eta_{n+1} - \varpi_1$ et η_{n+1}. Dans l'intervalle I entre le premier et le $(\eta_{n+2} - \varpi_2)^{\text{ième}}$ chiffre significatif à droite de la virgule, les chiffres appartiennent aux périodes de $\frac{B_{n+1}}{q^{\psi_{n+1}}}$: ϖ_2 étant le nombre de chiffres de la période de $\frac{B_{n+1}}{q^{\psi_{n+1}}}$, si ψ_n croît assez vite avec n, $\frac{\eta_{n+2} - \varpi_2}{\varpi_2}$ croît aussi vite que l'on veut, et l'intervalle I comprend autant de périodes que l'on veut de $\frac{B_{n+1}}{q^{\psi_{n+1}}}$. Par conséquent, lorsque ψ_n croît suffisamment vite avec n, le développement de X, dans le système de numération de base q_1, nombre premier à q, présente, à la droite de la virgule, une infinité de suites de chiffres $s_1, s_2, \ldots, s_m, \ldots$, dont chacune est formée par la répétition d'un même groupe de chiffres un nombre aussi grand de fois que l'on veut (quand m est assez grand). Ces fractions sont ainsi voisines des fractions périodiques, et l'on peut les appeler *quasi-périodiques;* de même, on pourra appeler les nombres X dans le système de numération de base q, à cause de leurs suites de o et les nombres X_1 précédents (p. 357), des *nombres quasi-rationnels.*

On connaît cette proposition d'arithmétique élémentaire, résultant d'ailleurs de ce qui précède :

Un nombre rationnel $\frac{p}{q}$ (p, q entiers premiers entre eux) est représenté dans tout système de numération de base q_1 première à q par une fraction périodique.

La démonstration précédente nous donne le théorème suivant corrélatif pour les nombres X, ou nombres quasi-rationnels.

Théorème XVII. — *Soit un nombre* (¹)

$$X = A + \sum_1^\infty \frac{\delta_n}{q^{\psi_n}}$$

(¹) Quand $A \neq 0$, en ajoutant $-A$, on obtient un des nombres étudiés ci-dessus. La somme d'un nombre entier, rationnel ou algébrique, et d'un nombre transcendant est d'ailleurs un nombre transcendant.

(δ_n *entier positif* $\leqq q-1$; A, q *entiers;* ψ_n *fonction croissante de* n) *qui, représenté dans le système de numération de base* q, *possède, après le* $\psi_n^{\text{ième}}$ *chiffre significatif à droite de la virgule, un nombre de zéros suffisamment grand (ce qui revient à dire que* ψ_n *croît assez vite avec* n), *autrement dit, par définition, un nombre quasi-rationnel dans le système de numération de base* q.

Dans un système de numération de base q_1 *première à* q, X *est représenté par* A + *une fraction quasi-périodique simple, c'est-à-dire une fraction qui présente immédiatement à la droite de la virgule une infinité de suites* $s_1, s_2, \ldots, s_m, \ldots$ *de chiffres dont chacune est formée par la répétition un nombre aussi grand que l'on veut de fois (dès que* m *est assez grand) d'un même groupe de chiffres, les périodes commençant aussitôt après la virgule.*

On peut établir une proposition en partie réciproque.

Considérons, en effet, une fraction quasi-périodique dans un système de numération de base q_1, et une de ces suites s_n, par exemple, en supposant toutefois, pour plus de généralité, que cette fraction possède immédiatement à droite de la virgule un certain nombre de chiffres n'appartenant pas aux périodes. Soit A_n la période correspondant à s_n, de λ_n chiffres : on pourra écrire

$$X' = \frac{C_n}{q_1^{\alpha_n}} + \frac{A_n}{q_1^{\alpha_n+\lambda_n}}\left(1 + \frac{1}{q_1^{\lambda_n}} + \ldots + \frac{1}{q_1^{(k_n-1)\lambda_n}}\right) + \frac{D_n}{q_1^{\alpha_n+k_n\lambda_n+1}},$$

où $\frac{k_{n+1}}{k_n}$ croît suffisamment vite avec n, D_n quantité $< q_1$, $A_n \leqq q_1^{\lambda_n} - 1$, $C_n \leqq q_1^{\alpha_n} - 1$, α_n restant limité ou ne croissant pas trop vite avec n.

$$X' = \frac{C_n}{q_1^{\alpha_n}} + \frac{A_n}{q_1^{\alpha_n+\lambda_n}} \frac{1 - \dfrac{1}{q_1^{k_n\lambda_n}}}{1 - \dfrac{1}{q_1^{\lambda_n}}} + \frac{D_n}{q_1^{\alpha_n+k_n\lambda_n+1}},$$

$$X' = \frac{C_n}{q_1^{\alpha_n}} + \frac{A_n}{q_1^{\alpha_n}(q_1^{\lambda_n}-1)} + \frac{D_n}{q_1^{\alpha_n+k_n\lambda_n+1}} - \frac{A_n}{q_1^{\alpha_n+k_n\lambda_n}(q_1^{\lambda_n}-1)},$$

$$X' - \frac{C_n(q_1^{\lambda_n}-1) + A_n}{q_1^{\alpha_n}(q_1^{\lambda_n}-1)} = \frac{D_n(q_1^{\lambda_n}-1) - A_n q_1}{(q_1^{\lambda_n}-1)q_1^{\alpha_n+k_n\lambda_n+1}}.$$

Le premier membre décroît aussi vite que l'on veut quand n croît, pourvu que s_n et k_n croissent assez vite avec n. D'après le théorème connu de Liouville (propriété I, p. 296), X' est transcendant. D'où ce théorème :

Théorème XVIII. — *Soit une fraction* X' *quasi-périodique dans le système de numération de base* q_1, *c'est-à-dire, par définition, une fraction qui présente, à la droite de la virgule, une infinité de suites* $s_1, s_2, \ldots, s_m, \ldots$ *de chiffres dont chacune est formée par la répétition un nombre* $k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots$ *de fois au moins d'un même groupe de chiffres, ces suites commençant ou non après la virgule (le nombre de chiffres* α_n *de la partie non périodique immédiatement à droite de la virgule ne croissant pas trop vite quand* n *croît ou restant limité). Si* k_n *croît assez vite avec* n *par rapport à* $\frac{s_n}{k_n}$ *et* α_n, X' *est transcendant* (1).

Cette dernière propriété s'étend aux fractions continues quasi-périodiques simples ou mixtes (la suite des quotients incomplets remplaçant la suite des nombres à la droite de la virgule). Nous avons ainsi des exemples, les premiers, croyons-nous, de fractions continues arithmétiques dont tous les quotients incomplets sont limités, et dont on puisse affirmer la transcendance (2).

Bourg-la-Reine, janvier 1904.

(1) Ces deux théorèmes peuvent être considérés comme se rattachant à un ordre d'idées ayant provoqué plusieurs questions dans *l'Intermédiaire des Mathématiciens*. Exemples : questions 1836, 1896, 2088, 2464, 2465. Le premier donne même une réponse à la question 2088 posée par nous.

(2) On savait toutefois qu'il y en avait (voir, par exemple, Borel, *Leçons sur la théorie des fonctions*, p. 33).