JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

P. DUHEM

Sur l'équilibre de température d'un corps invariable et la stabilité de cet équilibre

Journal de mathématiques pures et appliquées 6e série, tome 1 (1905), p. 77-94.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1905_6_1__77_0>

Sur l'équilibre de température d'un corps invariable et la stabilité de cet équilibre;

PAR M. P. DUHEM.

---

1. Le corps que nous allons étudier ne sera supposé ni isotrope, ni homogène; nous supposerons, à la vérité, que sa constitution varie d'un point à l'autre d'une manière continue; mais cette restriction aura simplement pour objet d'abréger nos formules; elle n'a rien d'essentiel et pourrait être aisément levée.

En revanche, nous ferons une restriction qui jouera un rôle essentiel dans nos raisonnements en supposant que chacun des éléments qui composent ce corps est invariable de forme et de position et que son état est entièrement déterminé par sa température T.

Soit dS un élément superficiel appartenant au corps considéré; par un point (x, y, z) de cet élément, menons-lui une demi-normale dont a, b, c soient les cosinus directeurs; dans le sens marqué par cette demi-normale et pendant le temps dt, l'élément dS laisse passer une quantité de chaleur dQ donnée par la formule

$$(1) \qquad dQ = -(af_x + bf_y + cf_z)\,dS\,dt.$$

Les trois quantités f_x, f_y, f_z sont elles-mêmes définies par les égalités

$$(2)\qquad \begin{cases} f_x = K_1 \dfrac{\partial T}{\partial x} + C_3 \dfrac{\partial T}{\partial y} + C_2 \dfrac{\partial T}{\partial z}, \\ f_y = C_3 \dfrac{\partial T}{\partial x} + K_2 \dfrac{\partial T}{\partial y} + C_1 \dfrac{\partial T}{\partial z}, \\ f_z = C_2 \dfrac{\partial T}{\partial x} + C_1 \dfrac{\partial T}{\partial y} + K_3 \dfrac{\partial T}{\partial z}. \end{cases}$$

Les six quantités K_1, K_2, K_3, C_1, C_2, C_3 dépendent de l'état du corps au point (x, y, z); ce sont donc, en général, des fonctions de x, de y, de z et de T; nous supposerons ici qu'elles dépendent seulement des variables x, y, z.

Soit dm une masse élémentaire appartenant au corps considéré; dans le temps dt, elle dégage une quantité de chaleur donnée par la formule

$$(3)\qquad dq = -\gamma \frac{\partial T}{dt}\, dm\, dt,$$

γ étant la chaleur spécifique au point (x, y, z); cette chaleur spécifique dépend de l'état du corps au point (x, y, z); c'est donc, en général, une fonction des quatre variables x, y, z, T. Nous supposerons ici qu'elle ne dépend point de T.

De ces principes on tire, par une méthode bien connue, cette conséquence : En chaque point du corps et à chaque instant, on a l'égalité

$$(4)\qquad \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z} = \rho\gamma \frac{\partial T}{\partial t},$$

ρ étant la densité au point (x, y, z); cette densité est une fonction des seules variables x, y, z.

A ces principes, la théorie de la conductibilité de la chaleur joint, en général, le postulat suivant :

La forme quadratique en X, Y, Z

$$(5)\qquad \begin{cases} P(X, Y, Z) = K_1 X^2 + K_2 Y^2 + K_3 Z^2 \\ \qquad\qquad + 2 C_1 YZ + 2 C_2 ZX + 2 C_3 XY \end{cases}$$

est une forme définie positive.

C'est à l'examen de ce postulat que nous allons nous attacher.

2. Imaginons que tous les points de la surface qui limitent le système soient maintenus à une même température T_0, cas auquel on devra avoir à tout instant, en tout point de cette surface limite,

$$T = T_0. \tag{6}$$

Ou bien, imaginons que la surface limite soit imperméable à la chaleur; si n_i est la demi-normale à cette surface, dirigée vers l'intérieur du corps et si λ, μ, ν sont les cosinus directeurs de n_i, on aura, en tout point de la surface limite et à tout instant,

$$\lambda f_x + \mu f_y + \nu f_z = 0. \tag{7}$$

Ou bien encore, concevons que certaines parties de la surface limite soient maintenues à la température fixe et uniforme T_0, tandis que d'autres parties sont imperméables à la chaleur; la condition (6) sera alors vérifiée, à tout instant, en tout point marqué sur l'une des premières parties, tandis que la condition (7) sera vérifiée, à tout instant, en tout point que contient l'une des secondes parties.

Dans ces conditions, il est bien clair que l'équilibre thermique sera établi sur le système si la température est la même en tous ses points, cette valeur uniforme de la température étant, d'ailleurs, celle que l'on maintient en tout point de la surface, ou seulement en certains points de la surface, dans le cas où l'on impose au système une telle condition.

Cet équilibre thermique est-il stable?

Fixons d'abord exactement le sens de cette question.

Soit T_0 la température uniforme qui correspond à cet état d'équilibre; posons

$$\Theta = T - T_0 \tag{8}$$

et désignons par Θ_0 la valeur initiale de Θ.

Si l'on peut imposer à la quantité

$$J_0 = \int \Theta_0^2 \, d\varpi, \tag{9}$$

où l'intégration s'étend à tous les éléments $d\varpi$ du système, une limite supérieure A_0 telle que la quantité

$$(10) \qquad J = \int \Theta^2 d\varpi$$

demeure, quel que soit t, inférieure à une limite positive A, arbitrairement choisie et donnée d'avance, l'équilibre sera stable; il sera instable dans le cas contraire.

3. Avant de pousser plus loin, il nous faut remplacer cette définition de la stabilité par une autre définition dont nous démontrerons l'équivalence avec la précédente.

Cette nouvelle définition est la suivante :

Si l'on peut imposer à la quantité

$$(11) \qquad M_0 = \int \rho\gamma\Theta_0^2 \, d\varpi$$

une limite supérieure B_0 telle que la quantité

$$(12) \qquad M = \int \rho\gamma\Theta^2 d\varpi$$

demeure, quel que soit t, inférieure à une limite positive B donnée d'avance, l'équilibre thermique du système est stable.

Pour justifier ce changement de définition, nous allons montrer, en premier lieu, que tout équilibre thermique, stable selon la première définition, est également stable d'après la seconde.

Dans ce but, désignons par L et l les limites supérieure et inférieure entre lesquelles demeure compris, au sein de notre système, le produit positif $\rho\gamma$. Soit B une quantité positive choisie arbitrairement, et prenons $A = \frac{B}{L}$.

Le système étant, par hypothèse, stable selon la première définition, on pourra trouver une quantité positive A_0 telle que, si l'on a

$$(13) \qquad J_0 = \int \Theta_0^2 \, d\varpi \leqq A_0,$$

on aura toujours

$$J = \int \Theta^2 \, d\varpi \leqq A$$

ou

$$\int L\Theta^2 \, d\varpi \leqq B.$$

Comme $\rho\gamma$ ne surpasse L en aucun point, on aura, *a fortiori*,

$$(14) \qquad M = \int \rho\gamma\Theta^2 d\varpi \leqq B.$$

Cette inégalité (14) découle donc de l'inégalité (13).

Posons $B_0 = lA_0$; pour que l'inégalité (13) ait lieu, il sera nécessaire et suffisant que l'on ait

$$\int l\Theta_0^2 \, d\varpi \leqq B_0$$

et, *a fortiori*, que l'on ait

$$(15) \qquad M_0 = \int \rho\gamma\Theta_0^2 \, d\varpi \leqq B_0,$$

puisque $\rho\gamma$ n'est jamais inférieur à l.

Donc, quelle que soit la quantité positive B, on pourra toujours définir une autre quantité positive B_0 telle que l'inégalité (15) entraîne l'inégalité (14); en sorte que notre équilibre thermique sera stable selon la seconde définition.

Nous allons montrer de même qu'un équilibre thermique, stable selon la seconde définition, l'est aussi selon la première.

Considérons, en effet, une quantité positive arbitraire A et prenons $B = lA$.

Le système étant en équilibre stable selon la seconde définition, on peut trouver une quantité positive B_0 telle que l'inégalité

$$(16) \qquad M_0 = \int \rho\gamma\Theta_0^2 \, d\varpi \leqq B_0$$

entraîne constamment l'inégalité

$$(17) \qquad M = \int \rho\gamma\Theta^2 \, d\varpi \leqq B.$$

Mais $\rho\gamma$ n'étant jamais inférieur à l, la condition (17) entraîne, *a fortiori*, la condition

$$\int l\Theta^2\,d\varpi \leqq \mathrm{B}$$

ou bien

$$\mathrm{J} = \int \Theta^2\,d\varpi \leqq \mathrm{A}. \tag{18}$$

D'autre part, comme $\rho\gamma$ n'est jamais inférieur à L, pour que la condition (16) soit vérifiée, il suffit que l'on ait

$$\int \mathrm{L}\Theta_0^2\,d\varpi \leqq \mathrm{B}_0$$

ou bien

$$\mathrm{J}_0 = \int \Theta_0^2\,d\varpi \leqq \mathrm{A}_0, \tag{19}$$

en posant $\mathrm{A}_0 = \frac{\mathrm{B}_0}{\mathrm{L}}$.

La condition (19) entraîne donc, quel que soit t, la condition (18), où A est une quantité positive arbitrairement donnée d'avance; l'équilibre, stable selon la seconde définition, l'est encore selon la première.

4. L'équivalence de nos deux définitions de la stabilité étant maintenant établie, nous pourrons dorénavant substituer la seconde à la première; c'est ce que nous ferons pour démontrer la proposition suivante :

Si la surface qui borne un système invariable est ou bien maintenue à une température uniforme et constante, ou bien imperméable à la chaleur, ou bien encore si elle se partage en régions soumises les unes à la première condition et les autres à la seconde, pour que l'équilibre thermique soit stable sur ce système, il faut et il suffit qu'aucun système de valeurs des variables X, Y, Z *ne fasse prendre une valeur négative à la forme* P(X, Y, Z).

Nous allons démontrer d'abord que la condition énoncée est *suffisante*.

Posons, dans ce but,

$$(2\ bis)\qquad \begin{cases} F_x = K_1\dfrac{\partial\theta}{\partial x} + C_3\dfrac{\partial\theta}{\partial y} + C_2\dfrac{\partial\theta}{\partial z}, \\ F_y = C_3\dfrac{\partial\theta}{\partial x} + K_2\dfrac{\partial\theta}{\partial y} + C_1\dfrac{\partial\theta}{\partial z}, \\ F_z = C_2\dfrac{\partial\theta}{\partial x} + C_1\dfrac{\partial\theta}{\partial y} + K_3\dfrac{\partial\theta}{\partial z}, \end{cases}$$

ces quantités ne différant que par l'écriture de f_x, f_y, f_z.

Nous verrons sans peine que l'égalité (4), vérifiée en tout point du système et à tout instant, peut s'écrire

$$(4\ bis)\qquad \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = \rho\gamma\frac{\partial\theta}{\partial t}.$$

L'égalité (6), vérifiée aux points de la surface qui sont maintenus à température constante, peut s'écrire

$$(6\ bis)\qquad \Theta = 0,$$

tandis que l'égalité (7), vérifiée là où la surface est imperméable à la chaleur, peut s'écrire

$$(7\ bis)\qquad \lambda F_x + \mu F_y + \nu F_z = 0.$$

Considérons maintenant l'expression

$$\frac{dM}{dt} = 2\int \rho\gamma\Theta\frac{\partial\theta}{\partial t}\,d\varpi.$$

En vertu de l'égalité (4 *bis*), on a

$$\frac{dM}{dt} = 2\int\Theta\left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}\right)d\varpi$$

ou bien

$$\begin{aligned}\frac{dM}{dt} = &-2\int\Theta(\lambda F_x + \mu F_y + \nu F_z)\,dS \\ &-2\int\left(F_x\frac{\partial\theta}{\partial x} + F_y\frac{\partial\theta}{\partial y} + F_z\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)d\varpi,\end{aligned}$$

la première intégrale s'étendant à toute la surface qui enclôt le système.

Or, en chaque point de cette surface, on peut écrire soit l'égalité (6 *bis*), soit l'égalité (7 *bis*); si l'on observe alors que

$$F_x \frac{\partial \theta}{\partial x} + F_y \frac{\partial \theta}{\partial y} + F_z \frac{\partial \theta}{\partial z} = P\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}, \frac{\partial \theta}{\partial y}, \frac{\partial \theta}{\partial z}\right),$$

on voit que l'égalité précédente peut s'écrire

$$\frac{dM}{dt} = -2\int P\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}, \frac{\partial \theta}{\partial y}, \frac{\partial \theta}{\partial z}\right) d\varpi. \tag{20}$$

Si la forme $P(X, Y, Z)$ ne peut prendre de valeur négative pour aucun système de valeurs des variables X, Y, Z, $\frac{dM}{dt}$ ne peut jamais être positif; M ne peut donc jamais surpasser sa valeur initiale M_0; pour que M ne surpasse à aucun moment la limite, donnée d'avance, B, il suffit que M_0 ne surpasse pas B.

La condition énoncée suffit donc à assurer la stabilité de l'équilibre thermique de notre système.

5. Cherchons maintenant à prouver que la condition énoncée est *nécessaire*.

De l'égalité (20), nous tirons sans peine celle-ci

$$\frac{d^2M}{dt^2} = -4\int \left(F_x \frac{\partial^2 \theta}{\partial x\, \partial t} + F_y \frac{\partial^2 \theta}{\partial y\, \partial t} + F_z \frac{\partial^2 \theta}{\partial z\, \partial t}\right) d\varpi,$$

qui peut encore s'écrire

$$\begin{aligned} \frac{d^2M}{dt^2} = \quad & 4\int \frac{\partial \theta}{\partial t}(\lambda F_x + \mu F_y + \nu F_z)\, dS \\ & + 4\int \frac{\partial \theta}{\partial t}\left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}\right) d\varpi. \end{aligned}$$

En chaque point de la surface, on peut écrire à chaque instant, soit l'égalité (6 *bis*), soit l'égalité (7 *bis*), en sorte qu'au second membre de l'égalité précédente, le premier terme est nul, le second peut se transformer par l'égalité (4 *bis*), et l'on trouve ainsi l'égalité

$$(21) \qquad \frac{d^2 M}{dt^2} = 4 \int \rho\gamma \left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)^2 d\varpi,$$

selon laquelle $\frac{d^2 M}{dt^2}$ ne peut jamais être négatif.

Si, dès lors, il est possible, quelque petite que soit la valeur initiale M_0 de M, de donner à la valeur initiale de $\frac{dM}{dt}$ une valeur positive, M croîtra au delà de toute limite avec t et le système ne pourra pas être en équilibre stable.

Or, nous allons prouver que, si la forme P(X, Y, Z) est susceptible de prendre une valeur négative, il est possible, quelque petite que soit M_0, d'attribuer à $\left(\frac{dM}{dt}\right)_0$ une valeur positive, ce qui démontrera la proposition énoncée.

Supposons donc qu'en un certain point m du système et pour un certain système ξ, η, ζ de valeurs de X, Y, Z, on ait

$$(22) \qquad P(\xi, \eta, \zeta) < 0.$$

Nous pourrons toujours supposer que l'on ait

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1,$$

ce qui permet de regarder ξ, η, ζ comme les cosinus directeurs d'une certaine demi-droite δ issue du point m.

Par raison de continuité, on peut entourer le point m d'un domaine D en tout point duquel l'inégalité (22) soit vérifiée.

A l'intérieur du domaine D, construisons une surface fermée de la manière suivante :

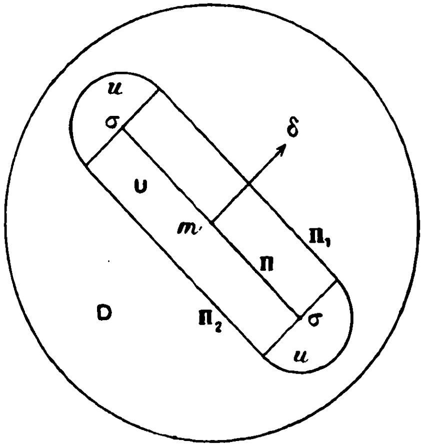
Par le point m (*fig.* 1), menons une aire plane Π normale à la demi-droite δ.

Projetons orthogonalement l'aire Π sur deux plans parallèles au plan Π, équidistants du plan Π et situés à une distance Δ de ce dernier; soient Π_1, Π_2 les deux projections.

Prenons ensuite un demi-cercle de rayon Δ; faisons-le mouvoir de telle sorte que son centre décrive le contour σ de l'aire Π, tandis que son plan demeure constamment normal à ce contour σ.

Nous désignerons par u le volume engendré par ce demi-cercle, et par U le volume du cylindre droit qui a pour bases les aires Π_1, Π_2.

Fig. 1.



Nous nommerons $\varphi(\delta)$ une fonction qui possède les propriétés suivantes :

La fonction $\varphi(\delta)$ est définie entre les valeurs $-\Delta$ et $+\Delta$ de la variable δ; dans cet intervalle, elle est fonction finie et continue de δ, ainsi que sa dérivée première; sa dérivée seconde $\varphi''(\delta)$ est finie.

Dans cet intervalle, la fonction $\varphi(\delta)$ est une fonction paire de δ.

On a, enfin,

$$\varphi(\ \Delta) = 0, \qquad \varphi'(\ \Delta) = 0,$$
$$\varphi(-\Delta) = 0, \qquad \varphi'(-\Delta) = 0.$$

Si, dans le volume U, nous considérons un point situé à la distance δ du plan Π, nous poserons, en ce point,

$$\Theta_0 = \chi\varphi(\delta),$$

χ étant une constante. Nous aurons alors, dans cet espace U,

$$\frac{\partial\Theta_0}{\partial x} = \chi\varphi'(\delta)\xi, \qquad \frac{\partial\Theta_0}{\partial y} = \chi\varphi'(\delta)\eta, \qquad \frac{\partial\Theta_0}{\partial z} = \chi\varphi'(\delta)\zeta,$$

et, par conséquent,

$$P\left(\frac{\partial\Theta_0}{\partial x}, \frac{\partial\Theta_0}{\partial y}, \frac{\partial\Theta_0}{\partial z}\right) = \chi^2[(\varphi'(\delta)]^2 P(\xi, \eta, \zeta).$$

Dans tout le système, hors des volumes u et U, nous prendrons

$$\Theta_0 = 0,$$

partant

$$\frac{\partial\Theta_0}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial\Theta_0}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial\Theta_0}{\partial z} = 0.$$

Enfin, dans le volume u, nous prendrons pour Θ_0 une fonction qui, aux limites du domaine u, prenne, ainsi que ses dérivées partielles du premier ordre, des valeurs qui se raccordent avec les valeurs extérieures au domaine u. Cette fonction Θ_0 sera évidemment de la forme $\chi\theta$, la fonction θ ne dépendant pas de la valeur attribuée à la constante χ.

Désormais, l'égalité (20) nous donnera

$$(23) \quad \left\{ \begin{aligned} \left(\frac{dM}{dt}\right)_0 = &- 2\chi^2 \int_U [\varphi'(\delta)]^2 P(\xi, \eta, \zeta)\, d\varpi \\ &- 2\chi^2 \int_u P\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}, \frac{\partial\theta}{\partial y}, \frac{\partial\theta}{\partial z}\right) d\varpi. \end{aligned} \right.$$

Au second membre de cette égalité (23), le premier terme est assurément positif, en vertu de l'inégalité (22); le signe du second est inconnu; mais on peut toujours faire en sorte que le premier terme donne son signe à tout le second membre.

Sans changer ni le point m, ni l'aire Π, remplaçons la distance Δ par une nouvelle distance $\Delta_1 = \frac{\Delta}{p}$, où p est une quantité positive que nous pourrons faire croître au delà de toute limite; en même temps, à la fonction $\varphi(\delta)$, substituons une nouvelle fonction $\varphi_1(\delta)$ telle que $\varphi_1\left(\frac{\delta}{p}\right) = \varphi(\delta)$.

Lorsque nous ferons croître p au delà de toute limite, le domaine U sera infiniment petit comme $\frac{1}{p}$, tandis qu'en ce domaine, $\varphi'_1(\delta)$ sera infiniment grand comme p; l'intégrale

$$\int_U [\varphi_1'(\delta)]^2 P(\xi, \eta, \zeta) d\varpi$$

sera donc infiniment grande comme p.

La fonction θ demeurant finie, $\frac{\partial\theta}{\partial x}, \frac{\partial\theta}{\partial y}, \frac{\partial\theta}{\partial z}$ seront, dans le domaine u, infiniment grands comme p; $P\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}, \frac{\partial\theta}{\partial y}, \frac{\partial\theta}{\partial z}\right)$ sera donc, dans le domaine u, infiniment grand comme p^2. Mais, en même temps, ce domaine u sera infiniment petit comme $\frac{1}{p^2}$. L'intégrale

$$\int_u P\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}, \frac{\partial\theta}{\partial y}, \frac{\partial\theta}{\partial z}\right) d\varpi$$

demeurera finie.

On pourra donc prendre p assez grand pour que la valeur absolue de la première intégrale soit aussi grande que l'on voudra par rapport à la valeur absolue de la seconde; partant, pour que le premier terme impose son signe au second membre de l'égalité (23).

La valeur initiale de $\frac{dM}{dt}$ est ainsi rendue positive; d'ailleurs, en disposant de la constante χ^2 qu'elle contient en facteur, on peut la rendre aussi petite que l'on veut, en sorte que notre démonstration est achevée.

6. Le problème relatif à la stabilité de l'équilibre thermique sur un corps immobile et invariable est maintenant complètement résolu, à la condition, toutefois, que l'on adopte la définition de la stabilité dont nous avons fait usage. Or, il apparaît de prime abord qu'une infinité d'autres définitions de la stabilité, tout aussi satisfaisantes que celle-là, lui peuvent être substituées.

A la quantité Θ^2 on peut, en effet, dans la définition donnée au n° 2, substituer n'importe quelle fonction $\Phi(\Theta)$ de Θ, pourvu seulement qu'elle satisfasse aux conditions suivantes :

1° Elle s'annule en même temps que Θ;

2° Elle est positive pour toute valeur de Θ qui diffère de o;

3° Elle croît avec la valeur absolue de Θ;

4° Elle est infinie en même temps que Θ.

Dès lors un état d'équilibre thermique stable peut être défini par le caractère suivant :

Une quantité positive A étant arbitrairement choisie d'avance, il est toujours possible de trouver une quantité positive A_0 assez petite pour que l'inégalité

$$\int \Phi(\Theta_0)\, d\varpi \leqq A_0$$

entraîne, quel que soit t, l'inégalité

$$\int \Phi(\Theta)\, d\varpi \leqq A.$$

Une question s'impose de suite à notre attention : en une semblable définition, le choix de la fonction $\Phi(\Theta)$ est-il indifférent?

La question peut se préciser de la manière suivante :

La stabilité ayant été définie, comme nous venons de le faire, au moyen de la fonction $\Phi(\Theta)$, nous répétons la même définition en substituant à la fonction $\Phi(\Theta)$ une autre fonction analogue $\Psi(\Theta)$. Tout équilibre thermique stable selon la première définition, est-il encore stable selon la seconde définition et inversement?

La réponse à cette question est sûrement affirmative si l'on peut trouver deux nombres positifs l, L, tels que l'on ait, quel que soit Θ,

$$l \leqq \frac{\Psi(\Theta)}{\Phi(\Theta)} \leqq L.$$

Pour le démontrer, il suffit de répéter presque textuellement le raisonnement qui a été exposé au n° **3**.

Hors du cas que nous venons de définir, l'équivalence entre les deux définitions de la stabilité n'est ni évidente, ni prouvée, ni probable.

Par exemple, il ne sera pas indifférent de substituer la fonction $|\Theta|$ à la fonction Θ^2 dans la définition de l'équilibre thermique stable; certaines propositions, vraies dans l'un des deux cas, pourraient ne plus l'être dans l'autre.

7. On peut modifier quelque peu la définition de la stabilité que nous avons donnée aux nos **2** et **6**; après avoir fait choix d'une fonction $\Phi(\Theta)$ qui offre les quatre caractères énumérés au n° **6**, on peut convenir qu'un équilibre thermique stable se reconnaît à la marque suivante :

Que l'on choisisse arbitrairement d'avance un nombre positif quelconque A; on peut toujours trouver un autre nombre positif a_0 tel que la condition

$$|\Theta_0| \leqq a_0,$$

vérifiée initialement en tout point du système, entraîne, quel que soit t, la condition

$$\int \Phi(\Theta)\, d\varpi \leqq \mathrm{A}.$$

Si l'on prend pour $\Phi(\Theta)$ la fonction Θ^2, on obtient une définition de la stabilité qui diffère un peu de la définition donnée au n° **2**; néanmoins, cette nouvelle définition laisse subsister presque textuellement, on le voit sans peine, les raisonnements donnés aux nos **4** et **5**; en sorte que, pour que l'équilibre thermique soit stable selon cette nouvelle définition, il est encore nécessaire et suffisant que la forme quadratique $\mathrm{P}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z})$ ne puisse jamais devenir négative.

L'intérêt de cette nouvelle définition réside dans le théorème suivant :

Supposons que l'équilibre thermique d'un système soit stable lorsqu'on emploie, pour définir cette stabilité, une certaine fonction $\Phi(\Theta)$; il sera encore stable si, dans la définition, on substitue la fonction $\Psi(\Theta)$ à la fonction $\Phi(\Theta)$, pourvu que le rapport $\frac{\Psi(\Theta)}{\Phi(\Theta)}$ ne croisse pas au delà de toute limite en même temps que $|\Theta|$. Les deux fonctions $\Phi(\Theta)$, $\Psi(\Theta)$ sont, bien entendu, assujetties aux quatre conditions énumérées au n° **6**.

Il s'agit de prouver que l'on peut imposer à la valeur absolue de Θ_0, en tout point du système, une limite supérieure a_0 si petite que l'on ait, quel que soit t,

$$\int \Psi(\Theta)\,d\varpi \leqq \mathrm{B}, \tag{24}$$

B étant un nombre positif arbitrairement choisi d'avance.

Soit V le volume total du système. Soit ϑ une valeur de Θ assez voisine de *zéro* pour que l'on ait assurément les deux conditions

$$\Psi(\vartheta) \leqq \frac{\mathrm{B}}{2\mathrm{V}}, \qquad \Psi(-\vartheta) \leqq \frac{\mathrm{B}}{2\mathrm{V}}.$$

Considérons, à l'instant t, le volume V du système; on peut y distinguer deux parties : l'une, U, où la valeur absolue de Θ est, au plus, égale à la valeur absolue de ϑ; l'autre W, où Θ surpasse ϑ en valeur absolue; on peut écrire

$$\int_{\mathrm{V}} \Psi(\Theta)\,d\varpi = \int_{\mathrm{U}} \Psi(\Theta)\,d\varpi + \int_{\mathrm{W}} \Psi(\Theta)\,d\varpi. \tag{25}$$

En tout point du volume U, $\Psi(\Theta)$ est au plus égal à $\frac{\mathrm{B}}{2\mathrm{V}}$; ce volume U lui-même est au plus égal à V; le premier terme, au second membre de l'égalité (25), est donc au plus égal à $\frac{\mathrm{B}}{2}$. Dès lors, pour que la condition (24) soit vérifiée, il faut et il suffit que l'on ait

$$\int_{\mathrm{W}} \Psi(\Theta)\,d\varpi \leqq \frac{\mathrm{B}}{2}. \tag{26}$$

Or, d'après l'hypothèse faite, on peut fixer un nombre L tel que, pour toute valeur de Θ qui surpasse ϑ en valeur absolue, on ait

$$\frac{\Psi(\Theta)}{\Phi(\Theta)} \leqq \mathrm{L},$$

en sorte que le premier membre de la condition (26) ne saurait surpasser $\mathrm{L}\int_{\mathrm{U}} \Phi(\Theta)\,d\varpi$; d'ailleurs, le volume U ne saurait surpasser le volume V; le premier membre de la condition (26) ne saurait donc surpasser la quantité $L\int_V \Phi(\Theta)\,d\varpi$. Pour que la condition (26) soit vérifiée, il suffit que l'on ait

$$(27) \qquad \int_V \Phi(\Theta)\,d\varpi \leqq \frac{B}{2L}.$$

Mais, par hypothèse, l'équilibre thermique du système est stable lorsqu'on fait usage de la fonction $\Phi(\Theta)$ pour définir la stabilité; on peut donc choisir un nombre positif a assez petit pour que la condition

$$|\Theta_0| \leqq a,$$

vérifiée en tous les points du système, assigne, quel que soit t, à l'intégrale $\int_V \Phi(\Theta)\,d\varpi$ une valeur inférieure à n'importe quel nombre positif A donné d'avance et, en particulier, au nombre $A = \frac{B}{2L}$. Notre proposition est donc démontrée.

De cette proposition, on peut faire une application immédiate :

Nous savons que l'équilibre thermique est certainement stable lorsque la forme $P(X, Y, Z)$ ne peut prendre aucune valeur négative, pourvu que l'on définisse la stabilité au moyen de la fonction

$$\Phi(\Theta) = \Theta^2.$$

D'après la proposition précédente, cette condition suffira encore à assurer la stabilité si l'on définit celle-ci au moyen de la fonction

$$\Psi(\Theta) = |\Theta|.$$

Semblable corollaire n'aurait pu être établi si l'on avait conservé la définition de la stabilité donnée au n° **2**.

8. On peut imaginer encore une troisième manière de définir la stabilité thermique d'un système.

Cette stabilité sera caractérisée de la manière suivante :

Si l'on se donne d'avance, arbitrairement d'ailleurs, un nombre positif a, on pourra toujours trouver un nombre a_0, positif et assez petit, pour que la condition

$$|\Theta_0| \leqq a_0,$$

vérifiée, à l'instant initial, en tous les points du système, entraîne, quel que soit t, la condition

$$|\Theta| \leqq a,$$

vérifiée également en tous les points du système.

Cette nouvelle définition présente, sur les précédentes, un important avantage. On peut à la fonction $|\Theta|$ substituer n'importe quelle autre fonction $\Phi(\Theta)$ remplissant les quatre conditions formulées au n° **6**; on obtient une seconde définition équivalente à la première. Il est donc inutile, lorsqu'on fait usage de cette définition, de se préoccuper de la fonction qui a été choisie pour caractériser la stabilité.

Il est clair que la démonstration donnée au n° **5** garde sa force lorsqu'on fait usage de la nouvelle définition; on peut donc encore énoncer la proposition suivante :

Pour que l'équilibre thermique du système soit stable, il est *nécessaire* que la forme P(X, Y, Z) ne puisse, en aucun cas, prendre de valeur négative.

Mais notre nouvelle définition de la stabilité fait perdre toute valeur à la démonstration exposée au n° **4**, en sorte que nous ne pouvons plus rien dire touchant les conditions qui *suffisent* à assurer la stabilité de l'équilibre thermique.

La stabilité mécanique de l'équilibre a été définie par Lejeune-Dirichlet pour les systèmes dont l'état dépend d'un nombre limité de variables; lorsqu'on veut étendre cette définition à des systèmes continus dont *chaque élément* dépend d'un nombre limité de variables, on se trouve en présence de diverses formes de généralisation également possibles; selon que l'on adopte une forme ou l'autre, les résultats obtenus peuvent différer notablement; à plusieurs reprises, nous avons insisté (¹) sur ces divergences.

(¹) *Sur la stabilité de l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouve-*

La stabilité thermique, plus simple que la stabilité mécanique et dont l'étude peut être poussée plus loin, nous paraît très propre à montrer l'importance de ces remarques touchant les diverses définitions de la stabilité.

---

ment de rotation (*Journal de Mathématiques*, 5e série, t. VII, 1901, p. 311). — *Sur la stabilité et les petits mouvements des corps fluides* (*Journal de Mathématiques*, 5e série, t. IX, 1902, p. 233). — *Recherches sur l'Hydrodynamique*, Ire Partie : *Sur les principes fondamentaux de l'Hydrodynamique* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2e série, t. III, 1901, p. 379). — *Voir* aussi A. LIAPOUNOFF, *Sur la stabilité des figures ellipsoïdales d'équilibre d'un liquide animé d'un mouvement de rotation,* traduit du russe par M. ÉDOUARD DAVAUX. Introduction (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse,* 2e série, t. VI, 1904, p. 5). Le Mémoire russe a paru en 1884.