JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

G. COMBEBIAC

Sur les actions exercées par un fluide parfait incompressible sur ses parois

Journal de mathématiques pures et appliquées 6e série, tome 2 (1906), p. 109-134.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1906_6_2__109_0>

Sur les actions exercées par un fluide parfait incompressible sur ses parois;

PAR M. G. COMBEBIAC.

I. — Aperçu historique.

Le mouvement d'une masse parfaitement fluide et incompressible, qui occupe un volume fini ou infini et dans lequel baignent des corps solides, rigides ou déformables, est déterminé par le mouvement des parois, lorsque la masse fluide s'est trouvée initialement au repos; mais il n'en résulte pas que les positions des diverses particules de la masse fluide soient déterminées par les positions des parois. En particulier, si les positions de ces parois peuvent être déterminées par les valeurs de paramètres indépendants en nombre fini, ces paramètres ne jouent pas le même rôle vis-à-vis du fluide; celui-ci constitue, par rapport à ces paramètres, un système *anholonome*, et l'on sait que les équations de Lagrange ne sont pas, en général, applicables à un tel système. Ces équations sont toutefois applicables, par suite de circonstances spéciales, au cas qui vient d'être défini, et elles permettent alors de déterminer les actions exercées par la masse fluide sur les parois qui la limitent. C'est ce qui résulte de la démonstration insérée par Thomson et Tait dans l'édition allemande (¹) de leur

(¹) THOMSON u. TAIT, *Handbuch der theoretischen Physik, Deutsche Uebersetzung,* Bd. I, S. 292-296 (*Braunschweig,* 1871-1874).

ouvrage *Natural Philosophy* à la suite des objections formulées par Boltzmann (*Crelle's Journal*, Bd. 73) contre l'emploi qui avait été fait *de plano* des équations de Lagrange dans la première édition de l'ouvrage.

Le dispositif adopté par Thomson et Tait, basé d'ailleurs sur une remarque de Boltzmann, consiste essentiellement dans la démonstration de la validité, pour le cas visé, du principe d'Hamilton, d'où peuvent être déduites les équations de Lagrange. Cette démonstration fut reprise par Kirchhoff dans ses *Vorlesungen* (1).

Cette application du principe d'Hamilton et des équations de Lagrange au mouvement d'un fluide incompressible suppose expressément que ce fluide part du repos, c'est-à-dire que le mouvement est *irrotationnel* et *acyclique*. Elle ne serait pas légitime, en particulier, dans le cas d'un fluide qui occuperait un volume à connexion multiple limité par des parois fixes et serait animé d'un mouvement, même irrotationnel. Kirchhoff (2) traita directement le cas où le fluide occupe tout l'espace extérieur à deux anneaux infiniment déliés, rigides et fixes et détermina ainsi les actions qui s'exercent entre les deux anneaux; ces actions sont soumises à une loi analogue à celle qui régit les forces électrodynamiques, mais elles sont de sens contraire à celles-ci.

Enfin Carl Neumann (3) établit la formule générale des actions exercées par un fluide parfait incompressible sur ses parois dans le cas où le fluide est animé d'un mouvement irrotationnel, cyclique ou acyclique.

L'objet de ce mémoire est d'établir la formule générale exprimant les actions exercées par un fluide parfait incompressible sur les parois dans le cas où le fluide est animé d'un mouvement quelconque (continu), cyclique ou acyclique, rotationnel ou irrotationnel. Cette formule devra nécessairement comprendre celle de Carl Neumann.

Contrairement aux auteurs qui ont jusqu'à présent traité cette

(1) Kirchhoff, *Vorlesungen ueber Mechanik*, 4e Auflage, S. 233-250, Leipzig.

(2) Kirchhoff, *Crelle's Journal*, Bd. 71, S. 273.

(3) Carl Neumann, *Hydrodynamische Untersuchungen*, Leipzig, 1883. *Beiträge zu einzelnen Theilen der mathematischen Physik*, Leipzig, 1893.

question, nous avons écarté toute intervention du principe d'Hamilton, qui présente l'inconvénient de masquer un peu les circonstances qui constituent, en réalité, la base de la démonstration. L'expression à obtenir a donc été directement rattachée aux principes mêmes de la Dynamique en suivant la marche généralement adoptée pour établir les équations de Lagrange.

Enfin, nous tenons à signaler que la résolution du problème posé a été poursuivie exclusivement en employant l'analyse quaternionienne et qu'il n'est pas douteux que c'est grâce aux simplifications qu'elle comporte que la généralisation des résultats obtenus par Carl Neumann s'est présentée comme une application sans difficulté des principes de la Mécanique. De fait, elle n'a été qu'une circonstance dans la rédaction, entreprise pour notre usage personnel, d'un résumé d'Hydrodynamique en quaternions. Dans le présent Mémoire, les formules quaternioniennes primitives ont été traduites dans la notation ordinaire, sous réserve de quelques simplifications d'écriture, que le lecteur voudra bien nous accorder.

II. — Notations et formules générales.

La question traitée exige le maniement d'un assez grand nombre de vecteurs. Afin d'éviter l'introduction des trois composantes qui déterminent chaque vecteur et d'alléger dans une mesure très notable l'analyse, qui deviendrait sans cela très pénible à suivre, un vecteur sera représenté par une seule lettre, non seulement dans le discours, mais encore dans les formules analytiques et dans les opérations mêmes du calcul; il suffit à cet effet d'adopter quelques conventions tellement simples et naturelles qu'il est à peine besoin de les énoncer explicitement.

Tout d'abord, le signe de l'addition numérique sera également employé pour exprimer l'addition vectorielle, qui est d'un usage courant et qui jouit des mêmes propriétés formelles.

Les relations géométriques qui interviennent dans les formules sont en nombre très restreint. De fait il suffit, pour les exprimer, d'introduire deux notations spéciales pour représenter les deux fonctions élémentaires auxquelles donnent lieu deux vecteurs; on y adjoindra une troisième notation s'appliquant à une fonction de trois vecteurs. F, F' et F'' désignant trois vecteurs ayant respectivement pour composantes suivant les axes de coordonnées X, Y, Z; X', Y', Z'; X'', Y'', Z''; l'on posera

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &|FF'| = XX' + YY' + ZZ',\\ &\mathfrak{V}(FF') = (YZ' - ZY', ZX' - XZ', XY' - YX'),\\ &[FF'F''] = |F\mathfrak{V}(F'F'')| = |\mathfrak{V}(FF')F''| = \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ X' & Y' & Z' \\ X'' & Y'' & Z'' \end{vmatrix}. \end{aligned}\right.$$

Il reste à réaliser une adaptation des notations du calcul infinitésimal au maniement direct des quantités complexes ainsi considérées. La définition de la différentielle d'un vecteur résulte évidemment de celle de l'addition, et il est inutile d'y insister. F étant un vecteur fonction d'une variable numérique q, on posera donc

$$(2)\qquad \frac{dF}{dq} = \left(\frac{dX}{dq}, \frac{dY}{dq}, \frac{dZ}{dq}\right).$$

Les notations usitées pour les dérivées partielles sont, elles aussi, directement applicables.

Il convient également de prévoir le cas où la variable indépendante est un vecteur ou encore un point μ de coordonnées x, y, z. La différentielle d'une fonction quelconque de μ, numérique ou vectorielle, s'exprime alors en fonction des dérivées partielles de cette fonction et des accroissements dx, dy et dz qui déterminent le vecteur $d\mu$. Nous poserons, pour éviter l'introduction explicite des coordonnées x, y et z :

$$(3)\qquad dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz = \frac{dF}{d\mu}(d\mu),$$

où $\frac{dF}{d\mu}(d\mu)$ est une fonction linéaire homogène de dx, dy et dz. L'expression $\frac{dF}{d\mu}$, qui constitue une généralisation de la notation ordinaire des dérivées, représente une *opération linéaire homogène*. Cette notation se prête élégamment à tous les besoins du calcul infinitésimal; mais elle ne sera employée ici qu'à titre de simplification d'écriture, et il est inutile, par suite, d'en développer les propriétés.

Un vecteur F fonction de point donne lieu à deux fonctions différentielles, qui interviennent constamment dans l'étude des champs vectoriels. Il importe d'attribuer à ces deux fonctions des symboles simples. On posera donc

$$(4)\qquad \begin{cases} \nabla_1 \mathrm{F} = \dfrac{\partial \mathrm{X}}{\partial x} + \dfrac{\partial \mathrm{Y}}{\partial y} + \dfrac{\partial \mathrm{Z}}{\partial z}, \\ \nabla_2 \mathrm{F} = \left(\dfrac{\partial \mathrm{Z}}{\partial y} - \dfrac{\partial \mathrm{Y}}{\partial z}, \dfrac{\partial \mathrm{X}}{\partial z} - \dfrac{\partial \mathrm{Z}}{\partial x}, \dfrac{\partial \mathrm{Y}}{\partial x} - \dfrac{\partial \mathrm{X}}{\partial y}\right). \end{cases}$$

Enfin, U étant une fonction numérique de point, on désignera par ∇U le vecteur qui l'admet à titre de fonction potentielle, c'est-à-dire que l'on posera

$$(5)\qquad \nabla \mathrm{U} = \left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}, \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y}, \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial z}\right).$$

Les notations introduites par les formules (1), (2), (3), (4) et (5) suffisent à permettre toute application de l'Analyse mathématique aux vecteurs sans qu'il soit nécessaire de les représenter par leurs trois composantes.

On rappelle que ∇_1F s'appelle *la divergence du champ vectoriel* déterminé par F. Un champ dont la divergence est nulle en tout point est dit *solénoïdal*. C'est le cas du champ déterminé par la vitesse d'un fluide incompressible.

Le vecteur $\frac{1}{2}\nabla_2$F sera appelé la *rotation élémentaire* du champ. Un champ dont la rotation élémentaire est nulle est dit *irrotationnel*. C'est, comme on sait, la condition nécessaire et suffisante pour que le vecteur du champ admette une fonction potentielle.

La rotation élémentaire a une distribution solénoïdale; par suite, si l'on considère un tube infiniment délié ayant ses génératrices tangentes en chacun de leurs points à la direction de la rotation élémentaire en ce point, le produit de la section du tube par la grandeur de la rotation élémentaire sera constant tout le long du tube. Ce produit définit l'*intensité tourbillonnaire* du tube. L'espace occupé par un champ sera supposé divisé en tubes de cette sorte se fermant sur eux-mêmes ou se terminant aux surfaces limites : ce sont les *filets tourbillonnaires* du champ.

On appelle *circulation* le long d'une ligne fermée L la valeur de l'intégrale

$$\int_L F_l \, dl,$$

où dl désigne un élément linéaire de la ligne L et F_l la composante du vecteur F suivant la direction de cet élément. Dans un champ irrotationnel, cette intégrale est nulle pour toute ligne fermée susceptible de se réduire à un point par déformation continue sans sortir du champ. C'est ce qui est réalisé pour toute ligne fermée lorsque le champ occupe un volume à simple connexion et, par suite, que le champ admet une fonction potentielle uniforme. Lorsque le volume occupé par le champ est à connexion multiple, la valeur de la circulation est la même pour toutes les lignes fermées susceptibles de se réduire les unes aux autres par déformation continue sans sortir du champ. Il suffit donc d'envisager les valeurs de la circulation qui sont relatives à certaines lignes fermées convenablement choisies en nombre égal au degré de connexion du volume occupé par le champ. Ces valeurs seront appelées les *modules de circulation* du champ. Lorsqu'elles sont nulles, le champ est dit *acyclique*.

Dans un champ rotationnel, la valeur de la circulation dépend de la rotation élémentaire. Mais, si l'on retranche de cette valeur la partie due à la rotation élémentaire, on obtient une quantité qui jouit des mêmes propriétés que les modules de circulation dans les champs irrotationnels. On peut donc étendre cette notion aux champs rotationnels.

Moyennant les diverses définitions ci-dessus rappelées, l'on peut énoncer la proposition suivante :

Un champ vectoriel ayant des dérivées premières déterminées et continues en tout point est déterminé d'une manière univoque par les données suivantes :

1° *Valeur de la composante normale en tout point des surfaces limites;*

2° *Vecteur représentant la rotation élémentaire en tout point ;*
3° *Valeurs des modules de circulation.*

Cette proposition s'applique aussi aux champs vectoriels s'étendant à l'infini moyennant certaines conditions que nous supposerons réalisées dans les champs que nous aurons à considérer.

Il nous reste à donner, sous la forme correspondante aux notations adoptées, les formules générales auxquelles il sera fait appel dans cette étude.

Étant donné un champ vectoriel occupant un volume V limité par des surfaces dont l'ensemble sera désigné par S, on désignera par $\delta\tau$ un élément de ce volume, par $\delta\sigma$ l'aire d'un élément superficiel de S, par ν le vecteur de longueur égale à l'unité dirigé suivant la normale à cet élément superficiel vers l'extérieur du champ. La composante normale du vecteur du champ en un point de S a évidemment pour expression, suivant notre notation, $[\nu F]$; elle sera souvent aussi désignée par F_n.

Le théorème dit *de Gauss* sera dès lors exprimé par la formule suivante :

$$\int_V \nabla_1 F\,\delta\tau = \int_S [\nu F]\,\delta\sigma = \int_S F_n\,\delta\sigma. \tag{6}$$

Cette formule est également applicable aux champs s'étendant à l'infini moyennant l'adjonction au système de surfaces S d'une sphère de centre déterminé et de rayon croissant indéfiniment. Pour les champs que nous aurons à considérer, l'intégrale relative à cette sphère aura une valeur nulle et il n'en sera pas question.

On emploiera, en plus de la formule (6), trois autres formules, dont la démonstration consiste uniquement en développements de calcul (ces développements s'effectuent avec une extrême simplicité en quaternions). Ces formules sont les suivantes :

$$\nabla_1(UF) = U\nabla_1 F + [F\nabla U] \qquad \text{(U, fonction numérique)}, \tag{7}$$

$$\nabla[FF'] = \frac{dF}{d\mu}(F') + \frac{dF'}{d\mu}(F) + \mathfrak{V}(F\nabla_2 F') + \mathfrak{V}(F'\nabla_2 F), \tag{8}$$

$$\nabla_1 \mathfrak{V}(FF') = [F'\nabla_2 F] - [F\nabla_2 F'], \tag{9}$$

$$\nabla_2 \mathfrak{V}(FF') = \frac{dF}{d\mu}(F') - \frac{dF'}{d\mu}(F) + F\nabla_1 F' - F'\nabla_1 F. \tag{10}$$

III. — Propriétés cinématiques.

On considère un fluide parfait (sans viscosité) incompressible, dans lequel peuvent baigner des corps mobiles et qui occupe un espace limité par des parois mobiles ou s'étendant à l'infini, mais dans ce dernier cas avec la condition que le fluide est *au repos à l'infini*. Le fluide est soumis à des forces extérieures qui s'exercent sur les éléments de volume et qui admettent une fonction potentielle.

Le mouvement d'un tel fluide réalise les conditions suivantes :

1° Toute particule du fluide qui se trouve, à un instant déterminé, en contact avec les parois conserve cette propriété, ce qui s'exprime analytiquement par l'égalité à tout instant des composantes normales aux parois des vitesses de la particule du fluide et de la particule de la paroi;

2° L'accélération aux divers points du fluide admet une fonction potentielle, propriété qui se traduit par les suivantes (propriétés d'Helmholtz) : les modules de circulation relatifs à la vitesse du fluide restent constants; un filet tourbillonnaire reste constitué par les mêmes particules (par suite possède une individualité matérielle) et conserve en outre la même intensité.

Le mouvement du fluide est dès lors déterminé par les données suivantes :

Mouvement des parois;

Valeurs des modules de circulation à un instant déterminé;

Rotation élémentaire aux divers points du fluide à un instant déterminé.

Le mouvement des parois déterminera à tout instant les composantes normales de la vitesse du fluide; les valeurs de ces composantes et des modules de circulation complétées par la rotation élémentaire permettront, d'après la proposition rappelée dans le paragraphe précédent, de déterminer le champ de la vitesse à un instant déterminé. On pourra dès lors déterminer la position des filets tourbillonnaires à l'instant suivant, et, par suite, les modules de circulation restant d'ailleurs constants, on aura pour cet instant des données de même nature que pour l'instant initial. Le mouvement du fluide est donc bien déterminé.

Supposons que la position des parois qui limitent le fluide soit déterminée par les valeurs de r paramètres $q_1, q_2, \ldots, q_r$, de façon que les parois laissent toujours au fluide le même volume. Dans ces conditions, la présence du fluide n'impose aucune condition aux paramètres $q_1, q_2, \ldots, q_r$. Soit $q'_1, q'_2, \ldots, q'_r$ les dérivées des paramètres par rapport au temps t.

L'on sait que la vitesse v en tout point du fluide peut être décomposée en deux autres, qui se déterminent séparément, savoir : une composante v_0 déterminée en fonction de la distribution de la rotation élémentaire, des modules de circulation et de la position des parois, c'est-à-dire des paramètres $q_1, q_2, \ldots, q_r$, et une composante v_1 déterminée en fonction de la position des parois et des composantes normales des vitesses des divers points de ces parois. La grandeur de cette dernière croît proportionnellement à ces composantes normales quand celles-ci sont multipliées par un même nombre; elle s'exprime donc, ainsi que le potentiel dont elle dérive, par une fonction linéaire homogène des dérivées $q'_1, q'_2, \ldots, q'_r$. On posera

$$(1)\qquad v = v_0 + v_1 = A_0 + \Sigma A_i q'_i \qquad (A_i = \nabla\varphi_i),$$

$A_1, A_2, \ldots, A_r$ étant des vecteurs fonctions de point et dérivant de fonctions harmoniques.

Les formules (1) expriment les liaisons du fluide et des parois. On reconnaît facilement que, même dans le cas où le mouvement est irrotationnel et acyclique, c'est-à-dire où v_0 est nul, les positions des particules fluides ne sont pas déterminées en fonction des paramètres. Il faudrait pour cela que l'on ait constamment et en tout point

$$\frac{\partial A_i}{\partial q_j} + \frac{\partial A_i}{\partial \mu}(A_j) = \frac{\partial A_j}{\partial q_i} + \frac{\partial A_j}{\partial \mu}(A_i).$$

Ainsi à tout *mouvement* des parois correspond un et un seul mouvement irrotationnel et acyclique du fluide; mais il ne s'ensuit pas que la *position* des parois détermine celle des diverses particules du fluide, autrement dit, que les positions de ces particules soient des fonctions des paramètres q. En général, au contraire, lorsque les parois reviennent occuper une même position après avoir accompli un mouvement, il n'en est pas de même pour les particules fluides. A ne considérer que les mouvements irrotationnels et acycliques du fluide, celui-ci se comporte, vis-à-vis des paramètres q, comme un système *anholonome*.

Un déplacement virtuel des parois déterminé par les accroissements $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_r$ des paramètres est compatible avec une infinité de déplacements virtuels du fluide, parmi lesquels se trouve le déplacement irrotationnel et acyclique

$$\delta\mu = \Sigma A_i \delta q_i. \tag{2}$$

Nous avons à établir un certain nombre de formules, qui seront utilisées dans la suite.

En désignant par ψ le potentiel d'où dérive v_1 et en appliquant les formules II (6) et (7) au vecteur ψv_0, en observant que les composantes de v_0 normales aux parois sont nulles, on a

$$\int_V [v_0 v_1] \delta\tau = \int_S \psi v_{0n} \delta\sigma = 0. \tag{3}$$

La formule (3) résulte uniquement du double fait que v_1 dérive d'un potentiel et que v_0 donne lieu, aux divers points des parois, à des composantes normales nulles. On a donc de même :

$$\int_V [v_0 A_i] \delta\tau = 0 \tag{4}$$

et également

$$\int_V [v_0 A'_{iq}] \delta\tau = 0, \tag{5}$$

car le vecteur A'_{iq} dérive d'un potentiel, la dérivation par rapport à q étant évidemment commutative avec les opérations de dérivation géométrique.

Si l'on désigne par T la force vive du fluide, on a

$$T = \tfrac{1}{2}\rho \int_V [v_0^2] \delta\tau + \rho \int_V [v_0 v_1] \delta\tau + \tfrac{1}{2}\rho \int_V [v_1^2] \delta\tau,$$

et, en raison de (3),

$$(6)\qquad T = \tfrac{1}{2}\rho\int_V |v_0^2|\,\delta\tau + \tfrac{1}{2}\rho\int_V |v_1^2|\,\delta\tau = T_0 + T_1,$$

en désignant par T_0 la valeur de la force vive due à v_0, c'est-à-dire de celle qui correspond à $v_1 = 0$, et par T_1 la valeur de la force vive due à v_1.

Avant de déterminer de quelle manière varient T_0 et T_1 avec les divers éléments dont ces expressions dépendent, il est nécessaire d'établir une formule générale.

$\psi(q_1, q_2, \ldots, q_r, \mu)$ étant une fonction des paramètres et de μ, l'intégrale $\Psi = \int_V \psi\,\delta\tau$ ne dépend plus de μ et est uniquement fonction des paramètres. L'accroissement $\frac{\partial\Psi}{\partial q_i}\delta q_i$ de Ψ est égal à la somme des accroissements relatifs à tous les éléments fluides, de sorte que l'on a

$$(7)\qquad \frac{\partial\Psi}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i}\int_V \psi\,\delta\tau = \int_V \psi'_{q_i}\,\delta\tau + \int_V \frac{\partial\psi}{\partial\mu}(A_i)\,\delta\tau.$$

Cette formule suppose toutefois que ψ est une fonction uniforme dans tout l'espace occupé par le fluide; dans le cas contraire, il serait nécessaire d'ajouter au second membre un terme relatif à la variation brusque que subirait ψ pour certaines particules du fluide. La formule (7) ne devra donc être appliquée qu'à des fonctions uniformes, numériques ou vectorielles d'ailleurs.

La formule (7) va nous permettre d'exprimer la dérivée de T par rapport au temps. On a

$$(8)\qquad \frac{dT_1}{dt} = \sum \frac{\partial T_1}{\partial q'_i} q''_i + \sum \frac{\partial T_1}{\partial q_i} q'_i.$$

On sait que l'on peut mettre le second membre de cette formule sous une autre forme. On a, en effet,

$$\sum \frac{\partial T_1}{\partial q'_i} q''_i = \frac{d}{dt}\left(\sum \frac{\partial T_1}{\partial q'_i} q'_i\right) - \sum\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_1}{\partial q'_i}\right) q'_i\right],$$

et, en outre, T_1 étant une fonction homogène quadratique des dérivées

$$\sum \frac{\partial T_1}{\partial q'_i} q'_i = 2T_1.$$

De ces deux relations combinées avec (8) résulte

$$\frac{dT_1}{dt} = \sum \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_1}{\partial q'_i} \right) q'_i - \frac{\partial T_1}{\partial q_i} q'_i \right],$$

formule qui, en posant,

$$(9) \qquad P_{1i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T_1}{\partial q'_i} - \frac{\partial T_1}{\partial q_i},$$

peut évidemment s'écrire

$$(10) \qquad dT_1 = \Sigma P_{1i}\, dq_i.$$

On a enfin, dans le cas qui nous occupe,

$$(11) \qquad \frac{\partial T_1}{\partial q'} = \frac{\partial T}{\partial q'} = \rho \int_V [v_1 A] \delta\tau.$$

Nous allons démontrer la formule

$$(12) \qquad \frac{\partial T_1}{\partial q} = \rho \int_V [v_1 \Sigma A'_{q_i} q'_i] \delta\tau + \rho \int_V \left[v_1 \frac{\partial A}{\partial \mu} (v_1) \right] \delta\tau.$$

Cette formule correspond à la propriété qui permet de déduire les équations de Lagrange de l'équation qui exprime les deux principes combinés des vitesses virtuelles et de d'Alembert. Dans le cas actuel, les paramètres q ne sont pas ceux du système dont la force vive T_1 est en jeu. Mais la vitesse v_1 d'un point de ce système a une expression de la même forme que si la position de ce point était effectivement déterminée par les valeurs des paramètres, avec la différence que les coefficients de $q'_1, q'_2, \ldots, q'_r$ ne sont pas les dérivées partielles d'une même fonction de $q_1, q_2, \ldots, q_r$. On sait que cette circonstance caractérise le cas des systèmes *anholonomes* et qu'elle ôte toute validité au fondement de la transformation de Lagrange. C'est donc sur des circonstances particulières au cas traité que doit être basée la démonstration de la formule (12).

On a, en appliquant la formule (7) à la fonction T_1,

$$\begin{aligned}\frac{\partial T_1}{\partial q} &= \rho\int_V \left[v_1 \frac{\partial v_1}{\partial q}\right]\delta\tau + \rho\int_V \left[v_1 \frac{\partial v_1}{\partial \mu}(A)\right]\delta\tau \\ &= \rho\int_V [v_1 \Sigma A'_{iq} q'_i]\delta\tau + \rho\int_V \left[v_1 \sum \frac{\partial A_i}{\partial \mu}(A) q'_i\right]\delta\tau.\end{aligned}$$

Il suffit donc de prouver l'égalité

$$\int_V [v_1 A'_{q_i}]\delta\tau + \int_V \left[v_1 \frac{\partial A}{\partial \mu}(A_i)\right]\delta\tau = \int_V [v_1 A'_{iq}]\delta\tau + \int_V \left[v_1 \frac{\partial A_i}{\partial \mu}(A)\right]\delta\tau.$$

Les vecteurs A'_{q_i} et A'_{iq} ayant, comme les vecteurs A et A_i dont ils sont les dérivées, une distribution solénoïdale, les formules II (6) et (7) donnent

$$\left.\begin{aligned}\int_S \psi[\nu A'_{q_i}]\delta\sigma &= \int_V [v_1 A'_{q_i}]\delta\tau, \\ \int_S \psi[\nu A'_{iq}]\delta\sigma &= \int_V [v_1 A'_{iq}]\delta\tau,\end{aligned}\right. \qquad (v_1 = \nabla\psi).$$

Le vecteur

$$\frac{\partial A}{\partial \mu}(A_i) - \frac{\partial A_i}{\partial \mu}(A)$$

a également une distribution solénoïdale, car il représente la rotation élémentaire du champ déterminé par le vecteur $\mathfrak{V}(AA_i)$. On a, par suite,

$$\begin{aligned}&\int_S \psi\left[\nu \frac{\partial A}{\partial \mu}(A_i)\right]\delta\tau - \int_S \psi\left[\nu \frac{\partial A_i}{\partial \mu}(A)\right]\delta\tau \\ &\quad = \int_V \left[v_1 \frac{\partial A}{\partial \mu}(A_i)\right]\delta\tau - \int_V \left[v_1 \frac{\partial A_i}{\partial \mu}(A)\right]\delta\tau.\end{aligned}$$

L'égalité à démontrer devient donc

$$\int_S \psi[\nu A'_{q_i}]\delta\sigma + \int_S \psi\left[\nu \frac{\partial A}{\partial \mu}(A_i)\right]\delta\sigma = \int_S \psi[\nu A'_{iq}]\delta\sigma + \int_S \psi\left[\nu \frac{\partial A_i}{\partial \mu}(A)\right]\delta\sigma,$$

et, par suite, il suffit de prouver que l'on a en tout point situé sur la surface des parois

$$\left[\nu A'_{q_i}\right] + \left[\nu \frac{\partial A}{\partial \mu}(A_i)\right] = \left[\nu A'_{iq}\right] + \left[\nu \frac{\partial A_i}{\partial \mu}(A)\right].$$

Une particule fluide qui se trouve à un instant déterminé en contact avec les parois conserve cette propriété dans tous les mouvements ultérieurs du fluide qui ont été définis comme étant compatibles avec ceux des parois et, en particulier, avec ceux de ces mouvements qui sont irrotationnels et acycliques. Ceux-ci sont définis par la formule (2), de sorte qu'à tout mouvement des parois correspond un et un seul mouvement irrotationnel et acyclique du fluide. Par exemple, à un déplacement virtuel de ces parois dans lequel les accroissements $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_r$ sont nuls à l'exception d'un seul δq correspond un déplacement irrotationnel et acyclique du fluide déterminé par

$$\delta\mu = A\,\delta q,$$

et l'accroissement correspondant d'une fonction φ considérée comme afférente à une particule déterminée du fluide primitivement située au point μ a pour expression

$$\varphi'_q\,\delta q + \frac{\partial \varphi}{\partial \mu}(A)\,\delta q.$$

Soit

$$f(\mu, q_1, q_2, \ldots, q_r) = 0$$

l'équation d'une surface formée par les parois ou par une portion de celles-ci. On peut, d'après ce qui précède, dériver cette équation par rapport à q en y considérant μ comme la position d'une particule déterminée du fluide en contact avec la paroi. On peut également la dériver par rapport à q_i dans les mêmes conditions. On obtient ainsi les deux relations

$$\left[A \nabla f\right] + f'_q = 0, \qquad \left[A_i \nabla f\right] + f'_{q_i} = 0.$$

On peut encore différentier ces deux nouvelles relations, la première par rapport à q_i, la seconde par rapport à q, toujours dans les mêmes conditions, c'est-à-dire en considérant les divers éléments qui y figurent comme afférents à une particule fluide déterminée dont le mouvement suit celui des parois de la manière définie plus haut. En tenant compte de la commutativité des opérations de dérivation par rapport à q avec les opérations de dérivation géométrique exprimées par ∇, on obtient les deux nouvelles relations

$$[\nabla f\,A'_{qi}]+\left[\nabla f\frac{\partial A}{\partial\mu}(A_i)\right]+[A\,\nabla f'_{i}]+\left[A\frac{\partial\nabla f}{\partial\mu}(A_i)\right]+f''_{qqi}+[A_i\nabla f'_q]=0,$$

$$[\nabla f\,A'_{iq}]+\left[\nabla f\frac{\partial A_i}{\partial\mu}(A)\right]+[A_i\nabla f'_q]+\left[A_i\frac{\partial\nabla f}{\partial\mu}(A)\right]+f''_{qiq}+[A\,\nabla f'_{qi}]=0.$$

En les retranchant membre à membre et observant que l'on a

$$f''_{qqi}=f''_{qiq},\qquad \left[A\frac{\partial\nabla f}{\partial\mu}(A_i)\right]=\left[A_i\frac{\partial\nabla f}{\partial\mu}(A)\right],$$

il vient

$$[\nabla f\,A'_{qi}]+\left[\nabla f\frac{\partial A}{\partial\mu}(A_i)\right]=[\nabla f\,A'_{iq}]+\left[\nabla f\frac{\partial A_i}{\partial\mu}(A)\right].$$

On peut évidemment remplacer dans cette relation ∇f par v, et l'on obtient alors la relation qu'il s'agissait de démontrer. La formule (12) est donc acquise.

Exprimons maintenant $\frac{dT_0}{dt}$. On a

$$\begin{aligned}\frac{dT_0}{dt}&=\rho\int_V\left[v_0\frac{dv_0}{dt}\right]\delta\tau=\rho\int_V\left[v_0\frac{dv}{dt}\right]\delta\tau-\rho\int_V\left[{}_0\frac{dv_1}{dt}\right]\delta\tau\\&=\rho\int_V\left[v_0\frac{dv}{dt}\right]\delta\tau-\rho\int_V\left[v_0\frac{\partial v_1}{\partial t}\right]\delta\tau-\rho\int_V\left[v_0\frac{\partial v_1}{\partial\mu}(v_1)\right]\delta\tau\\&\qquad-\rho\int_V\left[v_0\frac{\partial v_1}{\partial\mu}(v_0)\right]\delta\tau.\end{aligned}$$

On a vu que, dans les fluides parfaits, l'accélération $\frac{dv}{dt}$ dérive d'un potentiel. Il en est évidemment de même de la dérivée $\frac{\partial v_1}{\partial t}$; enfin le vecteur $\frac{\partial v_1}{\partial\mu}(v_1)$ dérive, d'après la formule II (8), de la fonction $\frac{1}{2}[v_1^2]$.

Par suite, d'après une propriété plusieurs fois appliquée, les trois premiers termes du dernier membre sont nuls, et l'on a

$$\frac{dT_0}{dt} = -\rho \int_V \left[v_0 \frac{\partial v_1}{\partial \mu}(v_0) \right] \delta\tau.$$

On peut mettre le second membre de cette formule sous une autre forme. On a en effet, d'après la formule II (8),

$$\nabla [v_0 v_1] = \frac{\partial v_0}{\partial \mu}(v_1) + \frac{\partial v_1}{\partial \mu}(v_0) - \mathfrak{V}(2 w v_1), \qquad \left(\text{où } w = \frac{1}{2}\nabla_2 v\right)$$

et, par suite, par l'application de la formule II (7),

$$\nabla_1 \{ v_0 [v_0 v_1] \} = \left[v_0 \frac{\partial v_0}{\partial \mu}(v_1) \right] + \left[v_0 \frac{\partial v_1}{\partial \mu}(v_0) \right] - [v_0\, 2 w v_1],$$

et enfin, par l'application de la formule de Gauss,

$$(a) \qquad \int_V \left[v_0 \frac{\partial v_0}{\partial \mu}(v_1) \right] \delta\tau + \int_V \left[v_0 \frac{\partial v_1}{\partial \mu}(v_0) \right] \delta\tau = \int_V [v_0\, 2 w v_1] \delta\tau.$$

On a, d'autre part, par l'application de la formule II (10),

$$\frac{\partial v_0}{\partial \mu}(v_1) - \frac{\partial v_1}{\partial \mu}(v_0) = \nabla_2 \mathfrak{V}(v_0 v_1).$$

D'où, par l'application de la formule II (9),

$$\begin{aligned}\left[v_0 \frac{\partial v_0}{\partial \mu}(v_1) \right] - \left[v_0 \frac{\partial v_1}{\partial \mu}(v_0) \right] &= [v_0 \nabla_2 \mathfrak{V}(v_0 v_1)] \\ &= [v_0 v_1 \nabla_2 v_0] - \nabla_1 \{ \mathfrak{V}[v_0 \mathfrak{V}(v_0 v_1)] \} \\ &= [v_0 v_1\, 2 w] - \nabla_1 \{ v_0 [v_0 v_1] - v_1 [v_0^2] \}.\end{aligned}$$

D'où enfin, moyennant l'application de la formule de Gauss,

$$\left\{ \begin{aligned} &\int_V \left[v_0 \frac{\partial v_0}{\partial \mu}(v_1) \right] \delta\tau - \int_V \left[v_0 \frac{\partial v_1}{\partial \mu}(v_0) \right] \delta\tau \\ &\quad = \int_S v_{1n} [v_0^2] \delta\sigma - \int_V [v_0\, 2 w v_1] \delta\tau. \end{aligned} \right.$$

Les relations (a) et (b) sont réunies dans la suivante :

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} \int_V \left[v_0 \frac{\partial v_0}{\partial \mu}(v_1)\right]\delta\tau &= -\int_V \left[v_0 \frac{\partial v_1}{\partial \mu}(v_0)\right]\delta\tau + \int_V [v_0\, 2w\, v_1]\,\delta\tau \\ &= \frac{1}{2}\int_S v_{1n}[v_0^2]\,\delta\sigma. \end{aligned}\right.$$

Posons

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} P_{0i} &= -\rho\int_V \left[v_0 \frac{\partial A_i}{\partial \mu}(v_0)\right]\delta\tau \\ &= \rho\int_V \left[v_0 \frac{\partial v_0}{\partial \mu}(A_i)\right]\delta\tau - \rho\int_V [v_0\, 2w\, A_i]\,\delta\tau \\ &= \frac{1}{2}\rho\int_S A_{in}[v_0^2]\,\delta\sigma + \rho\int_V [A_i\, 2w\, v_0]\,\delta\tau. \end{aligned}\right.$$

Il vient

$$\frac{dT_0}{dt} = \Sigma P_{0i} q'_i,$$

formule qui peut évidemment s'écrire

$$(15)\qquad dT_0 = \Sigma P_{0i}\, dq_i.$$

On a donc, moyennant les formules (10) et (15),

$$(16)\qquad dT = dT_1 + dT_0 = \Sigma P_{1i}\, dq_i + \Sigma P_{0i}\, dq_i.$$

On voit que dT est nul lorsque les parois restent fixes, ce qui est conforme aux principes de la Mécanique, puisque le travail des forces exercées sur le fluide est nul dans ce cas. Lorsque le mouvement du fluide est irrotationnel, la force vive est uniquement fonction des paramètres et de leurs dérivées; T_0 est uniquement fonction de ces paramètres, et l'on a alors

$$P_{0i} = \frac{\partial T_0}{\partial q_i}.$$

Nous avons encore à établir une formule préliminaire. On a, par la voie qui a conduit aux formules (a) et (b), les relations

$$\int_V \left[v_0 \frac{\partial A}{\partial \mu}(v_1)\right] \delta\tau + \int_V \left[v_0 \frac{\partial v_1}{\partial \mu}(A)\right] \delta\tau = 0,$$

$$\int_V \left[v_0 \frac{\partial A}{\partial \mu}(v_1)\right] \delta\tau - \int_V \left[v_0 \frac{\partial v_1}{\partial \mu}(A)\right] \delta\tau$$
$$= \int_S v_{1n}[v_0 A] \delta\sigma - \int_S A_n[v_0 v_1] \delta\sigma - \int_V [A\, 2w\, v_1] \delta\tau.$$

Ces deux relations peuvent être réunies sous la forme suivante :

$$(17)\quad \left\{ \begin{aligned} 2\int_V \left[v_0 \frac{\partial A}{\partial \mu}(v_1)\right] \delta\tau &= \int_V \left[v_0 \frac{\partial A}{\partial \mu}(v_1)\right] \delta\tau - \int_V \left[v_0 \frac{\partial v_1}{\partial \mu}(A)\right] \delta\tau \\ &= \int_S \{v_{1n}[v_0 A] - A_n[v_0 v_1]\} \delta\sigma \\ &\quad - \int_V [A\, 2w\, v_1] \delta\tau. \end{aligned} \right.$$

Dans le cas où le mouvement est irrotationnel, le second membre de la formule précédente peut prendre une autre forme. Le champ déterminé par la vitesse v_0 ne dépend, dès lors, que des paramètres q, puisque les modules de circulation restent constants pendant le mouvement. On peut donc assigner une signification précise à l'expression v'_{0q}.

Cela posé, de la formule déjà utilisée,

$$\int_V [v_1 v_0] \delta\tau = 0,$$

on déduit, en dérivant par rapport à q,

$$\int_V [v_1 v'_{0q}] \delta\tau + \int_V \left[v_1 \frac{\partial v_0}{\partial \mu}(A)\right] \delta\tau + \int_V \left[v_0 \frac{\partial v_1}{\partial \mu}(A)\right] \delta\tau = 0.$$

On obtiendrait de même

$$\int_V [A \Sigma v'_{0q_i} q'_i] \delta\tau + \int_V \left[A \frac{\partial v_0}{\partial \mu}(v_1)\right] \delta\tau + \int_V \left[v_0 \frac{\partial A}{\partial \mu}(v_1)\right] \delta\tau = 0.$$

En retranchant ces deux relations membre à membre et observant que les seconds termes sont égaux entre eux, l'on obtient

$$\int_V \left[v_0 \frac{\partial A}{\partial \mu}(v_1)\right] \delta\tau - \int_V \left[v_0 \frac{\partial v_1}{\partial \mu}(A)\right] \delta\tau$$
$$= \int_V [v_1 v'_{0q}]\,\delta\tau - \int_V [A \Sigma v'_{0q_i} q'_i]\,\delta\tau.$$

Dans le cas qui nous occupe, le vecteur v_0 admet une fonction potentielle φ_0. On a donc

$$v'_{0q_i} = \nabla \varphi'_{0q_i}$$

et, par suite,

$$[v_1 v'_{0q}] = \frac{\partial \varphi'_{0q}}{\partial \mu}(v_1), \qquad [A \Sigma v'_{0q_i} q'_i] = \sum \left[\frac{\partial \varphi'_{0q_i}}{\partial \mu}(A) q'_i\right].$$

Posons

$$G_i = \int_V \varphi'_{0q_i}\,\delta\tau, \qquad G = \int_V \varphi'_{0q}\,\delta\tau.$$

On a, en appliquant la formule (7),

$$\sum \left(\frac{\partial G}{\partial q_i} - \frac{\partial G_i}{\partial q}\right) q'_i = \int_V \left[\frac{\partial \varphi'_{0q}}{\partial \mu}(v_1) - \sum \frac{\partial \varphi'_{0q_i}}{\partial \mu}(A)\right] q'_i\,\delta\tau.$$

On a donc enfin, pour l'expression du second membre de (17),

$$\int_V \left[\ _0 \frac{\partial A}{\partial \mu}(v_1)\right] \delta\tau - \int_V \left[v_0 \frac{\partial v_1}{\partial \mu}(A)\right] \delta\tau = \sum \left(\frac{\partial G}{\partial q_i} - \frac{\partial G_i}{\partial q}\right) q'_i.$$

IV. — Actions sur les parois.

L'effet d'un groupe de forces sur le mouvement d'un système matériel dépend uniquement de l'expression du travail de ces forces dans tout déplacement virtuel du système. Nous nous proposons de déterminer une expression du travail δL développé par les pressions exercées par un fluide parfait incompressible sur les parois qui le limitent dans tout déplacement virtuel de ces parois.

Le fluide d'une part et les parois de l'autre constituent deux systèmes matériels (S) et (S′) ayant entre eux des liaisons telles que le travail des forces qu'elles développent est nul dans tout déplacement de l'ensemble compatible avec ces liaisons. Le travail développé dans un déplacement quelconque de (S') par les forces exercées sur ce système en vertu de ses liaisons avec (S) est donc égal et de signe contraire au travail développé par les forces de liaison exercées sur (S) dans tout déplacement de S compatible avec le déplacement considéré de (S').

On est donc ramené à déterminer le travail des forces exercées par (S') sur (S) dans un déplacement virtuel de (S) compatible avec le déplacement virtuel considéré de (S'). Ce dernier travail, c'est-à-dire $-\delta L$, se détermine facilement en fonction du travail des forces extérieures qui s'exercent sur (S) et des éléments du mouvement de ce système. Si l'on désigne par δW le travail des forces extérieures et par δI le travail des forces d'inertie, l'équation générale de la Dynamique, appliquée à (S), s'écrit

$$\delta W - \delta L + \delta I = 0,$$

ou, en désignant par ρ la densité constante du fluide et par v sa vitesse (en grandeur et en direction) en un point quelconque μ,

$$\delta L = \delta W - \rho \int_V \left[\frac{dv}{dt} \delta\mu \right] \delta\tau. \tag{1}$$

Si la force extérieure ρF agissant sur un élément du fluide dérive d'une fonction des forces ρV, on a

$$\delta W = \rho \int_V [F \delta\mu] \delta\tau = \rho \int_V \delta V \delta\tau,$$

et, si l'on suppose la valeur de V déterminée en tout point de l'espace indépendamment de la position du fluide et des parois,

$$\delta W = \rho\, \delta \int_V V \delta\tau.$$

La variation qui figure au second membre est évidemment égale à la somme des éléments ajoutés à l'intégrale en raison du mouvement des parois. Le déplacement virtuel d'un point de la paroi et le déplacement virtuel du point du fluide en contact avec lui ont même composante normale; on a donc finalement

$$(2) \qquad \delta W = \rho\, \delta \int_V V\, \delta\tau = \rho \int_S V[\nu\, \delta\mu]\, \delta\sigma.$$

Pour exprimer le second terme de δL, l'on supposera, comme dans le paragraphe précédent, que la position des parois est déterminée par les valeurs de r paramètres $q_1, q_2, \ldots, q_r$, et l'on a vu qu'un déplacement virtuel de ces parois déterminé par les accroissements $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_r$ est compatible avec une infinité de déplacements du fluide parmi lesquels se trouve celui qui est déterminé par

$$\delta\mu = \Sigma A_i\, \delta q_i.$$

On a donc

$$\rho \int_V \left[\frac{dv}{dt}\, \delta\mu\right] \delta\tau = \rho \int_V \left[\frac{dv}{dt}\, \Sigma A_i\, \delta q_i\right] \delta\tau = \sum \rho \int_V \left[\frac{dv}{dt} A_i\right] \delta\tau\, \delta q_i$$

et, par suite, en posant

$$Q_i = \rho \int_V \left[\frac{dv}{dt} A_i\right] \delta\tau,$$

on écrira

$$(3) \qquad \delta L = \delta W - \Sigma Q_i\, \delta q_i.$$

Nous ne nous occuperons pas davantage des forces extérieures et nous nous attacherons, dans ce qui va suivre, à transformer l'expression du dernier terme de la formule (3).

La formule qui donne l'expression d'un coefficient Q est de la même forme que celles dont on déduit les équations de Lagrange relatives à un système matériel dont la position est déterminée par r paramètres $q_1, q_2, \ldots, q_r$. Mais, dans le cas actuel, le système matériel dont les éléments dynamiques figurent dans la formule (3) n'admet pas pour paramètres $q_1, q_2, \ldots, q_r$. La position de ce système dépend de ces paramètres, mais n'est pas déterminée par eux. On doit donc s'attendre à ne pas pouvoir appliquer *de plano* les transformations de Lagrange. Toutefois, une première transformation est évidemment possible. On a en effet

$$\rho \int_V [v A] \delta\tau = \rho \int_V \left[v \frac{\partial v}{\partial q'} \right] = \frac{\partial T}{\partial q'}$$

et, par suite,

$$(4) \qquad Q = \rho \int_V \left[\frac{dv}{dt} A \right] \delta\tau = \frac{d}{dt} \frac{dT}{\partial q'} - \rho \int_V \left[v \frac{dA}{dt} \right] \delta\tau.$$

Il s'agit maintenant de transformer le dernier terme. On a

$$(5) \qquad \frac{dA}{dt} = \Sigma A'_{q_i} q'_i + \frac{\partial A}{\partial \mu}(v_1) + \frac{\partial A}{\partial \mu}(v_0).$$

D'où

$$\begin{aligned} \int_V \left[v \frac{dA}{dt} \right] \delta\tau = & \int_V [v_1 \Sigma A'_{q_i} q'_i] \delta\tau + \int_V \left[v_1 \frac{\partial A}{\partial \mu}(v_1) \right] \delta\tau \\ & + \int_V [v_0 \Sigma A'_{q_i} q'_i] \delta\tau + \int_V \left[v_0 \frac{\partial A}{\partial \mu}(v_1) \right] \delta\tau \\ & + \int_V \left[v_0 \frac{\partial A}{\partial \mu}(v_0) \delta\tau \right] + \int_V \left[v_1 \frac{\partial A}{\partial \mu}(v_0) \right] \delta\tau. \end{aligned}$$

Le premier terme de la seconde ligne est nul en vertu de la formule III (5); on a de plus, le vecteur A admettant une fonction potentielle,

$$\left[v_0 \frac{\partial A}{\partial \mu}(v_1) \right] = \left[v_1 \frac{\partial A}{\partial \mu}(v_0) \right].$$

En tenant compte de ces deux relations, il vient

$$\begin{aligned} \int_V \left[v \frac{dA}{dt} \right] \delta\tau = & \int_V [v_1 \Sigma A'_{q_i} q'_i] \delta\tau + \int_V \left[v_1 \frac{\partial A}{\partial \mu}(v_1) \right] \delta\tau \\ & + 2 \int_V \left[v_0 \frac{\partial A}{\partial \mu}(v_1) \right] \delta\tau + \int_V \left[v_0 \frac{\partial A}{\partial \mu}(v_0) \right] \delta\tau. \end{aligned}$$

On a, par suite, moyennant les formules III (12), (14) et (17),

$$\begin{aligned} \rho \int_V \left[v \frac{dA}{dt} \right] \delta\tau = \frac{\partial T_1}{\partial q} & + \rho \int_S \{ v_{1n} [v_0 A] - A_n [v_0 v_1] \} \delta\sigma \\ & - \rho \int_V [A \, 2 w v_1] \delta\tau - P_0. \end{aligned}$$

La formule (4) devient donc, moyennant la formule III (9),

$$(6)\quad Q = P_1 + P_0 + \rho\int_S \{ A_n[v_0 v_1] - v_{1n}[v_0 A] \} \delta\sigma + \rho\int_V [A\, 2w v_1]\,\delta\tau,$$

où l'on a

$$P_1 = \frac{d}{dt}\frac{\partial T_1}{\partial q'} - \frac{\partial T_1}{\partial q},$$

$$P_0 = \frac{1}{2}\rho\int_S A_n[v_0]^2\,\delta\tau + \rho\int_V [A\, 2w v_0]\,\delta\tau.$$

Dans le cas où le mouvement est irrotationnel, on a vu que T_0 est uniquement fonction des paramètres $q_1, q_2, \ldots, q_r$, les modules de circulation restant constants. On a alors

$$w = 0, \qquad P_0 = \frac{\partial T_0}{\partial q},$$

et la formule (6) devient

$$Q = \frac{d}{dt}\frac{\partial T_1}{\partial q'} - \frac{\partial T_1}{\partial q} + \rho\int_S \{ A_n[v_0 v_1] - v_{1n}[v_0 A] \} \delta\sigma + \frac{\partial T_0}{\partial q},$$

ou enfin, eu égard aux formules établies à la fin du paragraphe III,

$$Q = \frac{d}{dt}\frac{\partial T_1}{\partial q'} - \frac{\partial T_1}{\partial q} + \rho\sum\left(\frac{\partial G}{\partial q_i} - \frac{\partial G_i}{\partial q}\right) q'_i + \frac{\partial T_0}{\partial q},$$

où l'on a posé

$$G = \int_V \varphi'_{0q}\,\delta\tau, \qquad G_i = \int_V \varphi'_{0q_i}\,\delta\tau,$$

φ_0 étant la fonction potentielle du champ irrotationnel (cyclique) déterminé par la vitesse v_0.

Sous cette forme, l'expression de Q est identique à celle qui a été donnée par Carl Neumann.

On peut vérifier que l'expression (6) de Q satisfait au théorème des forces vives. On a, d'après la formule (3),

$$dL = dW - \Sigma Q_i\, dq_i.$$

D'autre part, le théorème des forces vives appliqué au fluide s'exprime par la formule

$$dW - dL = dT$$

ou

$$\Sigma Q_i q'_i = \frac{dT}{dt}.$$

On a, d'après la formule III (16),

$$\Sigma P_{1i} q'_i + \Sigma P_{0i} q'_i = \frac{dT}{dt}.$$

On a d'ailleurs

$$\sum \left\{ \int_S A_{in} [v_0 v_1] \delta\sigma q'_i \right\} - \sum \left\{ \int_S v_{1n} [v_0 A_i] \delta\sigma q'_i \right\}$$
$$= \int_S v_{1n} [v_0 v_1] \delta\sigma - \int_S v_{1n} [v_0 v_1] \delta\sigma = 0$$

et enfin

$$\sum \left\{ \int_V [A_i \, 2 w v_1] \delta\tau q'_i \right\} = \int_V [v_1 \, 2 w v_1] \delta\tau = 0.$$

Formulaire.

II.

$$(1) \quad \begin{cases} [FF'] = XX' + YY' + ZZ', \\ \mathfrak{V}(FF') = (YZ' - ZY', ZX' - XZ', XY' - YX'), \\ [FF'F''] = [F\mathfrak{V}(F'F'')] = [\mathfrak{V}(FF')F''] = \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ X' & Y' & Z' \\ X'' & Y'' & Z'' \end{vmatrix}, \end{cases}$$

$$(2) \quad \frac{dF}{dq} = \left(\frac{dX}{dq}, \frac{dY}{dq}, \frac{dZ}{dq} \right),$$

$$(3) \quad dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz = \frac{dF}{d\mu}(d\mu),$$

$$(4) \quad \begin{cases} \nabla_1 F = \dfrac{\partial X}{\partial x} + \dfrac{\partial Y}{\partial y} + \dfrac{\partial Z}{\partial z}, \\ \nabla_2 F = \left(\dfrac{\partial Z}{\partial y} - \dfrac{\partial Y}{\partial z}, \dfrac{\partial X}{\partial z} - \dfrac{\partial Z}{\partial x}, \dfrac{\partial Y}{\partial x} - \dfrac{\partial X}{\partial y} \right), \end{cases}$$

(5) $\nabla U = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right)$ (U, fonction numérique),

(6) $\int_V [\nabla_1 F]\,\delta\tau = \int_S [\nu F]\,\delta\sigma = \int_S F_n\,\delta\sigma,$

(7) $\nabla_1(UF) = U\nabla_1 F + [F\nabla U].$

(8) $\nabla[FF'] = \frac{dF}{d\mu}(F') + \frac{dF'}{d\mu}(F) + \mathfrak{V}(F\nabla_2 F') + \mathfrak{V}(F'\nabla_2 F),$

(9) $\nabla_1\mathfrak{V}(FF') = [F'\nabla_2 F] - [F\nabla_2 F'],$

(10) $\nabla_2\mathfrak{V}(FF') = \frac{dF}{d\mu}(F') - \frac{dF'}{d\mu}(F) + F\nabla_1 F' - F'\nabla_1 F.$

III.

(1) $v = v_0 + v_1 = A_0 + \Sigma A_i q'_i, \qquad A_i = \nabla\varphi_i,$

(2) $\delta\mu = \Sigma A_i\,\delta q_i,$

(3) $\int_V [v_0 v_1]\,\delta\tau = \int_S \psi\, v_{0n}\,\delta\sigma = 0,$

(4) $\int_V [v_0 A_i]\,\delta\tau = 0,$

(5) $\int_V [v_0 A'_{iq}]\,\delta\tau = 0,$

(6) $T = \frac{1}{2}\rho\int_V [v_0^2]\,\delta\tau + \frac{1}{2}\rho\int_V [v_1^2]\,\delta\tau = T_0 + T_1,$

(7) $\frac{\partial \Psi}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i}\int_V \psi\,\delta\tau = \int_V \psi'_q\,\delta\tau + \int_V \frac{\partial\psi}{\partial\mu}(A_i)\,\delta\tau,$

(8) $\frac{dT_1}{dt} = \sum \frac{\partial T_1}{\partial q'_i} q''_i + \sum \frac{\partial T_1}{\partial q_i} q'_i,$

(9) $P_{1i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T_1}{\partial q'_i} - \frac{\partial T_1}{\partial q_i},$

(10) $dT_1 = \Sigma P_{1i}\,dq_i,$

(11) $\frac{\partial T_1}{\partial q'} = \frac{\partial T}{\partial q'} = \rho\int_V [v_1 A]\,\delta\tau,$

$$(12)\qquad \frac{\partial T_1}{\partial q} = \rho\int_V [v_1 \Sigma A'_{q_i} q'_i]\,\delta\tau + \rho\int_V \left[v_1 \frac{\partial A}{\partial \mu}(v_1)\right]\delta\tau,$$

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned} &\int_V \left[v_0 \frac{\partial v_0}{\partial \mu}(v_1)\right]\delta\tau = -\int_V \left[v_0 \frac{\partial v_1}{\partial \mu}(v_0)\right]\delta\tau + \int_V [v_0\, 2 w v_1]\,\delta\tau \\ &\qquad = \frac{1}{2}\int_S v_{1n}[v_0^2]\,\delta\sigma, \qquad \left(w = \frac{1}{2}\nabla_2 v\right)\end{aligned}\right.$$

$$(14)\qquad \left\{\begin{aligned} P_{0i} &= -\rho\int_V \left[v_0 \frac{\partial A_i}{\partial \mu}(v_0)\right]\delta\tau \\ &= \rho\int_V \left[v_0 \frac{\partial v_0}{\partial \mu}(A_i)\right]\delta\tau - \rho\int_V [v_0\, 2 w A_i]\,\delta\tau \\ &= \frac{1}{2}\rho\int_S A_{in}[v_0^2]\,\delta\sigma + \rho\int_V [A_i\, 2 w v_0]\,\delta\tau,\end{aligned}\right.$$

$$(15)\qquad dT_0 = \Sigma P_{0i}\, dq_i,$$

$$(16)\qquad dT = dT_1 + dT_0 = \Sigma P_{1i}\, dq_i + \Sigma P_{0i}\, dq_i,$$

$$(17)\qquad \left\{\begin{aligned} &2\int_V \left[v_0 \frac{\partial A}{\partial \mu}(v_1)\right]\delta\tau \\ &= \int_V \left[v_0 \frac{\partial A}{\partial \mu}(v_1)\right]\delta\tau - \int_V \left[v_0 \frac{\partial v_1}{\partial \mu}(A)\right]\delta\tau \\ &= \int_S \{v_{1n}[v_0 A] - A_n[v_0 v_1]\}\,\delta\sigma - \int_V [A\, 2 w v_1]\,\delta\tau.\end{aligned}\right.$$

IV.

$$(1)\qquad \delta L = \delta W - \rho\int_V \left[\frac{dv}{dt}\delta\mu\right]\delta\tau,$$

$$(2)\qquad \delta W = \rho\,\delta\int_V V\,\delta\tau = \rho\int_S V[\nu\,\delta\mu]\,\delta\sigma,$$

$$(3)\qquad \delta L = \delta W - \Sigma Q_i\,\delta q_i,$$

$$(4)\qquad Q = \rho\int_V \left[\frac{dv}{dt} A\right]\delta\tau = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q'} - \rho\int_V \left[v \frac{dA}{dt}\right]\delta\tau,$$

$$(5)\qquad \frac{dA}{dt} = \Sigma A'_{q_i} q'_i + \frac{\partial A}{\partial \mu}(v_1) + \frac{\partial A}{\partial \mu}(v_0),$$

$$(6)\qquad Q = P_1 + P_0 + \rho\int_S \{A_n[v_0 v_1] - v_{1n}[v_0 A]\}\,\delta\sigma + \rho\int_V [A\, 2 w v_1]\,\delta\sigma.$$