JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. BOUSSINESQ

Calcul du pouvoir refroidissant des courants fluides

Journal de mathématiques pures et appliquées 6e série, tome 1 (1905), p. 285-332.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1905_6_1__285_0>

Calcul du pouvoir refroidissant des courants fluides;

PAR M. J. BOUSSINESQ.

SOMMAIRE : § I. Objet et résultats de ce travail; vérifications expérimentales. — § II. Echauffement permanent d'un courant fluide, par un cylindre indéfini dont l'axe lui est normal et qui s'y trouve immergé. — § III. Pouvoir refroidissant du courant sur le cylindre : applications à un plateau mince, au cylindre circulaire, aux cylindres elliptiques, à une armille. — § IV. Echauffement, par un corps de révolution, d'un courant fluide l'enveloppant et dirigé suivant son axe. — § V. Pouvoir refroidissant du courant fluide sur le corps de révolution; applications à la sphère, à l'ellipsoïde, au plateau circulaire, à une aiguille. — § VI. Extension des lois précédentes à tout corps convexe. — § VII. Cas de l'ellipsoïde à axes inégaux; application à un disque et à une aiguille elliptiques.

---

§ I. — Objet et résultats de ce travail; vérifications expérimentales.

1. L'équation aux dérivées partielles régissant la propagation de la chaleur dans les fluides a été découverte par Fourier en 1820 et réduite, quelques années après, par Ostrogradsky et Poisson, à sa forme la plus simple, presque identique à celle de l'équation usuelle que Fourier avait donnée bien antérieurement pour les solides isotropes : elle exprime, en effet, que la dérivée θ', par rapport au temps t, de la température θ d'une même particule fluide *suivie dans son mouvement*, est, à chaque instant, proportionnelle au paramètre différentiel $\Delta_2\theta$, dérivée naturelle, *dans l'espace*, de la température actuelle θ, ou mesure de sa rapidité *moyenne* d'accroissement autour de la particule[1]. Il n'aurait pas été possible d'imaginer une loi plus simple; et, cependant, son adjonction aux équations ordinaires de l'Hydrodynamique, incomplètes sans cela, paraissait rendre tout à fait inabordable le problème des mouvements d'un fluide. Aussi, trois quarts de siècle se sont écoulés depuis, sans qu'on en eût, du moins à ma connaissance, tiré aucun parti, avant mon étude de 1901, publiée dans le Tome II des leçons sur la *Théorie analytique de la chaleur, mise en harmonie avec la Thermodynamique et avec la Théorie mécanique de la lumière* (p. 172 à 195). Jusque-là, géomètres et physiciens s'étaient contentés, dans les problèmes dynamiques, d'attribuer aux fluides une conductibilité ou infinie, c'est-à-dire suffisante pour maintenir leur masse à une température uniforme donnée, ou nulle, c'est-à-dire propre à empêcher tout échange de chaleur entre particules voisines.

Pour arriver à des résultats saisissables en dehors de ces deux hypothèses *d'isothermie* et *d'adiabatisme*, il m'a fallu admettre les deux suppositions, ordinairement réalisées à très peu près : 1° de la *permanence* de l'état physique en chaque point (x, y, z) et 2° de la conservation des volumes fluides *sauf dans les termes de pesanteur*, c'est-à-dire sans négliger les variations du *poids* de l'unité de volume ou la force *ascensionnelle* due à l'échauffement. Même ainsi simplifiées, les équations des *courants de convection produits autour d'un corps chaud par ses excès de température* restent, il est vrai, inintégrables. Car dans le cas le moins complexe (celui d'un mince plateau vertical), où, grâce à un commencement d'intégration, le problème se ramène au calcul d'une seule fonction inconnue, l'équation aux dérivées partielles dont dépend celle-ci est du quatrième ordre et non linéaire. Seulement, pour toute forme du corps, ces équations offrent un genre d'homogénéité, ou acceptent des transformations *homothétiques* (pour ainsi dire), qui expliquent les lois monomes, si bien vérifiées, de Dulong et Petit, sur le refroidissement des corps au sein d'une atmosphère en repos.

---

(1) On peut voir, au sujet de cette signification géométrique du paramètre différentiel Δ_2 des fonctions de point, les nos 59* et 60* de mon *Cours d'Analyse infinitésimale pour la Mécanique et la Physique* (t. I, *Compléments*, p. 70*).

2. Mais il existe un problème plus simple, sur des courants qui sont encore *de convection*, c'est-à-dire véhicules de chaleur. C'est le problème du *refroidissement d'un solide fixe, au sein d'une masse fluide indéfinie animée, dans son ensemble, d'une vitesse uniforme et donnée* V. Alors, pourvu que la translation générale V ne soit pas extrêmement lente, les filets fluides localement déviés par le corps, et qui sillonnent sa surface, se chauffent à son contact et transmettent de la chaleur à leurs voisins, *sans modification appréciable ni des trajectoires, ni des vitesses d'écoulement, par les variations modérées* θ *de température*. L'Hydrodynamique *ordinaire* permet donc de déterminer *à part* le mouvement visible, du moins pour les formes du corps qui se prêtent au calcul effectif des vitesses des filets ([1]). Et il ne reste ainsi à intégrer que l'équation indéfinie en θ, *dès lors linéaire* ou du type de celles que les géomètres savent aborder.

Cette équation aux dérivées partielles a même ses coefficients constants quand le corps ne trouble pas le courant dans une proportion sensible, notamment quand il se réduit à un mince plateau, parallèle aux filets fluides. L'étude de 1901 citée ci-dessus montre comment elle s'intègre alors, dans l'hypothèse, presque toujours réalisée, d'une conductibilité assez petite pour réduire la masse chauffée à une couche peu épaisse, et en admettant d'ailleurs une lenteur de refroidissement suffisante pour que la distribution des températures, dans le fluide, soit sensiblement, à chaque instant, celle qui subsisterait d'une manière permanente, si l'on maintenait indéfiniment les températures actuelles de la surface du solide.

Le présent Mémoire fait voir d'abord que la même analyse s'étend aux courants heurtant, perpendiculairement à l'axe, et enveloppant tout cylindre de longueur indéfinie, dont chaque génératrice est maintenue à une température θ_0 uniforme en ses divers points. Il suffit, pour le reconnaître, d'introduire comme variables, dans les équations,

---

([1]) Dans ce calcul, je ferai abstraction des inévitables tourbillonnements qui, lors des vitesses d'écoulement notables, ne manquent jamais de se produire à l'aval du corps, et d'y donner lieu à des frottements spéciaux : j'admettrai donc l'hypothèse de la fluidité parfaite, bien suffisante ici quand les écoulements ne seront pas très rapides.

deux coordonnées curvilignes orthogonales α, β, paramètres (à Δ_1 égal et à Δ_2 nul) qui définissent, dans le plan normal aux génératrices, l'un, α, la famille des filets fluides, l'autre, β, les lignes d'égal potentiel. Le choix de ces variables rend, en effet, tant l'équation indéfinie en θ que les deux conditions relatives, respectivement, à la surface du corps et aux points infiniment éloignés, identiques à ce qu'elles sont pour le cas du plateau mince, où α et β se réduisent aux deux coordonnées rectilignes x et y. Depuis longtemps, les géomètres connaissaient une particularité analogue dans le problème des températures stationnaires des cylindres *solides* [1] : on voit qu'elle subsiste, sans changement, dans une masse fluide en état de mouvement permanent, composée de couches cylindriques dont chaque génératrice a une vitesse commune, perpendiculaire à sa direction et dérivée, sous la résistance d'un cylindre solide immergé entre ces couches, d'une translation uniforme V de toute la masse.

Quand le corps, au lieu d'être cylindrique, est de révolution autour d'un axe dirigé suivant le courant, avec température θ_0 pareille tout le long de chaque *cercle parallèle*, deux coordonnées curvilignes analogues α, β, caractérisant, dans le plan d'un méridien quelconque, l'une, les filets fluides, l'autre, les lignes d'égal potentiel, donnent encore aux équations du problème leur forme la plus simple, sans la rendre, toutefois, entièrement indépendante de la figure du méridien; et, grâce à un changement ultérieur du paramètre β, elles permettent, toujours en admettant que le fluide soit peu conducteur, de représenter par l'intégrale utilisée déjà dans le cas précédent les températures θ de la couche peu épaisse des filets chauffés. Enfin, l'adjonction d'une troisième coordonnée curviligne γ, propre à distinguer les uns des autres les filets fluides ruisselant sur le corps, permet d'étendre à une forme quelconque de celui-ci la même intégrale, encore dans l'hypothèse d'une faible épaisseur de la couche chauffée.

3. Le résultat pratique intéressant de cette analyse est le calcul de la quantité totale de chaleur enlevée au corps par le courant fluide

---

(1) *Voir*, par exemple, les nos 448* et 449* de mon *Cours d'Analyse infinitésimale pour la Mécanique et la Physique* (t. II, *Compléments*, p. 408* à 415*).

dans l'unité de temps, quantité dite le *Pouvoir refroidissant* du courant sur le corps. Supposant uniforme sur toute la surface, pour simplifier et pour fixer les idées, l'excès θ_0 de température par rapport à l'ensemble de la masse fluide, j'assimilerai l'action réfrigérante de celle-ci à l'influence qu'aurait une certaine *conductibilité extérieure* moyenne k du corps, telle que son produit par l'excès donné θ_0 de température et par la surface totale du corps égalât précisément cette quantité de chaleur. La conductibilité extérieure *fictive* k ainsi définie, caractéristique la plus naturelle, ce semble, du pouvoir refroidissant à évaluer, se trouve être indépendante de l'excès θ_0 de température, ainsi que de la nature soit géométrique, soit physique de la surface, mais proportionnelle tout à la fois, pour chaque forme de celle-ci, aux racines carrées de la conductibilité intérieure K du courant, de sa capacité calorifique C par unité de volume, de sa vitesse générale V, enfin, de l'inverse du parcours moyen L des filets fluides sur le corps.

Le coefficient de cette multiple proportionnalité peut se calculer pour un certain nombre de formes du corps et d'orientations de celui-ci dans le courant. Il est, par exemple, $\frac{2}{\sqrt{\pi}} = 1,1284$ pour un plateau mince parallèle au courant, $\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^2 = 1,2732$ pour un cylindre circulaire indéfini, ayant son axe perpendiculaire au courant, $\sqrt{2} = 1,4142$ pour la sphère, $\frac{8}{\pi\sqrt{3}} = 1,4702$ et $\frac{8}{\pi}\sqrt{\frac{2}{3\pi}} = 1,1731$ pour un disque et une aiguille, de révolution, à axes dirigés dans le sens du courant, etc. On voit qu'il grandit, à égalité de parcours des filets fluides sur le corps, avec la *convexité* de sa forme, sur le trajet de ces filets, soit dans leur propre sens, soit même dans le sens perpendiculaire, et qu'il ne doit s'écarter, par excès ou par défaut, de la valeur moyenne 1,3 environ, au plus ou guère plus que du huitième de cette valeur, dans des cas extrêmement variés.

4. Cette théorie, quoique supposant atteint un état permanent, même calorifique, du courant fluide, s'appliquerait évidemment, comme il a été dit ci-dessus, au refroidissement, par le courant, d'un corps dont on ne renouvellerait pas la provision de chaleur, pourvu que ce refroidissement fût assez lent, savoir, beaucoup plus que ne le

serait lui-même, pour l'excès actuel θ_0 de température *supposé maintenu*, l'établissement très approché de l'état permanent admis. Or, dans ces limites, elle semble comporter des vérifications assez simples.

Si, par exemple, on fait refroidir dans un même courant *athermane*, en les plaçant assez loin l'un de l'autre pour ne pas s'influencer mutuellement quant à leurs températures, un long cylindre, normal au courant, et une sphère, de même nature et de même rayon R, pris, tous les deux, à une température actuelle commune, leurs pertes respectives de chaleur par unités de temps et d'aire devront être, actuellement, entre elles comme $\frac{4}{\pi}$ est à $\sqrt{2}$, d'après ce qui précède. Or, leurs volumes par unité d'aire sont $\frac{R}{2}$, pour le cylindre, et $\frac{R}{3}$, pour la sphère, c'est-à-dire entre eux, comme 3 est à 2. Les abaissements élémentaires respectifs de température qui en résulteront seront donc proportionnels aux deux quotients de $\frac{4}{\pi}$ par 3 et de $\sqrt{2}$ par 2, ou à $\frac{4}{3\pi}$ et $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Ainsi la vitesse initiale de refroidissement de la sphère doit égaler celle du cylindre *multipliée par* $\frac{3\pi}{4\sqrt{2}} = 1,6661$, soit, environ, par $\frac{5}{3}$, résultat dont la constatation pourrait faire l'objet d'une expérience intéressante.

Quand le fluide n'est pas athermane, que c'est de l'air, par exemple, les solides immergés y émettent en outre, dans l'éther, conformément aux lois soit de Dulong et Petit, soit plutôt de Stéfan, des flux de chaleur rayonnante, dont l'intervention sur le refroidissement de ces corps, pour l'accélérer, n'est pas négligeable, sauf aux très basses températures absolues. D'où, alors, la nécessité d'une correction plus ou moins sensible, aux résultats précédents [1].

---

[1] On peut voir, à la page 189 du Tome II cité de mon Cours sur la *Théorie analytique de la chaleur*, etc., que, dès à présent, cette théorie du pouvoir refroidissant des courants fluides a été l'objet de vérifications expérimentales précises (contemporaines, mais indépendantes, de mes recherches) touchant la proportionnalité du pouvoir refroidissant aux excès de température du corps et à la racine carrée de la vitesse du courant.

J'ai appris, depuis, qu'il y en avait eu, sur les mêmes points, de bien antérieures (Ser, *Traité de Physique industrielle*, t. I, 1888, p. 142 à 162). Quoique le cou-

§ II. — Échauffement permanent d'un courant fluide, par un cylindre indéfini dont l'axe lui est normal et qui s'y trouve immergé.

5. Lorsqu'un solide, maintenu immobile et à des températures θ_0 invariables sur toute sa surface, se trouve immergé dans un courant

---

rant, au lieu d'être latéralement indéfini, y fût toujours d'assez faible épaisseur et, le plus souvent, contenu dans un tube de quelques centimètres seulement de diamètre qui constituait le corps chaud, néanmoins ces deux lois de proportionnalité, du pouvoir refroidissant du courant à l'excès θ_0 de température du corps et à la racine carrée de la vitesse V, se vérifiaient toutes les fois que la distance moyenne du fluide à la paroi était comparable à la longueur du tube ; en sorte qu'on pût admettre, *tout au moins pour le filet central ou axial, la conservation approchée de sa température primitive ou d'amont*, hypothèse essentielle de notre analyse.

En effet, un pareil tube, du moins quand il a son rayon beaucoup plus grand que l'épaisseur de la couche fluide intérieure chauffée notablement par son contact, est assimilable à notre plateau tangent au courant, et que celui-ci refroidirait sur une de ses faces, en lui conférant la conductibilité fictive $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{KCV}{L}}$. Car rien n'est changé au calcul des températures du fluide si l'on courbe le plateau en cylindre, pourvu que les génératrices soient dans la direction du courant et que les rayons de courbure ne deviennent pas comparables, en petitesse, à l'épaisseur de la couche fluide chauffée. Il faut, toutefois, faire abstraction des inégalités de vitesse des filets fluides à l'intérieur, dues aux frottements et alors plus grandes que dans un courant indéfini.

Dans d'autres tubes, de calibres encore moindres, également expérimentés par Ser, la chaleur emportée était proportionnelle à une fonction de V plus rapidement croissante que $\sqrt{V}$, et susceptible même d'atteindre la première puissance V quand tous les filets fluides, jusqu'à l'axe, finissaient par acquérir, avant leur sortie, la température θ_0 du tube. Alors, en effet, tout le fluide emportait sa charge maxima de chaleur, proportionnelle à θ_0, et *le pouvoir refroidissant devenait proportionnel au débit*, c'est-à-dire à V.

Enfin, dans quelques observations de Ser, le courant, toujours peu épais mais relativement très large, circulait autour d'un gros et court tuyau (qui était le corps chaud), soit lisse, soit fortement *nervé*, ou entaillé de profondes cannelures longitudinales, par le fait desquelles sa surface se trouvait multipliée respectivement (à hauteur constante du cylindre) par 4 et par 6,6. Or ces accroissements relatifs de la surface ne multipliaient guère le pouvoir refroidissant que par leurs racines carrées environ. C'est bien, à peu près, ce qu'indiquent nos formules, supposé que le trajet L des filets fluides sur les cylindres à nervures ait grandi, fluide permanent à zéro, de densité constante, latéralement indéfini et dont, loin du corps, la vitesse générale V a des cosinus directeurs donnés l, m, n, les filets fluides qui contournent ce corps prennent, à son contact, les températures θ_0 et les communiquent partiellement à leurs voisins, de proche en proche. Les températures θ du fluide, permanentes en chaque point (x, y, z) de l'espace, sont régies, en effet, par l'équation

$$C\theta' = K\Delta_2\theta,$$

où K est la conductibilité intérieure du fluide, C la chaleur spécifique de son unité de volume, enfin, θ' la dérivée de θ par rapport au temps, prise en suivant sur son filet la particule qui passe actuellement au point (x, y, z), c'est-à-dire en multipliant, par les vitesses u, v, w du fluide suivant les x, y, z, les trois dérivées de θ en x, y, z et faisant la somme.

D'ailleurs, ces vitesses u, v, w, censées être assez grandes pour ne pas se trouver sensiblement influencées par l'échauffement θ, sont les trois dérivées en x, y, z d'un potentiel $V\beta$, puisque les rotations moyennes de chaque particule, nulles assez loin en amont du corps où u, v, w ont les valeurs constantes Vl, Vm, Vn, restent nulles pour elle, et dès lors, partout, à raison du théorème classique de Lagrange-Cauchy. Vu, en outre, la conservation des volumes fluides, les deux équations en β et θ, respectivement, seront

$$(1) \qquad \Delta_2\beta = 0, \qquad \frac{d\beta}{dx}\frac{d\theta}{dx} + \frac{d\beta}{dy}\frac{d\theta}{dy} + \frac{d\beta}{dz}\frac{d\theta}{dz} = \frac{K}{CV}\Delta_2\theta.$$

On y joindra les conditions évidentes, relatives aux limites, et dont la première exprime que les vitesses d'écoulement sur le corps lui sont tangentes :

$$(2) \qquad \text{(à la surface du corps)} \quad \begin{cases} \lambda\dfrac{d\beta}{dx} + \mu\dfrac{d\beta}{dy} + \nu\dfrac{d\beta}{dz} = 0, \\ \theta = \theta_0(x, y, z), \end{cases}$$

$$(3) \quad \left(\text{pour } \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \text{ infini}\right) \quad \frac{d\beta}{d(x, y, z)} = (l, m, n), \quad \theta = 0,$$

---

en moyenne, dans le même rapport que la surface totale; car la conductibilité fictive k ne paraît pas s'écarter beaucoup de $1{,}3\sqrt{\dfrac{KCV}{L}}$.

où λ, μ, ν désignent les trois cosinus directeurs de la normale au corps, menée dans le fluide.

6. Pour nous débarrasser d'abord de la troisième variable, z, choisissons comme solide un cylindre de longueur indéfinie, à température θ_0 uniforme le long de chaque génératrice, et dont l'axe, pris pour celui des z, soit normal au courant; en sorte que l'on ait ν, n nuls et, par raison de symétrie, β, θ indépendants de z. Le potentiel $V\beta$ des vitesses étant supposé obtenu dans toute la partie du plan des xy extérieure au cylindre, les lignes d'égal potentiel, $\beta =$ const., seront, loin du cylindre, des droites normales au courant général et équidistantes de $d\beta$. En effet, si ds désigne la petite perpendiculaire menée, en (x, y), à la ligne β, jusqu'à la rencontre de la suivante $\beta + d\beta$, le paramètre différentiel $V\Delta_1\beta$ du potentiel, valeur de la dérivée $\frac{d.V\beta}{ds}$ ou $V\frac{d\beta}{ds}$, prise le long du chemin ds, exprimera, comme on sait, la vitesse même du courant en (x, y), vitesse qui est V *loin du corps :* on y aura donc bien $ds = d\beta$. Et il en sera ainsi, même pour les lignes d'égal potentiel qui, prenant les plus fortes courbures près du cylindre, s'y interrompent ou y aboutissent; ce qu'elles font en étant perpendiculaires aux filets fluides et, par suite, au contour même du cylindre, où glisse l'un d'eux.

Ces lignes $\beta =$ const. interceptées par la section du cylindre ont, évidemment, leur paramètre β compris entre un minimum β_0 et un maximum β_1 définissant respectivement la première et la dernière d'entre elles, savoir, les deux chez lesquelles les points d'interruption se rejoignent, à l'avant du corps, pour l'une, à l'arrière, pour l'autre, et deviennent, sur leurs courbes respectives, un *point ou de rebroussement, ou, plutôt, double* (vu la continuation possible de ces courbes à l'intérieur du cylindre par des branches étrangères à la question physique). Les filets fluides constituant partout les trajectoires orthogonales aux lignes d'égal potentiel, celui d'entre eux qui arrive, de l'amont, au premier de ces points singuliers (situé sur la ligne β_0), est le seul qui puisse atteindre la section du cylindre et, par une déviation géométriquement brusque, mais *dynamiquement continue* (grâce à un ralentissement momentané), contourner cette section : il s'y bifurque donc en deux branches qui, laissant entre elles le cylindre, se rejoignent au second point singulier (où $\beta = \beta_1$), le seul où elles puissent quitter le cylindre, pour continuer ensemble leur course à l'aval du corps. Je dis que sa vitesse s'atténue infiniment aux deux points singuliers; car les deux lignes β_0, β_1, pour atteindre sous un angle *sensible* la section droite du cylindre, s'y éloignent incomparablement plus qu'ailleurs de leurs voisines extérieures, encore continues; et, par conséquent, leurs écarts ds d'avec celles-ci s'y exagèrent sans mesure, en rendant d'autant moindre le paramètre différentiel $\frac{d.\mathrm{V}\beta}{ds}$, expression, partout, de la vitesse d'écoulement.

Nous appellerons ce filet fluide le filet *axial* ou *central*. Les autres, bien continus, se disposeront de part et d'autre de celui-là. Leur équation sera $\alpha =$ const., si α est la fonction de x et de y définie par la formule

$$\alpha = \int \left(\frac{d\beta}{dy} dx - \frac{d\beta}{dx} dy \right) + \text{const.}, \tag{4}$$

dont l'intégrabilité a justement pour condition, comme on voit, l'équation satisfaite $\Delta_2 \beta = 0$, et qui vérifie aussi, identiquement, la relation

$$\frac{d\alpha}{dx}\frac{d\beta}{dx} + \frac{d\alpha}{dy}\frac{d\beta}{dy} = 0 \tag{4 bis}$$

d'orthogonalité de la famille $\alpha =$ const. aux lignes d'égal potentiel $\mathrm{V}\beta$.

Nous déterminerons, dans (4), la constante arbitraire, de manière à annuler α sur le filet central. Les valeurs de α positives définiront les filets situés du côté du filet central où x grandit, à partir de ce filet, là où il est dirigé suivant les y positifs et où, par suite, la dérivée de β en x est nulle, mais la dérivée de β en y positive; ce qui, d'après (4), donne bien $d\alpha$ de même signe que dx. Au contraire, α recevra ses valeurs négatives, pour les filets situés de l'autre côté du filet central ou contigus à sa seconde branche.

7. Cela posé, adoptons α, β comme coordonnées curvilignes, à la place des rectilignes x, y. D'après (4), $\Delta_2 \alpha$ s'annulera comme $\Delta_2 \beta$, et les paramètres différentiels du premier ordre $\Delta_1 \alpha$, $\Delta_1 \beta$ auront une valeur commune h. Or il résulte de là que le premier membre de l'équation (1) en θ, et le facteur variable $\Delta_2 \theta$ du second membre, deviendront les deux produits respectifs de h^2 par la dérivée première de θ en β et par la somme des deux dérivées secondes directes de θ en α et en β. L'équation indéfinie en θ sera donc

$$(5) \qquad \frac{d\theta}{d\beta} = \frac{K}{CV}\left(\frac{d^2\theta}{d\alpha^2} + \frac{d^2\theta}{d\beta^2}\right).$$

Et comme, d'autre part, si $f(\beta)$ et $f_1(\beta)$ sont les deux expressions, en β, des températures θ_0 données respectivement le long des deux branches du filet central, la condition $\theta = \theta_0$ relative à la surface du cylindre devient

$$(6) \quad (\text{pour } \alpha = 0 \text{ et } \beta \text{ compris entre } \beta_0 \text{ et } \beta_1) \quad \theta = \text{soit } f(\beta), \text{ soit } f_1(\beta),$$

le problème de calcul intégral auquel on se trouve ramené est le même pour toutes les formes du cylindre, ou identique à ce qu'il serait dans l'hypothèse simple $\alpha = x$, $\beta = y$, c'est-à-dire quand il s'agit d'un plateau mince présentant sa tranche au courant et ne le troublant pas.

8. Dans la plupart des fluides, l'extrême petitesse de la conductibilité K maintient l'annulation de θ, à très peu près, le long des filets un peu distants du corps ou dont le paramètre α n'est pas voisin de zéro. Seul, le filet $\alpha = 0$ se chauffe *par contact :* ce qu'il fait dans l'intervalle de $\beta = \beta_0$ à $\beta = \beta_1$; et il ne communique que lentement sa chaleur à ses voisins. Donc les valeurs notables de θ n'existent, pour ces fluides, que dans un champ étroit, de part et d'autre de $\alpha = 0$, et pour β croissant depuis β_0, environ, jusqu'à l'infini. Elles sont même, au voisinage de $\beta = \beta_0$, c'est-à-dire à l'avant du corps, là où varie vite la température du filet central, incomparablement plus localisées, près de $\alpha = 0$, que sur les côtés du corps, ou surtout à son arrière et en aval, où augmente peu à peu d'épaisseur la mince couche des filets chauffés.

Dès lors, dans ce champ étroit auquel on peut se borner, θ varie très vite avec α, mais graduellement avec β. Donc le troisième ou dernier terme de (5) s'efface devant le second, laissant à cette équation la forme binome

$$(5\ bis)\qquad \frac{d\theta}{d\beta} = \frac{K}{CV}\frac{d^2\theta}{d\alpha^2}$$

de celle de Fourier pour l'échauffement d'un mur. D'ailleurs, si l'on appelle $f(\beta)$ les valeurs de θ pour $\alpha = 0$, ces valeurs, nulles de $\beta = -\infty$ à β peu inférieur à β_0, ne seront inconnues que dans une étendue très restreinte, à l'approche de la limite β_0, au-dessus de laquelle elles deviennent θ_0, c'est-à-dire la fonction $f(\beta)$ ou $f_1(\beta)$ de (6), suivant qu'il s'agit de considérer les filets correspondant à α positif ou à α négatif. Enfin, pour $\beta > \beta_1$, $f(\beta)$, dont on n'aura guère à s'occuper dans ces régions, gardera assez longtemps la valeur $f(\beta_1)$, la petitesse de K rendant lent le refroidissement du filet central, une fois ce filet *détaché* du corps.

L'expression des valeurs sensibles de θ sera donc, aux notations près, celle que j'ai donnée pour le cas d'un plateau mince [1], expression résultant d'une intégrale, bien connue, de l'équation (5 *bis*). Et l'on aura, en y joignant l'expression corrélative de la dérivée de θ en α, prise pour $\alpha = 0$ et, par exemple, du côté des α positifs :

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} &\theta = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f\left(\beta - \frac{CV}{K}\frac{\alpha^2}{2\nu^2}\right)e^{-\frac{\nu^2}{2}}\,d\nu,\\ &\left(\frac{d\theta}{d\alpha}\right)_0 = -2\sqrt{\frac{CV}{\pi K}}\int_0^\infty f'(\beta - \omega^2)\,d\omega. \end{aligned}\right.$$

§ III. — Pouvoir refroidissant du courant sur le cylindre; applications à un plateau mince, au cylindre circulaire, aux cylindres elliptiques, à une armille.

9. Le flux de chaleur, Fds, qu'émet, dans l'unité de temps et par unité de longueur du cylindre, la surface de celui-ci projetée suivant un élément ds du contour, aura l'expression $-K\left(\frac{d\theta}{d\alpha}\right)_0(\Delta_1\alpha)ds$, égale

---

[1] *Théorie analytique de la chaleur, mise en harmonie avec la Thermodynamique et avec la Théorie mécanique de la lumière*, t. II, p. 191 et 192.

à $-K\left(\frac{d\theta}{dz}\right)_0(\Delta_1\beta)\,ds$ ou, enfin, à $-K\left(\frac{d\theta}{dz}\right)_0 d\beta$; et la somme des flux ainsi emportés par toute la branche des filets bifurqués venue du côté des α positifs en sera l'intégrale, prise de $\beta=\beta_0$ à $\beta=\beta_1$. Sa formule est donc

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} &2\sqrt{\frac{KCV}{\pi}}\int_0^{\infty}d\omega\int_{\beta_0}^{\beta_1}f(\beta-\omega^2)\,d\beta\\ &=2\sqrt{\frac{KCV}{\pi}}\int_0^{\infty}[f(\beta_1-\omega^2)-f(\beta_0-\omega^2)]\,d\omega.\end{aligned}\right.$$

Or $f(\beta_0-\omega^2)$ n'est sensible que pour les valeurs extrêmement petites de ω; et $f(\beta_1-\omega^2)$ ne l'est que pour les valeurs de $\beta_1-\omega^2$ supérieures ou à peine inférieures à β_0. On peut donc supprimer sous le signe $\int$ le terme $-f(\beta_0-\omega^2)$ et réduire à $\sqrt{\beta_1-\beta_0}$ la limite supérieure d'intégration. Le second membre de (8), accru de l'expression analogue correspondant à la seconde branche des filets $\alpha=0$, donne donc pour le *pouvoir refroidissant* du courant, chaleur totale que ce courant enlève au cylindre *par unités de temps et de longueur*, la formule

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} &\text{Pouvoir refroidissant}\\ &=2\sqrt{\frac{KCV}{\pi}}\int_0^{\sqrt{\beta_1-\beta_0}}[f(\beta_1-\omega^2)+f_1(\beta_1-\omega^2)]\,d\omega\\ &=4\theta_0\sqrt{\frac{KCV}{\pi}(\beta_1-\beta_0)},\end{aligned}\right.$$

où le dernier membre est obtenu dans l'hypothèse d'un excès

$$\theta_0=f(\beta)$$

de température constant sur tout le cylindre.

10. Ainsi, *le pouvoir refroidissant est proportionnel aux racines carrées de la conductibilité intérieure* K *du courant, de sa capacité calorifique* C, *de sa vitesse* V, *et aux excès* θ_0 *de température du cylindre, ainsi qu'à la racine carrée de l'espacement* $\beta_1-\beta_0$, *loin du* *cylindre, des deux surfaces d'égal potentiel* $V\beta$ *entre lesquelles le cylindre se trouve compris.*

Pour toutes les formes de la section droite semblables et semblablement disposées par rapport au courant, les surfaces d'égal potentiel sont, évidemment, semblables aussi, chacune à chacune; et l'espacement $\beta_1 - \beta_0$ y est, par suite, proportionnel au contour de la section, parcours total, sur cette section même, des deux branches en lesquelles s'est divisé le filet central. Nous appellerons $2L$ ce contour, ou L le *parcours moyen des filets sur le corps. Le pouvoir refroidissant sera donc, pour tous les cylindres de même forme, proportionnel au produit* $\theta_0\sqrt{KCVL}$.

Il est naturel de caractériser le pouvoir refroidissant en le rapportant, tout à la fois, à l'unité de surface du corps et à l'unité de l'excès θ_0 de température de cette surface sur le courant général; car le quotient, que j'appellerai k, ainsi obtenu sera, pour le corps, un coefficient fictif de *conductibilité extérieure* équivalant à l'influence réfrigérante du courant, savoir, le coefficient qui donnerait lieu, dans le vide, lors d'un excès pareil θ_0 de température du corps sur l'espace ambiant, à une sortie de chaleur égalant précisément celle que provoque le courant. Comme la surface de l'unité de longueur du cylindre est $2L$, le quotient du dernier membre de (9) par $2L\theta_0$ conduira, pour cette évaluation du pouvoir réfrigérant en conductibilité extérieure, à la formule

$$(10) \qquad k = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{KCV\frac{\beta_1 - \beta_0}{L^2}}.$$

On voit que, *pour tous les cylindres de même forme, la conductibilité extérieure fictive, k, représentative du pouvoir refroidissant d'un courant fluide, sera proportionnelle aux racines carrées de la conductibilité intérieure du courant, de sa capacité calorifique par unité de volume, de sa vitesse générale et de l'inverse du parcours moyen de ses filets sur le corps.*

Cette dernière influence se conçoit en observant, comme je l'ai fait au Tome II (p. 195) de mes leçons sur la *Théorie analytique de la Chaleur*, qu'un faisceau de filets contigu au corps s'est déjà chauffé d'autant plus, après un certain parcours sur lui, et reste d'autant moins apte à le refroidir, qu'il l'a suivi plus longtemps.

11. Le cas le plus simple est celui d'un plateau mince, présentant sa tranche au courant, ou qui ne dévie pas les filets fluides dans une mesure sensible. L'espacement des surfaces d'égal potentiel y est donc le même près du corps qu'au loin et la différence $\beta_1 - \beta_0$ s'y réduit au trajet L des filets fluides sur le plateau, c'est-à-dire à la largeur de celui-ci. On a donc

$$(11) \qquad \text{(pour un plateau mince)} \quad k = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\text{KCV}}{\text{L}}} \quad (^1).$$

12. Imaginons maintenant que la section droite soit le cercle, de rayon R, ayant pour équation $x^2 + y^2 = \text{R}^2$, où nous supposerons la coordonnée y prise suivant le sens du courant.

Partant d'une fonction φ de x et de y dont le paramètre Δ_2 dans le plan des xy soit nul, nous essayerons de poser

$$(12) \qquad \alpha = x - \frac{d\varphi}{dx}, \quad \beta = y + \frac{d\varphi}{dy} + \text{const.},$$

expressions qui vérifient identiquement les conditions

$$\Delta_2\beta = 0, \quad \Delta_2\alpha = 0, \quad \Delta_1\alpha = \Delta_1\beta, \quad \frac{d\alpha}{dx}\frac{d\beta}{dx} + \frac{d\alpha}{dy}\frac{d\beta}{dy} = 0,$$

(¹) La multiple proportionnalité des flux émis et aussi, par suite, du pouvoir refroidissant, à $\sqrt{\text{KCV}}$, ne subsiste généralement plus quand cesse d'être petit le coefficient $\frac{\text{K}}{\text{CV}}$ de l'équation indéfinie (5), coefficient dont nous appellerons c l'inverse. Pour le reconnaître sur un exemple particulier, supposons le plateau indéfini dans les deux sens, ou s'étendant de $\beta = -\infty$ à $\beta = +\infty$, avec des températures θ_0 de la forme $e^{m\beta}$, évanouissantes, comme on l'admet, aux grandes distances en amont, mais croissantes vers l'aval. L'équation (5), et les deux conditions adjointes $\theta = \theta_0$ (pour $\alpha = 0$), $\theta = 0$ (pour α infini), se trouvent alors satisfaites par la solution simple, exponentielle, $\theta = e^{m\beta - \sqrt{cm - m^2}\,\alpha}$; et le flux, $-\text{K}\left(\frac{d\theta}{d\alpha}\right)_0$, émanant vers les α positifs de l'unité d'aire du plateau, vaut $\text{K}\theta_0\sqrt{cm - m^2}$ ou $\theta_0\sqrt{\text{KCV}m\left(1 - \frac{\text{K}}{\text{CV}}m\right)}$. C'est seulement quand le produit $\frac{\text{K}}{\text{CV}}m$ est petit vis-à-vis de l'unité, que ce résultat peut être réduit à $\theta_0\sqrt{\text{KCV}m}$ et devient proportionnel aux racines carrées des trois paramètres K, C, V du courant.

dont les trois dernières résultent de la première et de l'équation (4), également vérifiée. Comme les cosinus directeurs l, m, n de la vitesse V seront o, 1, o, les trois premières relations (3) se trouveront satisfaites, si nous choisissons φ proportionnel au logarithme népérien de la distance $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ au centre, logarithme qu'on sait avoir son Δ_2 nul et ses dérivées partielles évanouissantes pour ρ infini. Après quoi, nous déterminerons le coefficient de proportionnalité, de manière à vérifier la première condition (2) exprimant la perpendicularité des lignes $\beta =$ const. au cercle de rayon R. Il viendra ainsi

$$(13) \qquad \alpha = x\left(1 - \frac{R^2}{\rho^2}\right), \quad \beta = y\left(1 + \frac{R^2}{\rho^2}\right) + \text{const.}$$

On voit, en remplaçant ρ^2 par x^2+y^2, que les filets et les lignes d'égal potentiel sont des courbes du troisième degré, symétriques, les premières, par rapport à l'axe des x, les secondes, par rapport à l'axe des y (¹); et que, hors de la section $\rho = R$, les filets correspondant aux petites valeurs absolues de α sont bien, partout, soit à de très petites distances $\pm x$ de l'axe des y, en s'en tenant constamment du côté où x a le signe de α, soit à de très petites distances de la section

---

(¹) Les deux courbes singulières β_0, β_1 étant celles qui passent par les deux points $x = 0$, $y = \pm R$, leurs équations sont

$$y(x^2+y^2+R^2) = \pm 2R(x^2+y^2),$$

ou bien, en posant $x = R\xi$, $y = \pm R(1+\eta)$, substituant et réduisant,

$$\xi^2(1-\eta) = \eta^2(1+\eta), \text{ c'est-à-dire enfin } \frac{\xi}{\eta} = \pm\sqrt{\frac{1+\eta}{1-\eta}}.$$

L'on voit que, aux environs du point singulier ($\xi = 0$, $\eta = 0$), chacune d'elles ressemble au système des deux droites rectangulaires exprimées par l'équation $\frac{\xi}{\eta} = \pm 1$, ou se croisant symétriquement par rapport à l'axe des y. Les deux points singuliers sont donc *doubles* et non *de rebroussement*. Cette inclinaison à 45° sur l'axe des y établit la transition la plus naturelle possible entre la perpendicularité, sur les y, des courbes β, bien continues, entièrement extérieures au cylindre, et le quasi-parallélisme final aux y, des courbes β voisines coupées par le cylindre, sur lequel elles arrivent normalement.

$\rho = R$, sans la couper non plus. Et le filet central $\alpha = 0$ contourne bien le corps.

On voit aussi que, sur le cylindre, où $\rho = R$, la valeur de β devient $2y +$ const.; et que son accroissement total $\beta_1 - \beta_0$, entre $y = -R$ et $y = R$, est $4R$, c'est-à-dire le produit, par $\frac{4}{\pi}$, du trajet $L = \pi R$ des filets sur le corps. La formule générale (10) devient

$$(14) \qquad \text{(pour un cylindre circulaire)} \quad k = \frac{4}{\pi}\sqrt{\frac{KCV}{L}}.$$

Le coefficient numérique, $\frac{4}{\pi}$, de l'expression de k est donc, pour un contour circulaire, le carré de ce qu'il est, d'après (11), pour un contour rectiligne (c'est-à-dire infiniment aplati); et il égale l'inverse du rapport, $\frac{\pi}{4}$, de la circonférence, au périmètre du carré circonscrit. Ce coefficient, caractéristique du pouvoir refroidissant pour les diverses formes de la section droite, grandit ainsi, comme on pouvait s'y attendre, avec la convexité de la section sur le parcours L des filets fluides.

13. On peut regarder les deux formes précédentes, rectiligne et circulaire, comme les deux cas extrêmes d'une section elliptique, dont on donnerait les axes $2a$, $2b$ et l'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Dans ce cas, il y aura lieu de considérer les ellipses homofocales de celle-là et qui lui sont extérieures. Leur équation sera

$$(15) \qquad \frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} = 1,$$

où λ désigne un paramètre, fonction déterminée de x et de y définie par cette équation même, constant sur chacune de ces ellipses, mais croissant de zéro à l'infini quand on les construit de plus en plus grandes autour de la proposée.

Alors les équations (1), (2) et (3) en β s'intègrent de la même manière, ou avec les mêmes calculs, que pour l'ellipsoïde dont les homofocaux auraient en plus, au premier membre de leur équation, le terme $\frac{z^2}{c^2+\lambda}$. Quel que soit le nombre n (1, 2 ou 3) des coordonnées $x, y, \ldots$, il existe n solutions analogues, convenant aux cas respectifs de courants dirigés suivant les divers axes, solutions de la forme $x\chi$, ou $y\psi, \ldots$, dans lesquelles $\chi, \psi, \ldots$ sont des fonctions convenablement déterminées de λ. Par exemple, dans celle qui a la forme $\beta = x\chi$, si l'on veut que les dérivées $\frac{d\beta}{d(x, y, \ldots)}$ deviennent respectivement 1, 0, 0, ... pour λ infini, la fonction χ doit, d'abord, pour donner

$$\Delta_2 \beta = 0,$$

satisfaire à l'équation différentielle

$$(16) \qquad \frac{\chi''}{\chi'} + \frac{1}{a^2+\lambda} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2+\lambda} + \frac{1}{b^2+\lambda} + \ldots\right) = 0,$$

et, finalement, pour vérifier les conditions (2) et (3) en β, recevoir l'expression

$$(17) \qquad \chi = 1 + \frac{1}{A}\int_\lambda^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)\ldots}},$$

où A désigne la constante

$$(18) \qquad A = \frac{2}{ab\ldots} - \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)\ldots}} \text{ (1)}.$$

14. Dans le cas présent des deux coordonnées x et y, il faudra faire abstraction de c et de z, ou, ce qui revient au même, prendre c infini pour passer de l'ellipsoïde au cylindre elliptique. Alors c disparaît des formules (17) et (18), comme facteur commun figurant, en dénominateur, dans A et dans l'intégrale définie que contient l'expression

(1) On peut voir, à ce sujet, par exemple, les pages 217 à 219 du Tome II de mes leçons sur la *Théorie analytique de la chaleur, etc.* Seulement, comme ici χ devient 1 (et non zéro) à l'infini, c'est $\chi - 1$ qui se trouve appelé φ dans les pages citées; ce qui y modifie légèrement la condition (2) en β, dont un terme se trouve, finalement, changé de membre.

(17) de χ. Or cette intégrale définie, ainsi réduite, devient identiquement $\frac{2}{a^2-b^2}\left(1-\sqrt{\frac{b^2+\lambda}{a^2+\lambda}}\right)$, comme le montre une différentiation immédiate; et l'expression de A devient elle-même $\frac{2}{b(a+b)}$. L'on a dès lors

$$(19)\quad \begin{cases} \chi = 1 + \dfrac{b}{a-b}\left(1-\sqrt{\dfrac{b^2+\lambda}{a^2+\lambda}}\right) = \dfrac{1}{a-b}\left(a - b\sqrt{\dfrac{b^2+\lambda}{a^2+\lambda}}\right), \\ \beta = \dfrac{x}{a-b}\left(a - b\sqrt{\dfrac{b^2+\lambda}{a^2+\lambda}}\right). \end{cases}$$

Puisque la solution générale β cherchée ici doit avoir, pour x ou y infinis, ses deux dérivées en x et y respectivement égales aux deux cosinus directeurs l, m du courant, il ne reste plus qu'à multiplier par l cette solution particulière (19), par m la solution analogue $y\psi$, et à faire la somme. Il viendra donc, à une constante arbitraire près,

$$(20)\quad \beta = \frac{lx}{a-b}\left(a - b\sqrt{\frac{b^2+\lambda}{a^2+\lambda}}\right) + \frac{my}{b-a}\left(b - a\sqrt{\frac{a^2+\lambda}{b^2+\lambda}}\right).$$

Sur le cylindre, où λ s'annule, cette expression admet successivement, vu la relation $l^2+m^2=1$, les formes

$$(21)\quad \begin{cases} \beta = (a+b)\left(l\dfrac{x}{a} + m\dfrac{y}{b}\right) \\ \quad = \pm(a+b)\sqrt{(l^2+m^2)\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right) - \left(l\dfrac{y}{b} - m\dfrac{x}{a}\right)^2} \\ \quad = \pm(a+b)\sqrt{1 - l^2m^2\left(\dfrac{x}{la} - \dfrac{y}{mb}\right)^2}. \end{cases}$$

La dernière montre que le minimum β_0 et le maximum β_1 se réalisent en deux points opposés, pour $x = \mp la$, $y = \mp mb$, et qu'ils valent $\mp(a+b)$. Ainsi, l'*espacement* $\beta_1 - \beta_0$, *loin du cylindre, des deux lignes d'égal potentiel entre lesquelles est compris le contour du cylindre, égale la somme des axes* $2a$, $2b$, *de la section elliptique; et les points singuliers respectifs* $(\mp la, \mp mb)$ *de ces lignes se trouvent aux deux extrémités d'un même diamètre.*

Comme, d'ailleurs, le parcours L, sur le cylindre, de chaque branche du filet central qui le contourne, est justement le demi-périmètre elliptique reliant, du côté correspondant, les deux extrémités de ce diamètre, si l'on appelle S le périmètre entier de l'ellipse, S′ celui du rectangle circonscrit à côtés dirigés suivant les axes (de sorte qu'on ait $L=\frac{1}{2}S$, $\beta_1-\beta_0=\frac{1}{2}S'$), la formule générale (10) donnera

$$(22)\qquad \text{(pour le cylindre elliptique)}\quad k=\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{S'}{S}}\right)\sqrt{\frac{KCV}{L}}.$$

Donc, *quand le cylindre a pour section droite une ellipse, la conductibilité extérieure k, représentative du pouvoir refroidissant, est indépendante de la direction du courant dans le plan des deux axes de cette ellipse; et son coefficient numérique,* $\sqrt{\frac{4}{\pi}\frac{S'}{S}}$, *variable, avec la forme de l'ellipse, comme la racine carrée du rapport du contour rectangulaire circonscrit à l'ellipse suivant les axes, au contour de l'ellipse, est la moyenne proportionnelle entre ce rapport lui-même et sa valeur maxima ou finale* $\frac{4}{\pi}$, *relative au cylindre circulaire*. Il grandit à mesure que l'ellipse, d'abord infiniment aplatie, se rapproche du cercle [1], conformément à ce qu'on a vu après la formule (14).

Il est remarquable que, pour un plateau mince, à profil elliptique infiniment aplati, ce coefficient soit, comme pour toute autre forme elliptique du profil, indépendant de l'angle fait par le courant général avec le grand axe de l'ellipse.

---

[1] On le reconnaît aisément sur la formule du contour S, approchée (sauf pour les ellipses très aplaties), que j'ai donnée dans mon *Cours d'Analyse infinitésimale pour la Mécanique et la Physique* (t. II, *Partie élémentaire*, p. 112). Cette expression est $S=\pi\left(3\,\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}\right)$. Divisée par le contour $4(a+b)$ du rectangle circonscrit, elle donne

$$\frac{S}{S'}=\frac{\pi}{8}\left(3-\frac{\sqrt{2a.2b}}{a+b}\right),$$

valeur visiblement croissante quand la moyenne géométrique $\sqrt{2a.2b}$ des axes a un rapport de plus en plus faible à leur moyenne arithmétique $a+b$, c'est-à-dire quand l'ellipse s'éloigne de la forme circulaire.

15. L'expression (22) de k devra pouvoir servir au calcul de la chaleur cédée à l'air par une armille ou une barre à sections elliptiques, se refroidissant dans un courant perpendiculaire au plan de son axe longitudinal, circulaire ou non. En effet, si les axes, $2a$, $2b$, des sections sont assez petits par rapport aux rayons de courbure de l'axe longitudinal, les tronçons de l'armille ou de la barre ne différeront pas sensiblement de notre cylindre elliptique de longueur indéfinie.

§ IV. — Échauffement, par un corps de révolution, d'un courant fluide l'enveloppant et dirigé suivant son axe.

16. On n'a encore que deux variables indépendantes, dans le problème de l'échauffement permanent d'un courant fluide indéfini par un corps fixe qui s'y trouve immergé, lorsque le corps est de révolution autour d'un axe parallèle au courant général, et qu'on maintient sa surface à une même température θ_0 le long de chaque (cercle) parallèle. Alors, par raison de symétrie, les surfaces $\beta =$ const. d'égal potentiel sont elles-mêmes de révolution autour de l'axe, et les filets fluides suivent leurs trajectoires orthogonales dans les plans méridiens. Si l'axe de révolution est pris comme axe des y, les deux variables dont dépendront β et θ seront, pour chaque point (x, y, z) du fluide, la perpendiculaire, r, égale à $\sqrt{x^2 + z^2}$, abaissée du point sur cet axe, et la distance, y, de son pied à l'origine.

La relation $\Delta_2 \beta = 0$, multipliée par r, deviendra, comme on sait, $\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\beta}{dr}\right) + \frac{d}{dy}\left(r\frac{d\beta}{dy}\right) = 0$; de sorte que l'équation différentielle (dans un plan méridien) $\frac{d\beta}{dy}dr - \frac{d\beta}{dr}dy = 0$, des filets fluides, orthogonaux aux lignes $\beta =$ const., admettra le facteur d'intégrabilité r. Les filets auront donc l'équation finie $\alpha =$ const., si l'on pose

$$\alpha = \int r\left(\frac{d\beta}{dy}\,dr - \frac{d\beta}{dr}\,dy\right) + \text{const.}, \tag{23}$$

formule où nous effectuerons l'intégration de manière que α s'annule sur le *filet central*.

Celui-ci coïncide avec l'axe des y depuis $y = -\infty$ jusqu'à la rencontre du corps à son premier pôle, où le filet s'étale, encore par raison de symétrie, en une nappe recouvrant toute la surface. Au second pôle, les filets élémentaires composant la nappe se rejoignent, pour continuer ensemble et indéfiniment leur trajet sur l'axe des y.

Dans chaque plan méridien, les autres filets fluides, bien continus, auront leur paramètre α positif. En effet, l'équation (23) donne α croissant, à partir de zéro, quand on s'éloigne du premier filet, considéré au point où r y est maximum. Car, en ce point, où la vitesse se trouve dirigée suivant les y positifs, la dérivée en r du potentiel $V\beta$ est nulle, mais, sa dérivée en y, positive : ce qui, d'après (23), y rend $d\alpha$ de même signe que dr.

D'ailleurs, toutes les surfaces $\beta =$ const. interrompues par le corps ont leur paramètre compris entre un minimum β_0 et un maximum β_1, caractérisant les deux d'entre elles qui aboutissent respectivement au premier pôle et au second pôle, où, vu leur inclinaison finie sur le corps, elles présentent un *point conique*, le seul par lequel le filet central puisse, soit atteindre le corps en s'y divisant, soit le quitter après reconstitution de son unité.

17. Cela posé, adoptons α et β comme variables, au lieu de r et y. D'après (23), on n'aura plus, comme dans le cas du cylindre,

$$\Delta_1 \alpha = \Delta_1 \beta,$$

ni $\Delta_2 \alpha = 0$, mais seulement $\Delta_1 \alpha = r\Delta_1 \beta$; et un calcul simple montre que $\Delta_2 \alpha$ vaudra le double de la dérivée première de β en y. Par suite, l'équation (1) en θ, où θ sera fonction de x, y, z par l'intermédiaire de α et de β, deviendra aisément, après division par $(\Delta_1 \beta)^2$,

$$(24) \qquad \frac{d\theta}{d\beta} = \frac{K}{CV}\left[r^2 \frac{d^2\theta}{d\alpha^2} + \frac{2}{(\Delta_1 \beta)^2}\frac{d\beta}{dy}\frac{d\theta}{d\alpha} + \frac{d^2\theta}{d\beta^2}\right].$$

La présence de r et des dérivées premières de β au second membre empêche cette équation d'être, comme quand il s'agissait d'un cylindre, indépendante de la forme du corps. Mais, si le courant est peu conducteur, ou que θ soit sensible seulement pour une assez mince couche fluide ruisselant sur le corps, c'est-à-dire pour les petites valeurs de α, la dérivée seconde de θ en α prédominera, dans la parenthèse de (24), au point de rendre celle-ci réductible à son premier terme, en même temps que le coefficient r^2 lui-même le sera à sa valeur sur le corps, fonction de β censée connue. Introduisons alors, au lieu de β, la nouvelle variable $\beta' = \int r^2\,d\beta$, croissante de zéro à une certaine valeur β'_1 entre les deux limites $\beta = \beta_0$, $\beta = \beta_1$; et nous aurons encore, en θ, pareillement à (5 *bis*), l'équation binome de Fourier

$$(25) \qquad \frac{d\theta}{d\beta'} = \frac{K}{CV}\frac{d^2\theta}{d\alpha^2}.$$

Il en résultera donc l'intégrale et la formule, analogues à (7),

$$(26) \qquad \begin{cases} \theta = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\displaystyle\int_0^\infty f\left(\beta' - \frac{CV}{K}\frac{\alpha^2}{2\nu^2}\right)e^{-\frac{\nu^2}{2}}\,d\nu, \\ \left(\dfrac{d\theta}{d\alpha}\right)_0 = -2\sqrt{\dfrac{CV}{\pi K}}\displaystyle\int_0^\infty f'(\beta' - \omega^2)\,d\omega. \end{cases}$$

La fonction $f(\beta')$ y exprime les températures θ du filet central $\alpha = 0$, savoir, les valeurs θ_0, données, entre $\beta' = 0$, $\beta' = \beta'_1$, et des valeurs *nulles* hors de ces limites. Il faut remarquer, en effet, que, r s'annulant sur le filet central, soit pour $\beta < \beta_0$, soit pour $\beta > \beta_1$, les valeurs négatives de β' et ses valeurs supérieures à β'_1 correspondent respectivement à $\beta = -\infty$ et à $\beta = \infty$, c'est-à-dire aux points du filet central infiniment éloignés du corps et où $\theta = 0$.

La substitution de β' à β comme variable transforme donc l'expression du phénomène en *accourcissant*, pour ainsi dire, dans un rapport infini, les circonstances produites tant à l'amont qu'à l'aval du corps et, dès lors, peu intéressantes au point de vue du pouvoir refroidissant : ce qui constitue, ici, plutôt un avantage, puisque l'évaluation du pouvoir refroidissant est notre but principal.

§ V. — Pouvoir refroidissant du courant fluide sur le corps de révolution : applications à la sphère, à l'ellipsoïde, au plateau circulaire, à une aiguille.

18. Le flux de chaleur émis, dans l'unité de temps, par une zone élémentaire $2\pi r\,ds$ de la surface sera, si dn est une petite normale à la zone, menée dans le fluide, le produit de l'aire $2\pi r\,ds$ par

$$-\mathrm{K}\frac{d\theta}{dn} = -\mathrm{K}\left(\frac{d\theta}{d\alpha}\right)_0 \frac{d\alpha}{dn} = -\mathrm{K}\left(\frac{d\theta}{d\alpha}\right)_0 \Delta_1\alpha,$$

savoir

$$-2\pi\mathrm{K}\left(\frac{d\theta}{d\alpha}\right)_0 r^2(\Delta_1\beta)\,ds,$$

ou

$$-2\pi\mathrm{K}\left(\frac{d\theta}{d\alpha}\right)_0 d\beta'.$$

Intégrons de $\beta' = 0$ à $\beta' = \beta'_1$, après avoir remplacé la dérivée de θ en α par son expression (26); et nous aurons, comme chaleur totale soustraite au corps par le courant dans l'unité de temps, en opérant de même qu'au n° **9**, puis admettant, finalement, l'uniformité de θ_0 :

$$(27)\quad \left\{\begin{aligned} \text{Pouvoir refroidissant} &= 4\sqrt{\pi\mathrm{KCV}}\int_0^{\sqrt{\beta'_1}} f(\beta'_1 - \omega^2)\,d\omega \\ &= 4\theta_0\sqrt{\pi\mathrm{KCV}\beta'_1}. \end{aligned}\right.$$

Le pouvoir refroidissant est donc proportionnel aux racines carrées de la conductibilité K *du courant, de sa chaleur spécifique* C *par unité de volume, de sa vitesse* V, *et proportionnel aussi à l'excès* θ_0 *de température du corps, en même temps qu'à la racine carrée de l'intégrale* β'_1, *laquelle, pour tous les corps de même forme, orientés de même dans le courant, est en raison directe de leur volume.*

Évaluons ce pouvoir en conductibilité extérieure k, comme au n° **10**, en le rapportant à l'unité des excès θ_0 de température du corps et à l'unité de son aire totale σ, c'est-à-dire en le divisant par $\theta_0\sigma$. Nous aurons

$$(28)\qquad k = 4\sqrt{\pi\mathrm{KCV}\frac{\beta'_1}{\sigma^2}},$$

expression entièrement analogue à (10), ou produit d'un facteur, constant pour chaque forme du corps, par $\sqrt{\frac{\mathrm{KCV}}{\mathrm{L}}}$; car le quotient du carré σ^2 de l'aire du corps, par la quantité à trois dimensions β'_1, sera proportionnel, chez tous les corps semblables (et bien entendu semblablement placés dans le courant), à une de leurs lignes homologues, notamment à leur demi-méridien L, mesurant le trajet, sur le corps même, de tous les filets élémentaires en lesquels se divise ou s'épanouit le filet central.

19. Soit d'abord le cas de la sphère de rayon R, où l'on a

$$r^2 + y^2 = R^2.$$

La dérivée de β en y devant devenir 1 aux distances $\rho = \sqrt{r^2 + y^2}$ du centre infinies, attribuons à β, comme dans le cas du cylindre circulaire (n° **12**), mais en remplaçant actuellement x par r dans l'expression de ρ, la forme

$$\beta = y + \frac{d\varphi}{dy} + \text{const.},$$

où φ sera encore une fonction à paramètre différentiel Δ_2 nul et à dérivées évanouissantes pour ρ infini. La plus simple de ces fonctions est, comme on sait, le quotient d'une constante par la distance ρ du point (x, y, z) à l'origine. Substituons donc ce quotient à φ; et déterminons la constante de manière à vérifier, si c'est possible, la condition (2) en β, devenue ici, dans le plan méridien,

$$(\text{pour } \rho = R) \quad r\frac{d\beta}{dr} + y\frac{d\beta}{dy} = 0.$$

L'on obtient ainsi, pour la constante, la valeur $-\frac{1}{2}R^3$; et il en résulte définitivement

$$\beta = y\left(1 + \frac{R^3}{2\rho^3}\right) + \text{const.} \tag{29}$$

Après quoi, l'équation (23) donne pour α l'expression

$$\alpha = \frac{r^2}{2}\left(1 - \frac{R^3}{\rho^3}\right). \tag{30}$$

Les lignes d'égal potentiel et les filets fluides ont, on le voit, des formes notablement plus compliquées que dans le cas du cylindre circulaire. Mais, dans l'espace occupé par le fluide, c'est-à-dire pour ρ au moins égal à R, le filet central reste très simple, comme il le fallait, puisque l'équation $\alpha = 0$ se dédouble en $r^2 = 0$ et $\rho^3 = R^3$: ce qui donne bien, d'une part, la partie de l'axe des y extérieure à la sphère et, d'autre part, toute la surface $\rho = R$ de celle-ci. De même, l'expression de β sur le corps reste très simple aussi, l'hypothèse $\rho = R$ réduisant la formule (29) à $\beta = \frac{3}{2}y + \text{const}$. Il en résulte pour β' et β'_1 les formules respectives, dans la dernière desquelles L désigne le parcours πR des filets sur la sphère :

$$(31)\quad \begin{cases} \beta' = \int r^2 d\beta = \frac{3}{2}\int_{-R}^{y}(R^2 - y^2)\,dy = \frac{R+y}{2}(2R^2 + Ry - y^2), \\ \beta'_1 = \frac{3}{2}\int_{-R}^{R}(R^2 - y^2)\,dy = 2R^3 = \frac{2}{\pi^3}L^3. \end{cases}$$

Portons dans (28), avec cette expression de β'_1 en fonction de L, celle de la surface σ, qui est $4\pi R^2$ ou $\frac{4}{\pi}L^2$; et il viendra

$$(32)\qquad \text{(pour la sphère)}\quad k = \sqrt{2}\sqrt{\frac{KCV}{L}}.$$

Le coefficient numérique de cette formule, $\sqrt{2}$ ou 1,4142, excède encore celui, $\frac{4}{\pi}$ ou 1,2732, qui est propre au cylindre circulaire, lequel excédait déjà le coefficient $\frac{2}{\sqrt{\pi}} = 1,1284$ relatif au plateau. C'est que, conformément à la remarque faite à la fin du n° **12**, il grandit, à égalité du parcours L, avec la convexité de la surface, et que la sphère surpasse le cylindre en convexité, celui-ci étant dépourvu de courbure dans le sens des génératrices rectilignes.

Nous verrons toutefois, au n° **27**, que ces convexités du corps, suivant le sens du filet et suivant le sens perpendiculaire, ne font grandir le coefficient numérique de k, qu'en tant qu'elles accroissent le rapport moyen de la vitesse d'écoulement, sur le corps, du filet de parcours L, à la vitesse générale V du courant, et, surtout, en tant qu'elles rendent relativement plus variable, d'un bout à l'autre de ce trajet L, la largeur de l'étroite bande de surface arrosée par le filet fluide.

20. Passons maintenant de la sphère $r^2+y^2=R^2$ à l'ellipsoïde

$$\frac{r^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

dont a, b sont respectivement le *rayon équatorial* et le *demi-axe polaire*. Les formules (16), (17), (18) s'y appliquent, à cela près que, les cosinus directeurs du courant étant ici (0, 1, 0), β cessera d'être le produit $x\chi$ pour devenir $y\psi$, que, par suite, les constantes a, b, c, A devront être remplacées respectivement par b, c, a, B, et qu'il faudra, d'ailleurs, faire $c=a$. Nous aurons donc

$$(33)\quad \left\{\begin{array}{l} \beta = y\left[1+\dfrac{1}{B}\displaystyle\int_\lambda^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)^{\frac{3}{2}}}\right]+\text{const.},\\ \text{avec}\\ B=\dfrac{2}{a^2 b}-\displaystyle\int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)^{\frac{3}{2}}}. \end{array}\right.$$

Or, en réduisant la différentielle binome qui figure dans ces formules, on trouve, comme le montre une différentiation immédiate,

$$(34)\quad \int_\lambda^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2}{a^2-b^2}\left[\frac{1}{\sqrt{b^2+\lambda}}-\int_0^{\frac{1}{\sqrt{b^2+\lambda}}}\frac{du}{1+(a^2-b^2)u^2}\right];$$

et, de plus, il vient aisément, suivant que l'ellipsoïde est *aplati* ou *allongé*, c'est-à-dire suivant que a^2 est supérieur ou inférieur à b^2,

$$(35)\quad \int_0^{\frac{1}{\sqrt{b^2+\lambda}}}\frac{du}{1+(a^2-b^2)u^2} = \left\{\begin{array}{l}\text{soit } \dfrac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\,\text{arc tang}\sqrt{\dfrac{a^2-b^2}{b^2+\lambda}},\\ \text{soit } \dfrac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\log\sqrt{\dfrac{\sqrt{b^2+\lambda}+\sqrt{b^2-a^2}}{\sqrt{b^2+\lambda}-\sqrt{b^2-a^2}}}.\end{array}\right.$$

On aura donc, pour B, les valeurs respectives :

$$
(36)\quad
\begin{cases}
\text{(ellipsoïde aplati)} \\
B = \dfrac{2}{a^2-b^2}\left(-\dfrac{b}{a^2} + \dfrac{1}{\sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{arc\,tang} \dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right), \\
\text{(ellipsoïde allongé)} \\
B = \dfrac{2}{b^2-a^2}\left(\dfrac{b}{a^2} - \dfrac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \log \sqrt{\dfrac{b+\sqrt{b^2-a^2}}{b-\sqrt{b^2-a^2}}}\right).
\end{cases}
$$

A la surface, où $\lambda = 0$, les deux formules (33) donnent, par une réduction évidente,

$$
(37)\quad \beta = \frac{2y}{a^2bB} + \text{const.}, \qquad \beta' = \int r^2 d\beta = \frac{2}{\pi a^2 bB}\int_{-b}^{y} \pi r^2\, dy.
$$

Comme l'intégrale $\int \pi r^2\, dy$, prise de $\beta = \beta_0$ à $\beta = \beta_1$, c'est-à-dire entre les limites $y = \mp b$, exprime le volume $\frac{4}{3}\pi a^2 b$ de l'ellipsoïde, la valeur de β'_1 sera $\frac{8}{3B}$, et, finalement, la formule (27) deviendra

$$
(38)\qquad \text{Pouvoir refroidissant} = 8\theta_0\sqrt{\frac{2\pi KCV}{3B}}.
$$

Il ne restera plus qu'à y remplacer B par la valeur (36) convenable; après quoi l'on passerait, s'il y avait lieu, à l'expression (28) de k, peu simple ici en raison des formules compliquées de la surface σ et du demi-méridien L.

21. Bornons-nous aux deux cas extrêmes d'un ellipsoïde ou très aplati, ou très allongé, c'est-à-dire d'un *disque* ou plateau circulaire, de rayon a, et d'une *aiguille*, de longueur $2b$.

Dans le premier cas, où b s'évanouit, l'arc tangente de la première formule (36) devient $\frac{\pi}{2}$ et la valeur de B est

$$
(39)\qquad \text{(pour un disque)}\quad B = \frac{\pi}{a^3}.
$$

En même temps l'aire σ se réduit aux deux faces du plateau, $2\pi a^2$

en tout, et, le trajet L des filets sur le corps, aux rayons respectifs de ces faces, soit à la somme $2a$. L'on a donc $B = \frac{8\pi}{L^3}$; $\sigma = \frac{\pi}{2}L^2$; et, en divisant par $\theta_0\sigma$ la formule (38), il vient

$$(40) \qquad \text{(pour un disque)} \quad k = \frac{8}{\pi\sqrt{3}}\sqrt{\frac{KCV}{L}}.$$

Le coefficient numérique $\frac{8}{\pi\sqrt{3}} = 1,4702$ de cette formule excède celui, $\frac{4}{\pi} = 1,2732$, du cylindre circulaire, et celui même, $\sqrt{2} = 1,4142$, de la sphère. Mais, aussi, la convexité de la surface, sur le trajet L des filets, est énorme au passage d'une face du disque à l'autre face (où se renverse brusquement le sens des filets fluides), passage exigeant de grandes vitesses d'écoulement au bord du disque ([1]); et elle rend, en outre, variable au plus haut degré, sur tout le trajet L, la largeur des filets fluides. Ces circonstances font donc grandir le coefficient numérique de k comme il a été dit à la fin du n° **19**; et c'est dans le rapport $\frac{4}{\sqrt{3\pi}} = 1,303$, de $\frac{8}{\pi\sqrt{3}}$ à $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$, puisque ce coefficient serait $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$ pour un plateau tangent au courant.

Soit maintenant le cas opposé de l'*aiguille*, où le rayon équatorial a est très petit. La seconde formule (36) y donne sensiblement, en observant que le logarithme n'y devient grand que de l'ordre de $\log\frac{b}{a}$, ou bien moins que le terme algébrique,

$$(41) \qquad \text{(pour une aiguille)} \quad B = \frac{2}{ba^2}.$$

Or, en même temps, la surface σ, composée de zones $2\pi r\,ds$ revenant environ à $2\pi r\,dy$ (sauf sur une longueur négligeable aux deux bouts) ou produits par $\frac{\pi}{2}$ de leurs projections $4r\,dy$ sur les deux faces d'un

([1]) Leur valeur $V\frac{d\beta}{ds}$ y est, pour $y=0$, $V\frac{d\beta}{dy}$, c'est-à-dire $V\frac{2a}{\pi b}$, d'après (37) et (39).

plan méridien, vaudra en tout le produit analogue, par $\frac{\pi}{2}$, de la somme de ces projections, c'est-à-dire de 2 fois la *coupe méridienne* πab de l'aiguille. Le trajet L des filets étant $2b$ à très peu près, on aura donc

$$B = \frac{4}{La^2}, \qquad \sigma = \pi^2 ab = \frac{\pi^2}{2} La, \qquad B\sigma^2 = \pi^4 L;$$

et la formule (38), divisée par $\theta_0 \sigma$, donnera

$$(42) \qquad \text{(pour une aiguille)} \quad k = \left(\frac{8}{\pi}\sqrt{\frac{2}{3\pi}}\right)\sqrt{\frac{KCV}{L}}.$$

Le coefficient numérique $\frac{8}{\pi}\sqrt{\frac{2}{3\pi}}$, égal à 1,1731, excède celui,

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} = 1,1284,$$

qui convenait pour un plateau ayant ses faces parallèles au courant général. Donc la convexité de la surface dans le sens perpendiculaire aux filets fluides, tout en paraissant moins influente que suivant le sens même des filets, n'est pas sans effet pour accroître le pouvoir refroidissant. Elle fait, ici, grandir k dans le rapport, $\frac{4}{\pi}\sqrt{\frac{2}{3}} = 1,040$, de $\frac{8}{\pi}\sqrt{\frac{2}{3\pi}}$ à $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$. C'est ce que montraient déjà les deux exemples comparés de la sphère et du cylindre, où le rapport analogue était notablement plus fort, savoir, celui de $\sqrt{2}$ à $\frac{4}{\pi}$, c'est-à-dire $\frac{\pi\sqrt{2}}{4} = 1,111$, comme si la courbure propre des filets fluides accroissait l'effet de la convexité de la surface dans le sens transversal.

22. Comparons enfin, aux pouvoirs refroidissants, que nous venons d'évaluer, sur le disque et l'aiguille, d'un courant dirigé suivant leur axe de révolution, ceux qu'exercerait le même courant s'il était perpendiculaire à cet axe.

Alors, sur chacune des deux faces du disque, le courant glisserait, suivant leurs cordes, que j'appellerai $2X$, normales à un même diamètre $2a$ de la face, très sensiblement comme sur un plateau mince de largeur $L = 2X$, c'est-à-dire en donnant lieu à la conductibilité fictive $k = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{KCV}{L}} = \sqrt{\frac{2KCV}{\pi X}}$; et, si l'on appelle Y la distance au centre, sur le diamètre $2a$, du milieu de la corde $2X$, distance variable de $-a$ à $+a$, la bande élémentaire $2X\,dY$ de chaque face émettra un flux de chaleur exprimé par $\sqrt{\frac{2KCV}{\pi X}}\theta_0(2X\,dY)$. Donc celui-ci, doublé, puis intégré de $Y=-a$ à $Y=+a$, ou quadruplé et intégré de zéro à a, évaluera le pouvoir refroidissant :

(43) $$8\theta_0\sqrt{\frac{2KCV}{\pi}}\int_0^a\sqrt{X}\,dY.$$

Or, si φ désigne, sur chaque face circulaire, l'angle d'un rayon avec le diamètre $2a$, nous aurons

$$Y = a\cos\varphi,\qquad X = a\sin\varphi;$$

d'où

$$dY = -a\sin\varphi\,d\varphi;$$

et, en appelant, pour abréger, I l'intégrale

(44) $$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\varphi)^{\frac{3}{2}}\,d\varphi,$$

le nouveau pouvoir refroidissant (43) du courant sur le disque deviendra

(45) $$8I\theta_0\sqrt{\frac{2KCVa^3}{\pi}}.$$

D'autre part, remplaçons, dans (38), B par la valeur (39); et nous aurons pour le pouvoir analogue, sur le disque normal au courant,

$$8\theta_0\sqrt{\frac{2KCVa^3}{3}}.$$

Le rapport du nouveau pouvoir refroidissant (45) au premier considéré (38) est donc

(46) $$\text{(pour le disque)}\quad I\sqrt{\frac{3}{\pi}}.$$

Passons au cas de l'aiguille. Ici, le courant normal à son axe traitera sensiblement chacune de ses zones $2\pi r\,ds$ ou (à très peu près) $2\pi r\,dy$, comme une bande d'un cylindre circulaire, en y donnant, par conséquent, une conductibilité fictive k égale à $\frac{4}{\pi}\sqrt{\frac{\mathrm{KCV}}{\mathrm{L}}}$ ou à $\frac{4}{\pi}\sqrt{\frac{\mathrm{KCV}}{\pi r}}$. Il en résulte le flux $\theta_0\frac{4}{\pi}\sqrt{\frac{\mathrm{KCV}}{\pi r}}(2\pi r\,dy) = 8\theta_0\sqrt{\frac{\mathrm{KCV}r}{\pi}}dy$, et, pour toute l'aiguille, en intégrant de $y=-b$ à $y=+b$, ou deux fois de $y=0$ à $y=b$, $16\theta_0\sqrt{\frac{\mathrm{KCV}}{\pi}}\int_0^b\sqrt{r}\,dy$. Or on a $r=a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}$; et, si l'on pose $y=b\cos\varphi$ (d'où $r=a\sin\varphi$), cette expression devient, encore par l'introduction de l'intégrale définie (44),

$$1{,}61\,\theta_0\sqrt{\frac{\mathrm{KCV}ab^3}{\pi}}. \tag{47}$$

Comparée à la formule (38), dans laquelle B prendra la valeur (41), et qui sera ainsi $8\theta_0\sqrt{\frac{\pi\mathrm{KCV}a^2b}{3}}$, elle donne le rapport très grand

$$(\text{pour l'aiguille})\quad \frac{2{,}1}{\pi}\sqrt{\frac{3b}{a}}. \tag{48}$$

On voit que, sur une aiguille assez fine, le courant a, comme on pouvait le prévoir, un pouvoir refroidissant incomparablement plus fort, quand il est perpendiculaire à son axe, que lorsqu'il lui est parallèle.

Par conséquent, *le fait, pour un cylindre elliptique, d'être également refroidi par un courant normal à son axe, dans quelque azimut de sa section que souffle ce courant* (n° **14**), *ne doit pas être généralisé et étendu à un corps quelconque. Le pouvoir refroidissant est augmenté beaucoup par les changements d'orientation du courant qui réduisent notablement le trajet des filets fluides sur le corps* [1].

---

[1] Un exemple, encore plus simple, de cette réduction du pouvoir refroidissant par l'allongement du trajet des filets fluides sur le corps, se présente dans le cas élémentaire où le courant n'est pas troublé par la présence du corps, c'est-à-

Il nous reste à évaluer l'intégrale I, définie par (44). Le procédé usuel qui, dans l'expression $\int \sin^m x\, dx$, permet d'abaisser l'exposant m de deux unités, donne d'abord

$$I = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin\varphi}}.$$

Substituons à φ un nouvel angle ψ, variable également entre zéro et $\frac{\pi}{2}$, mais tel, que l'on ait

$$\sin\varphi = \cos^2\psi, \qquad \text{d'où} \qquad d\varphi = -\frac{2\cos\psi\sin\psi\, d\psi}{\sqrt{1-\cos^4\psi}} = -\frac{2\cos\psi\, d\psi}{\sqrt{2-\sin^2\psi}}.$$

Il vient alors, vu, finalement, l'expression connue de l'intégrale elliptique complète F_1 de Legendre et la Table numérique des logarithmes décimaux de ses valeurs qu'il a calculée,

$$(49) \qquad I = \frac{\sqrt{2}}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\psi}} = \frac{\sqrt{2}}{3} F_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0,87402.$$

Le rapport (46), relatif au disque, devient alors

$$(50) \qquad \sqrt{\frac{2}{3\pi}}\, F_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0,8521.$$

Le courant enlève donc au disque, quand il lui est parallèle, les $\frac{8521}{10000}$ de la chaleur qu'il prend lorsqu'il lui est perpendiculaire.

---

dire dans le cas d'un plateau long et mince, d'une largeur donnée l, *tangent au courant, mais dont l'axe ou le bord lui sont obliques* et font avec lui un angle, aigu ou obtus, $\frac{\pi}{2} - i$. Alors le trajet L des filets fluides sur le plateau devient $\frac{l}{\cos i}$, et *la conductibilité superficielle* k représentative du pouvoir refroidissant, savoir $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{KCV}{L}}$, devient $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{KCV}{l}\cos i}$: elle *est proportionnelle à la racine carrée du cosinus de l'angle i mesurant l'obliquité du courant sur l'axe du plateau.* Le pouvoir refroidissant décroîtra évidemment dans le même rapport que $\sqrt{\cos i}$, a mesure que grandira l'obliquité i.

§ VI. — Extension des lois précédentes à tout corps convexe.

23. Les formules (26) et (27) s'étendent à un corps convexe quelconque.

Pour définir les filets fluides *voisins de sa surface*, nous considérerons chacun d'eux au point où il coupe une surface $\beta =$ const. déterminée, dite *surface origine*, celle, par exemple, dont la courbe terminale sur le corps aura la longueur 2π d'une circonférence de rayon 1, ou même, plus généralement, une certaine longueur $2\pi l$: et, $\Delta_1\beta$ prenant, en chaque point de cette courbe, une valeur assignée $(\Delta_1\beta)_0$, nous appellerons, d'une part, $\frac{\alpha}{l(\Delta_1\beta)_0}$, la *petite* perpendiculaire abaissée du filet sur le corps, c'est-à-dire sur la courbe terminale $2\pi l$, et, d'autre part, $l\gamma$ l'arc de celle-ci séparant, d'une origine prise arbitrairement sur elle, le pied de la perpendiculaire $\frac{\alpha}{l(\Delta_1\beta)_0}$. Il est clair que α, γ *particulariseront* chaque filet; et, si l'on y joint le paramètre β des surfaces d'égal potentiel, variable de $-\infty$ à ∞ le long des filets, on aura trois coordonnées α, β, γ propres à définir tous les points (x, y, z) de l'espace qui entoure le corps.

Observons encore que les surfaces β interrompues par le corps seront comprises entre deux extrêmes β_0, β_1 l'atteignant par un *point conique*, point d'aboutissement sur le corps, pour la première, et de départ du corps, pour la seconde, du *filet central*, qui, entre eux, s'épanouit en une nappe recouvrant toute la surface.

24. Cela posé, concevons le faisceau de filets, contigu au solide, dont la section par la surface origine est un petit rectangle, à côtés $l\,d\gamma$, $\frac{\alpha}{l(\Delta_1\beta)_0}$. Un certain feuillet fluide élémentaire coïncide, à l'époque t, avec ce rectangle; et son contour mobile, que l'on sait devoir garder toujours, vu la continuité des déformations, la forme parallélogramme, décrit évidemment, d'un mouvement presque translatoire à chaque instant, les quatre faces du faisceau. Donc celui-ci a pour section droite, sur une surface β quelconque, un parallélogramme ayant comme hauteur la perpendiculaire, n, abaissée du filet (α, γ) sur le corps, et, comme base, l'écartement ε des deux filets à paramètre α nul et à paramètre γ différant, entre les deux, de $d\gamma$. Or les deux sections normales $n\varepsilon$, $\left(\frac{\alpha}{l(\Delta_1\beta)_0}\right)(l\,d\gamma)$ du faisceau sont réciproquement proportionnelles aux vitesses d'écoulement correspondantes

$$V\Delta_1\beta \quad \text{et} \quad V(\Delta_1\beta)_0,$$

à raison de la conservation du débit des filets, exprimée par l'équation $\Delta_2\beta = 0$. De là résulte, pour apprécier la distance variable n du filet (α, γ) à la surface du corps, la formule

$$(51) \quad n\varepsilon\Delta_1\beta = \alpha\,d\gamma, \qquad \text{ou} \qquad n = \left(\frac{d\gamma}{\varepsilon\Delta_1\beta}\right)\alpha, \qquad \alpha = \left(\frac{\varepsilon}{d\gamma}\Delta_1\beta\right)n.$$

25. En chaque endroit, les *couches* du faisceau *parallèles* à la surface du corps ont, chacune, une certaine température θ, *rapidement variable* d'une couche à l'autre, ou *suivant une même normale n prolongée;* et $\Delta_2\theta$ est sensiblement la dérivée seconde de θ en n, dérivée que l'on pourra, si l'on veut, prendre, sans faire varier non seulement β, mais même γ, c'est-à-dire le long de l'intersection de la surface β par la face $\gamma = \text{const.}$ du faisceau (pouvant être devenue oblique au corps), pourvu que dn désigne toujours la distance *normale* des couches. En effet, θ ne varie *rapidement* que de couche en couche, et non d'un point à l'autre de chacune.

Dès lors, le numérateur $d^2\theta$ étant une différentielle partielle *en α seul*, dans cette dérivée seconde de θ, on pourra écrire celle-ci

$$\frac{d^2\theta}{d\alpha^2}\left(\frac{d\alpha}{dn}\right)^2$$

et y remplacer la dérivée de α en n par sa valeur tirée de la troisième formule (51), linéaire en n, car le coefficient entre parenthèses y sera sensiblement constant. On aura donc

$$(52) \qquad \Delta_2\theta = (\Delta_1\beta)^2\left(\frac{\varepsilon}{d\gamma}\right)^2\frac{d^2\theta}{d\alpha^2}.$$

Telle sera la valeur approchée de $\Delta_2\theta$, à substituer dans la seconde équation (1) (p. 292). D'autre part, le premier membre de la même équation est le produit, par la vitesse $\Delta_1 \beta$ (au facteur V près), de la dérivée de θ suivant le filet (α, γ) lui-même, ou prise, sans faire varier ni α, ni γ, le long d'un chemin, ds, quotient de $d\beta$ par $\Delta_1 \beta$. Ainsi ce premier membre s'écrit $(\Delta_1 \beta)^2 \frac{d\theta}{d\beta}$; et il suffira, en intégrant depuis $\beta = \beta_0$, de poser

$$(53) \qquad \beta' = \int \left(\frac{\varepsilon}{d\gamma}\right)^2 d\beta$$

(ce qui donne une fonction de β et de γ à calculer au préalable d'après la forme des filets), pour que l'équation obtenue en θ devienne exactement la même que pour un corps de révolution, savoir, (25) (p. 307).

Effectivement, la formule (53) de β' se réduit bien à $\int r^2 d\beta$ pour un corps de révolution. Car, alors, $d\gamma$ désigne l'angle dièdre des deux méridiens voisins, dont l'espacement ε, variable comme la distance r à l'axe, est exprimé par $r\,d\gamma$.

26. On aura, par suite, les formules, analogues à (26),

$$(54) \qquad \left\{ \begin{aligned} \theta &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f\left(\beta' - \frac{CV}{K}\frac{\alpha^2}{2\nu^2}, \gamma\right) e^{-\frac{\nu^2}{2}} d\nu, \\ \left(\frac{d\theta}{d\alpha}\right)_0 &= -2\sqrt{\frac{CV}{\pi K}} \int_0^\infty \frac{df(\beta' - \omega^2, \gamma)}{d\beta'} d\omega. \end{aligned} \right.$$

La fonction $f(\beta', \gamma)$ y désigne encore les températures θ du filet central, c'est-à-dire les valeurs θ_0, censées connues en β' et γ, *entre les limites* zéro et β'_1 (correspondant à β_0 et β_1) *où le filet est épanoui*, mais des valeurs nulles hors de ces limites, où β' ne variera, vu l'évanouissement continu qu'y présente le rapport $\frac{\varepsilon}{d\gamma}$, que pour les valeurs $\pm\infty$ de β, c'est-à-dire aux points, de température θ nulle, infiniment éloignés du corps.

Enfin, le flux de chaleur par unité de temps, à travers un élément plan $\varepsilon\, ds$ de la bande du corps couverte par le faisceau considéré, sera le produit de cet élément par $-K\frac{d\theta}{dn}$ ou $-K\left(\frac{d\theta}{d\alpha}\right)_0 \frac{\varepsilon \Delta_1 \beta}{d\gamma}$, vu la formule (51), produit égal à $-\mathrm{K}\left(\frac{d\theta}{d\alpha}\right)_0\left(\frac{\varepsilon}{d\gamma}\right)^2 d\beta\, d\gamma$ ou à $-\mathrm{K}\left(\frac{d\theta}{d\alpha}\right)_0 d\beta' d\gamma$. Pour toute la bande, ce sera l'intégrale en β' de cette expression entre les limites o, β'_1, dont la seconde sera une fonction déterminée de γ. Et il faudra enfin intégrer le résultat, par rapport à γ, de $\gamma = 0$ à $\gamma = 2\pi$, pour avoir la chaleur totale enlevée au corps par le fluide dans l'unité de temps. A raison de la valeur (54) de la dérivée de θ en α, il viendra donc, si l'on suppose finalement θ_0 uniforme :

$$(55)\quad \left\{\begin{array}{l}\text{Pouvoir refroidissant}\\ = 2\sqrt{\dfrac{\mathrm{KCV}}{\pi}}\displaystyle\int_0^{2\pi} d\gamma \int_0^{\sqrt{\beta'_1}} f(\beta'_1 - \omega^2, \gamma)\, d\omega = 2\theta_0\sqrt{\dfrac{\mathrm{KCV}}{\pi}}\int_0^{2\pi}\sqrt{\beta'_1}\, d\gamma.\end{array}\right.$$

C'est, en définitive, la formule (27) (p. 308), *à cela près que le facteur* $\sqrt{\beta'_1}$ *s'y trouve remplacé par la moyenne de ses valeurs relatives aux divers filets fluides ruisselant sur le corps.*

J'appellerai $\mathfrak{M}\sqrt{\beta'_1}$ la moyenne en question, dont le produit par

$$4\theta_0\sqrt{\pi\mathrm{KCV}}$$

exprime ainsi le pouvoir refroidissant. Sa formule est, d'après (53), en faisant passer le facteur $d\gamma$ sous le signe $\int$ de la première intégration,

$$(56)\qquad \mathfrak{M}\sqrt{\beta'_1} = \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma=0}^{\gamma=2\pi}\sqrt{\int_{\beta_0}^{\beta_1}\varepsilon^2\, d\beta}.$$

Pour tous les corps de même forme et orientés de la même manière dans le courant, cette moyenne est en raison directe de la racine carrée du volume. Il suffit, pour le voir, de choisir sur tous ces corps, comme surfaces β origines, des surfaces homologues, dont les courbes respectives d'interruption par les corps se trouveront divisibles en éléments $l\,d\gamma$ ayant leurs facteurs $d\gamma$ indépendants du rapport de similitude; car, alors, la variable β' définie par (53) aura *trois dimensions*, comme le produit $\varepsilon^2 d\beta$.

Donc, les lois de proportionnalité énoncées après les formules (27) et (28) (p. 308), pour les corps de révolution, s'appliquent à un corps quelconque ([1]).

27. Si l'on multiplie par $4\theta_0\sqrt{\pi KCV}$ la formule (56), il vient, pour le pouvoir refroidissant du courant, l'expression

$$2\theta_0\sqrt{\frac{KCV}{\pi}}\int_{\gamma=0}^{\gamma=2\pi}\sqrt{\int_{\beta_0}^{\beta_1}\varepsilon^2\,d\beta}.$$

Les éléments de cette expression, savoir

$$2\theta_0\sqrt{\frac{KCV}{\pi}\int_{\beta_0}^{\beta_1}\varepsilon^2\,d\beta},$$

([1]) J'ai donné une première ébauche de cette théorie, par l'emploi d'une équation binome comme (25) et de son intégrale analogue à (54), aux pages 193 et 194 du tome II de mes leçons sur la *Théorie analytique de la chaleur, etc.* Seulement, j'y supposais *parallèles à la surface du corps les filets fluides voisins.* Or, quelque mince que soit la couche totale, à considérer, de ces filets, leur distance n au corps varie généralement, comme on voit, *dans un rapport notable,* sur les étendues *relativement grandes* où s'exerce leur action; et, par suite, les deux variables t, n introduites, dans la note de la page 194 citée, pour tenir lieu de celles que j'appelle ici β' et α, ne conviennent nullement. La formule (51) montre, en effet, que la constance de n le long d'un même filet y supposerait la proportionnalité *inverse* de ε à $\Delta_1\beta$, c'est-à-dire de l'écart mutuel de deux filets contigus, glissant sur la surface, à leur vitesse d'écoulement $V\Delta_1\beta$. Mais c'est plutôt le contraire qui se réalise, la vitesse $V\Delta_1\beta$ se trouvant nulle au point d'épanouissement du filet fluide central, où ε s'annule encore, et prenant sa valeur maxima sur le contour de la plus forte section du corps normale au courant général, là où l'espacement ε des filets est lui-même le plus grand.

La variable β' qui convient à la question n'est donc pas, comme j'étais conduit à l'admettre, l'arc parcouru s *évalué en temps relatif de parcours,* ainsi qu'il arriverait si ε était en raison inverse de $\Delta_1\beta$. En effet, l'on aurait alors, dans (53), le long d'un même filet, $d\beta'$ proportionnel au quotient de $d\beta$ par $(\Delta_1\beta)^2$ ou de ds par $\Delta_1\beta = \frac{ds}{dt}$, ou, enfin, $d\beta'$ proportionnel à dt et, par suite, β' croissant comme t, qui est le temps, *évalué dans l'hypothèse* $V = 1$, c'est-à dire en prenant pour unité le temps employé par le courant général à parcourir l'unité de longueur.

représentent la chaleur enlevée au corps, dans l'unité de temps, par les divers filets fluides qui le recouvrent, chacun d'eux effectuant sur lui un certain trajet total L et baignant, vu leur largeur variable mais donnée ε, l'étroite bande $\int \varepsilon\, ds$ ou $\int \varepsilon\, dL$ de la surface. Appelons, pour fixer les idées, E la valeur moyenne de ε, c'est à-dire la largeur moyenne de la bande, dont l'aire sera dès lors EL; et divisons par θ_0 EL la quantité de chaleur indiquée, afin d'avoir la conductibilité extérieure fictive, k, *représentative du pouvoir refroidissant du filet*, ou *évaluée pour la surface* EL *qu'arrose celui-ci*. D'ailleurs, observons que $d\beta$ équivaut à $(\Delta_1\beta)ds$, ou à $(\Delta_1\beta)dL$, et que $V\Delta_1\beta$ désigne la vitesse d'écoulement le long de dL. Si nous appelons v cette vitesse variable, nous aurons donc $d\beta = \frac{v}{V}dL$; et il viendra la formule assez simple

$$k = \sqrt{\frac{4}{\pi}\int_0^L \left(\frac{\varepsilon}{E}\right)^2 \frac{v}{V}\frac{dL}{L}}\sqrt{\frac{KCV}{L}}. \tag{56 bis}$$

Le rapport $\frac{v}{V}$, nul aux deux extrémités du trajet L où se font l'épanouissement et la reconstitution du filet central, excède assez notablement l'unité vers le milieu du trajet, en raison du rétrécissement qu'apporte le corps aux sections d'écoulement des filets qui l'entourent, et de l'accélération du mouvement qui en résulte. La valeur moyenne de $\frac{v}{V}$ ne doit donc pas différer beaucoup de l'unité ([1]). Et, comme,

---

([1]) De fait, dans le cas du cylindre, où $\varepsilon = E$, cette valeur moyenne $\frac{\beta_1 - \beta_0}{L}$ a été, pour une section elliptique (p. 304), $\frac{S'}{S}$ et, par conséquent, supérieure à l'unité. L'on conçoit d'ailleurs qu'elle y soit particulièrement forte, le passage du fluide voisin se trouvant plus rétréci ou gêné par un cylindre indéfini en longueur que par un corps limité, où l'écoulement des filets qui contournent le cylindre ne pouvant se faire que par deux côtés, suivant les deux sens perpendiculaires à l'axe, au lieu de se produire librement dans tous les azimuts.

Au contraire, dans le cas de la sphère (p. 310), cette valeur moyenne $\frac{\beta_1 - \beta_0}{L}$ devient $\frac{1}{L}\int_{-R}^{R}\frac{3}{2}dy = \frac{3R}{L}$, ou $\frac{3}{\pi}$, et se trouve être un peu moindre que 1. Mais, d'autre part, le rapport $\frac{\varepsilon}{E}$ a pour valeur moyenne 1, l'on conçoit que la valeur moyenne du produit $\left(\frac{\varepsilon}{E}\right)^2 \frac{v}{V}$ ne s'écarte pas, non plus, beaucoup de l'unité. Par suite, le coefficient numérique affectant $\sqrt{\frac{KCV}{L}}$, dans l'expression de k qui correspond à un filet fluide quelconque, sera toujours un peu voisin de ce qu'il est quand $v = V$ et $\varepsilon = E$, c'est-à-dire de sa valeur $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$ propre au cas d'un mince plateau tangent au courant.

Ainsi s'explique la concordance approximative, signalée au n° **3**, des valeurs de ce coefficient pour un certain nombre de formes du corps.

La valeur générale ou moyenne de la conductibilité fictive k pour tout le corps serait évidemment $\frac{\Sigma k EL}{\Sigma EL}$, les deux signes Σ de sommation

---

par contre, le rapport $\left(\frac{\varepsilon}{E}\right)^2$ varie alors beaucoup et, par suite, excède notablement, *en moyenne*, l'unité; car, si l'on pose $\varepsilon = E(1+\varepsilon')$, où ε' désigne une variation (relative) *nulle en moyenne*, ce rapport sera $1 + 2\varepsilon' + \varepsilon'^2$ et aura visiblement pour valeur moyenne l'unité *accrue de la valeur moyenne positive de* ε'^2. Aussi le coefficient numérique de k est-il encore plus grand pour la sphère que pour le cylindre, même circulaire.

En général, si l'on pose $\varepsilon = E(1+\varepsilon')$ et $v = V(1+\delta)$, l'intégrale

$$\int_0^L \left(\frac{\varepsilon}{E}\right)^2 \frac{v}{V} \frac{dL}{L}$$

deviendra, en désignant par le symbole $\mathfrak{M}$ la moyenne de la quantité inscrite à la suite,

$$1 + \mathfrak{M}\,\delta + \mathfrak{M}(\varepsilon'^2) + \mathfrak{M}(2\varepsilon'\delta) + \mathfrak{M}(\varepsilon'^2\delta),$$

expression où non seulement la moyenne de ε'^2, mais celle de $2\varepsilon'\delta$ seront positives, vu que δ aura le signe négatif ou positif de ε' tant aux deux extrémités qu'au milieu du chemin L. Les signes divers de δ devant rendre peu sensible la valeur moyenne du produit *du troisième degré* $\varepsilon'^2\delta$, il ne pourra guère y avoir de négatif que le petit terme $\mathfrak{M}\,\delta$. L'intégrale paraît donc devoir être toujours supérieure à l'unité.

Le coefficient numérique par lequel il faut multiplier $\sqrt{\frac{KCV}{L}}$, pour obtenir k, aurait ainsi comme valeur minimum $\frac{2}{\sqrt{\pi}} = 1,1284$.

s'étendant à tous les filets dérivés du filet central ou étalés sur la surface.

§ VII. — Cas de l'ellipsoïde à axes inégaux : application à un disque et à une aiguille elliptiques.

28. L'ellipsoïde semble devoir être l'exemple naturel, ou le plus simple, à donner de la théorie générale précédente. Et, cependant, les calculs y présentent de grandes difficultés, probablement insurmontables quand on veut les pousser jusqu'au bout en y complétant les intégrations (56).

Appelons $2a$, $2b$, $2c$ les trois axes, suivant les sens respectifs des x, y, z.

Nous avons vu déjà au n° **13** (p. 302) que le potentiel $V\beta$ des vitesses comprendrait, à part le facteur V et une constante arbitraire, trois termes, produits respectifs des trois cosinus directeurs l, m, n du courant par trois solutions particulières analogues, dont la première est $x\chi$, avec l'expression (17) de χ et la valeur (18) de la constante A qui y figure.

Pour donner plus de concision et de symétrie aux formules, considérons l'intégrale définie

$$I = \int_{\lambda}^{\infty} \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}, \tag{57}$$

où λ, paramètre positif des ellipsoïdes homofocaux extérieurs au proposé, et croissant de zéro à l'infini quand on s'éloigne de celui-ci, est la fonction de x, y, z définie par leur équation commune

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} = 1. \tag{58}$$

L'intégrale définie figurant dans (17) égale le quotient, par $-a$, de la dérivée de I en a; et cette expression (17) de χ peut s'écrire

$$1 - \frac{1}{aA}\frac{dI}{da}.$$

La formule générale de β sera donc

$$(59)\quad \beta = lx\left(1 - \frac{1}{a\mathrm{A}}\frac{d\mathrm{I}}{da}\right) + my\left(1 - \frac{1}{b\mathrm{B}}\frac{d\mathrm{I}}{db}\right) + nz\left(1 - \frac{1}{c\mathrm{C}}\frac{d\mathrm{I}}{dc}\right) + \text{const.},$$

où, d'après (18), les constantes A, B, C auront les valeurs respectives

$$(60)\quad (\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C}) = \frac{2}{abc} + \frac{1}{(a,b,c)}\frac{d}{d(a,b,c)}\int_0^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}.$$

A la surface du corps, où $\lambda = 0$, A, par exemple, se confond avec $\frac{2}{abc} + \frac{1}{a}\frac{d\mathrm{I}}{da}$, et $-\frac{1}{a\mathrm{A}}\frac{d\mathrm{I}}{da}$ prend la valeur $\frac{2}{abc\mathrm{A}} - 1$. Il y vient donc

$$(61)\quad \beta = \frac{2}{abc}\left(\frac{lx}{\mathrm{A}} + \frac{my}{\mathrm{B}} + \frac{nz}{\mathrm{C}}\right),$$

expression linéaire en x, y, z; de sorte que, si l'on suppose l'ellipsoïde convenablement placé, *les courbes d'égal potentiel* $\mathrm{V}\beta$ *y sont les lignes de niveau et*, par suite, *les filets fluides, celles de plus grande pente* (¹).

(¹) Si, dans le cas du cylindre elliptique, la disparition de c et de z n'avait pas rendu extrêmement simple la formule (20) de β, il y aurait eu lieu d'employer la même méthode. Alors l'intégrale I, où l'on supposerait d'abord très grande, mais égale à une constante assignée M, la limite *supérieure*, serait

$$\mathrm{I} = \int_\lambda^{\mathrm{M}} \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)}}$$
$$= 2\log\left(\sqrt{\mathrm{M}+a^2} + \sqrt{\mathrm{M}+b^2}\right) - 2\log\left(\sqrt{a^2+\lambda} + \sqrt{b^2+\lambda}\right).$$

Or la somme $\sqrt{\mathrm{M}+a^2} + \sqrt{\mathrm{M}+b^2}$ s'écrit $\sqrt{\mathrm{M}}\left[\left(1+\frac{a^2}{\mathrm{M}}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(1+\frac{b^2}{\mathrm{M}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$ et, développée, pour M très grand, par la formule du binome, elle devient

$$2\sqrt{\mathrm{M}}\left(1 + \frac{a^2+b^2}{4\mathrm{M}} + \ldots\right).$$

Son logarithme népérien vaut donc $\log(2\sqrt{\mathrm{M}}) + \frac{a^2+b^2}{4\mathrm{M}} + \ldots$ et tend vers zéro

29. Mais bornons-nous à l'hypothèse d'un courant dirigé suivant un axe, celui des z, par exemple ; ce qui donne β proportionnel à z et, pour lignes de pente, les courbes $y = \nu x^k$, avec ν comme paramètre et k égal au quotient de a^2 par b^2.

L'écart ε des deux lignes à paramètres ν et $\nu + d\nu$, qui se projette en vraie grandeur sur le plan des xy, sera $\sqrt{\dfrac{x^{2k}}{1 + k^2\nu^2 x^{2k-2}}}\,d\nu$; car le paramètre différentiel $\sqrt{\dfrac{d\nu^2}{dx^2} + \dfrac{d\nu^2}{dy^2}}$ de la fonction $\nu = yx^{-k}$ est $\sqrt{\dfrac{x^2 + k^2y^2}{x^{2k+2}}}$, ou $\sqrt{\dfrac{1 + k^2\nu^2 x^{2k-2}}{x^{2k}}}$, et représente, comme on sait, la dérivée $\dfrac{d\nu}{\varepsilon}$ de ν suivant l'élément ε de chemin.

Cela posé, pour évaluer la moyenne $\mathfrak{M}\sqrt{\beta'_1}$, exprimée par (56) (p. 321), et dont le produit par $4\theta_0\sqrt{\pi KCV}$ vaudra le pouvoir refroidissant du courant sur l'ellipsoïde, essayons d'abord de calculer l'inté-

---

dans sa partie fonction de a, b, à mesure que M grandit. A la limite, il vient

$$1 = \text{const.} - 2\log\left(\sqrt{a^2+\lambda} + \sqrt{b^2+\lambda}\right),$$

expression qui se réduit à

$$\text{const.} - 2\log(a+b), \qquad \text{pour} \qquad \lambda = 0.$$

On déduirait aisément de là, et des formules analogues à (59), (60), l'expression (20) de β. Par exemple, les valeurs de A, B,

$$(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = \frac{2}{ab} + \frac{1}{(a, b)}\frac{d}{d(a, b)}\int_0^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)}},$$

seraient simplement

$$\frac{2}{ab} - \frac{2}{(a+b)(a, b)} = \frac{2(a, b)}{ab(a+b)},$$

quantités proportionnelles à a, b. Par suite, la formule de β sur le cylindre, analogue à (61), savoir,

$$\frac{2}{ab}\left(\frac{lx}{\mathrm{A}} + \frac{my}{\mathrm{B}}\right),$$

devient immédiatement

$$(a+b)\left(\frac{lx}{a} + \frac{my}{b}\right),$$

c'est-à-dire (21).

grale totale $\int \varepsilon^2\, d\beta$, prise le long de la ligne de pente à paramètre ν. Tout étant symétrique de part et d'autre du plan des xy, cette intégrale aura *deux fois* sa valeur entre les limites $z = 0$, $z = c$. Pour fixer les idées, nous supposerons x, y, ν positifs, ou la demi-ligne de pente, considérée ainsi, située dans l'angle trièdre des coordonnées positives.

Alors, vu l'expression, $\frac{2z}{abcC}$ + const., de β, où nous remplacerons C par la lettre B, afin d'éviter toute confusion avec la capacité calorifique C, nous aurons à obtenir l'intégrale

$$(62) \qquad \frac{4(d\nu)^2}{abcB}\int_0^c \frac{x^{2k}\, dz}{1 + k^2\nu^2 x^{2k-2}}.$$

Or, le long de la ligne de pente en question $y = \nu x^k$, l'équation de l'ellipsoïde devient $\frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2 + k\nu^2 x^{2k}}{a^2}$; et sa différentiation donne

$$dz = -\frac{c}{a}\,\frac{1 + k^2\nu^2 x^{2k-2}}{\sqrt{a^2 - x^2 - k\nu^2 x^{2k}}}\, x\, dx,$$

valeur qu'on pourra substituer dans (62).

Appelons $\sqrt{\mu}$ l'abscisse x du point où la ligne de pente considérée coupe la section principale $z = 0$ de l'ellipsoïde, c'est-à-dire l'ellipse $x^2 + ky^2 = a^2$, où l'on aura $x^2 = \mu$ et $y^2 = \nu^2\mu^k$. Il viendra donc, entre μ et ν, l'équation

$$(63) \qquad \mu + k\nu^2\mu^k = a^2;$$

et une transformation immédiate de (62) nous donnera, en posant finalement $x^2 = \xi$,

$$(64) \qquad \left\{ \begin{aligned} \int \varepsilon^2\, d\beta &= \frac{4(d\nu)^2}{a^2 bB}\int_0^{\sqrt{\mu}} \frac{x^{2k+1}\, dx}{\sqrt{a^2 - x^2 - k\nu^2 x^{2k}}} \\ &= \frac{2(d\nu)^2}{a^2 bB}\int_0^{\mu} \frac{\xi^k\, d\xi}{\sqrt{a^2 - \xi - k\nu^2\xi^k}}, \end{aligned} \right.$$

la limite supérieure μ se trouvant déterminée, en fonction de ν, par la relation (63). Mais comme cette relation se résout aisément par rapport à ν, il est naturel d'éliminer ν, ou de lui substituer le nouveau paramètre μ, dans l'angle des coordonnées positives où ν croît de zéro à ∞ pendant que μ décroît de a^2 à zéro. Le produit $k\nu^2$ se trouvera ainsi remplacé par $\frac{a^2-\mu}{\mu^k}$ et $d\nu$ par

$$-\frac{\mu+k^2\nu^2\mu^k}{2k\nu\mu^{k+1}}d\mu = -\frac{\mu+k(a^2-\mu)}{2\mu\sqrt{k\mu^k(a^2-\mu)}}d\mu.$$

Posons encore $\xi = \mu\eta$, puis, dans le résultat transformé,

$$(65) \qquad \mu = a^2\sin^2\varphi \quad (\text{d'où } d\mu = 2a^2\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi),$$

φ étant un angle auxiliaire, variable de zéro à $\frac{\pi}{2}$.

Et après avoir substitué, dans (56) (p. 321), la racine carrée de l'intégrale ainsi obtenue pour $\int\varepsilon^2\,d\beta$, observons que les plans des yz et des xz partagent l'ellipsoïde en quatre régions symétriques, dont nous n'aurons compté qu'une : ce qui conduira à multiplier par 4 le résultat de l'intégration finale en φ. Nous aurons enfin

$$(66) \quad \mathfrak{M}\sqrt{\beta'_1} = \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{2a}{kb\mathrm{B}}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\int_0^1\frac{\eta^k\,d\eta}{\sqrt{1-\eta\sin^2\varphi-\eta^k\cos^2\varphi}}}(\sin^2\varphi+k\cos^2\varphi)\,d\varphi.$$

30. Les intégrations ne paraissent guère effectuables que dans les deux cas de l'ellipsoïde de révolution, où $k=1$, et d'un ellipsoïde infiniment aplati suivant un des deux axes normaux au courant, celui des x, par exemple, où $k=0$.

Si, d'abord, $k=1$, ou que $b=a$, φ s'élimine immédiatement de (66), où l'intégrale placée sous un radical devient $\int_0^1\frac{\eta\,d\eta}{\sqrt{1-\eta}}$, c'est-à-dire $\left[-\frac{2}{3}(2+\eta)\sqrt{1-\eta}\right]_0^1$ ou $\frac{4}{3}$. La valeur de β'_1, ainsi égale à sa moyenne, est $\frac{8}{3\mathrm{B}}$, conformément au résultat déjà obtenu au § V (p. 312), avant la formule (38).

Supposons maintenant k infiniment petit, ou l'ellipsoïde réduit soit à un mince plateau elliptique, parallèle au courant et ayant b, c pour demi-axes, soit à une aiguille perpendiculaire au courant et de longueur $2b$, ayant pour section principale transversale une petite ellipse à axes $2a$, $2c$. L'intégrale placée sous le radical, dans (66), devient $\frac{1}{\sin\varphi}\int_0^1 \frac{d\eta}{\sqrt{1-\eta}}$, c'est-à-dire $\frac{2}{\sin\varphi}(-\sqrt{1-\eta})_0^1$ ou $\frac{2}{\sin\varphi}$. Et la formule (66) est alors, vu d'abord la valeur $\frac{a^2}{b^2}$ de k, puis, finalement, la définition (44) et la valeur (49) de l'intégrale I considérée au n° **22** (p. 315),

$$(67) \qquad \mathfrak{M}\sqrt{\beta_1} = \frac{4}{\pi}\sqrt{\frac{b}{a\mathrm{B}}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\varphi)^{\frac{3}{2}}\,d\varphi = \frac{4\mathrm{I}}{\pi}\sqrt{\frac{b}{a\mathrm{B}}}.$$

Il ne nous reste donc qu'à évaluer le produit aB. L'expression de B (mise ici pour C) est donnée par une formule, analogue à (18) (p. 30., de laquelle il résulte immédiatement

$$(68) \qquad a\mathrm{B} = \frac{2}{bc} - \int_0^{\infty}\frac{a}{\sqrt{a^2+\lambda}}\,\frac{d\lambda}{(b^2+\lambda)^{\frac{1}{2}}(c^2+\lambda)^{\frac{3}{2}}}.$$

31. Soit, en premier lieu, c comparable à b; ce qui revient à considérer le cas du disque.

La fonction sous le signe $\int$, dans (68), est plus petite que ce qu'elle devient quand on y supprime, au dénominateur, soit a^2, b^2, c^2 devant λ, soit λ devant a^2, b^2, c^2. L'élément de l'intégrale se trouve ainsi moindre que $\frac{a\,d\lambda}{\lambda^2\sqrt{\lambda}}$, et moindre que $\frac{d\lambda}{bc^3}$. D'où il suit que, si ε désigne une *très petite* quantité positive, indépendante de a, mais d'ailleurs quelconque, d'une part, les éléments correspondant aux valeurs de λ inférieures à ε donnent moins que la somme $\int_0^{\varepsilon}\frac{d\lambda}{bc^3}$, ou sont insignifiants, et, d'autre part, le reste de l'intégrale est moindre que

$$\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{a\,d\lambda}{\lambda^2\sqrt{\lambda}} = \frac{2a}{3\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}$$

et s'évanouit avec a. Donc, a tendant ici vers zéro, le dernier terme de la formule (68) disparaît, et le troisième membre de (67) devient

$$\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\,\mathrm{I}\sqrt{b^2 c}.$$

Multiplié par $4\theta_0\sqrt{\pi \mathrm{KCV}}$, il donne le pouvoir refroidissant cherché du courant sur le disque elliptique :

$$(69)\quad (\text{disque elliptique})\ \text{Pouvoir refroid.} = 8\,\mathrm{I}\,\theta_0\sqrt{\frac{2\mathrm{KCV}\,b^2 c}{\pi}}.$$

32. Passons enfin au cas d'une aiguille. La petitesse de c n'y rend sensibles, dans le dernier terme de (68), que les éléments correspondant aux valeurs très petites de λ, pour lesquelles le radical $\sqrt{b^2+\lambda}$ est réductible à b. Or ce terme de (68) devient alors (c'est-à-dire sauf erreur relative négligeable), λ désignant toute limite (supérieure) très grande devant a et c,

$$-\frac{a}{b}\int_0^{\lambda}\frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)^{\frac{1}{2}}(c^2+\lambda)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2a}{b(a^2-c^2)}\left(\sqrt{\frac{a^2+\lambda}{c^2+\lambda}}\right)_0^{\lambda}$$
$$= -\frac{2a(a-c)}{bc(a^2-c^2)} = -\frac{2a}{bc(a+c)}.$$

La formule (68) donne donc pour l'inverse de B la valeur $ab\,\dfrac{a+c}{2}$, et, en multipliant ce que devient alors le dernier membre de (67) par $4\theta_0\sqrt{\pi \mathrm{KCV}}$, on obtient comme pouvoir refroidissant :

$$(70)\quad (\text{aiguille ellipt.})\quad \text{Pouv. refr.} = 16\,\mathrm{I}\,\theta_0\sqrt{\mathrm{KCV}\frac{a+c}{2\pi}b^2}.$$

Les expressions (69) et (70) comprennent bien, comme cas particuliers, celles (45) et (47), que nous avait données, pour un disque circulaire et une aiguille de révolution, l'assimilation de chaque bande sillonnée par le courant à une bande cylindrique (p. 315 et 316). Il est clair que la même assimilation nous aurait fourni sans difficulté les formules actuelles, plus générales, (69) et (70), dont la seconde se trouverait même ainsi établie, grâce aux formules du n° **14** (p. 303), pour le cas où le courant, toujours normal à l'aiguille, ferait des angles quelconques avec les axes $2a$, $2c$ de la section transversale. Au reste, cette dernière formule, (70), comprend l'autre, (69), comme on voit en y annulant a [1].

33. On pourrait aussi, dans le cas du disque, en y employant encore la méthode du n° **22** (p. 315), supposer le courant parallèle à un diamètre $2c$ autre qu'un axe ou incliné d'un angle quelconque, U, sur son conjugué $2b$; ce qui introduirait au second membre de (69) le facteur $\sin U$, rapport de l'aire totale σ du disque à $2\pi bc$. Et la division par $\theta_0\sigma$ donnerait une conductibilité fictive k très simple en fonction du *trajet maximum* $2c$ des filets sur le corps, savoir :

$$k = \frac{41}{\pi}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{KCV}{2c}} = 1,2557\sqrt{\frac{KCV}{2c}}.$$

---

(1) Ce Mémoire a été résumé dans quatre Notes publiées aux *Comptes rendus* de l'Académie des Sciences de Paris (t. CXXXVIII, 9 et 16 mai 1904, p. 1134 et 1189; t. CXL, 2 et 9 janvier 1905, p. 15 et 65).

M. Alex. Bassetti, ingénieur civil des constructions navales, a fait, d'une formule et de la méthode qu'indiquaient les deux premières Notes, une intéressante application aux *condenseurs à surface,* dans une étude sur le *Calcul rationnel de ces appareils* publiée au *Bulletin de l'Association technique maritime.* Il résulte de cette étude que, sous la réserve d'expériences plus complètes à entreprendre, les solutions suggérées par la théorie paraissent bien d'accord avec celles qu'indique la pratique.

En terminant, complétons la Note des pages 316 et 317, relative au cas d'un plateau long et mince tangent au courant, mais dont le bord lui est incliné d'un angle i. La proportionnalité du pouvoir refroidissant à $\sqrt{\cos i}$ y revient encore à remplacer V par V $\cos i$, ou à ne regarder comme *efficace* que *la composante du courant général* V *normale à l'axe du plateau.* Or, ainsi interprétée, cette proportionnalité s'applique à un long cylindre de forme quelconque, pour lequel, l'axe des z étant choisi suivant les génératrices, on aura toujours, dans les équations (1), (2), (3) du problème (p. 292), $\nu = 0$ et β dépendant de z par le terme unique, linéaire, nz, sans influence sur l'autre partie, fonction de x et de y. Car il suffit de supposer, comme nous le faisons ici, *les températures* θ_0 *et* θ *indépendantes de* z, *pour que la composante* V *du courant suivant les génératrices cesse entièrement de figurer dans les équations en* θ *et dans le calcul des flux de chaleur.*